Bulletin
de la SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

CYCLES GÉOMÉTRIQUES RÉGULIERS

Guillaume Bulteau

Tome 143
Fascicule 4

2015

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE
Publié avec le concours du Centre national de la recherche scientifique
pages 727-761

Le *Bulletin de la Société Mathématique de France* est un périodique trimestriel de la Société Mathématique de France.

Fascicule 4, tome 143, décembre 2015

Diffusion

Maison de la SMF
Case 916 - Luminy
13288 Marseille Cedex 9
France
smf@smf.univ-mrs.fr

Hindustan Book Agency
O-131, The Shopping Mall
Arjun Marg, DLF Phase 1
Gurgaon 122002, Haryana
Inde

AMS
P.O. Box 6248
Providence RI 02940
USA
www.ams.org

Tarifs

Vente au numéro : 43 € ($ 64)
Abonnement Europe : 176 €, hors Europe : 193 € ($ 290)
Des conditions spéciales sont accordées aux membres de la SMF.

Secrétariat : Nathalie Christiaën

Bulletin de la Société Mathématique de France
Société Mathématique de France
Institut Henri Poincaré, 11, rue Pierre et Marie Curie
75231 Paris Cedex 05, France
Tél : (33) 01 44 27 67 99 • Fax : (33) 01 40 46 90 96
revues@smf.ens.fr • http://smf.emath.fr/

ISSN 0037-9484

Directeur de la publication : Marc PEIGNÉ

Bull. Soc. math. France
143 (4), 2015, p. 727–761

CYCLES GÉOMÉTRIQUES RÉGULIERS

PAR GUILLAUME BULTEAU

RÉSUMÉ. — Soit π un groupe de présentation finie. Pour une classe d'homologie h non nulle dans $H_n(\pi;\mathbb{Z})$, Gromov a énoncé (dans [10], §6) l'existence de cycles géométriques qui représentent h, de volume systolique relatif aussi proche que l'on veut de celui de h, pour lesquels on dispose d'un contrôle sur le volume des boules dont le rayon est plus petit qu'une fraction de la systole relative du cycle. L'objectif de cette note est d'expliquer ce résultat et d'en présenter une démonstration complète.

ABSTRACT (*Regular geometric cycles*). — Let π be a finitely presented group. If h is a non trivial homology class in $H_n(\pi;\mathbb{Z})$, a theorem of Gromov (see [10], §6) asserts the existence of regular geometric cycles which represent h, whose relative systolic volume is as close as desired to the systolic volume of h, in which we can control the volume of balls of radius less than half of the cycle's relative systol. The aim of this note is to explain and provide a complete proof of this result.

Texte reçu le 31 juillet 2012, révisé le 22 juillet 2013, accepté le 22 juillet 2013.

GUILLAUME BULTEAU, Institut Montpelliérain Alexander Grothendieck (Imag), UMR 5149 CNRS - Université Montpellier, Case courrier 051, 34095 Montpellier cedex 5 - France •
E-mail : `guillaume.bulteau@math.univ-montp2.fr`

Classification mathématique par sujets (2000). — 53C23.

Mots clefs. — Cycles géométriques, systole, volume systolique, espace d'Eilenberg-McLane, complexes cubique.s.

Je remercie Florent Balacheff, Jacques Lafontaine et Stéphane Sabourau pour toutes les remarques qu'ils ont pu faire sur les premières versions de ce texte, ainsi qu'Ivan Babenko pour les nombreuses discussions sur ce sujet. Je remercie également le rapporteur anonyme pour ses commentaires, qui ont permis d'améliorer grandement certaines parties de ce texte. Ce travail est financé par l'ANR Finsler.

1. Introduction

1.1. Le cadre et le but. — Dans la suite π désignera un groupe de présentation finie et $n \geqslant 2$ est un entier. Considérons l'espace d'Eilenberg-MacLane $K(\pi, 1)$ et prenons une classe d'homologie h dans $H_n(\pi; Z)$ qui, par définition, est le groupe d'homologie $H_n(K(\pi, 1); \mathbb{Z})$. Rappelons que $K(\pi, 1)$ est un CW-complexe connexe tel que $\pi_1(K(\pi, 1)) = \pi$ et $\pi_i(K(\pi, 1)) = 0$ pour tout $i \geqslant 2$ entier. Un tel espace est unique à type d'homotopie près (voir [14]).

On appellera *cycle géométrique représentant* h un triplet (V, f, g) où

- V est une pseudo-variété orientable de dimension n ;
- $f : V \to K(\pi, 1)$ est un application continue telle que $f_*[V] = h$, $[V]$ étant la classe fondamentale de V et
$$f_* : H_n(V; \mathbb{Z}) \to H_n(\pi; \mathbb{Z})$$
étant l'application induite par f au niveau des groupes d'homologie ;
- g une métrique riemannienne lisse par morceaux sur V.

Les définitions précises des objets qui interviennent ci-dessus sont rappelées au paragraphe 1.3. Une représentation (V, f, g) de h sera dite *normale* lorsque f induit au niveau des groupes fondamentaux un épimorphisme. On peut noter que toute classe entière est représentable par un cycle géométrique et cette représentation peut être normalisée (voir [3]).

Soient (V, f, g) un cycle géométrique représentant h et $v \in V$. On note $\mathrm{syst}_v(V, f, g)$ la longueur du plus petit lacet c de point initial v dans V tel que le lacet $f \circ c$ soit non contractile dans $K(\pi, 1)$. On définit encore *la systole relative* de (V, f, g) par :
$$\mathrm{syst}(V, f, g) = \inf_{v \in V} \mathrm{syst}_v(V, f, g)$$

Le *volume systolique relatif* de (V, f, g) est alors : $\sigma(V, f, g) = \dfrac{\mathrm{vol}(V, g)}{\mathrm{syst}(V, f, g)^n}$.

Cela permet de définir *le volume systolique de* h notée $\sigma(h)$, qui est l'infimum des $\sigma(V, f, g)$ lorsque (V, f, g) décrit la collection des cycles géométriques qui représentent h.

Lorsque $h \neq 0$, selon Gromov (voir [10], § 6), on a $\sigma(h) > 0$. Cependant on ne sait pas si cet infimum est réalisé, ni quelle est la structure des pseudo-variétés qui le réalisent éventuellement. Dans le cas où la classe h est réalisable par une variété, on sait qu'il coïncide avec le volume systolique de n'importe quelle représentation normale par une variété de h, voir [3], [4] et [6]. Rappelons que le volume systolique d'une variété compacte M de dimension n est donné par :
$$\sigma(M) = \inf_g \frac{\mathrm{vol}(M, g)}{\mathrm{syst}(M, g)^n},$$

où l'infimum est pris sur toutes les métriques riemanniennes sur M et $\mathrm{syst}(M,g)$ désigne la longueur du plus petit lacet non contractile dans (M,g). On sait aussi, d'après un résultat de Babenko et Balacheff (voir [5]), que toute classe entière h dans $H_n(\pi;\mathbb{Z})$ admet une représentation normale par une pseudo-variété admissible V (i.e. telle que tout élément de $\pi_1(V)$ peut être représenté par un lacet qui ne rencontre pas le lieu singulier de V) et qu'alors le volume systolique de h est donné par :

$$\sigma(h) = \inf_g \frac{\mathrm{vol}(V,g)}{\mathrm{syst}(V,f,g)^n},$$

où l'infimum est pris sur toutes les métriques polyédrales sur V.

Pour un panorama de la géométrie systolique, on peut consulter [16].

Le but de ce texte est de proposer une démonstration détaillée du résultat suivant, dû à Gromov (voir [10] p. 71), dont la preuve existante est très lacunaire.

THÉORÈME A. — *Soient π un groupe de présentation finie et h une classe d'homologie entière non nulle dans $H_n(\pi;\mathbb{Z})$. Pour tout ε dans $]0,\frac{1}{2}\mathrm{syst}(V,f,g)[$, il existe un cycle géométrique (V,f,g) représentant h tel que :*

1. $\sigma(V,f,g) \leqslant \sigma(h)+\varepsilon$.
2. *Pour $R\in[\varepsilon,\frac{1}{2}\mathrm{syst}(V,f,g)]$, les boules $B(R)$ de rayon R dans V vérifient :*

$$\mathrm{vol}(B(R)) \geqslant A_n R^n \tag{1}$$

pour une certaine constante universelle A_n, qui ne dépend que de la dimension de h.

Un tel cycle géométrique est dit ε-régulier.

Pour illustrer de manière élémentaire ce théorème A, donnons une idée de la manière dont l'inégalité (1) sur le volume des boules permet de préciser la topologie des cycles géométriques ε-réguliers.

Soit (V,f,g) un cycle ε-régulier qui représente une classe d'homologie non triviale dans $H_n(\pi;\mathbb{Z})$. Considérons un système maximal $B_1,\dots,B_N$ de boules ouvertes disjointes de V de rayon $R_0=\frac{1}{2}\mathrm{syst}(V,f,g)$. Les boules concentriques $2B_1,\dots,2B_N$ de rayon $2R_0$ recouvrent V. Appelons $\mathcal{N}$ le nerf de ce recouvrement. Il s'agit du complexe simplicial construit de la manière suivante :

- Les sommets $p_1,\dots,p_N$ de $\mathcal{N}$ sont identifiés avec les boules du recouvrement ;
- Deux sommets p_i et p_j sont reliés par une arête lorsque $2B_i\cap 2B_j\neq\varnothing$;

- Les sommets $p_{i_0}, \dots, p_{i_p}$ forment un simplexe de dimension p de $\mathscr{N}$ lorsque :
$$2B_{i_0} \cap \cdots \cap 2B_{i_p} \neq \varnothing.$$

On peut alors borner le nombre N_k de simplexes de dimension k de $\mathscr{N}$ en fonction du volume systolique $\sigma(h)$ de la classe h. Par exemple, on a
$$\mathrm{vol}(V,g) \geqslant \sum_{i=1}^{N_0} \mathrm{vol}(B_i) \geqslant N_0 A_n R_0^n,$$
ce qui permet de borner le nombre de sommets N_0 de $\mathscr{N}$ en fonction de $\sigma(h)$.

Gromov utilise le théorème A afin de relier des propriétés topologiques de h au volume systolique. Plus précisément, ces cycles réguliers permettent à Gromov d'obtenir des inégalités entre le volume systolique et deux invariants topologiques importants de la classe h, qui sont :

- La hauteur simpliciale $h_s(h)$ de $h \in H_m(\pi;\mathbb{Z})$, qui est le nombre minimal de simplexes de toute dimension d'un cycle géométrique qui représente h ;
- Le volume simplicial $\|h\|_\Delta$, défini comme l'infimum des sommes $\sum |r_i|$ sur toutes les représentations de h par des cycles singuliers réels $\sum r_i\sigma_i$.

Gromov a notamment obtenu les résultats suivants (voir [10], théorème 6.4.C" et théorème 6.4.D' et [11], paragraphe 3.C.3).

Théorème 1.1 (Gromov). — *Soit π un groupe de présentation finie, $h \in H_m(\pi;\mathbb{Z})$, une classe d'homologie non nulle de dimension $m \geqslant 2$.*

1. *Il existe deux constantes positives C_m et C'_m, qui ne dépendent que de m, telles que :*
$$\sigma(h) \geqslant C_m \frac{h_s(h)}{\exp(C'_m\sqrt{\ln h_s(h)})}.$$
2. *Il existe une constante positive C''_m qui ne dépend que de la dimension m telle que :*
$$\sigma(h) \geqslant C''_m \frac{\|h\|_\Delta}{(\ln(2+\|h\|_\Delta))^m}.$$

Le théorème A a notamment encore été utilisé dans [17], p. 168, afin de déterminer une borne supérieure sur la H-entropie de ces cycles. Avant de donner le résultat obtenu, précisons la définition de la H-entropie d'un cycle géométrique (V,f,g) qui représente une classe d'homologie non triviale dans $H_n(\pi;\mathbb{Z})$. L'application f induit un morphisme $f_* : \pi_1(V) \to \pi$ au niveau des groupes fondamentaux. On note H le noyau de f_* et on considère le revêtement galoisien $\widetilde{V} \to V$ associé au sous-groupe distingué H de $\pi_1(V)$. Notons encore $\widetilde{g}$ la métrique induite par celle de V sur $\widetilde{V}$ et fixons v_0 dans V. Soit $\widetilde{v}_0$ un relevé de v_0 dans $\widetilde{V}$. L'entropie volumique de (V, f, g) associée à H (ou H-entropie) est alors :

$$\mathrm{Ent}_H(V, f, g) = \lim_{R\to+\infty} \frac{1}{R} \log \mathrm{vol}_{\widetilde{g}}(B(\widetilde{v}_0, R)).$$

Sabourau a établi le résultat suivant.

THÉORÈME 1.2 (Sabourau). — *Pour tout cycle géométrique (V, f, g) ε-régulier qui représente une classe d'homologie non triviale dans $H_n(\pi; \mathbb{Z})$, on a :*

$$\mathrm{Ent}_H(V, g) \leqslant \frac{1}{\beta\,\mathrm{syst}(V, f, g)} \log\left(\frac{\sigma(V, f, g)}{A_n \alpha^n}\right)$$

où $\alpha \geqslant \varepsilon$, $\beta > 0$, $4\alpha + \beta < \frac{1}{2}$ et la constante A_n est donnée par le théorème A.

1.2. Idée générale de la démonstration. — Pour démontrer le théorème A, on suivra la procédure donnée par Gromov dans [10], qui est la suivante. On part d'un cycle géométrique (V, f, g) représentant la classe d'homologie h dans $H_n(\pi; \mathbb{Z})$ tel que, pour $\varepsilon_1 > 0$, on ait :

$$\sigma(V, f, g) \leqslant \sigma(h) + \varepsilon_1.$$

Le but est alors de couper les « mauvaises boules » dans ce cycle. Mais il n'y a pas de procédure constructive pour faire cela. On va, dans un premier temps, plonger V dans un espace $K(V)$ (appelé extension du cycle V) qui possède de belles propriétés :

- On y contrôle la systole relative de certains cycles géométriques qui représentent h ;
- Les cycles dans $K(V)$ vérifient une bonne inégalité isopérimétrique (voir théorème 2.14), qui est une conséquence de l'inégalité de remplissage de Gromov dans les espaces de Banach (voir [10], [19] ou [13]).

La première partie de ce texte est consacrée à la construction de l'espace $K(V)$. Rappelons que si X est un espace métrique compact, l'application $x \mapsto \mathrm{dist}(., x)$ est un plongement isométrique de X dans l'espace de Banach $\mathscr{B}(X, \mathbb{R})$ des fonctions bornées sur X, muni de la norme de la convergence uniforme (c'est le plongement de Kuratowsky). La construction de l'image V' de V dans $K(V)$ est une variante de ce plongement. Cependant l'extension $K(V)$, qui est compacte, permettra beaucoup plus de souplesse que de travailler dans $\mathscr{B}(V, \mathbb{R})$.

La suite de la démonstration consiste à montrer le résultat intermédiaire suivant.

Théorème B. — *Soient h une classe d'homologie non nulle dans $H_n(\pi;\mathbb{Z})$, $\varepsilon > 0$ et (V,f,g) un cycle géométrique de dimension $n \geqslant 2$ qui représente h tel que $\sigma(V,f) \leqslant \sigma(h)+\varepsilon$. Soit a dans $]0,\frac{1}{2}\operatorname{syst}(V,f,g)[$. Il existe une suite de cycles géométriques (V_i,f_i,g_i) dans $K(V)$ qui représentent h tels que :*

1. $\operatorname{vol}(V_i) \underset{i\to+\infty}{\longrightarrow} \operatorname{vol}[V']$ *(où V' est l'image de V dans $K(V)$) ;*
2. *Pour $R \in [a,\frac{1}{2}\operatorname{syst}(V,f,g)]$, les boules $B(R)$ de rayon R dans chaque V_i vérifient :*
$$\operatorname{vol}(B(R)) \geqslant A_n(R-a)^n$$
pour une certaine constante universelle A_n qui ne dépend que de la dimension de h.

Pour démontrer ce résultat, on considère une suite minimisante, pour le volume homologique de V', de pseudo-variétés dans $K(V)$. De cette suite, par un argument de compacité, on montre que l'on peut en extraire la suite de cycles géométriques (V_i,f_i,g_i) du théorème B.

Pour terminer la démonstration du théorème A, il ne reste plus qu'à remplacer, dans le second point du théorème B, $\operatorname{syst}(V,f,g)$ par $\operatorname{syst}(V_i,f_i,g_i)$.

1.3. Pseudo-variétés et volumes des chaînes. — Avant de commencer, rappelons rapidement la signification de quelques notions utilisées dans ce texte. Pour plus de précisions, on peut consulter [18].

Une *pseudo-variété* de dimension n est un complexe simplicial fini K tel que :

- $\dim K = n$;
- Chaque simplexe dans K est face d'un simplexe de dimension n (homogénéité de la dimension) ;
- Chaque simplexe de dimension $n-1$ est face d'exactement deux simplexes de dimension n (pas de bifurcation) ;
- Dès que σ et τ sont deux simplexes distincts de dimension n dans K, il existe une suite $\sigma_1=\sigma,\dots,\sigma_p=\tau$ de simplexes de dimension n dans K tels que pour tout i dans $\{1,p-1\}$ les simplexes σ_i et σ_{i+1} aient une face de dimension $n-1$ commune (forte connexité).

Il est équivalent de dire qu'un complexe simplicial K est une pseudo-variété de dimension n lorsque K est de dimension n et lorsqu'il existe un sous-complexe $\Sigma \subset K$ vérifiant les trois propriétés suivantes :

- $\dim \Sigma \leqslant n-2$;
- $K \setminus \Sigma$ est une variété topologique de dimension n dense dans K ;
- L'espace $K \setminus \Sigma$ est connexe.

Dans la suite, toutes les pseudo-variétés considérées sont supposées orientables.

Définissons maintenant la notion de *métrique riemannienne sur un polyèdre*. On suit pour cela [3] ou [2]. Soit P un polyèdre (espace topologique muni d'une triangulation) fini. Une métrique riemannienne sur P est une famille de métrique $(g_\sigma)_{\sigma\in\Sigma}$, où Σ est l'ensemble des simplexes de P, qui vérifie :

- Chaque g_σ est une métrique riemannienne lisse à l'intérieur de σ ;
- Dès que σ_1 et σ_2 sont dans Σ, on a l'égalité

$$g_{\sigma_1} \mid_{\sigma_1\cap\sigma_2} = g_{\sigma_2} \mid_{\sigma_1\cap\sigma_2} .$$

Un polyèdre riemannien est alors un espace de longueur pour la distance induite par cette famille de métriques. Pour simplifier les notations, on désignera par une seule lettre g la famille $(g_\sigma)_{\sigma\in\Sigma}$ et on dira que g est une métrique riemannienne lisse par morceaux sur P. Le volume $\operatorname{vol}(P, g)$ est alors correctement défini de manière évidente.

On aura besoin aussi de définir une notion de volume pour les cycles (lipschitziens) dans un espace métrique (X, dist) (voir [10], p. 11). On note $\Delta^q \subset \mathbb{R}^{q+1}$ le q-simplexe standard de $\mathbb{R}^{q+1}$.

Définition 1.3. — Soit $\sigma : \Delta^q \to X$ un simplexe (lipschitzien) dans X. Le volume de σ dans (X, dist) est l'infimum des volumes de Δ^q muni d'une métrique riemannienne $\mathcal{G}$ telle que σ soit une contraction de $(\Delta^q, \operatorname{dist}_{\mathcal{G}})$ sur (X, dist), où $\operatorname{dist}_{\mathcal{G}}$ est la distance induite par $\mathcal{G}$.

Lorsque $c = \sum_{i\in I} k_i\sigma_i$ est une q-chaîne singulière (I est une partie finie de $\mathbb{N}$, les k_i sont des éléments de $\mathbb{Z}$), le volume de c dans (X, dist) est alors :

$$\operatorname{vol}(c) = \sum_{i\in I} |k_i| \operatorname{vol}(\sigma_i).$$

Remarque 1.4. —

1. Lorsque $A \subset X$, si c est une chaîne dans A alors son volume dans (X, dist) et dans $(A, \operatorname{dist}_A)$ coïncident, où dist_A est la restriction à A^2 de dist.
2. Supposons que X soit un polyèdre, dist étant la distance induite par une métrique riemannienne g sur X. Pour un cycle lipschitzien $\sigma : \Delta^q \to X$, le volume de σ dans (X, dist) est alors $\operatorname{vol}(\sigma) = \operatorname{vol}(\Delta, \sigma^*g) = \operatorname{vol}(\sigma, g)$, où σ^*g est la métrique « tirée en arrière » sur Δ^q (rappelons que σ est presque partout différentiable).

Remarque essentielle 1.5. — La définition 1.3 permet de définir le volume $\operatorname{vol}(c)$ d'une chaîne c dans $(\mathbb{R}^N, \| \|_\infty)$. Pour des sous-variétés de $\mathbb{R}^N$ cette notion de volume coïncide avec le volume hyper-euclidien, appelé aussi volume riemannien inscrit (voir [10] p. 32). Précisons cela.

Soit V une sous-variété de dimension q de $\mathbb{R}^N$. Le volume hyper-euclidien de V est défini par :

$$\mathrm{vol}_{he}(V) = \inf_g \mathrm{vol}(V, g),$$

l'infimum étant pris sur toutes les métriques riemanniennes g sur V telles que, sur chaque espace tangent, on ait $\| \ \|_g \geqslant \| \ \|_\infty$ (où $\| \ \|_g$ est la norme euclidienne induite par g). Il existe d'ailleurs une unique métrique g_{he} sur V pour laquelle cet infimum est atteint (voir par exemple [15]). Ainsi $\mathrm{vol}_{he}(V) = \mathrm{vol}(V, g_{he})$.

Si maintenant $\sigma : \Delta^q \to V$ est un simplexe différentiable dont le jacobien est de rang maximum, alors son volume dans $(\mathbb{R}^N, \| \ \|_\infty)$ n'est autre que $\mathrm{vol}(\sigma, g_{he})$. Puis la classe fondamentale de V peut être représentée par un cycle $c_V = \sum_{i=1}^{p} \sigma_i$ où $\sigma_1, \ldots, \sigma_p$ sont les simplexes de dimension q de V, et il vient :

$$\mathrm{vol}(c_V) = \sum_{i=1}^{p} \mathrm{vol}(\sigma_i) = \sum_{i=1}^{p} \mathrm{vol}(\sigma_i, g_{he}) = \mathrm{vol}(V, g_{he}).$$

Cela est encore vrai lorsque V est une pseudo-variété.

Dans la suite, on ne considérera que des cycles c dans $\mathbb{R}^N$, pour un certain N fixé, et $\mathrm{vol}(c)$ désignera le volume de c dans $(\mathbb{R}^N, \| \ \|_\infty)$.

2. Extension des cycles géométriques

2.1. Complexes cubiques. — On va d'abord définir la notion de *complexe cubique*, que l'on utilisera pour la construction de l'extension $K(V)$ du cycle géométrique (V, f, g). On considère un ensemble non vide X, ainsi que l'espace de Banach $(\mathscr{B}(X, \mathbb{R}), \| \ \|_\infty)$ des fonctions bornées sur X.

Définition 2.1. — On appellera cube standard sur X l'ensemble :

$$\mathrm{Cube}(X) = \{\varphi \in \mathscr{B}(X, \mathbb{R}) \mid (\forall x \in X)\, (0 \leqslant \varphi(x) \leqslant 1)\}$$

Pour x dans X les *faces associées à* x sont les parties suivantes de $\mathrm{Cube}(X)$:

$$F_x^0 = \{\varphi \in \mathrm{Cube}(X) \mid \varphi(x) = 0\} \quad \text{et} \quad F_x^1 = \{\varphi \in \mathrm{Cube}(X) \mid \varphi(x) = 1\}\,.$$

Remarquons que si X est de cardinal 1 alors $\mathrm{Cube}(X)$ est isométrique à $[0, 1]$ et si X est de cardinal N, $\mathrm{Cube}(X)$ est isométrique à $[0, 1]^N$. On peut définir une notion plus générale de *face* pour $\mathrm{cube}(X)$ de la manière suivante. Par exemple, pour x dans X, il existe une isométrie $\psi_x : \mathrm{Cube}(Y) \to F_x^0$ où $Y = X \setminus \{x\}$. Les images par ψ_x des faces de $\mathrm{Cube}(Y)$ seront encore appelées faces de $\mathrm{Cube}(X)$. On peut d'ailleurs itérer cette définition tant que Y est de cardinal supérieur à 1.

DÉFINITION 2.2. — Soit E un espace métrique. Lorsque X est un ensemble, un *cube sur* X dans E est une partie K de E telle qu'il existe une isométrie ψ : Cube$(X) \to K$; les *faces* de K sont alors les images par ψ des faces de cube(X). On dira encore que E est un *complexe cubique* lorsque l'on peut écrire

$$E = \bigcup_{i \in I} K_i$$

où les K_i (appelés *briques* de E) sont des cubes sur un certain ensemble X_i qui vérifient la contrainte suivante : pour $i \neq j$ l'intersection $K_i \cap K_j$ est soit une face (au sens généralisé) commune à K_i et K_j, soit le vide.

Un *sous-complexe cubique* d'un complexe cubique K est un complexe cubique inclus dans K dont les briques sont des faces de K.

EXEMPLE 2.3. —

1. Soient m un entier relatif, X un ensemble et $x \in X$. L'ensemble K des $\varphi \in \mathscr{B}(X, \mathbb{R})$ telles que $0 \leqslant \varphi(x) \leqslant 1$ et $m \leqslant \varphi(y) \leqslant m+1$ pour tout y dans $X \setminus \{x\}$ est un cube sur X. En effet, c'est l'image isométrique de Cube(X) via l'application $\Phi : \varphi \mapsto \psi$ où $\psi(x) = \varphi(x)$ et $\psi(y) = \varphi(y) + m$ pour tout y dans $X \setminus \{x\}$.
2. $[0,1] \times \{0\}$ est un cube sur $Y = 0$ dans $\mathbb{R}^2$ et c'est une face du cube (sur $X = \{*, \square\}$) $[0,1]^2$.
3. Soit X un ensemble non vide. Pour x dans X, l'ensemble F des $\varphi \in \mathscr{B}(X, \mathbb{R})$ telles que $\varphi(x) = 0$ et $m \leqslant \varphi(y) \leqslant m+1$ pour tout y dans $X \setminus \{x\}$ est une face de Cube(X).
4. $\mathbb{R}^N$ est un complexe cubique sur tout ensemble X de cardinal N...
5. Pour tout ensemble X, $\mathscr{B}(X, \mathbb{R})$ est un complexe cubique sur X : la famille d'hyperplans affines $(\{\varphi \in \mathscr{B}(X, \mathbb{R}) \mid \varphi(x) = m\})_{(x,m) \in X \times \mathbb{Z}}$ découpe $\mathscr{B}(X, \mathbb{R})$ en cubes sur X.
6. Lorsque X est un espace topologique, toutes les constructions précédentes sont encore valables en remplaçant l'espace de Banach $(\mathscr{B}(X, \mathbb{R}), \| \|_\infty)$ par le Banach $(L^\infty(X), \| \|_\infty)$ des fonctions boréliennes bornées sur X.

REMARQUE 2.4. — Dans la suite, quelque soit le complexe cubique inclus dans un espace L^∞ considéré, on supposera qu'il est muni de la métrique de longueur associée à la distance induite par $\| \|_\infty$. En particulier, pour φ et ψ dans un tel complexe cubique, on a aura $\|\varphi - \psi\|_\infty \leqslant \mathrm{dist}(\varphi, \psi)$.

On aura besoin par la suite du résultat suivant.

THÉORÈME 2.5. — *Soit ε dans $]0, \frac{1}{2}[$. Pour tout complexe cubique K, il existe une application affine par morceaux $R_\varepsilon : K \to K$ qui envoie le ε-voisinage de tout sous-complexe cubique K' de K sur K'.*

Démonstration. — Regardons ce qui se passe pour le complexe cubique $[0,1]$. On prend l'application $r_\varepsilon : [0,1] \to [0,1]$ dont le graphe est donné par la figure 1.

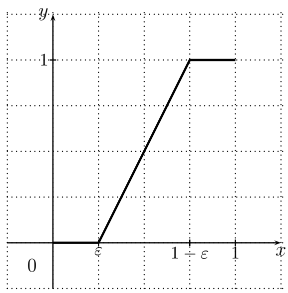

FIGURE 1. L'application r_ε

Si maintenant K est le cube $[0,1]^N$, on prend $R_\varepsilon(x) = (r_\varepsilon(x_1), \ldots, r_\varepsilon(x_N))$. De manière plus générale, si X est un ensemble non vide et si $K = \mathrm{Cube}(X)$, on prend

$$R_\varepsilon : \varphi \mapsto r_\varepsilon \circ \varphi.$$

Dans le cas le plus général où $K = \bigcup_{i \in I} K_i$, on note $\psi_i : K_i \to \mathrm{cube}(X_i)$ une isométrie. Dès que $\varphi \in K_i$, on pose alors : $R_\varepsilon(\varphi) = r_\varepsilon \circ \psi_i(\varphi)$. □

2.2. Des complexes cubiques particuliers. — On considère un cycle géométrique (V, f, g) ainsi qu'une partie finie $V_0 = \{v_1, \ldots, v_N\}$ de V. Pour tout i dans $\{1, \ldots, N\}$ on considère l'application $x_i : V \to [0,1]$ définie par :

$$x_i(v) = \min(\mathrm{dist}(v, v_i), 1)$$

ainsi que l'application $I_0 : V \to \mathbb{R}^N$ définie par :

$$I_0(v) = (x_1(v), \ldots, x_N(v))$$

REMARQUE 2.6. — Pour $\eta > 0$, on peut trouver V_0 suffisamment dense dans V tel que, pour tout $(v, v') \in V^2$ avec $\mathrm{dist}(v, v') < \frac{1}{2}$, on ait :

$$\mathrm{dist}(v, v') - \eta \leqslant \|I_0(v) - I_0(v')\|_\infty \leqslant \mathrm{dist}(v, v').$$

Lorsque V est une variété riemannienne, on peut conclure (voir [13]) que :

$$(1 - \eta)\mathrm{dist}(v, v') \leqslant \|I_0(v) - I_0(v')\|_\infty \leqslant \mathrm{dist}(v, v').$$

Construisons maintenant un complexe cubique à partir de V et d'une partie finie V_0 de V de cardinal N. Pour tout v dans V notons $K(v)$ la face de plus petite dimension de $[0,1]^N$ qui contient $R_\varepsilon \circ I_0(v)$. Par exemple si $N = 3$, en notant $J = R_\varepsilon \circ I_0$ on a :

- Si $J(v) = (*, 0, 0)$ avec $* \in [\varepsilon, 1-\varepsilon]$ alors $K(v) = [0,1] \times \{0\} \times \{0\}$.
- Si $J(v) = (*, *', 0)$ avec $* \in [\varepsilon, 1-\varepsilon]$ et $*' \in [\varepsilon, 1-\varepsilon]$ alors $K(v) = [0,1] \times [0,1] \times \{0\}$.

On prend maintenant l'union de toutes ces faces $K(v)$, pour v décrivant V.

DÉFINITION 2.7. — Le sous-complexe cubique de $[0,1]^N$ constitué de l'union de tous les cubes $K(v)$ pour v décrivant V s'appelle *une extension du cycle géométrique* (V, f, g). Ce complexe cubique sera noté $K(V)$:

$$K(V) = \bigcup_{v \in V} K(v).$$

REMARQUE 2.8. — Ce complexe cubique $K(V)$ dépend de V, mais aussi de V_0 et $\varepsilon < \frac{1}{2}$. Il sera intéressant lorsque V_0 est α-dense dans V pour α suffisamment petit, où α-dense signifie que tout point de V se trouve à une distance inférieure à α d'un point de V_0.

Lorsque $V_0 = \{v_1, \ldots, v_N\}$ est suffisamment dense dans V, $K(v)$ est un complexe (cellulaire) de dimension au plus $N-1$.

Plus précisément, pour i dans $\{1, \ldots, N\}$, notons K_i le cube défini par $x_i = 0$ i.e. :

$$K_i = \left\{ (x_1, \ldots, x_N) \in [0,1]^N \mid x_i = 0 \right\}.$$

Chaque K_i contient $J(v_i)$. Si maintenant V_0 est α-dense dans V avec $\alpha \leqslant \varepsilon$, pour tout v dans V il existe alors j dans $\{1, \ldots, N\}$ tel que $\operatorname{dist}(v, v_j) \leqslant \varepsilon$. Il en résulte que $J(v) \in K_j$ et ainsi :

$$K(V) \subset \bigcup_{i=1}^{N} K_i.$$

L'espace $K(V)$ est donc inclus dans une union de faces de dimension $N-1$ de $[0,1]^N$. Mieux, sous les conditions précédentes, dès que m est un point de $K(V)$, m admet au moins une coordonnée nulle.

REMARQUE 2.9. — 1. Avec les notations ci-dessus, si v et v' dans V sont tels que $J(v)$ et $J(v')$ vivent dans un même cube K_i, pour un certain i dans $\{1, \ldots, N\}$, alors on a $\operatorname{dist}(v, v') \leqslant 2\varepsilon$ et, en particulier, $\operatorname{dist}(v, v') < 1$.

En effet, puisque $J(v)$ et $J(v')$ sont dans K_i, on a

$$r_\varepsilon\big(\min(1, \operatorname{dist}(v, v_i))\big) = 0 = r_\varepsilon\big(\min(1, \operatorname{dist}(v', v_i))\big),$$

ce qui impose $\mathrm{dist}(v, v_i) \leqslant \varepsilon$ et $\mathrm{dist}(v', v_i) \leqslant \varepsilon$; il vient alors $\mathrm{dist}(v, v') \leqslant 2\varepsilon < 1$.

2. Lorsque V_0 est une partie infinie de V, la même construction s'adapte. Pour v dans V, $K(v)$ est alors la plus petite face de $\mathrm{Cube}(V_0)$ qui contient $J(v)$. Dans ce cas $K(V)$ est une union de faces de $\mathrm{Cube}(V_0) \subset \mathscr{B}(V_0, \mathbb{R})$, et, lorsque V_0 est suffisamment dense dans V, chaque $K(v)$ est contenu dans une face F_w^0 pour un certain w dans V_0 (pour les notations, voir la définition 2.1 p. 734).

Remarque 2.10. — Dans [10] § 6.2, Gromov a introduit la notion de δ-complexe cubique pour $\delta > 0$: dans la définition de I_0, on remplace $x_i(v)$ par $\min(\mathrm{dist}(v, v_i), \delta)$. Le complexe cubique obtenu $K_\delta(V) \subset [0, \delta]^N$ dépend alors en plus du choix de δ.

2.3. Plongement d'un cycle géométrique dans son extension. — Considérons maintenant l'application $J : V \to K(V)$ définie par

$$J = R_\varepsilon \circ I_0. \tag{2}$$

On peut noter que J est lipschitzienne de rapport $\dfrac{1}{1-2\varepsilon}$.

Exemple 2.11. — Prenons pour V un cercle de périmètre 1 et $V_0 = \left\{\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right\}$. Ainsi V_0 est α-dense dans V pour $\alpha = \frac{1}{4}$. La figure 2 montre alors $J(V)$ en gras ainsi que $K(V)$ qui est hachuré, pour $\varepsilon = \frac{1}{4}$.

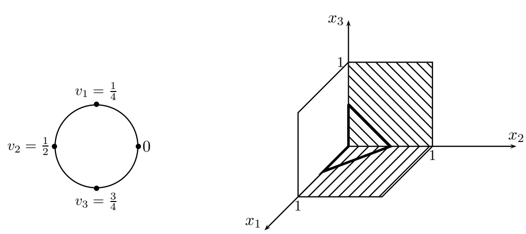

Figure 2. Plongement du cercle V de périmètre 1 dans $K(V)$.

En prenant pour V un cercle de périmètre 2 et $V_0 = \left\{0, \frac{2}{3}, \frac{4}{3}\right\}$ on obtient alors la figure 3, où l'image de V et $K(V)$ sont confondues (avec $\varepsilon = \frac{1}{3}$).

Ces exemples élémentaires suggèrent que $J : V \to K(V)$ est un plongement, lorsque V_0 est suffisamment dense dans V.

Théorème 2.12. — *Pour ε suffisamment petit et V_0 suffisamment dense dans V, l'application J est injective.*

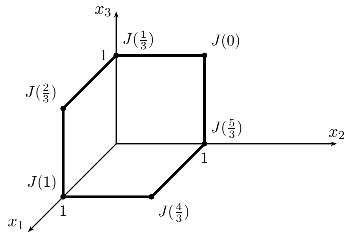

FIGURE 3. Plongement du cercle V de périmètre 2 dans $K(V)$.

Démonstration. — Soient v et v' dans V. Remarquons que, si $J(v) = J(v')$, alors, pour tout i dans $\{1, \ldots, N\}$ tel que $\operatorname{dist}(v, v_i) \in [\varepsilon, 1-\varepsilon]$, on a $\operatorname{dist}(v_i, v) = \operatorname{dist}(v_i, v')$. Supposons que $\operatorname{dist}(v, v') \geqslant 2\varepsilon$. Il existe v_i dans V_0 tel que $\operatorname{dist}(v_i, v) \leqslant \alpha$. Si $0 < \alpha < \varepsilon < \frac{1}{2}$ on a immédiatement $\operatorname{dist}(v', v_i) > \varepsilon$ et ainsi $r_\varepsilon(x_i(v)) = 0 \neq r_\varepsilon(x_i(v'))$. Il en résulte que $J(v) \neq J(v')$.

Supposons maintenant que V soit un simplexe euclidien de dimension n et qu'il existe deux points distincts v et v' dans V qui vérifient $J(v) = J(v')$. Si w est un point de V_0 tel que $\operatorname{dist}(v, w) \in [\varepsilon, 1-\varepsilon]$ on a $\operatorname{dist}(v, w) = \operatorname{dist}(v', w)$, donc tous les points de V_0 situés à une distance comprise entre ε et $1-\varepsilon$ de v appartiennent alors à l'hyperplan médiateur de v et v'. C'est une contradiction lorsque ε est suffisamment petit et V_0 suffisamment dense dans V.

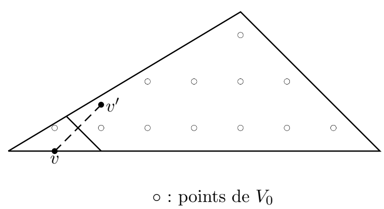

FIGURE 4. Plongement d'un simplexe.

Supposons maintenant que V soit un polyèdre euclidien. Soient v et v' deux points distincts dans V qui vérifient $\operatorname{dist}(v, v') \leqslant 2\varepsilon$. Appelons σ un simplexe de dimension n contenant v. L'ensemble des points w de σ tels que $\operatorname{dist}(v, w) = \operatorname{dist}(v', w)$ est de dimension inférieure à $n-1$. Ainsi, si on peut trouver w dans σ tel que $\operatorname{dist}(w, v) = 3\varepsilon$ et $B(w, 2\varepsilon) \cap \sigma$ soit non vide, pour V_0 suffisamment dense dans V, il y aura dans cette boule un point de V_0 qui distinguera v et v'. Mais pour ε suffisamment petit, on peut toujours trouver une telle boule.

Enfin, par exemple d'après [9], lorsque V est quelconque on peut l'approcher par des polyèdres euclidiens tout en gardant systole relative et volume aussi proche que l'on veut. □

Remarque essentielle 2.13. — Désignons par $\psi : V' \to V$ l'homéomorphisme réciproque de $J : V \to V' = J(V)$. On a alors, au niveau des groupes d'homologie de dimension n :

$$f_* \circ \psi_*[V'] = h.$$

Ainsi, si g_0 est la métrique sur V' fournie par la remarque 1.5, $(V', f \circ \psi, g_0)$ est un cycle géométrique qui représente h.

$$\begin{tikzcd} V' \arrow[rr, "\psi"] \arrow[dr, "f'"'] & & V \arrow[dl, "f"] \\ & K(\pi,1). & \end{tikzcd}$$

Notons, pour la suite, $f' = f \circ \psi$.

2.4. Une inégalité isopérimétrique dans $K(V)$. — Les cycles des complexes cubiques satisfont à une inégalité isopérimétrique remarquable, qui jouera un rôle essentiel dans la démonstration du résultat principal. Avant d'énoncer ce résultat, il est nécessaire de préciser certaines notions.

Lorsque z est un cycle de dimension n dans un espace métrique, le *volume de remplissage* de z dans X (comparer à [10] p. 12) est :

$$\operatorname{Vol}\operatorname{Remp}(z \subset X) = \inf\{\operatorname{vol}(c) \mid c \text{ chaîne de dimension } n+1 \text{ dans } X \text{ de bord } z\}.$$

Théorème 2.14. — *Soit $K(V)$ une extension d'un cycle géométrique (V, f, g). Il existe deux constantes α_n et β_n telles que tout cycle z dans $K(V)$ de dimension n et de volume $\operatorname{vol}(z) \leqslant \alpha_n$ soit le bord d'une chaîne c dans $K(V)$ de dimension $n+1$ qui vérifie :*

1. $\operatorname{vol}(c) \leqslant \beta_n\,(\operatorname{vol} z)^{\frac{n+1}{n}}$ *donc* $\operatorname{Vol}\operatorname{Remp}(z) \leqslant \beta_n\,(\operatorname{vol} z)^{\frac{n+1}{n}}$.
2. *c est contenue dans le voisinage tubulaire de rayon $\varepsilon_n = \beta_n\,(\operatorname{vol} z)^{\frac{1}{n}}$ de z.*

Démonstration. — Soit z un cycle singulier de dimension n dans $K(V) \subset \mathbb{R}^N$. Un résultat de Gromov (voir [10] **4.2** et **4.3**), dont une preuve détaillée se trouve dans [13], assure l'existence d'une constante C_n (ne dépendant que de la dimension du cycle z) et d'une chaîne c_1 dans $\mathbb{R}^N$ telle que $\partial c_1 = z$ qui vérifie :

1. $\operatorname{vol}(c_1) \leqslant C_n\,(\operatorname{vol} z)^{\frac{n+1}{n}}$;
2. c_1 est contenue dans le voisinage tubulaire $\operatorname{Tube}(z, \varepsilon_n)$ de rayon $\varepsilon_n = (n+1)C_n\,(\operatorname{vol} z)^{\frac{1}{n}}$ de z dans $\mathbb{R}^N$.

On peut aussi comparer ce résultat à l'énoncé donné dans [12] p. 266. Soit $\alpha_n > 0$ tel que la relation $\mathrm{vol}(z) \leqslant \alpha_n$ implique que

$$\varepsilon = \varepsilon_n = (n+1)C_n\,(\mathrm{vol}\,z)^{\frac{1}{n}} < \tfrac{1}{4}.$$

On peut prendre par exemple :

$$\alpha_n = \frac{1}{4^n\,(n+1)^n\,C_n^n}. \tag{3}$$

On peut alors considérer la rétraction R_ε du théorème 2.5, pour le complexe cubique $\mathbb{R}^N$, qui fournit une chaîne $c_2 = R_\varepsilon(c_1)$ de dimension $n+1$ dans $K(V)$. Mais on a $\partial R_\varepsilon(c_1) = R_\varepsilon(\partial c_1) = R_\varepsilon(z)$, donc cette chaîne ne convient pas tout à fait.

Notons que, pour tout t dans $\mathbb{R}$, on a $|r_\varepsilon(t) - t| \leqslant \varepsilon$. Ainsi, pour tout x dans $\mathbb{R}^n$, $\|R_\varepsilon(x) - x\| \leqslant \varepsilon$. On considère, pour tout x dans z, le segment s_x de $\mathbb{R}^N$ d'extrémités x et $R_\varepsilon(x)$: ce segment est de longueur inférieure à ε. De plus, si x est dans une face de $K(v)$ alors $R_\varepsilon(x)$ est dans cette même face : il en va donc de même du segment s_x. On considère alors le cylindre $\mathscr{C}$ constitué par z, $R_\varepsilon(z)$, ainsi que les segments s_x, pour x décrivant z. Ce cylindre est une chaîne de dimension $n+1$ dans $K(V)$ dont le bord est $\partial\mathscr{C} = z - R_\varepsilon(z)$. Son volume vérifie l'inégalité grossière :

$$\mathrm{vol}(\mathscr{C}) \leqslant \varepsilon(\mathrm{vol}(z) + \mathrm{vol}(R_\varepsilon(z))).$$

On pose maintenant $c = c_2 + \mathscr{C}$. C'est une chaîne de dimension $n+1$ dans $K(V)$. On a :

$$\partial c = \partial c_2 + \partial\mathscr{C} = z.$$

De plus, R_ε étant lipschitzienne de rapport $\frac{1}{1-2\varepsilon} \leqslant 2$, il vient :

$$\begin{aligned}\mathrm{vol}(c) &\leqslant 2^{n+1}\mathrm{vol}(c_2) + \mathrm{vol}(\mathscr{C})\\ &\leqslant C_n(\mathrm{vol}\,z)^{\frac{n+1}{n}} + (n+1)C_n(\mathrm{vol}\,z)^{\frac{1}{n}}\,(\mathrm{vol}\,z + 2^n\mathrm{vol}\,z)\\ &\leqslant C_n\left(2^{n+1} + (n+1)(1+2^n)\right)(\mathrm{vol}\,z)^{\frac{n+1}{n}}.\end{aligned}$$

Ainsi $\mathrm{vol}(c) \leqslant \beta_n\,(\mathrm{vol}\,z)^{\frac{n+1}{n}}$, où

$$\beta_n = C_n\left(2^{n+1} + (n+1)(1+2^n)\right). \tag{4}$$

Enfin, tout point de $\mathscr{C}$ est à distance inférieure à ε de z. Si maintenant x est dans c_1 alors :

$$\begin{aligned}\mathrm{dist}(R_\varepsilon(x), z) &\leqslant \mathrm{dist}(R_\varepsilon(x), x) + \mathrm{dist}(x, z)\\ &\leqslant \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon = 2C_n(\mathrm{vol}\,z)^{\frac{1}{n}}\\ &\leqslant \beta_n \mathrm{vol}(z)^{\frac{1}{n}}.\end{aligned}$$

Il en résulte que c est contenu dans le voisinage tubulaire de rayon $\varepsilon = \beta_n(\mathrm{vol}\,z)^{\frac{1}{n}}$ de z dans $K(V)$. □

Remarque 2.15. — Le même type de démonstration s'applique à un complexe cubique quelconque.

3. Lien avec les systoles relatives

3.1. Une autre définition de la systole relative. — Avant de poursuivre, on a besoin de quelques précisions sur les revêtements. On considère toujours un cycle géométrique (V, f, g) ainsi que le revêtement galoisien $p : \widetilde{V} \to V$ associé au sous-groupe distingué $\ker f_*$, où $f_* : \pi_1(V) \to \pi$ est l'application induite par f au niveau des groupes fondamentaux (pour plus de détails, voir [14]). Notons $q : \widetilde{K(\pi,1)} \to K(\pi,1)$ le revêtement universel de $K(\pi,1)$; l'application $f : V \to K(\pi,1)$ est recouverte par une application continue $\widetilde{f} : \widetilde{V} \to \widetilde{K(\pi,1)}$ telle que le diagramme suivant commute.

$$\begin{tikzcd} \widetilde{V} \arrow[r, "\widetilde{f}"] \arrow[d, "p"'] & \widetilde{K(\pi,1)} \arrow[d, "q"] \\ V \arrow[r, "f"'] & K(\pi,1). \end{tikzcd}$$

On notera $\Gamma = G(\widetilde{V})$ le groupe des automorphismes de ce revêtement, que l'on peut considérer comme un sous-groupe de π, puisqu'isomorphe à $\mathrm{Im} f_*$. Il existe une unique distance $\widetilde{\mathrm{dist}}$ sur $\widetilde{V}$ pour laquelle Γ agit par isométrie sur $\widetilde{V}$ et telle que f soit une isométrie locale (voir [7] p. 84). On a alors le résultat suivant.

Théorème 3.1. — *Avec les notations ci-dessus :*

$$\mathrm{syst}(V, f, g) = \inf\left\{\widetilde{\mathrm{dist}}(\widetilde{v}, \gamma \cdot \widetilde{v}) \mid \widetilde{v} \in \widetilde{V} \text{ et } \gamma \in \Gamma \setminus \{1_\Gamma\}\right\}. \tag{5}$$

Démonstration. — Prenons $\widetilde{v} \in \widetilde{V}$ et γ dans $\Gamma \setminus \{1_\Gamma\}$. On pose $v = p(\widetilde{v})$. Prenons $\widetilde{c}$ un chemin minimisant entre $\widetilde{v}$ et $\gamma \cdot \widetilde{v}$. On a donc :

$$\widetilde{\mathrm{dist}}(\widetilde{v}, \gamma \cdot \widetilde{v}) = \mathrm{long}(\widetilde{c}) = \mathrm{long}(c)$$

où c est le lacet $p \circ \widetilde{c}$ de point base v. Montrons alors que $f \circ c$ n'est pas homotope à un point dans $K(\pi,1)$. Le lacet $f \circ c$ n'est autre que le lacet $q \circ \widetilde{f} \circ \widetilde{c}$. Mais $\widetilde{c}(1) = \gamma \cdot \widetilde{v}$ donc, $\widetilde{f}$ étant équivariante :

$$\widetilde{f}(\gamma \cdot \widetilde{v}) = \gamma \cdot \widetilde{f}(\widetilde{v}).$$

Comme $\gamma \neq 1_\Gamma$, on a $\widetilde{f}(\widetilde{v}) \neq \gamma \cdot \widetilde{f}(\widetilde{v})$ donc $f \circ c$ n'est pas homotope à un point.

Soit maintenant c un lacet dans V tel que $\mathrm{long}(c) = \mathrm{syst}(V, f, g)$. On pose $v = c(0)$ et on prend un relevé $\widetilde{v}$ de v dans $\widetilde{V}$. Il existe alors un unique chemin

$\widetilde{c} : [0,1] \to \widetilde{V}$ tel que $\widetilde{c}(0) = \widetilde{v}$ et $p \circ \widetilde{c} = c$. En notant γ l'élément de Γ tel que $\widetilde{v} \cdot \gamma = \widetilde{c}(1)$, on obtient :

$$\widetilde{\operatorname{dist}}(\widetilde{v}, \gamma \cdot \widetilde{v}) \leqslant \operatorname{long}(\widetilde{c}) = \operatorname{syst}(V, f, g),$$

ce qui achève la preuve de (5) puisque $\gamma \neq 1_\Gamma$. □

REMARQUE 3.2. — Ce théorème permet de définir la notion de systole relative dans un cadre plus large. Soient V' une pseudo-variété et $f' : V' \to K(\pi, 1)$. Lorsque V' est munie d'une métrique de longueur d', la systole relative $\operatorname{syst}(V', f', d')$ a alors un sens. Supposons maintenant que V' soit incluse dans $K(V)$. Notons d_∞ la distance de longueur induite sur V' par la norme $\| \, \|_\infty$. Notons encore d' la métrique de longueur induite par la métrique riemannienne lisse par morceaux sur V' fournie par la remarque 1.5. On a alors $d_\infty \leqslant d'$ et ainsi $\operatorname{syst}(V', f', d_\infty) \leqslant \operatorname{syst}(V', f', d')$.

3.2. Systole relative des cycles géométriques dans $K(V)$. — On suppose construite une extension $K(V)$ du cycle géométrique (V, f, g) pour laquelle $J : V \to K(V)$ est un plongement, à partir d'une partie V_0 suffisamment dense de V, et on note comme précédemment $V' = J(V)$. On va montrer que l'on peut contrôler la systole relative de certains cycles géométriques inclus dans $K(V)$ et qui représentent h. On considère un cycle géométrique (V, f, g). Quitte à multiplier la métrique initiale g par une constante, on peut supposer que $\operatorname{syst}(V, f, g) = 2$ (ce qui ne change pas $\sigma(V, f, g)$), et *on fait cette hypothèse dans toute la suite.* On considère maintenant l'application $\widetilde{f} : \widetilde{V} \to \widetilde{K(\pi, 1)}$, où $\widetilde{K(\pi, 1)} \to K(\pi, 1)$ est le revêtement universel de $K(\pi, 1)$. On note $\widetilde{V}_0$ le relevé de V_0 à $\widetilde{V}$.

Regardons quelques conséquences de l'hypothèse $\operatorname{syst}(V, f, g) = 2$. Supposons que $\widetilde{v}$ et $\widetilde{w}$ dans $\widetilde{V}$ vérifient $\widetilde{\operatorname{dist}}(\widetilde{v}, \widetilde{w}) \leqslant 1$. On a alors, pour tout $\gamma \neq 1_\Gamma$ dans Γ :

$$2 \leqslant \widetilde{\operatorname{dist}}(\widetilde{v}, \gamma \cdot \widetilde{v}) \leqslant \widetilde{\operatorname{dist}}(\widetilde{v}, \gamma \cdot \widetilde{w}) + \widetilde{\operatorname{dist}}(\gamma \cdot \widetilde{w}, \gamma \cdot \widetilde{v}).$$

Mais Γ agit par isométries sur $\widetilde{V}$: $\widetilde{\operatorname{dist}}(\gamma \cdot \widetilde{w}, \gamma \cdot \widetilde{v}) = \widetilde{\operatorname{dist}}(\widetilde{w}, \widetilde{v})$. Il vient donc :

$$\widetilde{\operatorname{dist}}(\widetilde{v}, \gamma \cdot \widetilde{w}) \geqslant 1.$$

Une conséquence est la suivante. Supposons que $\widetilde{v}$, $\widetilde{w}$ dans $\widetilde{V}$ et α dans Γ vérifient $\widetilde{\operatorname{dist}}(\widetilde{v}, \alpha \cdot \widetilde{w}) \leqslant 1$. Pour tout $\beta \neq 1_\Gamma$ dans Γ, on a donc $\widetilde{\operatorname{dist}}(\widetilde{v}, \beta \cdot (\alpha \cdot \widetilde{w})) \geqslant 1$. Prenons maintenant $\gamma \neq \alpha$ dans Γ. Avec $\beta = \gamma\alpha^{-1}$ (qui est différent de 1_Γ) on obtient :

$$\widetilde{\operatorname{dist}}(\widetilde{v}, \gamma \cdot \widetilde{w}) \geqslant 1.$$

Pour $\psi \in L^\infty(\widetilde{V}_0)$ et $\gamma \in \Gamma$, on considère l'élément $\gamma \cdot \psi$ de $L^\infty(\widetilde{V}_0)$ défini, pour tout $\widetilde{w} \in \widetilde{V}_0$, par :

$$\gamma \cdot \psi(\widetilde{w}) = \psi(\gamma^{-1} \cdot \widetilde{w}).$$

On définit ainsi une action de Γ sur $L^\infty(\widetilde{V}_0)$.

Appelons maintenant $\widetilde{D}$ un domaine fondamental (connexe) de l'action de Γ sur $\widetilde{V}$. Pour $\widetilde{v} \in \widetilde{D}$, on considère l'application :

$$\widetilde{I}_0(\widetilde{v}) : \widetilde{V}_0 \to \mathbb{R}$$

définie par : $I_0(\widetilde{v})(\widetilde{w}) = \begin{cases} \min(1, \mathrm{dist}(p(\widetilde{v}), p(\widetilde{w}))) \text{ si } \widetilde{w} \in \widetilde{D} \cap \widetilde{V}_0; \\ 1 \ \text{ sinon.} \end{cases}$.

Lorsque $\gamma \in \Gamma \setminus \{1_\gamma\}$, on pose encore : $\widetilde{I}_0(\gamma \cdot \widetilde{v}) = \gamma \cdot \widetilde{I}_0(\widetilde{v})$, de sorte que $\widetilde{I}_0 : \widetilde{V} \to L^\infty(\widetilde{V}_0)$ est une application Γ-équivariante.

EXEMPLE 3.3. — Illustrons cette construction avec un exemple élémentaire (voir figure 5). On prend pour V le cercle ${}^{[0,2]}/_{0 \sim 2}$. On note $[x]$ la classe de x dans V et on prend $V_0 = \left\{[0], [\frac{2}{3}], [\frac{4}{3}]\right\}$. On a ici $\Gamma = \mathbb{Z}$, $\widetilde{V} = \mathbb{R}$ et $\widetilde{V}_0 = \frac{2}{3}\mathbb{Z}$. On choisit $\widetilde{D} = [0, 2[$. L'application $\widetilde{I}_0(0)$ est définie par :

$$\widetilde{I}_0(0)(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0, \\ \frac{2}{3} & \text{si } x = \frac{2}{3}, \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

À titre d'exemple, par définition, pour x réel, on a : $\widetilde{I}_0(2)(x) = \widetilde{I}_0(0)(x-2)$.

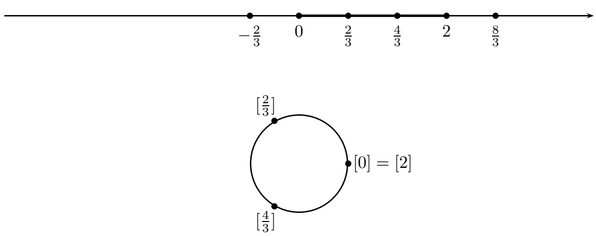

FIGURE 5. Un exemple élémentaire

Revenons à la construction générale. Prenons v dans V et considérons le cube $K(v) \subset L^\infty(V_0)$ (voir § 2.2). Pour φ dans $K(v)$, on définit un élément $\widetilde{\varphi}$ de $L^\infty(\widetilde{V}_0)$ (de la même manière que pour $\widetilde{I}_0$ ci-dessus) en posant, pour $\widetilde{w} \in \widetilde{D} \cap \widetilde{V}_0$ et γ dans $\Gamma \setminus \{1_\gamma\}$:

$$\widetilde{\varphi}(\widetilde{w}) = \varphi(p(\widetilde{w})) \ \text{ et } \ \widetilde{\varphi}(\gamma \cdot \widetilde{w}) = 1.$$

Lorsque $\widetilde{v}$ est dans $\widetilde{D}$ et vérifie $p(\widetilde{v}) = v$, on note $\widetilde{K}(\widetilde{v})$ l'ensemble des $\widetilde{\varphi}$ dans $L^\infty(\widetilde{V}_0)$ ainsi construites à partir des éléments φ de $K(v)$, et, pour γ dans Γ, on pose :

$$\widetilde{K}(\gamma \cdot \widetilde{v}) = \gamma \cdot \widetilde{K}(\widetilde{v}).$$

REMARQUE 3.4. — Soit $\widetilde{v}$ dans $\widetilde{V}$. Pour $\widetilde{\varphi}$ dans $\widetilde{K}(\widetilde{v})$, il existe toujours deux éléments $\widetilde{w}$ et $\widetilde{w}'$ de $\widetilde{V}_0$ tels que $\widetilde{\varphi}(\widetilde{w}) = 0$ et $\widetilde{\varphi}(\widetilde{w}') = 1$. En effet, l'application $\widetilde{\varphi}$ est construite à partir d'un élément φ d'un certain cube $K(v)$ de $K(V)$, et on a vu (voir remarque 2.9) que l'une des coordonnées de φ est nulle.

Notons maintenant $\widetilde{R}_\varepsilon$ la rétraction du complexe cubique $L^\infty(\widetilde{V}_0)$ fournie par le théorème 2.5. On peut construire, de la même manière que pour V, une extension $K(\widetilde{V}) = K(\widetilde{V}, \widetilde{V}_0, \varepsilon)$ de $\widetilde{V}$, à partir de l'application $\widetilde{J} = \widetilde{R}_\varepsilon \circ \widetilde{I}_0$.

Avec les notations ci-dessus, pour tout $\widetilde{v}$ dans $\widetilde{V}$, le cube minimal $K(\widetilde{v})$ de $L^\infty(\widetilde{V}_0)$ qui contient $\widetilde{J}(\widetilde{v})$ n'est autre que le cube $\widetilde{K}(\widetilde{v})$.

LEMME 3.5. — *Le groupe* Γ *agit sans point fixe et totalement discontinûment sur* $K(\widetilde{V})$*, de sorte que :*

$$pr : K(\widetilde{V}) \to K(\widetilde{V})/_{\Gamma} = K(V)$$

est un revêtement régulier.

Démonstration. — Soit $\widetilde{\varphi}$ dans $K(\widetilde{V})$. On considère la boule ouverte

$$U = \left\{\widetilde{\psi} \in K(\widetilde{V}) \mid \operatorname{dist}(\widetilde{\varphi} - \widetilde{\psi}) < \tfrac{1}{2}\right\}.$$

Prenons γ dans $\Gamma \setminus \{1_\Gamma\}$. Raisonnons par l'absurde et supposons que $\gamma \cdot U \cap U \neq \varnothing$. Il existe alors $\widetilde{\psi} \in U$ telle que $\left\|\widetilde{\varphi} - \gamma \cdot \widetilde{\psi}\right\|_\infty < \frac{1}{2}$ (voir remarque 2.4 p. 735). Par inégalité triangulaire, on obtient :

$$\left\|\widetilde{\psi} - \gamma \cdot \widetilde{\psi}\right\|_\infty < 1. \tag{6}$$

La fonction $\widetilde{\psi}$ appartient à un certain cube $K(\widetilde{v})$. Supposons que $\widetilde{v} \in \widetilde{D}$. Il existe $\widetilde{w}$ dans $\widetilde{V}_0 \cap D$ tel que $\widetilde{\psi}(\widetilde{w}) = 0$ (voir remarque 3.4). Or $\widetilde{\psi}(\gamma^{-1} \cdot \widetilde{w}) = 1$, de sorte que $\left|\widetilde{\psi}(\widetilde{w}) - \gamma \cdot \widetilde{\psi}(\widetilde{w})\right| = 1$, ce qui contredit (6). Si maintenant $\widetilde{v} \notin \widetilde{D}$, on dispose de $\alpha \in \Gamma$, de $\widetilde{v}'$ dans $\widetilde{D}$ et de $\widetilde{\psi}_0$ dans $\widetilde{K}(\widetilde{v}')$ tels que $\widetilde{\psi} = \alpha \cdot \widetilde{\psi}_0$. L'inégalité (6) implique alors, pour tout $\widetilde{w} \in \widetilde{V}_0$:

$$\left|\widetilde{\psi}_0(\widetilde{w}) - \widetilde{\psi}_0(\gamma^{-1} \cdot \widetilde{w})\right| < 1,$$

et on peut conclure à une absurdité de la même façon. Ainsi l'action de Γ sur $K(\widetilde{V})$ est sans point fixe et totalement discontinue.

Enfin, pour $\widetilde{\varphi}$ dans $K(\widetilde{V})$, la classe $pr(\varphi)$ est représentée par un élément $\widetilde{\varphi}_0$ d'un certain cube $K(\widetilde{v})$ de $K(\widetilde{V})$ où $\widetilde{v}$ est dans $\widetilde{D}$. Notons $v = p(\widetilde{v}) \in V$. Alors $pr(\widetilde{\varphi}_0)$ n'est autre que l'élément φ_0 de $K(v)$ défini, pour $w \in V_0$, par :

$$\varphi_0(w) = \widetilde{\varphi}_0(\widetilde{w}),$$

où $\widetilde{w} \in \widetilde{D} \cap p^{-1}(w)$. On a ainsi $K(\widetilde{V})/_{\Gamma} = K(V)$. □

On peut noter que l'application $\widetilde{J} : \widetilde{V} \to K(\widetilde{V})$ est encore lipschitzienne de rapport $\frac{1}{1-2\varepsilon}$ et que le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \widetilde{V} & \xrightarrow{\widetilde{J}} & K(\widetilde{V}) \\ {\scriptstyle p}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle pr} \\ V & \xrightarrow[J]{} & K(V). \end{array}$$

Lemme 3.6. — *Soient $\widetilde{v}$ et $\widetilde{v}'$ des points dans $\widetilde{V}$. On note $K_1 = K(\widetilde{v})$ et $K_2 = K(\widetilde{v}')$.*

Si pour $m \geqslant 1$ entier on a $\widetilde{\operatorname{dist}}(\widetilde{v}, \widetilde{v}') \geqslant m$ alors :

$$\operatorname{dist}(K_1, K_2) \geqslant m.$$

Démonstration. — Rappelons que K_1 et K_2 sont les cubes minimaux dans $K(\widetilde{V})$ qui contiennent respectivement $\widetilde{J}(\widetilde{v})$ et $\widetilde{J}(\widetilde{v}')$.

On procède par récurrence sur $m \geqslant 1$. Montrons le résultat pour $m = 1$. On suppose que $\widetilde{\operatorname{dist}}(\widetilde{v}, \widetilde{v}') \geqslant 1$. On choisit un point $\widetilde{w}$ de $\widetilde{V}_0$ suffisamment proche de $\widetilde{v}$, de sorte que $\widetilde{J}(\widetilde{v})(\widetilde{w}) = 0$ et $\widetilde{J}(\widetilde{v}')(\widetilde{w}) = 1$. Par minimalité de K_1 et K_2, pour tout $\widetilde{\varphi}$ dans K_1 et tout $\widetilde{\psi}$ dans K_2, on a $\widetilde{\varphi}(\widetilde{w}) = 0$ et $\psi(\widetilde{w}) = 1$, donc

$$1 = \left\| \widetilde{\psi} - \widetilde{\varphi} \right\|_\infty \leqslant \operatorname{dist}(\widetilde{\psi}, \widetilde{\varphi}).$$

Il en résulte que $\operatorname{dist}(K_1, K_2) \geqslant 1$.

Supposons maintenant le résultat vrai pour un certain entier naturel m. Soient $\widetilde{v}$ et $\widetilde{v}'$ dans $\widetilde{V}$ tels que $\widetilde{\operatorname{dist}}(\widetilde{v}, \widetilde{v}') \geqslant (m+1)$. On prend un plus court chemin dans $K(\widetilde{V})$ entre les cubes K_1 et K_2 et on prend un point $\widetilde{x}$ sur ce chemin pour lequel $\operatorname{dist}(\widetilde{x}, K_1) = 1$. Ce point $\widetilde{x}$, par construction de $K(\widetilde{V})$, appartient à un certain cube minimal $K(\widetilde{w})$ pour un certain point $\widetilde{w}$ de $\widetilde{V}$. Comme $1 = \operatorname{dist}(K_1, \widetilde{x}) \leqslant \operatorname{dist}(\widetilde{J}(\widetilde{v}), \widetilde{x})$ on a :

$$\operatorname{dist}(K_1, K_2) = \operatorname{dist}(K_1, \widetilde{x}) + \operatorname{dist}(\widetilde{x}, K_2) \geqslant 1 + \operatorname{dist}(K(\widetilde{w}), K_2). \tag{7}$$

De plus $\widetilde{\operatorname{dist}}(\widetilde{w}, \widetilde{v}) \leqslant 1$ (puisque $\operatorname{dist}(K_1, K(\widetilde{w})) \leqslant 1$). Ainsi on a

$$\widetilde{\operatorname{dist}}(\widetilde{w}, \widetilde{v}') \geqslant \widetilde{\operatorname{dist}}(\widetilde{v}, \widetilde{v}') - \widetilde{\operatorname{dist}}(\widetilde{w}, \widetilde{v}) \geqslant \widetilde{\operatorname{dist}}(\widetilde{v}, \widetilde{v}') - 1 = m.$$

Le résultat étant supposé vrai au rang m, on a $\operatorname{dist}(K_2, K(\widetilde{w})) \geqslant m$. On peut donc conclure, via (7), que le résultat est vrai pour $m + 1$. □

Lemme 3.7. — *L'application $f' : V' \to K(\pi, 1)$ (voir* 2.13) se prolonge en une application continue $F : K(V) \to K(\pi, 1)$.

Démonstration. — Soit $\widetilde{V'}$ le relevé de V' à $K(\widetilde{V})$. Notons $\widetilde{f'} : \widetilde{V'} \to \widetilde{K(\pi,1)}$ l'application équivariante qui relève $f' : V' \to K(\pi,1)$:

$$\begin{array}{ccc} \widetilde{V'} & \xrightarrow{\widetilde{f'}} & \widetilde{K(\pi,1)} \\ {\scriptstyle \mathrm{pr}|_{\widetilde{V'}}}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle q} \\ V' & \xrightarrow[f']{} & K(\pi,1). \end{array}$$

Soit Δ une partie de $K(\widetilde{V})$ qui contient exactement un représentant de chaque orbite de l'action de Γ sur $K(\widetilde{V})$, et qui est d'intersection non vide avec $\widetilde{V'}$. Puisque $\widetilde{K(\pi,1)}$ est simplement connexe, la restriction de $\widetilde{f'}$ à $\Delta \cap \widetilde{V'}$, se prolonge en une application continue $\widetilde{f'}_1 : \Delta \cup \widetilde{V'} \to \widetilde{K(\pi,1)}$. On prolonge alors cette application $\widetilde{f'}$ en une application équivariante

$$\widetilde{F} : K(\widetilde{V}) \to \widetilde{K(\pi,1)},$$

en posant, $\widetilde{F}(\gamma\cdot\widetilde{v}') = \gamma\cdot\widetilde{f'}_1(\widetilde{v}')$. Cette application $\widetilde{F}$ induit alors une application continue

$$F : K(V) \to K(\pi,1)$$

telle que le diagramme suivant commute, où $q : \widetilde{K(\pi,1)} \to K(\pi,1)$ est la projection canonique.

$$\begin{array}{ccc} K(\widetilde{V}) & \xrightarrow{\widetilde{F}} & \widetilde{K(\pi,1)} \\ {\scriptstyle pr}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle q} \\ K(V) & \xrightarrow[F]{} & K(\pi,1). \end{array}$$

Cette dernière application F prolonge f'. □

Soit maintenant V'' une pseudo-variété de dimension n plongée dans $K(V)$. Sa classe fondamentale est représentée par un cycle $c_{V''} = \sum_{i=1}^{m} \sigma_i$ où $\{\sigma_1, \dots, \sigma_m\}$ est l'ensemble des simplexes de dimension n qui représentent V''. Ce cycle peut aussi bien se considérer comme une chaîne singulière de $K(V)$, qui est clairement un cycle. On confondra par la suite $c_{V''}$ et V''.

DÉFINITION 3.8. — On dira que les pseudo-variétés $V' = J(V)$ et V'' sont *homologues dans* $K(V)$ lorsque les cycles $c_{V'}$ et $c_{V''}$ représentent la même classe dans $H_n(K(V);\mathbb{Z})$.

On munit V'' de la métrique riemannienne g'' fournie par la remarque 1.5, p. 733. On a vu que (V', f', g') est un cycle géométrique qui représente la classe h dans $H_n(\pi;\mathbb{Z})$ et que l'application $f' : V' \to K(\pi,1)$ se prolonge en une application continue $F : K(V) \to K(\pi, 1)$. Notons f'' la restriction de F à V''.

THÉORÈME 3.9. — *Soit V'' une pseudo-variété, homologue à V' dans $K(V)$. Le cycle géométrique (V'', f'', g'') représente la classe h. Si de plus le cycle (V, f, g) est normalisé, i.e. lorsque* $\mathrm{Im} f_* = \pi$, *où $f_* : \pi_1(V) \to \pi$, alors :*

$$\mathrm{syst}(V'', f'', g'') \geqslant \mathrm{syst}(V, f, g).$$

Démonstration. — Rappelons que l'on a supposé $\mathrm{syst}(V, f, g) = 2$. Notons $f'_* : H_n(V'; \mathbb{Z}) \to H_n(\pi; \mathbb{Z})$, $f''_* : H_n(V''; \mathbb{Z}) \to H_n(\pi; \mathbb{Z})$ et $F_* : H_n(K(V); \mathbb{Z}) \to H_n(\pi; \mathbb{Z})$ les morphismes induits au niveau des groupes d'homologie. On a alors :

$$f''_*[V''] = F_*[c_{V''}] = F_*[c_{V'}] = f'_*[V'] = h.$$

En effet, montrons que $F_*[c_{V''}] = f''_*[V'']$ (la seconde égalité résultant du fait que V'' est homologue à V' dans $K(V)$). Pour cela, regardons ce qui se passe au niveau des complexes de chaînes. Rappelons que le cycle $c_{V''}$, qui représente la classe fondamentale $[V'']$ dans $H_n(V''; \mathbb{Z})$, peut être considéré comme un cycle de $K(V)$. Nous mettrons $\sharp$ en indice pour les applications induites au niveau des complexes de chaînes. Désignons par $\mathscr{C}$ une chaîne (cycle) de dimension n dans $K(\pi, 1)$ qui représente la classe $h'' = f''_*[V'']$. Il existe $\mathscr{C}'$ chaîne de dimension $n+1$ dans $K(\pi, 1)$ telle que $f''_\sharp(c_{V''}) = \mathscr{C} + \partial \mathscr{C}'$. Comme F prolonge f'' à $K(V)$, on a $F_\sharp(c_{V''}) = f''_\sharp(c_{V''})$ et ainsi :

$$F_\sharp(c_{V''}) = \mathscr{C} + \partial \mathscr{C}'.$$

Il en résulte que $F_\sharp(c_{V'})$ est homologue à $\mathscr{C}$ donc $F_*[c_{V''}] = f''_*[V'']$.

Passons à l'inégalité concernant les systoles relatives. On se rappelle tout d'abord que

$$\mathrm{syst}(V'') = \inf\left\{\widetilde{\mathrm{dist}}(\widetilde{v}'', \gamma \cdot \widetilde{v}'') \mid \widetilde{v}'' \in \widetilde{V''} \text{ et } \gamma \in G(\widetilde{V''}) \setminus \left\{1_{G(\widetilde{V''})}\right\}\right\},$$

où $\widetilde{V''} \to V''$ est le revêtement associé au sous-groupe $\ker f''_*$ de $\pi_1(V'')$ et $G(\widetilde{V''})$ est le groupe des automorphismes de ce revêtement. Soit $\widetilde{v}'' \in \widetilde{V}'' \subset K(\widetilde{V})$, cette dernière inclusion résultant du fait que (V, f, g) est un cycle normalisé. Pour γ dans $G(\widetilde{V''}) \setminus \left\{1_{G(\widetilde{V''})}\right\}$, on choisit un cube K_1 de $K(\widetilde{V})$ qui contient $\widetilde{v}''$. Par construction de $K(\widetilde{V})$, il existe $\widetilde{v}$ dans $\widetilde{V}$ tel que K_1 contienne $\widetilde{J}(\widetilde{v})$. Le cube $K_2 = \gamma \cdot K_1$ contient alors $\gamma \cdot \widetilde{v}''$, ainsi que $\gamma \cdot \widetilde{J}(\widetilde{v}) = \widetilde{J}(\gamma \cdot \widetilde{v})$. Il vient ainsi :

$$\widetilde{\mathrm{dist}}(\widetilde{v}'', \gamma \cdot \widetilde{v}'') \geqslant \mathrm{dist}(K_1, K_2).$$

Comme $\mathrm{syst}(V, f, g) = 2 \leqslant \widetilde{\mathrm{dist}}(\widetilde{v}, \gamma \cdot \widetilde{v})$, on obtient, d'après le lemme 3.6 appliqué à $m = 2$, $\mathrm{dist}(K_1, K_2) \geqslant \mathrm{syst}(V, f, g)$. Ainsi :

$$\widetilde{\mathrm{dist}}(\widetilde{v}'', \gamma \cdot \widetilde{v}'') \geqslant \mathrm{syst}(V, f, g).$$

Cette dernière inégalité étant valable pour tout $\widetilde{v}''$ dans $\widetilde{V''}$, on obtient le résultat souhaité, via le théorème 3.1. □

REMARQUE 3.10. — On peut toujours supposer, et ce sera le cas dans la suite, que le cycle géométrique initial (V, f, g) est normalisé : voir [3].

4. Preuve des théorèmes A et B

4.1. La preuve du théorème B. — On part d'un cycle géométrique (V, f, g) (normalisé, voir remarque ci-dessus et théorème 3.9) qui représente h tel que $\mathrm{syst}(V, f, g) = 2$. On choisit une partie V_0 de V, suffisamment dense dans V, ce qui permet de construire, pour $\varepsilon > 0$ suffisamment petit, le complexe cubique $K(V)$ ainsi que la pseudo-variété $V' = J(V)$ de $K(V)$ (voir la remarque 2.13).

Introduisons maintenant une notion particulière de volume d'une classe d'homologie a dans $H_n(K(V); \mathbb{Z})$. Pour a dans $H_n(K(V); \mathbb{Z})$, on considère l'ensemble $C(a)$ des pseudo-variétés de dimension n incluses dans $K(V)$ qui représentent a. On pose :

$$\mathrm{vol}(a) = \inf \{\mathrm{vol}(c) \mid c \in C(a)\} .$$

Notons, par abus, $[V']$ la classe d'homologie de $c_{V'}$ dans $K(V)$. On appellera *suite minimisante* (pour $\mathrm{vol}[V']$) une suite c_i de pseudo-variétés dans $K(V)$, homologues à V', telle que :

$$\mathrm{vol}(c_i) \underset{+\infty}{\longrightarrow} \mathrm{vol}[V'].$$

Si une suite minimisante (c_i) converge au sens de Hausdorff vers une partie compacte W de $K(V)$, on dira que W est *minimale* lorsqu'aucune partie propre de W (i.e. aucune partie incluse dans W et distincte de W) n'est limite de Hausdorff d'une autre suite minimisante c'_i dans $K(V)$.

Rappelons aussi ce qu'est la distance de Hausdorff. Soit (X, dist) un espace métrique. Notons $\mathcal{K}(X)$ l'ensemble de toutes les parties compactes de X. Pour $A \subset X$ et $\varepsilon > 0$, on pose :

$$\mathrm{tube}(A, \varepsilon) = \{x \in X \mid \mathrm{dist}(x, A) < \varepsilon\} .$$

Pour A et B dans $\mathcal{K}(X)$, la distance de Hausdorff entre A et B est :

$$\mathrm{dist}_{\mathcal{H}}(A, B) = \inf \{\varepsilon > 0 \mid A \subset \mathrm{tube}(B, \varepsilon) \;\text{ et }\; B \subset \mathrm{tube}(A, \varepsilon)\} .$$

On sait alors que $(\mathcal{K}(X), \mathrm{dist}_{\mathcal{H}})$ est un espace métrique, qui de plus est compact lorsque X l'est. On utilisera dans la suite les résultats suivants (voir [7]).

R1. *Si* (A_p) *est une suite dans* $\mathcal{K}(X)$ *telle que* $A_p \underset{+\infty}{\longrightarrow} A \in \mathcal{K}(X)$, *pour* $\mathrm{dist}_{\mathcal{H}}$, *alors* A *est exactement l'ensemble des limites des suites convergentes* (x_p) *dans* X *telles que* $x_p \in A_p$ *pour tout* $p \in \mathbb{N}$.
R2. *Si* (A_p) *est une suite décroissante (pour l'inclusion) dans* $\mathcal{K}(X)$, *alors elle converge pour* $\mathrm{dist}_{\mathcal{H}}$ *vers* $\bigcap_{p\in\mathbb{N}} A_p$ *dans* $\mathcal{K}(X)$.

Lemme 4.1. — *On peut choisir une suite minimisante* (V_i) *de pseudo-variétés dans* $K(V)$ *qui converge pour la distance de Hausdorff vers une partie compacte minimale, notée* W_∞, *de* $K(V)$.

Démonstration. — Soit $\mathcal{W}$ l'ensemble des parties compactes de $K(V)$ qui sont limites de Hausdorff de suites minimisantes, muni de la relation d'ordre partielle $\subset$. On montre que c'est un ensemble inductif au sens suivant : toute partie totalement ordonnée de $\mathcal{W}$ admet un minorant dans $\mathcal{W}$. Le lemme de Zorn fournira alors un élément minimal W_∞ de $\mathcal{W}$.

Soit $\mathcal{W}_0$ une partie totalement ordonnée de $\mathcal{W}$. On écrit $\mathcal{W}_0 = (W_\alpha)_{\alpha\in A}$. On considère :

$$K_\infty = \bigcap_{\alpha\in A} W_\alpha.$$

C'est une partie compacte de $K(V)$. On montre alors qu'il existe une suite $(W_i)_{i\in\mathbb{N}}$ dans $\mathcal{W}_0$, décroissante pour l'inclusion, telle que :

$$K_\infty = \bigcap_{i\in\mathbb{N}} W_i.$$

En effet, pour i dans $\mathbb{N}$, notons U_i le voisinage tubulaire ouvert de K_∞ de rayon 2^{-i} dans $K(V)$. Fixons i dans $\mathbb{N}$. Le complémentaire F_i de U_i dans $K(V)$ est un fermé de $K(V)$: c'est donc un compact. De plus, comme $K_\infty \subset F_i$, on a :

$$F_i \subset \bigcup_{\alpha\in A} O_\alpha,$$

où O_α est le complémentaire de W_α dans $K(V)$. Par compacité, il existe une partie finie B_i de A telle que :

$$F_i \subset \bigcup_{\beta\in B_i} O_\beta.$$

Ainsi, $\bigcap_{\beta\in B_i} W_\beta \subset U_i$.

Comme B_i est une partie finie de A, l'ensemble $\{W_\beta\}_{\beta\in B_i}$ admet un plus petit élément, que l'on note W_i. On a alors $W_i \in \mathcal{W}_0$ et $K_\infty \subset W_i \subset U_i$.

Il en résulte que : $K_\infty = \bigcap_{i\in\mathbb{N}} W_i$. Comme on peut de plus imposer $B_i \subset B_{i+1}$ pour tout $i \in \mathbb{N}$, la suite $(W_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

Montrons maintenant que $K_\infty \in \mathcal{W}$. Pour $j \in \mathbb{N}$, chaque W_j est dans $\mathcal{W}$: il existe donc une suite minimisante $(c_i^j)_{i\in\mathbb{N}}$ telle que :

$$c_i^j \xrightarrow[i\to+\infty]{H} W_j.$$

Pour tout j dans $\mathbb{N}$, il existe $k_j \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $i \geqslant k_j$ on ait :

$$\left|\mathrm{vol}(c_i^j) - \mathrm{vol}[V']\right| \leqslant 2^{-j}.$$

Puis, comme $c_i^j \xrightarrow{H} W_j$, il existe $\ell_j \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $i \geqslant \ell_j$, on ait :

$$\mathrm{dist}_{\mathcal{H}}(c_i^j, W_j) \leqslant 2^{-j} \tag{8}$$

On construit alors une suite minimisante (c'_j) en posant, pour tout j dans $\mathbb{N}$: $c'_j = c_{i_j}^j$ où $i_j = \max(k_j, \ell_j)$. Il s'agit bien d'une suite minimisante puisque pour tout j entier naturel on a :

$$\left|\mathrm{vol}(c'_j) - \mathrm{vol}[V']\right| \leqslant 2^{-j}.$$

Puis, on sait que $W_i \xrightarrow{H} K_\infty$ (c'est la propriété **R2**). Ainsi, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe j_0 entier tel que, pour tout $j \geqslant j_0$, on ait :

$$\mathrm{dist}_{\mathcal{H}}(W_j, K_\infty) \leqslant \varepsilon.$$

D'après (8) on a : $\mathrm{dist}_{\mathcal{H}}(c'_j, W_j) \leqslant 2^{-j}$. Pour $j \geqslant j_1$ convenable, on a donc :

$$\mathrm{dist}_{\mathcal{H}}(c'_j, K_\infty) \leqslant \varepsilon.$$

Ainsi, pour $j \geqslant \max(j_0, j_1)$, il vient, par inégalité triangulaire :

$$\mathrm{dist}_{\mathcal{H}}(c'_j, K_\infty) \leqslant \mathrm{dist}_{\mathcal{H}}(c'_j, K_\infty) + \mathrm{dist}_{\mathcal{H}}(K_\infty, W_j) \leqslant 2\varepsilon$$

ce qui prouve que la suite (c'_j) converge au sens de Hausdorff vers K_∞. Il en résulte que K_∞ est un minorant dans $\mathcal{W}$ de $\mathcal{W}_0$. □

On peut noter qu'il n'y a pas forcément unicité de la partie minimale compacte W_∞ de $K(V)$. On aura besoin, pour la suite, des deux résultats suivants.

Lemme 4.2. — *Soient $0 \leqslant \alpha \leqslant \beta$ et $c > 0$ des réels, ainsi que $a : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}_+^*$ et $v : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^+$ des fonctions. On suppose que :*

H1. Pour tout $R \in [\alpha, \beta]$ on a $v(R) \geqslant \int_\alpha^R a(t)\, dt$;
H2. Pour tout $R \in [\alpha, \beta]$ on a $v(R) \leqslant c[a(R)]^{\frac{n}{n-1}}$.

Alors, pour tout R dans $[\alpha, \beta]$, on a : $v(R) \geqslant \dfrac{1}{c^{n-1} n^n}(R - \alpha)^n$.

Démonstration. — Pour tout R dans $[\alpha,\beta]$, on pose $A(R)=\int_\alpha^R a(t)\,\mathrm{d}t$. Pour tout t dans $[\alpha,\beta]$, selon *H1* et *H2*, on a : $A(t)\leqslant c[A'(t)]^{\frac{n}{n-1}}$, ce qui amène :

$$\frac{A'(t)}{A(t)^{\frac{n-1}{n}}}\geqslant\left(\frac{1}{c}\right)^{\frac{n-1}{n}}.$$

En intégrant, pour R dans $[\alpha,\beta]$, on obtient :

$$n\left[A(R)^{\frac{1}{n}}-A(\alpha)^{\frac{1}{n}}\right]\geqslant\left(\frac{1}{c}\right)^{\frac{n-1}{n}}(R-\alpha).$$

Comme $A(\alpha)\geqslant 0$, il vient, pour tout $R\in[\alpha,\beta]$: $A(R)\geqslant\dfrac{1}{n^n c^{n-1}}(R-\alpha)^n$.

On utilise alors *H1* pour conclure. □

THÉORÈME 4.3 (Inégalité d'Eilenberg). — *Soient X un espace métrique et z un cycle de dimension n dans X. Il existe une constante E_n, qui ne dépend que de la dimension n, telle que pour toute application 1-lipschitzienne $f:X\to\mathbb{R}$ on ait :*

$$\mathrm{vol}(z\cap\{f\leqslant r\})\geqslant\int_0^r\mathrm{vol}(z\cap\{f=t\})\mathrm{d}t,$$

pour presque tout r dans $\mathbb{R}$. De plus, $z\cap\{f=r\}$ est un cycle de dimension $n-1$ pour presque tout $r\in\mathbb{R}$.

Pour ce résultat, je renvoie à [10] p. 21 et [8] p. 101. On va utiliser ce résultat avec $X=K(V)$ et la fonction $f=\mathrm{dist}(*,.)$ où $*$ est une partie de $K(V)$. L'hypothèse *H1* du lemme 4.2 est en fait l'inégalité d'Eilenberg.

Le lemme 4.1 nous autorise à prendre une suite minimisante (V_i) (pour $\mathrm{vol}[V']$) de pseudo-variétés dans $K(V)$, qui converge pour la distance de Hausdorff vers une partie compacte minimale W_∞ de $K(V)$.

Fixons maintenant $a\in]0,1[$ et $\rho>0$. On va alors démontrer le résultat suivant.

LEMME 4.4. — *Il existe une constante réelle $A_n>0$ (indépendante de a et ρ), et une extraction $\varphi:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ telle que, pour tout i dans $\mathbb{N}$, pour tout v dans $V_{\varphi(i)}$ et tout R dans $[a,1]$ on ait :*

$$\mathrm{vol}(c_{\varphi(i)}(R))\geqslant A_n(R-a)^n$$

où $c_i(R)=V_i\cap\mathrm{Tube}(B_i(v,R),\rho)$, $\mathrm{Tube}(B_i(v,R),\rho)$ désignant le voisinage tubulaire de rayon ρ de la boule $B_i(v,R)$ de V_i dans $K(V)$.

On raisonne par l'absurde. On suppose donc que :

($\mathscr{P}$) *Pour tout réel $A > 0$, il existe $i_0 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $i \geqslant i_0$, on ait l'existence de v_i dans V_i et de $R_i \in [a,1]$ pour lesquels :*

$$\mathrm{vol}(c_i(R_i)) < A(R_i - a)^n$$

où $c_i(R_i) = V_i \cap \mathrm{Tube}(B_i(v, R_i), \rho)$.

Pour aboutir à une contradiction, on va construire une suite minimisante de cycles pour le volume de la classe d'homologie $[V']$ qui va converger vers une partie propre de W_∞, ce qui contredira le caractère minimal de W_∞.

Pour simplifier la lecture de ce qui suit, notons, pour tout $t \geqslant 0$ et $i \geqslant i_0$ dans $\mathbb{N}$:

$$c_i(t) = V_i \cap \mathrm{Tube}(B_i(v_i, t), \rho) \quad \text{et} \quad z_i(t) = \partial c_i(t).$$

Fixons provisoirement $A > 0$. Comme la propriété ($\mathscr{P}$) est supposée vraie, il existe une suite (r_i) dans $[a, R_i]$ telle que :

$$\mathrm{vol}(c_i(r_i)) > \left(\frac{1}{An^n}\right)^{\frac{1}{n-1}} \mathrm{vol}(z_i(r_i))^{\frac{n}{n-1}} \tag{9}$$

où $z_i(r_i) = \partial c_i(r_i)$. En effet, cela résulte du lemme 4.2, appliqué aux réels $\alpha = a$, $\beta = R_i$ et aux fonctions $a(t) = \mathrm{vol}(z_i(t))$ et $v(t) = \mathrm{vol}(c_i(t))$.

Il vient alors :

$$\begin{aligned}\mathrm{vol}(z_i(r_i)) &< \left((An^n)^{\frac{1}{n-1}} \mathrm{vol}(c_i(r_i))\right)^{\frac{n-1}{n}} \\ &\leqslant A^{\frac{1}{n}} n \,\mathrm{vol}(c_i(r_i))^{\frac{n-1}{n}} \leqslant A^{\frac{1}{n}} n \,\mathrm{vol}(c_i(R_i))^{\frac{n-1}{n}} \\ &\leqslant A^{\frac{1}{n}} n\, A^{\frac{n-1}{n}} R_i^{\frac{n-1}{n}} \leqslant An.\end{aligned}$$

Supposons maintenant que :

$$An \leqslant \alpha_{n-1}, \tag{10}$$

où α_{n-1} est une des deux constantes définies par le théorème 2.14 (voir p. 740).

En vertu de ce théorème, il existe, pour tout $i \geqslant i_0$, une chaîne C_i de dimension n dans $K(V)$, dont le bord est $z_i(r_i)$, qui est contenue dans le voisinage tubulaire de rayon $\varepsilon_i = \beta_{n-1}\,\mathrm{vol}(z_i(r_i))^{\frac{1}{n-1}}$ et qui vérifie :

$$\mathrm{vol}(C_i) \leqslant \beta_{n-1} \mathrm{vol}(z_i(r_i))^{\frac{n}{n-1}}. \tag{11}$$

On considère maintenant la suite de cycles :

$$V_i' = V_i - c_i(r_i) + C_i \quad (i \geqslant i_0).$$

On va démontrer qu'il s'agit d'une suite minimisante pour le volume de la classe d'homologie $[V']$ qui (à une extraction près) converge (pour la distance de Hausdorff) vers une partie propre de W_∞.

Tout d'abord, pour $i \geqslant i_0$ et pour A petit, les V_i' sont homologues à V'. En effet, pour tout $i \geqslant i_0$, $\partial c_i(r_i) = \partial C_i = z_i(r_i)$ donc $C_i - c_i(r_i)$ est un cycle de dimension n dans $K(V)$. Puis on a pour $i \geqslant i_0$, en vertu de la propriété $(\mathscr{P})$ p. 753, $\mathrm{vol}(c_i(r_i)) \leqslant A$. Ainsi, pour $i \geqslant i_0$:

$$\begin{aligned}\mathrm{vol}(C_i - c_i(r_i)) &\leqslant \mathrm{vol}(c_i(r_i)) + \mathrm{vol}(C_i) \leqslant A + \beta_{n-1}\mathrm{vol}(z_i(r_i))^{\frac{n}{n-1}} \\ &\leqslant A + \beta_{n-1}\,(An^n)^{\frac{1}{n-1}}\,\mathrm{vol}(c_i(r_i)) \leqslant A + \beta_{n-1}(An)^{\frac{n}{n-1}}.\end{aligned}$$

Pour

$$A + \beta_{n-1}(An)^{\frac{n}{n-1}} \leqslant \alpha_n, \tag{12}$$

$C_i - c_i(r_i)$ est un bord selon le théorème 2.14.

Lemme 4.5. — *Pour un choix convenable de la constante A, on a :*

$$\lim_{i\to+\infty} \mathrm{vol}(V_i') = \mathrm{vol}[V'].$$

Démonstration. — Montrons tout d'abord que :

$$\mathrm{vol}(c_i(r_i)) - \mathrm{Vol\,Remp}\big(z_i(r_i) \subset K(V)\big) \underset{i\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

On raisonne par l'absurde. Supposons que, quitte à extraire, on ait, pour tout $i \geqslant i_0$, $\mathrm{vol}(c_i) - \mathrm{Vol\,Remp}\big(z_i(r_i) \subset K(V)\big) \geqslant \gamma > 0$. On considère la suite de cycles $V_i'' = V_i - c_i(r_i) + W_i$, où W_i est une chaîne de $K(V)$ telle que $\mathrm{vol}(W_i) \leqslant \mathrm{Vol\,Remp}\big(z_i(r_i) \subset K(V)\big) + \frac{\gamma}{2}$ et $\partial W_i = z_i$. On peut d'ailleurs supposer que $\mathrm{vol}(W_i) \leqslant \mathrm{vol}(c_i(r_i))$

Pour $i \geqslant i_0$, chaque V_i'' est encore homologue à V', à condition que A soit suffisamment petit. En effet, pour $i \geqslant i_0$, $W_i - c_i(r_i)$ est un cycle de dimension n dans $K(V)$, et on a (grâce à la propriété $(\mathscr{P})$) :

$$\mathrm{vol}(W_i - c_i(r_i)) \leqslant \mathrm{vol}(c_i(r_i)) + \mathrm{vol}(W_i) \leqslant 2A.$$

Ainsi, toujours par le théorème 2.14, le cycle $W_i - c_i(r_i)$ est un bord dès que :

$$A \leqslant \frac{\alpha_n}{2}. \tag{13}$$

Or

$$\begin{aligned}\mathrm{vol}(V_i'') &\leqslant \mathrm{vol}(V_i - c_i(r_i)) + \mathrm{vol}(W_i) \\ &\leqslant \mathrm{vol}(V_i) - \mathrm{vol}(c_i(r_i)) + \mathrm{Vol\,Remp}\big(z_i(r_i) \subset K(V)\big) + \tfrac{\gamma}{2} \\ &\leqslant \mathrm{vol}(V_i) - \gamma + \tfrac{\gamma}{2} \leqslant \mathrm{vol}(V_i) - \tfrac{\gamma}{2}.\end{aligned}$$

Il en résulte que, pour i grand, $\mathrm{vol}(V_i'') < \mathrm{vol}[V']$, ce qui contredit la définition de $\mathrm{vol}[V']$. On a donc :

$$\mathrm{vol}(c_i(r_i)) - \mathrm{Vol\,Remp}\big(z_i(r_i) \subset K(V)\big) \underset{i\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \tag{14}$$

Puis, pour tout $i \geqslant i_0$, on a :

$$\begin{aligned}\operatorname{vol}(c_i(r_i)) - \operatorname{Vol}\operatorname{Remp}\big(z_i(r_i) \subset K(V)\big) &\geqslant \\ \frac{1}{(An^n)^{\frac{1}{n-1}}} \operatorname{vol}(z_i(r_i))^{\frac{n}{n-1}} &- \beta_{n-1}\operatorname{vol}(z_i(r_i))^{\frac{n}{n-1}} \\ &\geqslant \left(\left(\frac{1}{An^n}\right)^{\frac{1}{n-1}} - \beta_{n-1}\right)\operatorname{vol}(z_i(r_i))^{\frac{n}{n-1}}.\end{aligned}$$

On se demande alors s'il est loisible de choisir A de sorte que (10), (12) et (13) soient vraies avec la contrainte :

$$\left(\frac{1}{An^n}\right)^{\frac{1}{n-1}} - \beta_{n-1} > 0.$$

Mais on a :

$$\left(\frac{1}{An^n}\right)^{\frac{1}{n-1}} - \beta_{n-1} > 0 \Leftrightarrow \frac{1}{An^n} > \beta_{n-1}^{n-1} \Leftrightarrow \frac{1}{\beta_{n-1}^{n-1} n^n} > A.$$

Ainsi, on peut choisir A tel que $\left(\frac{1}{An^n}\right)^{\frac{1}{n-1}} - \beta_{n-1} > 0$ de sorte que (10), (12) et (13) soient vraies. Or, pour tout $i \geqslant i_0$, on a :

$$\begin{aligned}\operatorname{vol}(c_i(r_i)) - \operatorname{Vol}\operatorname{Remp}\big(z_i(r_i) \subset K(V)\big) &\geqslant \\ \left(\left(\frac{1}{An^n}\right)^{\frac{1}{n-1}} - \beta_{n-1}\right)\operatorname{vol}(z_i(r_i))^{\frac{n}{n-1}} &\geqslant 0.\end{aligned}$$

Par sandwich, avec (14), on obtient $\operatorname{vol}(z_i(r_i)) \underset{+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Selon (11), on obtient $\operatorname{vol}(C_i) \underset{+\infty}{\longrightarrow} 0$ et $\operatorname{Vol}\operatorname{Remp}\big(z_i(r_i) \subset K(V)\big) \underset{+\infty}{\longrightarrow} 0$. Selon (14), on peut conclure que $\operatorname{vol}(c_i(r_i)) \underset{+\infty}{\longrightarrow} 0$. □

Lemme 4.6 (Ou pourquoi il n'y a pas de doigt). — *Quitte à extraire, la suite (V_i') converge pour la distance de Hausdorff vers une partie compacte propre W_1 de W_∞.*

Démonstration du lemme 4.6. — Quitte à extraire, la suite (V_i') converge pour la distance de Hausdorff vers une partie compacte W_1 de $K(V)$. On exhibe alors un point $w \in W_\infty$ qui n'est limite d'aucune suite (w_i) telle que $w_i \in V_i'$ pour tout $i \geqslant i_0$. Rappelons que $c_i(r_i) = V_i \cap \operatorname{Tube}\big(B(v_i, r_i), \rho\big)$, de sorte que, pour tout $i \geqslant i_0$, on a $\operatorname{dist}(v_i, z_i(r_i)) \geqslant \rho$, où « dist » désigne la distance dans $K(V)$.

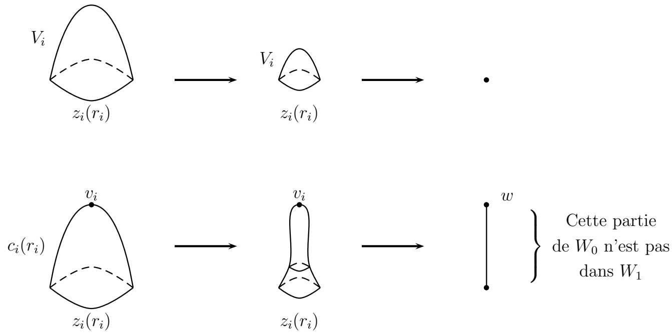

FIGURE 6. Couper les doigts

Quitte à négliger une nouvelle extraction, on peut supposer que l'on a : $v_i \underset{+\infty}{\longrightarrow} w \in W_\infty$.

Considérons une suite (w_i) telle que, pour tout $i \geqslant i_0$, on ait $w_i \in C_i$. Rappelons nous aussi que C_i est contenue dans le voisinage tubulaire de rayon $\varepsilon_i = \beta_{n-1}\mathrm{vol}(z_i(r_i))^{\frac{1}{n-1}}$ de $z_i(r_i)$ et que l'on a $\varepsilon_i \underset{+\infty}{\longrightarrow} 0$.

A partir d'un certain rang, on aura donc $\mathrm{dist}(w_i, w) \geqslant \frac{\rho}{2}$, puisque $\mathrm{dist}(z_i(r_i), v_i) \geqslant \rho$. En effet :

$$\mathrm{dist}(z_i(r_i), v_i) \leqslant \mathrm{dist}(z_i(r_i), w_i) + \mathrm{dist}(w_i, w) + \mathrm{dist}(w, v_i)$$

et $\mathrm{dist}(z_i(r_i), w_i) \underset{+\infty}{\longrightarrow} 0$, $\mathrm{dist}(w, v_i) \underset{+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Le point w ne peut être limite d'une suite (w_i) telle que $w_i \in C_i$ pour tout $i \geqslant i_0$. Mais, pour tout $w_i' \in V_i' \setminus C_i$, on a $\mathrm{dist}(v_i, w_i') \geqslant \rho$: ainsi w ne peut être limite d'une suite (w_i) telle que $w_i \in V_i'$ à partir d'un certain rang. Selon le résultat **R1** (p. 750), $w \notin W_1$.

Montrons enfin que $W_1 \subset W_\infty$. Soit $w_1 \in W_1$. Il existe alors une suite (v_i') dans $K(V)$ telle que $v_i' \underset{+\infty}{\longrightarrow} w_1$ et $v_i' \in V_i'$ à partir d'un certain rang. Supposons, qu'à partir d'un certain rang, on ait $v_i' \notin C_i$. Le point w_1 est donc dans W_∞, d'après le résultat **R1**. Sinon, quitte à extraire, on peut supposer que $v_i' \in C_i$ à partir d'un certain rang. Dans ce cas, $\mathrm{dist}(z_i(r_i), v_i') \underset{+\infty}{\longrightarrow} 0$. Il existe donc une suite (x_i) dans $K(V)$ telle que $x_i \in z_i(r_i)$ et $\mathrm{dist}(x_i, v_i') \underset{+\infty}{\longrightarrow} 0$. Par compacité, quitte à extraire, on peut supposer que $x_i \underset{+\infty}{\longrightarrow} x$. D'après le résultat **R1**, $x \in W_\infty$. Mais, par inégalité triangulaire, on obtient $v_i' \underset{+\infty}{\longrightarrow} x$. Par unicité de la limite, il vient $w_1 \in W_\infty$.

En conclusion, W_1 est une partie compacte propre de W_∞ qui est limite d'une suite minimisante de pseudo-variétés, ce qui contredit le caractère minimal de W_∞. □

Le lemme 4.4 est alors prouvé. Ce lemme étant vrai pour ρ arbitrairement petit, le théorème B est alors démontré, la métrique riemannienne lisse par morceaux sur les pseudo-variétés V_i étant celle fournie par la remarque 1.5 p. 733. L'application f_i étant égale à la restriction de F à chaque V_i (voir, pour les notations, le lemme 3.7 et la p. 747).

4.2. La démonstration du théorème A. — Fixons $\varepsilon > 0$. On prend un cycle géométrique normalisé (V_1, f_1, g_1) tel que $\operatorname{syst}(V_1, f_1, g_1) = 2$ et $\sigma(V_1, f_1, g_1) \leqslant \sigma(h) + \varepsilon_1$ où $\varepsilon_1 > 0$ est petit. Pour $\varepsilon_2 > 0$, suffisamment petit, et V_0 une partie suffisamment dense de V_1, on peut construire le complexe $K(V_1)$, ainsi que le plongement $V' = R_{\varepsilon_2} \circ I_0(V_1)$ de V_1 dans $K(V_1)$. L'application $R_{\varepsilon_2} \circ I_0$ étant lipschitzienne de rapport $\dfrac{1}{1-2\varepsilon_2}$, on a :

$$\operatorname{vol}(V') \leqslant \left(\frac{1}{1-2\varepsilon_2}\right)^n \operatorname{vol}(V_1, g_1).$$

Puis, le théorème B nous donne, pour tout a fixé dans $]0,1]$, une suite (V_i, f_i, g_i) de cycles géométriques, qui représentent la classe d'homologie h, telle que :

1. $\operatorname{vol}(V_i) \underset{+\infty}{\longrightarrow} \operatorname{vol}[V']$;
2. Pour $R \in [a,1]$, les boules $B(R)$ de rayon R dans chaque V_i vérifient :

$$\operatorname{vol}(B(R)) \geqslant A_n (R-a)^n \tag{15}$$

Comme $\operatorname{vol}[V'] \leqslant \operatorname{vol}(V', g_0)$, il vient $\operatorname{vol}[V'] \leqslant \left(\dfrac{1}{1-2\varepsilon_2}\right)^n \operatorname{vol}(V_1, g_1)$.

Soit $\varepsilon_3 > 0$. Pour i suffisamment grand, puisque $\operatorname{vol}(V_i) \underset{+\infty}{\longrightarrow} \operatorname{vol}[V']$, on a :

$$\operatorname{vol}(V_i) \leqslant (1+\varepsilon_3) \left(\frac{1}{1-2\varepsilon_2}\right)^n \operatorname{vol}(V_1, g_1) \tag{16}$$

Or $\operatorname{vol}(V_i, g_i) = \operatorname{vol}(V_i)$, et, d'après le théorème 3.9, on a :

$$2 = \operatorname{syst}(V_1, f_1, f_1)) \leqslant \operatorname{syst}(V_i, f_i, g_i).$$

Il en résulte que :

$$\begin{aligned}\sigma(V_i, f_i, g_i) &\leqslant (1+\varepsilon_3) \left(\frac{1}{1-2\varepsilon_2}\right)^n \sigma(V_1, f_1, g_1)\\ &\leqslant (1+\varepsilon_3) \left(\frac{1}{1-2\varepsilon_2}\right)^n (\sigma(h) + \varepsilon_1).\end{aligned}$$

Un choix judicieux de ε_1, ε_2 et ε_3 permet d'obtenir, pour i suffisamment grand :

$$\sigma(V_i, f_i, g_i) \leqslant \sigma(h) + \varepsilon.$$

Puis on a $\sigma(h) \leqslant \dfrac{\operatorname{vol}(V_i, g_i)}{\operatorname{syst}(V_i, f_i, g_i)^n}$, donc, en utilisant l'inégalité $\sigma(V_1, f_1, g_1) \leqslant \sigma(h) + \varepsilon_1$, on obtient :

$$\sigma(V_1, f_1, g_1) - \varepsilon_1 \leqslant \sigma(h) \leqslant \sigma(V_i, f_i, g_i).$$

Cela amène :

$$\operatorname{vol}(V_1, f_1, g_1) - 2^n \varepsilon_1 \leqslant \frac{2^n}{\operatorname{syst}(V_i, f_i, g_i)^n} \operatorname{vol}(V_i, g_i).$$

A partir d'un certain rang, on obtient finalement, en utilisant l'inégalité (16),

$$\operatorname{syst}(V_i, f_i, g_i)^n \leqslant 2^n \frac{\operatorname{vol}(V_i, g_i)}{\operatorname{vol}(V_1, f_1, g_1) - 2^n \varepsilon_1} \leqslant 2^n (1 + \varepsilon_4),$$

pour tout $\varepsilon_4 > 0$ fixé à l'avance.

Techniquement, on a donc prouvé que, pour tout $\varepsilon > 0$, $a > 0$ et $b > 0$ petits, il existe un cycle géométrique (V, f, g) représentant h tel que

$$\sigma(V, f, g) \leqslant \sigma(h) + \varepsilon \quad \text{et} \quad \operatorname{vol}(B(R)) \geqslant A_n (R - a)^n$$

pour tout $R \in [a, \frac{1}{2}\operatorname{syst}(V, f, g) - b]$, ce qui achève la preuve du théorème A.

5. Autour du théorème A et de sa démonstration

Je vais, dans ce paragraphe, donner quelques conséquences immédiates du théorème A et commenter quelques notions rencontrées, notamment donner une définition alternative des cycles réguliers.

5.1. Quelques conséquences du théorème A. — La première conséquence concerne le volume systolique d'une classe d'homologie non nulle dans $H_n(\pi; \mathbb{Z})$, lorsque π est un groupe de présentation finie.

THÉORÈME 5.1. — *Soient π un groupe de présentation finie et $n \geqslant 1$. Il existe une constante $C_n > 0$, qui ne dépend que de n, telle que pour toute classe d'homologie non nulle h dans $H_n(\pi; \mathbb{Z})$ on ait :*

$$\sigma(h) \geqslant C_n.$$

Démonstration. — Soit $h \in H_n(\pi; \mathbb{Z})$. Fixons provisoirement $\varepsilon > 0$. Il existe alors, selon le théorème A, un cycle géométrique ε-régulier (V, f, g) qui représente la classe h. Soit $v \in V$. On a alors :

$$\operatorname{vol}(V, g) \geqslant \operatorname{vol}\big(B(v, \tfrac{1}{2}\operatorname{syst}(V, f, g))\big) \geqslant \frac{A_n}{2^n} \operatorname{syst}(V, f, g)^n.$$

Il en résulte que $\sigma(V,f,g) \geqslant \dfrac{A_n}{2^n}$. Ainsi :

$$\sigma(h) + \varepsilon \geqslant \frac{A_n}{2^n}.$$

En faisant tendre ε vers 0, on obtient le résultat souhaité, avec $C_n = \dfrac{A_n}{2^n}$. □

On peut alors en déduire une preuve de l'inégalité systolique de Gromov.

INÉGALITÉ SYSTOLIQUE DE GROMOV 5.2. — *Il existe une constante $C_n > 0$ telle que pour toute variété essentielle et orientable M de dimension n on ait :*

$$\sigma(M) \geqslant C_n.$$

Démonstration. — Soit M une variété essentielle orientable de dimension n, de groupe fondamental π. Il existe une application $f : M \to K(\pi,1)$, unique à homotopie près, telle que la classe $h = f_*[M]$ soit non nulle, où

$$f_* : H_n(M;\mathbb{Z}) \to H_n(\pi;\mathbb{Z})$$

est le morphisme induit en homologie. D'après le théorème 5.1, on a $\sigma(h) \geqslant C_n$, pour une constante universelle $C_n > 0$ qui ne dépend que de n. Mais (M,f) est une représentation normalisée admissible de h : selon [5], on a $\sigma(M) = \sigma(h)$. □

On peut trouver une démonstration de l'inégalité systolique de Gromov dans [1], même pour des variétés non orientables, qui utilise les courants dans les espaces métriques.

5.2. Cycles réguliers et remplissage. — Considérons un complexe L, muni d'une métrique riemannienne lisse par morceaux, dans lequel les cycles vérifient une inégalité isopérimétrique semblable à celle du théorème 2.14. Plus précisément on suppose que la propriété suivante est vérifiée dans L.

Inégalité isopérimétrique dans L. — Pour tout cycle z de dimension n dans L, il existe une constante c_n telle que :

$$\operatorname{Vol}\operatorname{Remp}(z \subset L) \leqslant c_n[\operatorname{vol}(z)]^{\frac{n+1}{n}}. \tag{17}$$

DÉFINITION 5.3. — Soit (V,f,g) un cycle géométrique inclus L, g étant la métrique induite par celle de L. Soit $\varepsilon \in]0, \frac{1}{2}\operatorname{syst}(V,f,g)[$. On dira que (V,f,g) est *à remplissage ε-régulier* lorsque pour tout R dans $[\varepsilon, \frac{1}{2}\operatorname{syst}(V,f,g)[$, les boules $B_V(R)$ de rayon R dans V vérifient :

$$\operatorname{vol}(B_V(R)) \leqslant (1+\varepsilon)\operatorname{Vol}\operatorname{Remp}(\partial B_V(R) \subset L) \tag{18}$$

REMARQUE 5.4. — Comparer avec la définition donnée en [10], **6.4** p. 70.

THÉORÈME 5.5. — *Soit (V, f, g) un cycle géométrique à remplissage ε-régulier dans L. Pour tout R dans $[\varepsilon, \frac{1}{2}\mathrm{syst}(V, f, g)[$, Les boules $B_V(R)$ de rayon R dans V vérifient :*

$$\mathrm{vol}(B_V(R)) \geqslant C_n(R-\varepsilon)^n,$$

pour une certaine constante C_n qui ne dépend que de n.

Démonstration. — Soit $R \in [\varepsilon, \frac{1}{2}\mathrm{syst}(V, f, g)[$. On pose $z(R) = \partial B_V(R)$, qui est un cycle de dimension $n-1$ dans L. Avec les inégalités (17) et (18), on obtient :

$$\mathrm{vol}(B_V(R)) \leqslant (1+\varepsilon)C_n[\mathrm{vol}(\partial B_V(R))]^{\frac{n+1}{n}}.$$

Le lemme 4.2 assure alors que :

$$\mathrm{vol}\big(B_V(R)\big) \geqslant \frac{1}{(1+\varepsilon)^{n-1}C_n^{n-1}(n)^n}\,(R-\varepsilon)^n,$$

ce qui est le résultat souhaité avec $C_n = \dfrac{1}{(2c_n)^{n-1}(n)^n}$. □

REMARQUE 5.6. — Assurer l'existence de cycles à remplissage ε-régulier dans le complexe $K(V)$ pourrait permettre de démontrer le théorème A. Mais une telle existence n'est pas plus facile à établir que la démarche proposée ici dans la preuve du théorème A.

BIBLIOGRAPHIE

[1] L. AMBROSIO & M. G. KATZ – « Flat currents modulo p in metric spaces and filling radius inequalities », *Comment. Math. Helv.* **86** (2011), p. 557–591.

[2] I. K. BABENKO – « Forte souplesse intersystolique de variétés fermées et de polyèdres », *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)* **52** (2002), p. 1259–1284.

[3] ———, « Topologie des systoles unidimensionnelles », *Enseign. Math.* **52** (2006), p. 109–142.

[4] ———, « Addenda à l'article intitulé "Topologie des systoles unidimensionnelles" », *Enseign. Math.* **54** (2008), p. 397–398.

[5] I. K. BABENKO & F. BALACHEFF – « Distribution of the systolic volume of homology classes », *Algebr. Geom. Topology* **15** (2015), p. 733–767.

[6] M. BRUNNBAUER – « Homological invariance for asymptotic invariants and systolic inequalities », *Geom. Funct. Anal.* **18** (2008), p. 1087–1117.

[7] D. BURAGO, Y. BURAGO & S. IVANOV – *A course in metric geometry*, Graduate Studies in Math., vol. 33, Amer. Math. Soc., 2001.

[8] Y. D. BURAGO & V. A. ZALGALLER – *Geometric inequalities*, Grund. Math. Wiss., vol. 285, Springer, 1988.

[9] J. Cheeger, W. Müller & R. Schrader – « On the curvature of piecewise flat spaces », *Commun. Math. Phys.* **92** (1984), p. 405–454.

[10] M. Gromov – « Filling Riemannian manifolds », *J. Differential Geom.* **18** (1983), p. 1–147.

[11] ______, « Systoles and intersystolic inequalities », in *Actes de la Table Ronde de Géométrie Différentielle (Luminy, 1992)*, Sémin. Congr., vol. 1, Soc. Math. France, 1996, p. 291–362.

[12] ______, *Metric structures for Riemannian and non-Riemannian spaces*, Progress in Math., vol. 152, Birkhäuser, 1999.

[13] L. Guth – « Notes on Gromov's systolic estimate », *Geom. Dedicata* **123** (2006), p. 113–129.

[14] A. Hatcher – *Algebraic topology*, Cambridge Univ. Press, 2002.

[15] S. Ivanov – « Volumes and areas of Lipschitz metrics », *St. Petersbg. Math. J.* **20** (2009), p. 381–405.

[16] M. G. Katz – *Systolic geometry and topology*, AMS Mathematical Surveys and Monographs, vol. 137, 2007.

[17] S. Sabourau – « Systolic volume and minimal entropy of aspherical manifolds », *J. Differential Geom.* **74** (2006), p. 155–176.

[18] E. H. Spanier – *Algebraic topology*, Springer, 1995.

[19] S. Wenger – « A short proof of Gromov's filling inequality », *Proc. Amer. Math. Soc.* **136** (2008), p. 2937–2941.