Bulletin
de la SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

SUR CERTAINS COMPLÉTÉS UNITAIRES UNIVERSELS EXPLICITES POUR $\mathrm{GL}_2(F)$

Marco De Ieso

Tome 143
Fascicule 4

2015

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE
Publié avec le concours du Centre national de la recherche scientifique
pages 635-678

Le *Bulletin de la Société Mathématique de France* est un périodique trimestriel de la Société Mathématique de France.

Fascicule 4, tome 143, décembre 2015

Diffusion

Maison de la SMF
Case 916 - Luminy
13288 Marseille Cedex 9
France
smf@smf.univ-mrs.fr

Hindustan Book Agency
O-131, The Shopping Mall
Arjun Marg, DLF Phase 1
Gurgaon 122002, Haryana
Inde

AMS
P.O. Box 6248
Providence RI 02940
USA
www.ams.org

Tarifs

Vente au numéro : 43 € (\$ 64)
Abonnement Europe : 176 €, hors Europe : 193 € (\$ 290)
Des conditions spéciales sont accordées aux membres de la SMF.

Secrétariat : Nathalie Christiaën

Bulletin de la Société Mathématique de France
Société Mathématique de France
Institut Henri Poincaré, 11, rue Pierre et Marie Curie
75231 Paris Cedex 05, France
Tél : (33) 01 44 27 67 99 • Fax : (33) 01 40 46 90 96
revues@smf.ens.fr • http://smf.emath.fr/

ISSN 0037-9484

Directeur de la publication : Marc PEIGNÉ

Bull. Soc. math. France
143 (4), 2015, p. 635–678

SUR CERTAINS COMPLÉTÉS UNITAIRES UNIVERSELS EXPLICITES POUR $\mathrm{GL}_2(F)$

PAR MARCO DE IESO

RÉSUMÉ. — Dans cet article, nous donnons une description explicite du complété unitaire universel de certaines représentations localement $\mathbb{Q}_p$-analytiques de $\mathrm{GL}_2(F)$, où F est une extension finie de $\mathbb{Q}_p$ et généralisant ainsi des résultats de Berger-Breuil pour $F = \mathbb{Q}_p$. Pour cela, nous utilisons certains espaces de Banach de fonctions de classe C^r sur $\mathcal{O}_F$, avec r dans $\mathbb{R}_{\geq 0}$.

ABSTRACT (*On some explicit Universal Unitary Completion for* $\mathrm{GL}_2(F)$)
In this paper we give an explicit description of the universal unitary completion of some locally $\mathbb{Q}_p$-analytic representations of $\mathrm{GL}_2(F)$, with F a finite extension of $\mathbb{Q}_p$, what generalizes a previous work of Berger-Breuil for $F = \mathbb{Q}_p$. To this aim, we use some Banach spaces of C^r functions on $\mathcal{O}_F$, with $r \in \mathbb{R}_{\geq 0}$.

1. Introduction, notations et énoncé des résultats

1.1. Introduction. — Soit p un nombre premier. La dernière décennie a vu l'émergence et la preuve d'une correspondance locale p-adique entre certaines représentations continues de dimension 2 de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p)$ et certaines représentations de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$. Cette correspondance, qui a pris le nom de correspondance de Langlands p-adique pour $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$, a été initiée par Breuil [5, 6], puis établie

Texte reçu le 30 février 2012, révisé et accepté le 18 février 2013.

MARCO DE IESO, Bâtiment 430, Université Paris-Sud, 91405, Orsay Cedex, France •
E-mail : `Marco.DeIeso@math.u-psud.fr`

Classification mathématique par sujets (2000). — 11F, 11S, 20C, 20G, 22E, 26E30.

Mots clefs. — Correspondance de Langlands locale p-adique, complété unitaire universel, représentation localement analytique.

par Colmez [12] et Paškūnas [22] à la suite de travaux de Berger-Breuil [3] et Colmez [11].

Si F est une extension finie non triviale de $\mathbb{Q}_p$, la question d'associer des représentations p-adiques de $G \stackrel{\text{déf}}{=} \mathrm{GL}_2(F)$ aux représentations p-adiques de dimension 2 de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/F)$ dans l'esprit d'une correspondance locale à la Langlands est loin d'être résolue et les résultats obtenus pour l'instant sont très partiels. En utilisant principalement les travaux de Frommer [17] et de Schraen [27] sur la filtration de Jordan-Hölder des induites paraboliques localement $\mathbb{Q}_p$-analytiques, Breuil [8] définit cependant une représentation localement $\mathbb{Q}_p$-analytique $\Pi(V)$ de G pour la plupart des représentations cristallines V de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/F)$ de dimension 2 et à poids de Hodge-Tate distincts. En général, la représentation $\Pi(V)$ ne permet pas de reconstruire la représentation galoisienne de départ, mais l'on s'attend toutefois à ce qu'elle intervienne comme sous-objet de la bonne représentation, ce qui fait des complétés unitaires universels de ses constituants fondamentaux des objets pertinents.

L'objet du présent article est de donner une description explicite du complété unitaire universel de certaines induites paraboliques localement $\mathbb{Q}_p$-analytiques, et notamment de celles qui interviennent dans la construction de la représentation $\Pi(V)$). L'espoir qu'une telle description est possible provient de [3, Theorème 4.3.1], où les auteurs décrivent le complété unitaire universel d'une induite parabolique localement algébrique de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ à l'aide de l'espace des fonctions de classe C^r sur $\mathbb{Z}_p$, où r est un nombre rationnel positif qui dépend de l'induite considerée.

Pour cela, nous avons introduit et étudié dans [13] une nouvelle notion de fonction de classe C^r sur $\mathcal{O}_F$, où r désigne un nombre rationnel positif et $\mathcal{O}_F$ l'anneau des entiers de F. Cette notion s'appuie principalement sur des travaux d'Amice, Amice-Velù, Colmez, Van der Put et Vishik [1, 2, 10, 23, 30] et repose sur l'idée cruciale suivante : une fonction $f\colon \mathcal{O}_F \to E$ est de classe C^r si $f(x+y)$ a un développement limité à l'ordre $[r]$, où $[r]$ désigne la partie entière de r, en tout x et si le reste est $o(|y|^r)$ uniformément en x.

Tester la non nullité des complétés unitaires universels que nous avons construits est, en général, une question délicate qui n'est complétement résolue que pour $F = \mathbb{Q}_p$ [3, Corollaire 5.3.1] via la théorie des (φ, Γ)-modules de Fontaine [16]. Mentionnons par ailleurs que [3, Theorème 4.3.1] est un ingrédient important dans la preuve de ce résultat. Toutefois, on démontre la non nullité dans quelques cas à partir de résultats de Vignéras [29], qui furent redemontrés par Kazhdan et de Shalit [18], et de [14].

Remerciements. — Je remercie vivement mon directeur de thèse Christophe Breuil. L'idée de pouvoir donner une description explicite de ces espaces lui est

due. Je lui suis reconnaissant pour ses conseils, pour ses très nombreuses remarques et pour avoir suivi attentivement l'évolution de ce travail. Je remercie Benjamin Schraen pour avoir répondu à mes questions et pour avoir lu avec intérêt une version préliminaire de ce travail. Ses remarques ont été pour moi très précieuses. Je remercie Arno Kret pour avoir écouté mes idées ainsi que pour les suggestions qu'il a apportées.

1.2. Notations. — Soit p un nombre premier. On fixe une clôture algébrique $\overline{\mathbb{Q}}_p$ de $\mathbb{Q}_p$ et une extension finie F de $\mathbb{Q}_p$ contenue dans $\overline{\mathbb{Q}}_p$. On désignera toujours par E une extension finie de $\mathbb{Q}_p$ qui vérifie :

$$|S| = [F : \mathbb{Q}_p], \text{ où } S \overset{\text{déf}}{=} \mathrm{Hom}_{\mathrm{alg}}(F, E).$$

Si L désigne l'un des corps F ou E, on note $\mathcal{O}_L$ son anneau des entiers, on en une uniformisante ϖ_L et l'on note $k_L = \mathcal{O}_L/(\varpi_L)$ son corps résiduel. On pose $f = [k_F : \mathbb{F}_p]$, $q = p^f$ et l'on désigne par e l'indice de ramification de F sur $\mathbb{Q}_p$, de sorte que $[F : \mathbb{Q}_p] = ef$.

La valuation p-adique val_F sur $\overline{\mathbb{Q}}_p$ est normalisée par $\mathrm{val}_F(p) = [F : \mathbb{Q}_p]$ et l'on pose $|x| = p^{-\mathrm{val}_F(x)}$ si $x \in \overline{\mathbb{Q}}_p$.

Si $a \in F$ et $n \in \mathbb{Z}$, on note $D(a, n) = a + \varpi_F^n \mathcal{O}_F$ le disque de centre a et de rayon q^{-n}.

On désigne par G le groupe $\mathrm{GL}_2(F)$, par T le tore déployé des matrices diagonales de G et par P le sous-groupe de Borel formé des matrices triangulaires supérieures de G.

Soit S' un sous-ensemble de S. Si $\underline{n}_{S'} = (n_\sigma)_{\sigma \in S'}$ et $\underline{m}_{S'} = (m_\sigma)_{\sigma \in S'}$ sont des $|S'|$-uplets d'entiers positifs ou nuls, nous posons :

(i) $\underline{n}_{S'}! \overset{\text{déf}}{=} \prod_{\sigma \in S'} n_\sigma!$;
(ii) $|\underline{n}_{S'}| \overset{\text{déf}}{=} \sum_{\sigma \in S'} n_\sigma$;
(iii) $\underline{n}_{S'} - \underline{m}_{S'} \overset{\text{déf}}{=} (n_\sigma - m_\sigma)_{\sigma \in S'}$;
(iv) $\underline{n}_{S'} \leqslant \underline{m}_{S'}$ si $n_\sigma \leq m_\sigma$ pour tout $\sigma \in S'$;
(v) $\binom{\underline{n}_{S'}}{\underline{m}_{S'}} \overset{\text{déf}}{=} \frac{\underline{n}_{S'}!}{\underline{m}_{S'}!(\underline{n}_{S'} - \underline{m}_{S'})!}$;
(vi) pour tout $z \in \mathcal{O}_F$, $z^{\underline{n}_{S'}} \overset{\text{déf}}{=} \prod_{\sigma \in S'} \sigma(z)^{n_\sigma}$.

Pour alléger l'écriture, nous notons $\underline{n}$ au lieu de $\underline{n}_S$ un $|S|$-uplet d'entiers positifs ou nuls.

Enfin, si V est un E-espace vectoriel topologique, on note $V^\vee$ son dual topologique muni de la topologie forte [24, §9].

1.3. Énoncé des résultats. — L'énoncé du résultat principal nécessite l'introduction d'un certain nombre de constructions. Soit J une partie de S et soit $\underline{d}_{S\backslash J}$ un $|S\backslash J|$-uplet d'entiers positifs ou nuls. Soient χ_1, χ_2 deux caractères localement J-analytiques de $F^\times$ dans $E^\times$. Nous renvoyons le lecteur à la définition 4.1 pour la notion de localement J-analytique.

Posons :

$$J' = J \coprod \{\sigma \in S\backslash J, d_\sigma + 1 > -\mathrm{val}_{\mathbb{Q}_p}(\chi_1(p))\}.$$

Notons $\chi_1 \otimes \chi_2$ le caractère de T défini par :

$$(\chi_1 \otimes \chi_2)(\left[\begin{smallmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{smallmatrix}\right]) = \chi_1(a)\chi_2(d),$$

ainsi que la représentation localement J-analytique de P qu'il définit par inflation. Notons :

- $\left(\mathrm{Ind}_P^G \chi_1 \otimes \chi_2\right)^{J\text{-an}}$ l'induite parabolique localement J-analytique, définie comme l'espace des fonctions localement J-analytiques $f\colon G \to E$ telles que $f(bg) = (\chi_1 \otimes \chi_2)(b) f(g)$ sur lequel G agit par translations à droite ;
- $(\mathrm{Sym}^{d_\sigma} E^2)^\sigma$, pour $\sigma \in S$ et $d_\sigma \in \mathbb{N}$, la représentation algébrique irréductible de $\mathrm{GL}_2 \otimes_{F,\sigma} E$ dont le plus haut poids vis-à-vis de P est $\chi_\sigma\colon \mathrm{diag}(x_1, x_2) \mapsto \sigma(x_2)^{d_\sigma}$.

Considérons la représentation localement $\mathbb{Q}_p$-analytique suivante de G :

$$I(\chi, J, \underline{d}_{S\backslash J}) \overset{\text{déf}}{=} \Big(\bigotimes_{\sigma \in S\backslash J} (\mathrm{Sym}^{d_\sigma} E^2)^\sigma\Big) \otimes_E \left(\mathrm{Ind}_P^G \chi_1 \otimes \chi_2\right)^{J\text{-an}}.$$

Remarquons tout d'abord que $I(\chi, J, \underline{d}_{S\backslash J})$ définit un faisceau sur $\mathbf{P}^1(F)$ dont les sections globales sont les fonctions $f\colon F \to E$ qui vérifient les deux conditions suivantes :

(i) $f|_{\mathcal{O}_F}$ définit un élément de $\mathcal{F}(\mathcal{O}_F, J, \underline{d}_{S\backslash J})$;
(ii) $\chi_2\chi_1^{-1}(z) z^{\underline{d}_{S\backslash J}} f(1/z)|_{\mathcal{O}_F - \{0\}}$ se prolonge sur $\mathcal{O}_F$ en une fonction de $\mathcal{F}(\mathcal{O}_F, J, \underline{d}_{S\backslash J})$.

Par ailleurs, des formules explicites munissent ce faisceau d'une action continue de G. D'après la preuve de [15, Proposition 1.21], le complété unitaire universel de $I(\chi, J, \underline{d}_{S\backslash J})$ est le complété par rapport au sous-$\mathcal{O}_E[P]$-réseau engendré par les vecteurs

$$\mathbf{1}_{\mathcal{O}_F}(z) z^{\underline{n}_{S\backslash J}} z^{\underline{m}_J}, \quad \mathbf{1}_{F - \mathcal{O}_F}(z) \chi_2\chi_1^{-1}(z) z^{\underline{d}_{S\backslash J} - \underline{n}_{S\backslash J}} z^{-\underline{m}_J}$$

pour tout $\underline{0} \leqslant \underline{n}_{S\backslash J} \leqslant \underline{d}_{S\backslash J}$ et tout $\underline{m}_J \in \mathbb{N}^J$. Notons alors $I(\chi, J, \underline{d}_{S\backslash J})^\wedge$ le complété de $I(\chi, J, \underline{d}_{S\backslash J})$ par rapport à ce réseau.

Avant de donner une description explicite de l'espace $I(\chi, J, \underline{d}_{S\backslash J})^\wedge$, nous démontrons d'abord deux résultats qui ajoutent des conditions supplémentaires aux données initiales et permettent d'éviter des cas pathologiques bien de simplifier le problème. Le premier ingrédient donne deux conditions nécessaires de non nullité sur $I(\chi, J, \underline{d}_{S\setminus J})^\wedge$.

Proposition 1.1. — *Les deux conditions suivantes sont nécessaires pour que $I(\chi, J, \underline{d}_{S\setminus J})^\wedge$ soit non nul :*

(i) *le caractère central de $I(\chi, J, \underline{d}_{S\setminus J})$ est entier ;*
(ii) *on a l'inégalité* $\mathrm{val}_{\mathbb{Q}_p}(\chi_2(p)) + |\underline{d}_{S\setminus J}| \geq 0$.

C'est un résultat bien connu lorsque $F = \mathbb{Q}_p$ [15, Lemma 2.1] ainsi que dans le cas localement algébrique, c'est-à-dire lorsque $J = \varnothing$ [21, Lemme 7.9]. En particulier, si les conditions de la proposition 1.1 sont satisfaites, alors on a $r \stackrel{\text{déf}}{=} -\mathrm{val}_{\mathbb{Q}_p}(\chi_1(p)) \geq 0$.

Notons $\chi_1' = \chi_1$, $\chi_2' = \chi_2 \prod_{\sigma\in J'\setminus J} \sigma^{d_\sigma}$ et remarquons que l'on a une immersion fermée G-équivariante :

$$I(\chi, J, \underline{d}_{S\setminus J}) \hookrightarrow I(\chi', J', \underline{d}_{S\setminus J'}). \tag{1.1}$$

Un deuxième ingrédient important donné par la proposition suivante, essentiellement démontrée par Breuil [8, Théorème 7.1] en ayant recours aux techniques dévéloppées par Amice-Vélu et Vishik, qui fournit des indications concernant la structure de $I(\chi, J, \underline{d}_{S\setminus J})^\wedge$, et plus précisement concernant ses vecteurs localement $\mathbb{Q}_p$-analytiques.

Proposition 1.2. — *Supposons que les conditions de la proposition 1.1 soient satisfaites. Alors les conditions suivantes sont équivalentes et vérifiées.*

(i) *Toute application continue, E-linéaire et G-équivariante $I(\chi, J, \underline{d}_{S\setminus J}) \to B$, où B est un G-Banach unitaire, s'étend de manière unique en une application continue, E-linéaire et G-équivariante $I(\chi', J', \underline{d}_{S\setminus J'}) \to B$.*
(ii) *L'application canonique $I(\chi, J, \underline{d}_{S\setminus J}) \to I(\chi, J, \underline{d}_{S\setminus J})^\wedge$ s'étend de manière unique en une application continue, E-linéaire et G-équivariante $I(\chi', J', \underline{d}_{S\setminus J'}) \to I(\chi, J, \underline{d}_{S\setminus J})^\wedge$.*
(iii) *L'application* (1.1) *induit un isomorphisme de G-Banach unitaires :*
$$I(\chi, J, \underline{d}_{S\setminus J})^\wedge \xrightarrow{\sim} I(\chi', J', \underline{d}_{S\setminus J'})^\wedge$$

D'après la proposition 1.2 (iii), on est donc ramené à considérer $I(\chi', J', \underline{d}_{S\setminus J'})^\wedge$. Par un calcul analogue à celui mené dans la preuve de [3, Théorème 4.3.1], on trouve qu'une boule ouverte (de centre 0) du Banach dual de $I(\chi', J', \underline{d}_{S\setminus J'})^\wedge$ s'identifie aux distributions μ dans le dual fort de $I(\chi', J', \underline{d}_{S\setminus J'})$ telles que pour tout $n \in \mathbb{Z}$, tout $a \in F$, tout $\underline{0} \leqslant \underline{n}_{S\setminus J'} \leqslant \underline{d}_{S\setminus J'}$ et tout $\underline{m}_{J'} \in \mathbb{N}^J$ on ait les deux inégalites suivantes :

$$\Big| \int_{D(a,n)} (z-a)^{\underline{n}_{S\setminus J'}} (z-a)^{\underline{m}_{J'}} \mu(z) \Big| \leq C_\mu q^{n(r - |\underline{n}_{S\setminus J'}| - |\underline{m}_{J'}|)}; \tag{1.2}$$

$$(1.3)\quad \Big|\int_{F\setminus D(a,n+1)} \chi_2\chi_1^{-1}(z-a)(z-a)^{\underline{d}_{S\setminus J'}-\underline{n}_{S\setminus J'}}(z-a)^{-\underline{m}_{J'}}\mu(z)\Big| \\ \leq C_\mu q^{n(|\underline{n}_{S\setminus J'}|+|\underline{m}_{J'}|-r)};$$

avec $C_\mu \in \mathbb{R}_{\geq 0}$.

D'autre part, une étude fine du dual fort de l'espace de Banach des fonctions de classe C^r sur $\mathcal{O}_F$, ou plus précisement de son sous-espace fermé $C^r(\mathcal{O}_F, J', \underline{d}_{S\setminus J'})$ (§3.1.2), fournit la condition nécessaire et suffisante suivante pour qu'une forme linéaire sur $\mathcal{F}^N(\mathcal{O}_F, J, \underline{d}_{S\setminus J})$ (voir §3.2 pour une définition de cet espace) s'étende en une distribution sur $C^r(\mathcal{O}_F, J', \underline{d}_{S\setminus J'})$ (Théorème 3.8). Notons que pour $F = \mathbb{Q}_p$ il s'agit d'un résultat bien connu et dû à Amice-Vélu et Vishik [2, 30].

THÉORÈME 1.3. — (i) *Soit* $\mu \in C^r(\mathcal{O}_F, J', \underline{d}_{S\setminus J'})^\vee$. *Il existe une constante* $C_\mu \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ *telle que pour tout* $a \in \mathcal{O}_F$, *tout* $n \in \mathbb{N}$, *tout* $\underline{0} \leqslant \underline{n}_{S\setminus J'} \leqslant \underline{d}_{S\setminus J'}$ *et tout* $\underline{m}_{J'} \in \mathbb{N}^{J'}$ *on ait :*

$$\Big|\int_{D(a,n)} (z-a)^{\underline{n}_{S\setminus J'}}(z-a)^{\underline{m}_{J'}}\mu(z)\Big| \leq C_\mu\, q^{n(r-|\underline{n}_{S\setminus J'}|-|\underline{m}_{J'}|)}.$$

(ii) *Soit* N *un entier tel que* $N \geq [r]$ *et* μ *une forme linéaire sur* $\mathcal{F}^N(\mathcal{O}_F, J, \underline{d}_{S\setminus J})$. *Supposons qu'il existe une constante* $C_\mu \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ *telle que pour tout* $a \in \mathcal{O}_F$, *tout* $n \in \mathbb{N}$, *tout* $\underline{0} \leqslant \underline{n}_{S\setminus J} \leqslant \underline{d}_{S\setminus J}$ *et tout* $\underline{m}_J \in \mathbb{N}^J$ *tels que* $|\underline{n}_{S\setminus J}| + |\underline{m}_J| \leq N$, *on ait :*

$$\Big|\int_{D(a,n)} (z-a)^{\underline{n}_{S\setminus J}}(z-a)^{\underline{m}_J}\mu(z)\Big| \leq C_\mu\, q^{n(r-|\underline{n}_{S\setminus J}|-|\underline{m}_J|)}.$$

Alors μ *se prolonge de manière unique en une distribution sur* $C^r(\mathcal{O}_F, J', \underline{d}_{S\setminus J'})$.

On est ainsi amené à considérer l'espace $B(\chi', J', \underline{d}_{S\setminus J'})$ des fonctions $f\colon F \to E$ qui vérifient les deux conditions suivantes :

(i) $f|_{\mathcal{O}_F}$ définit un élément de $C^r(\mathcal{O}_F, J', \underline{d}_{S\setminus J'})$;

(ii) $\chi_2'\chi_1'^{-1}(z)z^{\underline{d}_{S\setminus J'}}f(1/z)|_{\mathcal{O}_F-\{0\}}$ se prolonge sur $\mathcal{O}_F$ en une fonction de $C^r(\mathcal{O}_F, J', \underline{d}_{S\setminus J'})$.

C'est un espace de Banach p-adique naturellement muni d'une action continue de G et une étude approfondie utilisant de manière cruciale le théorème 1.3 montre que les conditions (1.2) et (1.3) sélectionnent exactement les formes linéaires de $B(\chi', J', \underline{d}_{S\setminus J'})^\vee$ qui annulent les fonctions d'un sous-espace $L(\chi', J', \underline{d}_{S\setminus J'})$ de $B(\chi', J', \underline{d}_{S\setminus J'})$ que l'on définit dans la Section §4.3.

Le résultat principal de cet article, qui généralise [3, Théorème 4.3.1] lorsque $F = \mathbb{Q}_p$, est alors le suivant.

THÉORÈME 1.4. — *Il existe un isomorphisme G-équivariant d'espaces de Banach p-adiques :*

$$I(\chi, J, \underline{d}_{S\setminus J})^{\wedge} \xrightarrow{\sim} B(\chi', J', \underline{d}_{S\setminus J'})/L(\chi', J', \underline{d}_{S\setminus J'}).$$

Signalons au passage une conséquence immédiate du théorème 1.4.

COROLLAIRE 1.5. — *L'espace $B(\chi', J', \underline{d}_{S\setminus J'})/L(\chi', J', \underline{d}_{S\setminus J'})$ est un espace de Banach muni d'une action continue unitaire de G. C'est le plus grand quotient de $B(\chi', J', \underline{d}_{S\setminus J'})$ ayant cette propriété.*

1.4. Plan de l'article. — Dans la section 2, nous rappelons quelques généralités d'analyse fonctionnelle p-adique ainsi que la notion de complété unitaire universel introduite dans [15]. La section 3 est constituée de rappels sur les espaces des fonctions de classe C^r et leurs duaux. Nous introduisons dans la section 4 les représentations localement $\mathbb{Q}_p$-analytiques $I(\chi, J, \underline{d}_{S\setminus J})$ qui font l'objet de notre étude, puis nous construisons la représentation de Banach $\Pi(\chi, J, \underline{d}_{S\setminus J})$. Dans la section 5, nous donnons deux conditions nécessaires pour que le complété unitaire universel de $I(\chi, J, \underline{d}_{S\setminus J})$ soit non nul et nous commençons l'étude des espaces duaux $(I(\chi, J, \underline{d}_{S\setminus J})^{\wedge})^{\vee}$ et $\Pi(\chi, J, \underline{d}_{S\setminus J})^{\vee}$. La section 6, qui est le cœur de cet article, contient la demonstration du théorème 1.4 ainsi qu'un exemple de construction explicite.

2. Préliminaires

2.1. Rappels d'analyse fonctionnelle non archimédienne. — Ce paragraphe regroupe des notions d'analyse fonctionnelle non archimédienne dont on se servira par la suite. Nous renvoyons à [24] pour plus de détails.

Un E-espace vectoriel topologique V est dit *localement convexe* si l'origine possède une base de voisinage constituée de sous-$\mathcal{O}_E$-modules de V. Cela revient à demander que la topologie de V puisse être définie par une famille de seminormes non archimédiennes [24, Propositions 4.3 et 4.4].

Soit V un E-espace vectoriel localement convexe. Un *réseau* $\mathcal{L}$ de V est un sous-$\mathcal{O}_E$-module de V tel que pour tout $v \in V$, il existe un élément non nul $a \in E^{\times}$ tel que $av \in \mathcal{L}$. En particulier, on remarque que tout sous-$\mathcal{O}_E$-module ouvert de V est un réseau de V. Deux réseaux $\mathcal{L}_1$ et $\mathcal{L}_2$ de V sont dits *commensurables* s'il existe $a \in E^{\times}$ tel que $a\mathcal{L}_1 \subseteq \mathcal{L}_2 \subseteq a^{-1}\mathcal{L}_2$. La commensurabilité définit une relation d'équivalence sur l'ensemble $\mathcal{L}(V)$ des réseaux ouverts de V.

Un réseau $\mathcal{L}$ de V est dit *séparé* si $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \varpi_E^n \mathcal{L} = 0$ ou, de manière équivalente, si $\mathcal{L}$ ne contient pas de E-droite.

Un sous-ensemble $B \subseteq V$ est dit *borné* si, pour tout réseau ouvert $\mathcal{L} \subseteq V$, il existe $a \in E$ tel que $B \subseteq a\mathcal{L}$.

On dit que V est *tonnelé* si tout réseau fermé de V est ouvert.

On dit que V est de *Fréchet* s'il est complet et métrisable ou, de manière équivalente, s'il est complet, séparé, et si sa topologie peut être définie par une famille dénombrable de semi-normes. Lorsque sa topologie peut être définie par une unique norme, on dit que V est un espace de *Banach*.

Si $\mathscr{L}$ est un réseau ouvert, borné et séparé de V, on définit la *jauge* de $\mathscr{L}$ par :

$$\forall v \in V, \quad \|v\|_{\mathscr{L}} = \inf_{v \in a\mathscr{L}} |a|.$$

C'est une norme sur V et la topologie qu'elle définit sur V coïncide avec la topologie initiale [24, Corollaire 4.12].

On dit que V est de *type compact* s'il existe un isomorphisme de E-espaces vectoriels topologiques

$$V \xrightarrow{\sim} \varinjlim_n V_n\,,$$

où $\{V_n\}_{n\geq 1}$ est un système inductif d'espaces de Banach sur E tel que les morphismes de transition soient injectifs et compacts.

Soit W un E-espace vectoriel localement convexe. On note $\mathrm{Hom}_E(V, W)$ l'espace des fonctions E-linéaires et continues sur V à valeurs dans W. Si l'on fixe un sous-ensemble borné $B \subseteq V$ et que l'on se donne une semi-norme continue p sur W, alors la formule :

$$p_B(f) = \sup_{v \in B} p(f(v))$$

définit une semi-norme sur $\mathrm{Hom}_E(V, W)$. Si $\mathscr{B}$ est maintenant une famille de sous-ensembles bornés de V, la topologie localement convexe définie sur $\mathrm{Hom}_E(V, W)$ par la famille de semi-normes $\{p_B; B \in \mathscr{B}, p$ semi-norme continue sur $W\}$ est appelée $\mathscr{B}$-topologie. En particulier, si $\mathscr{B}$ est la famille de tous les singletons, la $\mathscr{B}$-topologie correspondante est aussi appelée *topologie faible*. Si $\mathscr{B}$ est la famille de tous les sous-ensembles bornés de V, la $\mathscr{B}$-topologie correspondante est appelée *topologie forte*.

2.2. Complétés unitaires universels. — Soit G le groupe des $\mathbb{Q}_p$-points d'un groupe algébrique linéaire réductif connexe défini sur $\mathbb{Q}_p$. La notion de complété unitaire universel d'un espace vectoriel localement convexe muni d'une action continue de G a été formalisée par Emerton [15, §1], après que des exemples de complétés unitaires universels aient été construits par Breuil [6, 7] et Berger-Breuil [3]. Nous rappelons dans ce paragraphe le contexte dans lequel s'insère cette notion, ainsi qu'une condition nécessaire et suffisante d'existence d'un complété unitaire universel.

DÉFINITION 2.1 ([25, 7]). — Un *G-Banach* est un espace de Banach B sur E muni d'une action à gauche de G telle que l'application $G \times B \to B$ qui décrit cette action soit continue. Un G-Banach B est dit *unitaire* si, pour un choix de norme $\| \cdot \|$ définissant la topologie de B, on a $\|gv\| = \|v\|$ pour tout $g \in G$ et tout $v \in B$.

REMARQUE 2.2. — Si le groupe G est compact, tout G-Banach est unitaire. Ceci n'est pas vrai si G n'est pas supposé compact.

Soit V un E-espace vectoriel localement convexe muni d'une action continue de G. Un complété unitaire universel de V est un G-Banach unitaire qui satisfait une certaine propriété universelle. Plus précisément, on a la définition suivante.

DÉFINITION 2.3 ([15], définition 1.1). — Avec les notations précédentes, un *complété unitaire universel de V* est la donnée d'un G-Banach unitaire B et d'une application E-linéaire, continue et G-équivariante $\iota \colon V \to B$ telle que toute application E-linéaire, continue et G-équivariante $V \to W$, où W est un G-Banach unitaire, se factorise de façon unique à travers ι.

REMARQUE 2.4. — Si V admet un complété unitaire universel (B, ι), alors ce complété est unique à isomorphisme près. Comme l'adhérence dans B de $\iota(V)$ vérifie la propriété universelle énoncée dans la définition 2.3, on en déduit que l'application ι est d'image dense.

Le lemme suivant fournit une condition nécessaire et suffisante pour que V admette un complété unitaire universel [15, Lemme 1.3].

LEMME 2.5. — *La G-représentation V admet un complété unitaire universel si et seulement si l'ensemble des classes de commensurabilité des réseaux ouverts G-stables de V, qui est partiellement ordonné pour l'inclusion, possède un élément minimal.*

3. Rappels sur les fonctions de classe C^r sur $\mathcal{O}_F$

Soit $r \in \mathbb{Q}_{\geq 0}$. Dans [13] nous avons introduit une nouvelle notion de fonction de classe C^r sur $\mathcal{O}_F$ qui s'appuie principalement sur les travaux d'Amice, Amice-Velù, Colmez, Van der Put et Vishik [1, 2, 10, 23, 30]. Cette section va nous permettre de rappeler un certain nombre de constructions et de résultats concernant l'espace des fonctions de classe C^r sur $\mathcal{O}_F$. Nous renvoyons à [13] pour plus de détails et à [19, 20] pour d'autres définitions possibles.

3.1. Définitions et compléments. — Soit $r \in \mathbb{Q}_{\geq 0}$. Notons $[r]$ sa partie entière. Si $n \in \mathbb{N}$ et si $* \in \{<, \leq, >, \geq, =\}$, on pose :

$$I_{*n} \overset{\text{déf}}{=} \Big\{\underline{i} \in \mathbb{N}^S, \sum_{\sigma \in S} i_\sigma * n\Big\}.$$

Définition 3.1. — On dit que $f\colon \mathcal{O}_F \to E$ est *de classe C^r sur $\mathcal{O}_F$* s'il existe une famille de fonctions bornées $\{D_{\underline{i}} f\colon \mathcal{O}_F \to E,\, \underline{i} \in I_{\leq [r]}\}$, telles que, si l'on définit $\varepsilon_{f,[r]}\colon \mathcal{O}_F \times \mathcal{O}_F \to E$ par :

$$\forall x, y \in \mathcal{O}_F, \quad \varepsilon_{f,[r]}(x,y) = f(x+y) - \sum_{\underline{i} \in I_{\leq [r]}} D_{\underline{i}} f(x) \frac{y^{\underline{i}}}{\underline{i}!},$$

et pour tout $h \in \mathbb{N}$

$$C_{f,r}(h) = \sup_{x \in \mathcal{O}_F, y \in \varpi_F^h \mathcal{O}_F} |\varepsilon_{f,[r]}(x,y)|\, q^{rh},$$

alors $C_{f,r}(h)$ tend vers 0 quand h tend vers $+\infty$.

Si f est une fonction de classe C^r sur $\mathcal{O}_F$, il existe une unique famille de fonctions

$$\big\{D_{\underline{i}} f\colon \mathcal{O}_F \to E,\, \underline{i} \in I_{\leq [r]}\big\}$$

satisfaisant à la définition 3.1 [13, Lemme 2.4]. Notons $C^r(\mathcal{O}_F, E)$ l'ensemble des fonctions $f\colon \mathcal{O}_F \to E$ de classe C^r sur $\mathcal{O}_F$ et munissons-le de la norme $\|\cdot\|_{C^r}$ définie par :

$$\|f\|_{C^r} = \sup\Big(\sup_{\underline{i} \in I_{\leq [r]}} \sup_{x \in \mathcal{O}_F} \Big|\frac{D_{\underline{i}} f(x)}{\underline{i}!}\Big|, \sup_{x,y \in \mathcal{O}_F} \frac{|\varepsilon_{f,[r]}(x,y)|}{|y|^r}\Big).$$

C'est alors un espace de Banach sur E, et même une *E-algèbre de Banach* [13, Lemme 2.9], c'est-à-dire une E-algèbre normée dont l'espace vectoriel normé sous-jacent est un espace de Banach.

On demontre maintenant le résultat suivant, dont on se servira par la suite.

Lemme 3.2. — *Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $f\colon \mathcal{O}_F \to E$ une fonction de classe C^r. Notons $g\colon \mathcal{O}_F \to E$ la fonction définie par :*

$$\forall z \in \mathcal{O}_F, \quad g(z) = \mathbf{1}_{D(0,n)}(z) f\Big(\frac{z}{\varpi_F^n}\Big).$$

Alors $g \in C^r(\mathcal{O}_F, E)$ et $\|g\|_{C^r} \leq q^{nr} \|f\|_{C^r}$.

Démonstration. — Pour tout $\underline{i} \in I_{\leq [r]}$ et tout $z \in \mathcal{O}_F$ posons :

$$D_{\underline{i}} g(z) = \Big(\frac{1}{\varpi_F^n}\Big)^{\underline{i}} \mathbf{1}_{\varpi_F^n \mathcal{O}_F}(z) D_{\underline{i}} f\Big(\frac{z}{\varpi_F^n}\Big). \tag{3.1}$$

On a alors :

$$\forall x, y \in \mathcal{O}_F, \quad \varepsilon_{g,[r]}(x,y)$$
$$= \mathbf{1}_{D(0,n)}(x+y) f\Big(\frac{x+y}{\varpi_F^n}\Big) - \sum_{\underline{i}\in I_{\le[r]}} \frac{1}{\underline{i}!}\mathbf{1}_{D(0,n)}(x) D_{\underline{i}} f\Big(\frac{x}{\varpi_F^n}\Big)\Big(\frac{y}{\varpi_F^n}\Big)^{\underline{i}}.$$

Par suite, on voit immédiatement que l'on a :

$$\forall h \ge n, \qquad \sup_{x\in\mathcal{O}_F, y\in\varpi_F^h\mathcal{O}_F} |\varepsilon_{g,[r]}(x,y)| \le \sup_{x\in\mathcal{O}_F, y\in\varpi_F^{h-n}\mathcal{O}_F} |\varepsilon_{f,[r]}(x,y)|,$$

ce qui implique que g est de classe C^r sur $\mathcal{O}_F$. Pour montrer l'inégalité sur la norme on remarque que (3.1) assure que l'on a :

(3.2)
$$\forall \underline{i} \in I_{\le[r]}, \quad \sup_{z\in\mathcal{O}_F}\Big|\frac{D_{\underline{i}} g(z)}{\underline{i}!}\Big| \le \Big|\Big(\frac{1}{\varpi_F^n}\Big)^{\underline{i}}\Big| \sup_{z\in\mathcal{O}_F}\Big|\frac{D_{\underline{i}} f(z)}{\underline{i}!}\Big| \le q^{n|\underline{i}|}\|f\|_{C^r} \le q^{nr}\|f\|_{C^r}.$$

On conclut alors en distinguant quatre cas :

- Si $x, y \in \varpi_F^n\mathcal{O}_F$, alors on a :

$$\frac{|\varepsilon_{g,[r]}(x,y)|}{|y|^r} \le \frac{|\varepsilon_{f,[r]}(\frac{x}{\varpi_F^n}, \frac{y}{\varpi_F^n})|}{|y|^r} \le q^{nr}\|f\|_{C^r}.$$

- Si $x \in \varpi_F^n\mathcal{O}_F$ et $y \notin \varpi_F^n\mathcal{O}_F$, alors on a :

$$\begin{aligned}\frac{|\varepsilon_{g,[r]}(x,y)|}{|y|^r} = \frac{|\sum_{\underline{i}\in I_{\le[r]}} D_{\underline{i}} g(x)\frac{y^{\underline{i}}}{\underline{i}!}|}{|y|^r} &\le \sup_{\underline{i}\in I_{\le[r]}}\Big|\frac{D_{\underline{i}} g(x)}{\underline{i}!}\Big||y|^{|\underline{i}|-r}\\ &\le \sup_{\underline{i}\in I_{\le[r]}}\sup_{x\in\mathcal{O}_F}\Big|\frac{D_{\underline{i}} f(x)}{\underline{i}!}\Big||\varpi_F^n|^{-|\underline{i}|}|y|^{|\underline{i}|-r}\\ &\le q^{nr}\|f\|_{C^r}.\end{aligned}$$

- Si $x \notin \varpi_F^n\mathcal{O}_F$ et $x+y \notin \varpi_F^n\mathcal{O}_F$, alors on a $\varepsilon_{g,[r]}(x,y) = 0$.
- Si $x \notin \varpi_F^n\mathcal{O}_F$ et $x+y \in \varpi_F^n\mathcal{O}_F$ alors on a enfin :

$$\frac{|\varepsilon_{g,[r]}(x,y)|}{|y|^r} = \frac{\Big|f\Big(\frac{x}{\varpi_F^n}+\frac{y}{\varpi_F^n}\Big)\Big|}{|y|^r} \le q^{nr}\|f\|_{C^r}.$$ □

3.1.1. ***Composition de fonctions***. — Soit $f\colon \mathcal{O}_F \to E$ une fonction de classe C^r sur $\mathcal{O}_F$ et soit $h\colon \mathcal{O}_F \to \mathcal{O}_F$ une fonction. Nous allons rappeler [13, §2.2.1] une condition suffisante sur h pour que $f\circ h\colon \mathcal{O}_F \to E$ soit à son tour de classe C^r sur $\mathcal{O}_F$. Pour cela, nous avons besoin d'introduire la définition suivante.

DÉFINITION 3.3. — Soit $r \in \mathbb{Q}_{\geq 0}$. On dit que $h\colon \mathcal{O}_F \to F$ est *de classe* $C^{r,id}$ *sur* $\mathcal{O}_F$ s'il existe une famille de fonctions bornées $\{h^{(i)}\colon \mathcal{O}_F \to F,\ 0 \leq i \leq [r]\}$ telle que, si l'on définit $\varepsilon_{h,[r]}\colon \mathcal{O}_F \times \mathcal{O}_F \to F$ par :

$$\forall x, y \in \mathcal{O}_F, \quad \varepsilon_{h,[r]}(x,y) = f(x+y) - \sum_{i=0}^{[r]} h^{(i)}(x)\frac{y^i}{i!},$$

et que l'on pose, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$C_{h,r}(k) = \sup_{x \in \mathcal{O}_F, y \in \varpi_F^k \mathcal{O}_F} |\varepsilon_{h,[r]}(x,y)|\, q^{rk},$$

alors $C_{h,r}(k)$ tend vers 0 quand k tend vers $+\infty$.

Notons $C^{r,id}(\mathcal{O}_F, F)$ l'ensemble des fonctions de $\mathcal{O}_F$ dans F qui sont de classe $C^{r,id}$ sur $\mathcal{O}_F$. On le munit de la norme $\|\cdot\|_{C^{r,id}}$ définie par :

$$\|h\|_{C^{r,id}} = \sup\Big(\sup_{0\leq i\leq [r]}\sup_{x\in\mathcal{O}_F}\Big|\frac{h^{(i)}(x)}{i!}\Big|, \sup_{x,y\in\mathcal{O}_F}\frac{|\varepsilon_{h,[r]}(x,y)|}{|y|^r}\Big),$$

ce qui en fait un espace de Banach sur F.

PROPOSITION 3.4 ([13], proposition 2.12). — *Soit* $r \in \mathbb{Q}_{\geq 0}$. *Si* $h\colon \mathcal{O}_F \to \mathcal{O}_F$ *est une fonction de classe* $C^{r,id}$ *sur* $\mathcal{O}_F$ *alors :*

(i) $\forall f \in C^r(\mathcal{O}_F, E)$, $f \circ h \in C^r(\mathcal{O}_F, E)$;
(ii) *l'application de* $C^r(\mathcal{O}_F, E)$ *dans* $C^r(\mathcal{O}_F, E)$ *définie par* $f \mapsto f \circ h$ *est continue.*

3.1.2. ***Construction de sous-espaces fermés.*** — Soit $r \in \mathbb{Q}_{\geq 0}$, $J \subseteq S$ et $d_\sigma \in \mathbb{N}$ pour $\sigma \in S\backslash J$. Nous allons définir un sous-espace fermé de $C^r(\mathcal{O}_F, E)$, dépendant de J et de $\underline{d}_{S\backslash J}$, qui va jouer un rôle important dans la suite.

Posons :

$$J' \overset{\text{déf}}{=} J \coprod \{\sigma \in S\backslash J,\ d_\sigma + 1 > r\}$$

et désignons par e_σ le vecteur de $\mathbb{N}^S$ ayant toutes ses composantes nulles sauf celle d'indice σ qui est égale à 1. Pour tout $f \in C^r(\mathcal{O}_F, E)$, tout $\sigma \in S$ et tout $i \in \{0, \ldots, [r]\}$, posons :

$$\frac{\partial^i}{\partial z_\sigma^i} f = D_{ie_\sigma} f.$$

DÉFINITION 3.5. — On note $C^r(\mathcal{O}_F, J', \underline{d}_{S\backslash J'})$ le sous-E-espace vectoriel des fonctions f de classe C^r sur $\mathcal{O}_F$ telles que :

$$\forall \sigma \in S\backslash J', \quad \frac{\partial^{d_\sigma+1}}{\partial z_\sigma^{d_\sigma+1}} f = 0.$$

D'après [13, Corollaire 2.8], l'opérateur $D_{\underline{i}}$ est continu pour tout $\underline{i} \in I_{\leq [r]}$ ce qui implique que l'espace $C^r(\mathcal{O}_F, J', \underline{d}_{S\setminus J'})$ est bien un sous-espace fermé de $C^r(\mathcal{O}_F, E)$. On le munit de la topologie induite par celle de $C^r(\mathcal{O}_F, E)$, et on en fait ainsi un espace de Banach sur E.

3.2. Fonctions localement analytiques et fonctions de classe C^r. — Soit U une partie ouverte de $\mathcal{O}_F$, soit $J \subseteq S$ et soit $d_\sigma \in \mathbb{N}$ pour tout $\sigma \in S\setminus J$. Pour $a \in U$ et $n \in \mathbb{N}$ tels que $D(a,n) \subseteq U$, on note $\mathcal{O}(D(a,n), J, \underline{d}_{S\setminus J})$ le E-espace vectoriel des fonctions $f\colon D(a,n) \to E$ de la forme

$$f(z) = \sum_{\substack{\underline{m}=(m_\sigma)_{\sigma\in S}\in\mathbb{N}^S \\ m_\sigma \leq d_\sigma \text{ si } \sigma\in S\setminus J}} a_{\underline{m}}(a)(z-a)^{\underline{m}}$$

avec $a_{\underline{m}}(a) \in E$ et $|a_{\underline{m}}(a)|q^{-n(|\underline{m}|)} \to 0$ quand $|\underline{m}| \to +\infty$. C'est un espace de Banach sur E pour la topologie induite par la norme $\|\cdot\|_{a,n}$ définie par :

$$\|f\|_{a,n} = \sup_{\underline{m}} \left(|a_{\underline{m}}(a)|q^{-n(|\underline{m}|)}\right) .$$

Comme U est ouvert et compact, il existe $h_0 \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall a \in U, \forall h \geq h_0, \quad D(a,h) \subseteq U.$$

Pour tout $h \geq h_0$, on note $\mathcal{F}_h(U, J, \underline{d}_{S\setminus J})$ le E-espace vectoriel des fonctions $f\colon U \to E$ telles que :

$$\forall a \in U, \quad f|_{D(a,h)} \in \mathcal{O}(D(a,h), J, \underline{d}_{S\setminus J}).$$

On munit cet espace de la norme $\|\cdot\|_{\mathcal{F}_h}$ définie par :

$$\|f\|_{\mathcal{F}_h} = \sup_{a \bmod \varpi_F^h, a\in U} \|f|_{D(a,h)}\|_{a,h} , \tag{3.3}$$

ce qui en fait un espace de Banach sur E. On voit immédiatement que cette définition ne dépend pas du choix du système des représentants. De plus, on sait par [24, p. 107] que les inclusions

$$\mathcal{F}_h(U, J, \underline{d}_{S\setminus J}) \hookrightarrow \mathcal{F}_{h+1}(U, J, \underline{d}_{S\setminus J})$$

sont continues et compactes.

DÉFINITION 3.6. — On note $\mathcal{F}(U, J, \underline{d}_{S\setminus J})$ le E-espace vectoriel des fonctions $f\colon \mathcal{O}_F \to E$ pour lesquelles il existe $h \geq h_0$ tel que $f \in \mathcal{F}_h(U, J, \underline{d}_{S\setminus J})$.

On munit cet espace de la topologie de la limite inductive, ce qui en fait un espace de type compact. Posons, pour tout $N \in \mathbb{N}$:

$$\mathcal{F}^N(\mathcal{O}_F, S) \stackrel{\text{déf}}{=} \sum_{\underline{d} \in I_{\leq N}} \mathcal{F}(\mathcal{O}_F, \varnothing, \underline{d})\,;$$

$$\mathcal{F}^N(\mathcal{O}_F, J, \underline{d}_{S\setminus J}) \stackrel{\text{déf}}{=} \mathcal{F}^N(\mathcal{O}_F, S) \cap \mathcal{F}(\mathcal{O}_F, J, \underline{d}_{S\setminus J})\,.$$

Les espaces $\mathcal{F}^N(\mathcal{O}_F, S)$ et $\mathcal{F}^N(\mathcal{O}_F, J, \underline{d}_{S\setminus J})$ sont des sous-E-espaces vectoriels respectifs de $\mathcal{F}(\mathcal{O}_F, S)$ et $\mathcal{F}(\mathcal{O}_F, J, \underline{d}_{S\setminus J})$. En outre, on dispose des deux faits suivants :

- l'espace $\mathcal{F}(\mathcal{O}_F, J, \underline{d}_{S\setminus J})$ s'injecte de façon continue dans $C^r(\mathcal{O}_F, J', \underline{d}_{S\setminus J'})$ [13, Corollaire 3.4] ;
- pour tout entier $N \geq [r]$, l'espace $\mathcal{F}^N(\mathcal{O}_F, J, \underline{d}_{S\setminus J})$ est dense dans $C^r(\mathcal{O}_F, J', \underline{d}_{S\setminus J'})$ [13, Corollaire 3.16].

Notons que le deuxième point découle de l'existence d'une base de Banach de $C^r(\mathcal{O}_F, J', \underline{d}_{S\setminus J'})$ constituée de fonctions dans $\mathcal{F}^{[r]}(\mathcal{O}_F, J, \underline{d}_{S\setminus J})$.

3.3. Distributions d'ordre r. — Conservons les notations du §3.2 et, pour tout $N \in \mathbb{N}$, notons $\mathcal{F}^N(\mathcal{O}_F, J, \underline{d}_{S\setminus J})^\vee$ l'ensemble des formes linéaires sur $\mathcal{F}^N(\mathcal{O}_F, J, \underline{d}_{S\setminus J})$. Si N est tel que $N \geq [r]$, alors [13, Corollaire 3.16] assure que l'inclusion

$$\mathcal{F}^N(\mathcal{O}_F, J, \underline{d}_{S\setminus J}) \subseteq C^r(\mathcal{O}_F, J', \underline{d}_{S\setminus J'})$$

induit une injection

$$C^r(\mathcal{O}_F, J, \underline{d}_{S\setminus J})^\vee \hookrightarrow \mathcal{F}^N(\mathcal{O}_F, J, \underline{d}_{S\setminus J})^\vee.$$

Dans cette section, nous allons rappeler une caractérisation possible des formes linéaires $\mu\colon \mathcal{F}^N(\mathcal{O}_F, J, \underline{d}_{S\setminus J}) \to E$ qui s'étendent en des formes linéaires continues sur l'espace de Banach $C^r(\mathcal{O}_F, J', \underline{d}_{S\setminus J'})$. Elle généralise un résultat dû à Amice-Vélu et Vishik [2, 30].

Définition 3.7. — On appelle *distribution $(J', \underline{d}_{S\setminus J'})$-tempérée d'ordre r sur $\mathcal{O}_F$* toute forme linéaire continue sur l'espace de Banach $C^r(\mathcal{O}_F, J', \underline{d}_{S\setminus J'})$.

On note $\big(C^r(\mathcal{O}_F, J', \underline{d}_{S\setminus J'})^\vee, \|\cdot\|_{\mathcal{D}_r, J', (d_\sigma)_\sigma}\big)$ l'espace des distributions $(J', \underline{d}_{S\setminus J'})$-tempérées d'ordre r sur $\mathcal{O}_F$ muni de la topologie forte.

Soit $N \in \mathbb{N}$. Si $\mu \in \mathcal{F}^N(\mathcal{O}_F, J, \underline{d}_{S\setminus J})^\vee$ et si $f \in \mathcal{F}^N(\mathcal{O}_F, J, \underline{d}_{S\setminus J})$ on note, pour $a \in \mathcal{O}_F$ et $n \in \mathbb{N}$:

$$\mu\Big(\mathbf{1}_{D(a,n)} f\Big) = \int_{D(a,n)} f(z)\mu(z)\,.$$

THÉORÈME 3.8 ([13], théorème 4.2). — (i) *Soit* $\mu \in C^r(\mathscr{O}_F, J', \underline{d}_{S\setminus J'})^\vee$. *Il existe une constante* $C_\mu \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ *telle que pour tout* $a \in \mathscr{O}_F$, *tout* $n \in \mathbb{N}$, *tout* $\underline{0} \leqslant \underline{n}_{S\setminus J'} \leqslant \underline{d}_{S\setminus J'}$ *et tout* $\underline{m}_{J'} \in \mathbb{N}^{J'}$, *on ait :*

$$\left| \int_{D(a,n)} (z-a)^{\underline{n}_{S\setminus J'}} (z-a)^{\underline{m}_{J'}} \mu(z) \right| \leq C_\mu \, q^{n(r - |\underline{n}_{S\setminus J'}| - |\underline{m}_{J'}|)}. \tag{3.4}$$

(ii) *Soit* $N \geq [r]$ *un entier et soit* $\mu \in \mathscr{F}^N(\mathscr{O}_F, J, \underline{d}_{S\setminus J})^\vee$. *Supposons qu'il existe une constante* $C_\mu \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ *telle que pour tout* $a \in \mathscr{O}_F$, *tout* $n \in \mathbb{N}$, *tout* $\underline{0} \leqslant \underline{n}_{S\setminus J} \leqslant \underline{d}_{S\setminus J}$ *et tout* $\underline{m}_J \in \mathbb{N}^J$ *vérifiant* $|\underline{n}_{S\setminus J}| + |\underline{m}_J| \leq N$, *on ait :*

$$\left| \int_{D(a,n)} (z-a)^{\underline{n}_{S\setminus J}} (z-a)^{\underline{m}_J} \mu(z) \right| \leq C_\mu \, q^{n(r - |\underline{n}_{S\setminus J}| - |\underline{m}_J|)}. \tag{3.5}$$

Alors μ *se prolonge de manière unique en une distribution* $(J', \underline{d}_{S\setminus J'})$*-tempérée d'ordre* r *sur* $\mathscr{O}_F$.

REMARQUE 3.9. — La preuve du théorème 3.8 utilise de manière cruciale la construction explicite d'une base de Banach de l'espace $C^r(\mathscr{O}_F, J', \underline{d}_{S\setminus J'})$, qui dépend de r et est donnée pour une famille dénombrable de fonctions localement polynômiales [13, Proposition 3.15]. Lorsque $F = \mathbb{Q}_p$, cette base coïncide avec celle construite par Van der Put [23] pour l'espace des fonctions continues sur $\mathbb{Z}_p$ et généralisée par Colmez pour r quelconque [10, Théorème I.5.14]. Signalons que pour l'espace des fonctions continues sur $\mathscr{O}_F$, cette base avait déjà été construite par de Shalit [28, §2].

REMARQUE 3.10. — Une conséquence directe du théorème 3.8 est la suivante [13, Corollaire 4.3]. Si pour $\mu \in C^r(\mathscr{O}_F, J', \underline{d}_{S\setminus J'})^\vee$, on définit $\|\mu\|_{r,\underline{d}_{S\setminus J}}$ par la formule

$$\|\mu\|_{r,\underline{d}_{S\setminus J}} = \sup_{a\in\mathscr{O}_F, n\in\mathbb{N}} \ \sup_{\substack{\underline{m}_J\in\mathbb{N}^J \\ \underline{0}\leqslant \underline{n}_{S\setminus J}\leqslant \underline{d}_{S\setminus J}}} \left(\left| \int_{D(a,n)} (z-a)^{\underline{n}_{S\setminus J}} (z-a)^{\underline{m}_J} \mu(z) \right| q^{-n(r-|\underline{n}_{S\setminus J}|-|\underline{m}_J|)} \right),$$

alors $\|\cdot\|_{r,\underline{d}_{S\setminus J}}$ est une norme sur $C^r(\mathscr{O}_F, J', \underline{d}_{S\setminus J})^\vee$ qui est équivalente à $\|\cdot\|_{\mathscr{D}_r, J', (d_\sigma)_\sigma}$.

4. Représentations de $\mathrm{GL}_2(F)$

4.1. Généralités. — On fixe désormais une fois pour toutes une partie J de S. Si G est un groupe de Lie localement F-analytique, on note G_0 le groupe de Lie localement $\mathbb{Q}_p$-analytique obtenu à partir de G par restriction des scalaires de F à $\mathbb{Q}_p$ [4, §5.14]. Si V est un E-espace vectoriel localement convexe séparé, on peut définir, comme dans [26, §2] l'espace des fonctions localement

$\mathbb{Q}_p$-analytiques de G dans V : c'est simplement l'espace des fonctions localement analytiques de G_0 dans V. On note $C^{\mathbb{Q}_p\text{-an}}(G,V)$ cet espace, que l'on munit de l'action à gauche usuelle de G.

Soit $\mathfrak{g}$ l'algèbre de Lie de G. On dispose d'une action $\mathbb{Q}_p$-linéaire de $\mathfrak{g}$ sur $C^{\mathbb{Q}_p\text{-an}}(G,V)$ définie par :

$$(\mathfrak{x}f)(g) = \frac{d}{dt}\Big(t \mapsto f(\exp(-t\mathfrak{x})g)\Big)\Big|_{t=0}$$

où $\exp\colon \mathfrak{g} \dashrightarrow G$ désigne l'application exponentielle définie localement au voisinage de 0 [26, §2]. Cette action se prolonge en une action de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}\otimes_{\mathbb{Q}_p} E$. Puisque $\mathfrak{g}$ est un F-espace vectoriel, $\mathfrak{g}\otimes_{\mathbb{Q}_p} E$ est une algèbre de Lie sur l'anneau $F\otimes_{\mathbb{Q}_p} E$, ce qui permet d'obtenir un isomorphisme d'espaces vectoriels sur E :

$$\mathfrak{g}\otimes_{\mathbb{Q}_p} E \simeq \bigoplus_{\sigma\in S} \mathfrak{g}\otimes_{F,\sigma} E. \tag{4.1}$$

Définition 4.1 ([27], définition 1.3.1). — Une fonction localement $\mathbb{Q}_p$-analytique $f\colon G \to V$ est dite *localement J-analytique* si l'action de $\mathfrak{g}\otimes_{\mathbb{Q}_p} E$ sur f se factorise par $\bigoplus_{\sigma\in J} \mathfrak{g}\otimes_{F,\sigma} E$.

L'ensemble des fonctions localement J-analytiques est un sous-espace fermé de $C^{\mathbb{Q}_p\text{-an}}(G,V)$ que l'on note $C^{J\text{-an}}(G,V)$ et que l'on munit de la topologie induite.

Définition 4.2 ([27], définition 1.3.4). — Soit V un espace vectoriel muni d'une topologie séparée localement convexe tonnelée. On dit que V est une *représentation localement J-analytique de G* lorsque les deux conditions suivantes sont vérifiées :

(i) le groupe G agit sur V par endomorphismes continus ;
(ii) pour tout $v \in V$, l'application de G dans V définie par l'action de G sur v est localement J-analytique.

Remarque 4.3. — Dans la définition 4.2, supposer que V est tonnelé assure, grâce au Théorème de Banach-Steinhaus [24, Théorème 6.15], que l'action de G sur V est continue.

Exemple 4.4. — L'espace localement convexe $C^{J\text{-an}}(G,V)$ muni de l'action à gauche usuelle de G est une représentation localement J-analytique.

4.2. Rappels sur les induites localement analytiques de $\mathrm{GL}_2(F)$**.** — On pose $G = \mathrm{GL}_2(F)$. On note T le tore déployé constitué des matrices diagonales de G, P le sous-groupe de Borel des matrices triangulaires supérieures de G, et N le sous-groupe des matrices unipotentes supérieures de G.

Si (ρ, V) est une représentation localement J-analytique de P, on note $\mathrm{Ind}_P^G(\rho)^{J\text{-an}}$ l'espace des fonctions $f\colon G \to V$ localement J-analytiques telles que :

$$\forall g \in G, \forall p \in P, \quad f(pg) = \rho(p)f(g).$$

On munit cet espace d'une action à gauche E-linéaire de G en posant $(gf)(g') = f(g'g)$: on obtient ainsi une représentation localement J-analytique de G.

Soit χ un caractère localement $\mathbb{Q}_p$-analytique de T, que l'on peut voir comme une représentation localement $\mathbb{Q}_p$-analytique de P par inflation. Nous allons construire maintenant des sous-représentations localement $\mathbb{Q}_p$-analytiques de $\mathrm{Ind}_P^G(\chi)^{S\text{-an}}$. Ensuite, en utilisant l'espace des fonctions localement analytiques sur $\mathscr{O}_F$ construit dans la Section §3.2, nous en donnerons une nouvelle description.

Pour $t_1, t_2 \in F^\times$ assez proches de 1, on a

$$\chi(\left[\begin{smallmatrix} t_1 & 0 \\ 0 & t_2 \end{smallmatrix}\right]) = \prod_{\sigma \in S} \sigma(t_1)^{d_{1,\sigma}} \sigma(t_2)^{d_{2,\sigma}},$$

avec $d_{1,\sigma}, d_{2,\sigma} \in E$. Notons alors J le sous-ensemble de S formé des éléments σ tels que

$$d_{2,\sigma} - d_{1,\sigma} \notin \mathbb{N}.$$

Quitte à considérer la représentation $\mathrm{Ind}_P^G(\chi)^{S\text{-an}} \otimes ((\prod_{\sigma \in S\setminus J} \sigma^{d_{1,\sigma}}) \circ \det)^{-1}$, on peut supposer que l'on a, au voisinage de 1

$$\chi(\left[\begin{smallmatrix} t_1 & 0 \\ 0 & t_2 \end{smallmatrix}\right]) = \chi_1(t_1)\chi_2(t_2) \prod_{\sigma \in S\setminus J} \sigma(t_2)^{d_\sigma},$$

avec χ_1 et χ_2 deux caractères localement J-analytiques de P et d_σ est un entier positif ou nul. On pose $u = \left[\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right]$ et, pour tout $\sigma \in S$, on note u_σ l'élément de $\mathfrak{gl}_2(F) \otimes_{\mathbb{Q}_p} E$ défini par u via l'isomorphisme (4.1) sur la composante associée à σ. Si $\sigma \in S\setminus J$, on pose $\mathfrak{z}_\sigma = (u_\sigma)^{d_\sigma + 1}$ et l'on définit ϵ_σ par :

$$\epsilon_\sigma(\left[\begin{smallmatrix} t_1 & 0 \\ 0 & t_2 \end{smallmatrix}\right]) = \sigma(t_1 t_2^{-1}).$$

D'après [27, Proposition 1.3.11], l'élément $\mathfrak{z}_\sigma$ induit une application de $\mathrm{Ind}_P^G(\chi)^{S\text{-an}}$ dans $\mathrm{Ind}_P^G(\chi\epsilon_\sigma^{d_\sigma+1})^{S\text{-an}}$, encore notée $\mathfrak{z}_\sigma$, qui est surjective et dont le noyau est isomorphe à

$$(\mathrm{Sym}^{d_\sigma} E^2)^\sigma \otimes_E \mathrm{Ind}_P^G(\chi^\sigma)^{S\setminus\{\sigma\}\text{-an}}.$$

On a ici utilisé les notations suivantes :

- pour $\sigma \in S$ et $d_\sigma \in \mathbb{N}$ on note $(\mathrm{Sym}^{d_\sigma} E^2)^\sigma$ la représentation algébrique irréductible de $\mathrm{GL}_2 \otimes_{F,\sigma} E$ dont le plus haut poids vis-à-vis de P est $\chi_\sigma \colon \mathrm{diag}(x_1, x_2) \mapsto \sigma(x_2)^{d_\sigma}$;
- On définit le caractère χ^σ par :

$$\chi^\sigma = \chi_1 \otimes \Big(\chi_2 \prod_{\tau \in S\backslash (J \coprod \{\sigma\})} \tau^{d_\tau}\Big).$$

On en déduit immédiatement, pour toute partie S' de $S\backslash J$, l'isomorphisme suivant :

$$\bigcap_{\sigma \in S'} \ker \mathfrak{z}_\sigma \xrightarrow{\sim} \Big(\bigotimes_{\sigma\in S'} (\mathrm{Sym}^{d_\sigma} E^2)^\sigma\Big) \otimes_E \Big(\mathrm{Ind}_P^G \chi_1 \otimes \chi_2 \prod_{(S\backslash J)\backslash S'} \sigma^{d_\sigma}\Big)^{S\backslash S'\text{-an}}.$$

Posons $m_\sigma = d_\sigma + 1$. D'après la preuve de [27, Proposition 1.3.11], on dispose du diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd}[column sep=huge, row sep=large] \mathrm{Ind}_P^G(\chi)^{S\text{-an}} \arrow[r, "\mathfrak{z}_\sigma"] \arrow[d] & \mathrm{Ind}_P^G(\chi\epsilon_\sigma^{m_\sigma})^{S\text{-an}} \arrow[d] \\ (\mathcal{F}(\mathcal{O}_F, S))^2 \arrow[r, "\left(-\frac{\partial^{m_\sigma}}{\partial z_\sigma^{m_\sigma}}, -\frac{\partial^{m_\sigma}}{\partial z_\sigma^{m_\sigma}}\right)"] & (\mathcal{F}(\mathcal{O}_F, S))^2 \end{tikzcd}$$

où

- $\mathcal{F}(\mathcal{O}_F, S)$ désigne l'espace $\mathcal{F}(U, J, \underline{d}_{S\backslash J})$ pour $U = \mathcal{O}_F$ et $J = S$ (donc $S\backslash J = \varnothing$) ;
- la flèche verticale de gauche (resp. de droite) est un isomorphisme topologique explicitement donné par :

$$f \longmapsto \Big(\big(z \mapsto f\big(\big[\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ -1 & \varpi_F z\end{smallmatrix}\big]\big)\big), \big(z \mapsto f\big(\big[\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ z & -1\end{smallmatrix}\big]\big)\big)\Big).$$

On en déduit donc l'existence d'un isomorphisme topologique :

(4.2)

$$\Big(\bigotimes_{\sigma\in S'} (\mathrm{Sym}^{d_\sigma} E^2)^\sigma\Big) \otimes_E \Big(\mathrm{Ind}_P^G \chi_1 \otimes \chi_2 \prod_{(S\backslash J)\backslash S'} \sigma^{d_\sigma}\Big)^{S\backslash S'\text{-an}} \simeq (\mathcal{F}(\mathcal{O}_F, S\backslash S', \underline{d}_{S'}))^2 .$$

Posons alors :

$$I(\chi, S\backslash S', \underline{d}_{S'}) = \Big(\bigotimes_{\sigma\in S'} (\mathrm{Sym}^{d_\sigma} E^2)^\sigma\Big) \otimes_E \Big(\mathrm{Ind}_P^G \chi_1 \otimes \chi_2 \prod_{(S\backslash J)\backslash S'} \sigma^{d_\sigma}\Big)^{S\backslash S'\text{-an}}$$

et notons V le E-espace vectoriel des fonctions $f \colon F \to E$ vérifiant les deux conditions suivantes :

(i) $f|_{\mathcal{O}_F}$ appartient à $\mathcal{F}(\mathcal{O}_F, S\backslash S', \underline{d}_{S'})$;

(ii) $\chi_2\chi_1^{-1}(z)z^{\underline{d}_{S\backslash J}}f(1/z)|_{\mathcal{O}_F-\{0\}}$ se prolonge sur $\mathcal{O}_F$ en une fonction de $\mathcal{F}(\mathcal{O}_F, S\backslash S', \underline{d}_{S'})$.

L'application

$$\begin{aligned} V &\longrightarrow \mathcal{F}(\mathcal{O}_F, S\backslash S', \underline{d}_{S'}) \oplus \mathcal{F}(\mathcal{O}_F, S\backslash S', \underline{d}_{S'}) \\ f &\longmapsto \Big(\big(z \mapsto f(\varpi_F z)\big), \big(z \mapsto \chi_2\chi_1^{-1}(z)z^{\underline{d}_{S\backslash J}}f(1/z)\big)\Big) \end{aligned} \tag{4.3}$$

est un isomorphisme de E-espaces vectoriels qui permet de munir V de la topologie localement convexe induite par cette application. Les isomorphismes (4.2) et (4.3) et l'égalité

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{ad-bc}{-cz+a} & -c \\ 0 & -cz+a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & \frac{dz-b}{-cz+a} \end{bmatrix}$$

assurent alors que l'action de G sur $I(\chi, S\backslash S', \underline{d}_{S'})$ se traduit sur V de la façon suivante : pour tout $g = \left[\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right] \in G$, tout $f \in V$, et tout $z \in F - \{\frac{a}{c}\}$, on a

(4.4)
$$\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} f\right)(z) = \chi_1(\det(g))\chi_2\chi_1^{-1}(-cz+a)(-cz+a)^{\underline{d}_{S\backslash J}} f\left(\frac{dz-b}{-cz+a}\right).$$

Ils assurent en outre que si $c \neq 0$, alors on peut prolonger gf par continuité en $z = \frac{a}{c}$ en une fonction appartenant à V.

4.3. Une $\mathrm{GL}_2(F)$-représentation de Banach. — Soit $\chi_1, \chi_2 \colon F^\times \to E^\times$ deux caractères localement J-analytiques et $\underline{d}_{S\backslash J}$ un $|S\backslash J|$-uplet d'entiers positifs ou nuls. Posons $r = -\mathrm{val}_{\mathbb{Q}_p}(\chi_1(p))$ et supposons $r \geq 0$. Posons :

$$J' = J \coprod \{\sigma \in S\backslash J,\ d_\sigma + 1 > r\}, \quad \chi_1' = \chi_1, \text{ et } \chi_2' = \chi_2 \prod_{\sigma \in J'\backslash J} \sigma^{d_\sigma}.$$

À l'aide des espaces définis au §3.1.2, nous allons définir un nouveau G-Banach attaché au triplet (J', χ_1', χ_2').

Notons $B(\chi', J', \underline{d}_{S\backslash J'})$ le E-espace vectoriel des fonctions $f \colon F \to E$ vérifiant les deux conditions suivantes :

(i) $f|_{\mathcal{O}_F}$ appartient à $C^r(\mathcal{O}_F, J', \underline{d}_{S\backslash J'})$;
(ii) $\chi_2'\chi_1'^{-1}(z)z^{\underline{d}_{S\backslash J'}}f(1/z)|_{\mathcal{O}_F-\{0\}}$ se prolonge sur $\mathcal{O}_F$ en un élément de $C^r(\mathcal{O}_F, J', \underline{d}_{S\backslash J'})$.

L'application

$$\begin{aligned} B(\chi', J', \underline{d}_{S\backslash J'}) &\longrightarrow C^r(\mathcal{O}_F, J', \underline{d}_{S\backslash J'}) \oplus C^r(\mathcal{O}_F, J', \underline{d}_{S\backslash J'}) \\ f &\longmapsto \Big(\big(z \mapsto f(\varpi_F z)\big), \big(z \mapsto \chi_2'\chi_1'^{-1}(z)z^{\underline{d}_{S\backslash J'}}f(1/z)\big)\Big) \end{aligned} \tag{4.5}$$

est un isomorphisme de E-espaces vectoriels. On munit alors $B(\chi', J', \underline{d}_{S\setminus J'})$ de la topologie localement convexe déduite de cette application, ce qui en fait un espace de Banach sur E pour la norme $\|\cdot\|_B$ définie comme suit : si (f_1, f_2) désigne l'élément de $(C^r(\mathcal{O}_F, J', \underline{d}_{S\setminus J'}))^2$ correspondant à $f \in B(\chi', J', \underline{d}_{S\setminus J'})$ via l'isomorphisme (4.5), alors :

$$\|f\|_B = \sup\big(\|f_1\|_{C^r}, \|f_2\|_{C^r}\big). \tag{4.6}$$

Pour $f \in B(\chi', J', \underline{d}_{S\setminus J'})$ et $g = \left[\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right] \in G$, considérons la fonction définie par

$$(gf)(z) = \chi_1(\det(g))\chi_2'{\chi_1'}^{-1}(-cz+a)(-cz+a)^{\underline{d}_{S\setminus J'}} f\left(\frac{dz-b}{-cz+a}\right) \tag{4.7}$$

pour tout $z \neq \frac{a}{c}$ (si $c \neq 0$). Le prochain résultat montre que gf se prolonge par continuité en $z = \frac{a}{c}$ en un élément de $B(\chi', J', \underline{d}_{S\setminus J'})$ et que, pour l'action de G définie par la formule (4.7), l'espace $B(\chi', J', \underline{d}_{S\setminus J'})$ est un G-Banach.

Lemme 4.5. — *L'action à gauche de G sur l'espace $B(\chi', J', \underline{d}_{S\setminus J'})$ donnée par la formule* (4.7) *est bien définie et se fait par automorphismes continus.*

Démonstration. — Soit $f = (f_1, f_2) \in B(\chi', J', \underline{d}_{S\setminus J'})$. En utilisant l'isomorphisme (4.5), on voit que l'on a d'autre part, pour tout $g = \left[\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right] \in G$

$$(gf)_1(z) = \chi_1'(\det(g))\chi_2'{\chi_1'}^{-1}(-c\varpi_F z+a)(-c\varpi_F z+a)^{\underline{d}_{S\setminus J'}} f_1\Big(\frac{dz-\frac{b}{\varpi_F}}{-c\varpi_F z+a}\Big)$$

si $\frac{d\varpi_F z-b}{-c\varpi_F z+a} \in \varpi_F\mathcal{O}_F$ et

$$(gf)_1(z) = \chi_1'(\det(g))\chi_2'{\chi_1'}^{-1}(d\varpi_F z-b)(d\varpi_F z-b)^{\underline{d}_{S\setminus J'}} f_2\Big(\frac{-c\varpi_F z+a}{d\varpi_F z-b}\Big)$$

si $\frac{d\varpi_F z-b}{-c\varpi_F z+a} \in F\setminus\varpi_F\mathcal{O}_F$; et d'autre part,

$$(gf)_2(z) = \chi_1'(\det(g))\chi_2'{\chi_1'}^{-1}(-c+az)(-c+az)^{\underline{d}_{S\setminus J'}} f_1\Big(\frac{-b\frac{z}{\varpi_F}+\frac{d}{\varpi_F}}{az-c}\Big)$$

si $\frac{-bz+d}{az-c} \in \varpi_F\mathcal{O}_F$ et

$$(gf)_2(z) = \chi_1'(\det(g))\chi_2'{\chi_1'}^{-1}(-bz+d)(-bz+d)^{\underline{d}_{S\setminus J'}} f_2\Big(\frac{az-c}{-bz+d}\Big)$$

si $\frac{-bz+d}{az-c} \in F\setminus\varpi_F\mathcal{O}_F$.

Il suffit maintenant de montrer que l'application

$$\begin{array}{ccc} C^r(\mathcal{O}_F, J', \underline{d}_{S\setminus J'}) \oplus C^r(\mathcal{O}_F, J', \underline{d}_{S\setminus J'}) & \longrightarrow & C^r(\mathcal{O}_F, J', \underline{d}_{S\setminus J'}) \oplus C^r(\mathcal{O}_F, J', \underline{d}_{S\setminus J'}) \\ (f_1, f_2) & \longmapsto & ((gf)_1, (gf)_2) \end{array} \tag{4.8}$$

est bien définie et continue. Par la décomposition de Bruhat $G = P \cup PwN$, il nous suffit de montrer la stabilité et la continuité de l'application (4.8) pour les matrices g de la forme $\left[\begin{smallmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \lambda\end{smallmatrix}\right]$, $\left[\begin{smallmatrix}0 & \varpi_F\\ 1 & 0\end{smallmatrix}\right]$, $\left[\begin{smallmatrix}1 & 0\\ 0 & \lambda\end{smallmatrix}\right]$ et $\left[\begin{smallmatrix}1 & \lambda\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right]$ avec $\lambda \in F^\times$, ce qui est une conséquence des formules ci-dessus, de la proposition 3.4 et du fait que l'espace $C^r(\mathcal{O}_F, J', \underline{d}_{S\setminus J'})$ est une E-algèbre de Banach [13, Lemme 2.9]. $\square$

Le lemme 4.5 et le Théorème de Banach-Steinhaus [24, Théorème 6.15] impliquent alors que l'espace $B(\chi', J', \underline{d}_{S\setminus J'})$ est un G-Banach.

Soit $k \in \mathbb{N}_{>0}$. Fixons $S_k \subset \mathcal{O}_F^\times$ un système de représentants des classes de $(\mathcal{O}_F/\varpi_F^k\mathcal{O}_F)^\times$, et notons l le plus petit entier positif tel que $\chi'_1|_{D(a_i,l)}$ et $\chi'_2|_{D(a_i,l)}$ soient des fonctions J'-analytiques sur l'ouvert $D(a_i, l)$ pour tout $a_i \in S_l$.

Supposons de plus que le caractère central de $I(\chi, J, \underline{d}_{S\setminus J})$ est entier, ce qui équivaut à demander que

$$\mathrm{val}_{\mathbb{Q}_p}(\chi'_1(p)) + \mathrm{val}_{\mathbb{Q}_p}(\chi'_2(p)) + |\underline{d}_{S\setminus J'}| = 0. \tag{4.9}$$

LEMME 4.6. — *Les fonctions de F dans E définies par les formules suivantes sont des éléments de $B(\chi', J', \underline{d}_{S\setminus J'})$:*

$$z \longmapsto z^{\underline{n}_{S\setminus J'}} z^{\underline{m}_{J'}},$$

$$z \longmapsto \begin{cases} \chi'_2{\chi'_1}^{-1}(z-a)(z-a)^{\underline{d}_{S\setminus J'}-\underline{n}_{S\setminus J'}}(z-a)^{-\underline{m}_{J'}} & si\ z \neq a \\ 0 & si\ z = a\,; \end{cases}$$

avec $a \in F$, $\underline{m}_{J'} \in \mathbb{N}^{J'}$ et $\underline{0} \leqslant \underline{n}_{S\setminus J'} \leqslant \underline{d}_{S\setminus J'}$ tels que $r - \big(|\underline{n}_{S\setminus J'}| + |\underline{m}_{J'}|\big) > 0$.

Démonstration. — Le même raisonnement que celui permettant de prouver [3, Lemme 4.2.2] s'applique : il suffit de montrer que la fonction $f\colon \mathcal{O}_F \to E$ définie par

$$f(z) = \begin{cases} \chi'_2{\chi'_1}^{-1}(z) z^{\underline{d}_{S\setminus J'}-\underline{n}_{S\setminus J'}} z^{-\underline{m}_{J'}} & \text{si } z \neq 0 \\ 0 & \text{si } z = 0 \end{cases}$$

appartient à $C^r(\mathcal{O}_F, J', \underline{d}_{S\setminus J'})$. Soit f_0 la fonction nulle sur $\mathcal{O}_F$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}_{>0}$, posons :

$$f_n(z) = \mathbf{1}_{\mathcal{O}_F\setminus D(0,n)}(z)\chi'_2{\chi'_1}^{-1}(z) z^{\underline{d}_{S\setminus J'}-\underline{n}_{S\setminus J'}} z^{-\underline{m}_{J'}}.$$

La fonction f_n est bien dans $C^r(\mathcal{O}_F, J', \underline{d}_{S\setminus J'})$ puisqu'elle est en fait dans $\mathcal{F}(\mathcal{O}_F, J', \underline{d}_{S\setminus J'})$. Par [24, Lemme 9.9], il suffit de montrer que $f_{n+1} - f_n$ tend vers 0 dans l'espace dual de l'espace de Banach des distributions $(J', \underline{d}_{S\setminus J'})$-tempérées d'ordre r sur $\mathcal{O}_F$. Autrement dit, on veut montrer que

$$\sup_{\mu \in C^r(\mathcal{O}_F, J', \underline{d}_{S\setminus J'})^\vee} \frac{\left|\int_{\mathcal{O}_F} \Big(f_{n+1}(z) - f_n(z)\Big)\mu(z)\right|}{\|\mu\|_{r,\underline{d}_{S\setminus J}}} \to 0 \text{ quand } n \to +\infty\,.$$

Remarquons que

$$
\begin{aligned}
f_{n+1}(z) - f_n(z) &= \mathbf{1}_{D(0,n)\backslash D(0,n+1)}(z)\chi_2'{\chi_1'}^{-1}(z) z^{\underline{d}_{S\backslash J'} - \underline{n}_{S\backslash J'}} z^{-\underline{m}_{J'}} \\
&= \sum_{a_i \in S_l} \mathbf{1}_{D(a_i\varpi_F^n, n+l)}(z)\chi_2'{\chi_1'}^{-1}(z) z^{\underline{d}_{S\backslash J'} - \underline{n}_{S\backslash J'}} z^{-\underline{m}_{J'}}.
\end{aligned}
\tag{4.10}
$$

Comme χ_1' et χ_2' sont des caractères J'-analytiques sur $D(a_i, l)$ pour tout $a_i \in S_l$, on sait que pour tout $n \geq 0$, on a :

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{1}_{D(a_i\varpi_F^n, n+l)}(z)\chi_2'{\chi_1'}^{-1}(z) \\
&\quad = \chi_2'{\chi_1'}^{-1}(\varpi_F^n)\mathbf{1}_{D(a_i,l)}\Big(\frac{z}{\varpi_F^n}\Big)\chi_2'{\chi_1'}^{-1}\Big(\frac{z}{\varpi_F^n}\Big) \\
&\quad = \chi_2'{\chi_1'}^{-1}(\varpi_F^n)\mathbf{1}_{D(a_i,l)}\Big(\frac{z}{\varpi_F^n}\Big) \sum_{\underline{h}_{J'} \geqslant \underline{0}} b_{\underline{h}_{J'}}(a_i)\Big(\frac{z}{\varpi_F^n} - a_i\Big)^{\underline{h}_{J'}} \\
&\quad = \chi_2'{\chi_1'}^{-1}(\varpi_F^n) \sum_{\underline{h}_{J'} \geqslant \underline{0}} \mathbf{1}_{D(a_i\varpi_F^n, n+l)}(z) b_{\underline{h}_{J'}}(a_i)\Big(\frac{z - a_i\varpi_F^n}{\varpi_F^n}\Big)^{\underline{h}_{J'}}.
\end{aligned}
$$

Grâce à la condition (4.9), on sait que $\big|\chi_2'{\chi_1'}^{-1}(\varpi_F^n)\big| = q^{-n(2r - |\underline{d}_{S\backslash J'}|)}$. Ainsi, en écrivant $z^{-\underline{m}_{J'}} = (z - a_i\varpi_F^n + a_i\varpi_F^n)^{-\underline{m}_{J'}}$ et en développant, on obtient, pour tout $a_i \in S_l$:

$$
\mathbf{1}_{D(a_i\varpi_F^n, n+l)}(z) z^{-\underline{m}_{J'}} = \mathbf{1}_{D(a_i\varpi_F^n, n+l)}(z)(a_i\varpi_F^n)^{-\underline{m}_{J'}} \sum_{\underline{t}_{J'} \geqslant \underline{0}} \lambda_{\underline{t}_{J'}} a_i^{-\underline{t}_{J'}} \Big(\frac{z - a_i\varpi_F^n}{\varpi_F^n}\Big)^{\underline{t}_{J'}},
$$

où les $\lambda_{\underline{t}_{J'}}$ sont des éléments de $\mathscr{O}_E$. De même on obtient, pour tout $a_i \in S_l$:

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{1}_{D(a_i\varpi_F^n, n+l)}(z) z^{\underline{d}_{S\backslash J'} - \underline{n}_{S\backslash J'}} \\
&= \mathbf{1}_{D(a_i\varpi_F^n, n+l)}(z) \sum_{\underline{0} \leqslant \underline{k}_{S\backslash J'} \leqslant \underline{d}_{S\backslash J'} - \underline{n}_{S\backslash J'}} \mu_{\underline{k}_{S\backslash J'}} (a_i\varpi_F^n)^{\underline{k}_{S\backslash J'}} (z - a_i\varpi_F^n)^{\underline{d}_{S\backslash J'} - \underline{n}_{S\backslash J'} - \underline{k}_{S\backslash J'}},
\end{aligned}
$$

avec $\mu_{\underline{k}_{S\backslash J'}} \in \mathbb{N}_{>0}$.

Pour tout $\underline{0} \leqslant \underline{\alpha}_{S\backslash J'} \leqslant \underline{d}_{S\backslash J'}$ et tout $\underline{\beta}_{J'} \in \mathbb{N}^{J'}$, notons alors $f_{\underline{\alpha}_{S\backslash J'}, \underline{\beta}_{J'}} : \mathscr{O}_F \backslash \{0\} \to E$, la fonction définie par :

$$
f_{\underline{\alpha}_{S\backslash J'}, \underline{\beta}_{J'}}(z) = z^{\underline{d}_{S\backslash J'} - \underline{\alpha}_{S\backslash J'}} z^{-\underline{\beta}_{J'}}.
$$

Par (4.10), on a :

$$
\big|\mu\big(f_{n+1}(z) - f_n(z)\big)\big| = \sup_{a_i \in S_l} \big|\mu(\mathbf{1}_{D(a_i\varpi_F^n, n+l)}(z)\chi_2'{\chi_1'}^{-1}(z) f_{\underline{n}_{S\backslash J'}, \underline{m}_{J'}}(z))\big|.
$$

Si l'on note $C_1 = \sup_{a_i \in S_l} \sup_{\underline{h}_{J'}} |b_{\underline{h}_{J'}}(a_i)|$, les égalités précédentes montrent alors que pour tout $a_i \in S_l$, on a :

$$\begin{aligned}&\Big|\mu(\mathbf{1}_{D(a_i\varpi_F^n,n+l)}(z)\chi_2'{\chi_1'}^{-1}(z)z^{\underline{d}_{S\setminus J'}-\underline{n}_{S\setminus J'}}z^{-\underline{m}_{J'}})\Big| \\ &\qquad\leq C_1 q^{-n(2r-|\underline{d}_{S\setminus J'}|-|\underline{m}_{J'}|)} \sup_{\substack{\underline{l}_{J'}\\ \underline{k}_{S\setminus J'}}} q^{-n(|\underline{k}_{S\setminus J'}|-|\underline{l}_{J'}|)} \\ &\qquad\qquad\cdot\Big|\mu\big(\mathbf{1}_{D(a_i\varpi_F^n,n+l)}(z)f_{\underline{n}_{S\setminus J'}+\underline{k}_{S\setminus J'},\underline{l}_{J'}}(z-a_i\varpi_F^n)\big)\Big|,\end{aligned}$$

où $\underline{l}_{J'}$ varie dans $\mathbb{N}^{J'}$ et où $\underline{0} \leqslant \underline{k}_{S\setminus J'} \leqslant \underline{d}_{S\setminus J'}$. D'après la remarque 3.10, on a aussi :

$$\begin{aligned}&\Big|\mu\big(\mathbf{1}_{D(a_i\varpi_F^n,n+l)}(z)f_{\underline{n}_{S\setminus J'}+\underline{k}_{S\setminus J'},\underline{l}_{J'}}(z-a_i\varpi_F^n)\big)\Big| \\ &\qquad\leq \|\mu\|_{r,\underline{d}_{S\setminus J}} \sup_{\substack{\underline{l}_{J'}\\ \underline{k}_{S\setminus J'}}} q^{(n+l)(r+|\underline{k}_{S\setminus J'}|-|\underline{l}_{J'}|-|\underline{d}_{S\setminus J'}|+|\underline{n}_{S\setminus J'}|)},\end{aligned}$$

d'où l'on déduit que

$$\begin{aligned}&\Big|\mu\big(f_{n+1}(z)-f_n(z)\big)\Big| \\ &\qquad\leq C_1\|\mu\|_{r,\underline{d}_{S\setminus J}} q^{-n(r-|\underline{m}_{J'}|-|\underline{n}_{S\setminus J'}|)} \sup_{\substack{\underline{l}_{J'}\\ \underline{k}_{S\setminus J'}}} q^{l(r+|\underline{k}_{S\setminus J'}|-|\underline{l}_{J'}|-|\underline{d}_{S\setminus J'}|+|\underline{n}_{S\setminus J'}|)},\end{aligned}$$

ce qui prouve le résultat car $r > |\underline{m}_{J'}| + |\underline{n}_{S\setminus J'}|$. □

D'après le lemme 4.6, on sait que pour tout $a \in F$, tout $\underline{m}_{J'} \in \mathbb{N}^{J'}$ et tout $\underline{0} \leqslant \underline{n}_{S\setminus J'} \leqslant \underline{d}_{S\setminus J'}$ tels que $r - |\underline{n}_{S\setminus J'}| - |\underline{m}_{J'}| > 0$, les fonctions $[z \mapsto z^{\underline{n}_{S\setminus J'}}z^{\underline{m}_{J'}}]$ et $[z \mapsto \chi_2'{\chi_1'}^{-1}(z-a)(z-a)^{\underline{d}_{S\setminus J'}-\underline{n}_{S\setminus J'}}(z-a)^{-\underline{m}_{J'}}]$ sont dans $B(\chi', J', \underline{d}_{S\setminus J'})$. Notons $L(\chi', J', \underline{d}_{S\setminus J'})$ l'adhérence dans $B(\chi', J', \underline{d}_{S\setminus J'})$ du sous-E-espace vectoriel engendré par ces fonctions. Un calcul direct laissé au lecteur permet de vérifier l'énoncé suivant.

Lemme 4.7. — *Le sous-espace $L(\chi', J', \underline{d}_{S\setminus J'})$ est stable par G dans $B(\chi', J', \underline{d}_{S\setminus J'})$.*

Posons alors

$$\Pi(\chi', J', \underline{d}_{S\setminus J'}) \stackrel{\text{déf}}{=} B(\chi', J', \underline{d}_{S\setminus J'})/L(\chi', J', \underline{d}_{S\setminus J'}).$$

C'est un espace de Banach sur E qui est munit, d'après les lemmes 4.5 et 4.7, d'une action de G par automorphismes continus.

5. Réseaux

5.1. Deux conditions nécessaires de non nullité. — Soit $\chi_1, \chi_2 \colon F^\times \to E^\times$ deux caractères localement J-analytiques et $\underline{d}_{S\backslash J}$ un $|S\backslash J|$-uplet d'entiers positifs ou nuls. Posons $r = -\mathrm{val}_{\mathbb{Q}_p}(\chi_1(p))$ et considérons la représentation localement $\mathbb{Q}_p$-analytique

$$I(\chi, J, \underline{d}_{S\backslash J}) = \Big(\bigotimes_{\sigma\in S\backslash J} (\mathrm{Sym}^{d_\sigma} E^2)^\sigma\Big) \otimes_E \Big(\mathrm{Ind}_P^G \chi_1 \otimes \chi_2\Big)^{J\text{-an}}$$

que nous avons construite dans la Section §4.2. Soit $I(\chi, J, \underline{d}_{S\backslash J})(F)$ le sous-espace fermé de $I(\chi, J, \underline{d}_{S\backslash J})$ formé des fonctions à support compact. Il est stable sous l'action de P et il engendre $I(\chi, J, \underline{d}_{S\backslash J})$ sous G. En outre, il contient l'espace $\mathcal{O}(\mathcal{O}_F, J, \underline{d}_{S\backslash J})$ et l'on vérifie immédiatement que

$$I(\chi, J, \underline{d}_{S\backslash J}) = \sum_{g\in G} g\mathcal{O}(\mathcal{O}_F, J, \underline{d}_{S\backslash J}).$$

D'après la preuve de [15, Proposition 1.21], le complété unitaire universel de $I(\chi, J, \underline{d}_{S\backslash J})$ est le complété de $I(\chi, J, \underline{d}_{S\backslash J})$ par rapport au sous-$\mathcal{O}_E[G]$-réseau engendré par les vecteurs $\mathbf{1}_{\mathcal{O}_F}(z) z^{\underline{n}_{S\backslash J}} z^{\underline{m}_J}$ avec $\underline{0} \leqslant \underline{n}_{S\backslash J} \leqslant \underline{d}_{S\backslash J}$ et $\underline{m}_J \in \mathbb{N}^J$. En utilisant la decomposition d'Iwasawa $G = PK$ et la compacité de K, on voit qu'il suffit de compléter par rapport au sous-$\mathcal{O}_E[P]$-réseau Λ engendré par les vecteurs $\mathbf{1}_{\mathcal{O}_F}(z) z^{\underline{n}_{S\backslash J}} z^{\underline{m}_J}$ et $\mathbf{1}_{F-\mathcal{O}_F}(z)\chi_2\chi_1^{-1}(z) z^{\underline{d}_{S\backslash J}-\underline{n}_{S\backslash J}} z^{-\underline{m}_J}$ avec $\underline{0} \leqslant \underline{n}_{S\backslash J} \leqslant \underline{d}_{S\backslash J}$ et $\underline{m}_J \in \mathbb{N}^J$. Notons $I(\chi, J, \underline{d}_{S\backslash J})^\wedge$ le complété de $I(\chi, J, \underline{d}_{S\backslash J})$ par rapport à Λ : c'est un G-Banach unitaire pour lequel on dispose des deux conditions nécessaires de non nullité suivantes.

Proposition 5.1. — *Les deux conditions suivantes sont nécessaires pour que $I(\chi, J, \underline{d}_{S\backslash J})^\wedge$ soit non nul :*

(i) *le caractère central de $I(\chi, J, \underline{d}_{S\backslash J})$ est à valeurs entières ;*
(ii) *on a l'inégalité* $\mathrm{val}_{\mathbb{Q}_p}(\chi_2(p)) + |\underline{d}_{S\backslash J}| \geq 0$.

Démonstration. — Supposons que $(I(\chi, J, \underline{d}_{S\backslash J})^\wedge, \|\cdot\|)$ soit non nul. En particulier, l'application canonique $\iota \colon I(\chi, J, \underline{d}_{S\backslash J}) \to I(\chi, J, \underline{d}_{S\backslash J})^\wedge$ est non nulle. Soit donc $f \in I(\chi, J, \underline{d}_{S\backslash J})$ tel que $\iota(f) \neq 0$. Comme ι est G-équivariante et comme $I(\chi, J, \underline{d}_{S\backslash J})^\wedge$ est un G-Banach unitaire, on a :

$$\Big|\chi_1(p)\chi_2(p)p^{|\underline{d}_{S\backslash J}|}\Big| \|\iota(f)\| = \|\iota(f)\|,$$

ce qui prouve (i).

Montrons maintenant que si $\mathrm{val}_{\mathbb{Q}_p}(\chi_2(p)) + |\underline{d}_{S\backslash J}| < 0$, alors $I(\chi, J, \underline{d}_{S\backslash J})^\wedge$ est nul. Ceci équivaut à prouver que pour tout $\underline{0} \leqslant \underline{n}_{S\backslash J} \leqslant \underline{d}_{S\backslash J}$ et tout $\underline{m}_J \in \mathbb{N}^J$, on a :

$$\forall \lambda \in E, \forall n \geq 0, \quad \lambda \mathbf{1}_{D(0,n)}(z) z^{\underline{n}_{S\backslash J}} z^{\underline{m}_J} \in \Lambda. \tag{5.1}$$

Nous allons raisonner par récurrence sur $|\underline{n}_{S\backslash J}| + |\underline{m}_J|$.

Supposons tout d'abord $|\underline{n}_{S\backslash J}| + |\underline{m}_J| = 0$. Soit $\lambda \in E$ et $n \in \mathbb{N}$. Notons m le plus petit entier positif tel que $\mathrm{val}_F(\chi_2(\varpi_F^m)\varpi_F^{m\underline{d}_{S\backslash J}}) < \mathrm{val}_F(\lambda)$ et fixons $R \subset \mathcal{O}_F$ un système de représentants des classes de $\mathcal{O}_F/\varpi_F^m \mathcal{O}_F$. Comme Λ est stable sous l'action de P, la formule (4.4) assure que l'on a :

$$\forall a_i \in R, \quad \left[\begin{smallmatrix} \varpi_F^m & \varpi_F^n a_i \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right] \mathbf{1}_{D(0,n)} = \chi_2(\varpi_F^m)\varpi_F^{m\underline{d}_{S\backslash J}} \mathbf{1}_{D(\varpi_F^n a_i, n+m)} \in \Lambda.$$

On en déduit que

$$\sum_{a_i \in R} \chi_2(\varpi_F^m)\varpi_F^{m\underline{d}_{S\backslash J}} \mathbf{1}_{D(\varpi_F^n a_i, n+m)} = \chi_2(\varpi_F^m)\varpi_F^{m\underline{d}_{S\backslash J}} \mathbf{1}_{D(0,n)} \in \Lambda,$$

ce qui assure que $\lambda \mathbf{1}_{D(0,n)} \in \Lambda$.

Supposons maintenant que (5.1) soit vrai pour tout $\underline{0} \leqslant \underline{n}_{S\backslash J} \leqslant \underline{d}_{S\backslash J}$ et tout $\underline{m}_J \in \mathbb{N}^J$ tels que $|\underline{n}_{S\backslash J}| + |\underline{m}_J| \leq l$ où l est un entier positif. Soit $\underline{i} \in \mathbb{N}^S$ tel que :

$$|\underline{i}| = l + 1 \quad \text{et} \quad i_\sigma \leq d_\sigma, \quad \text{pour tout } \sigma \in S\backslash J.$$

Comme Λ est stable sous l'action de P, la formule (4.4) assure que l'on a :

$$\forall a_i \in R, \quad \left[\begin{smallmatrix} \varpi_F^m & \varpi_F^n a_i \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right] z^{\underline{i}} \mathbf{1}_{D(0,n)} = \chi_2(\varpi_F^m)\varpi_F^{m\underline{d}_{S\backslash J}} \Big(\frac{z - a_i \varpi_F^n}{\varpi_F^m}\Big)^{\underline{i}} \mathbf{1}_{D(\varpi_F^n a_i, n+m)} \in \Lambda,$$

avec $\mu_{\underline{k}} \in \mathbb{Z}$. On en déduit, en développant $\big(\frac{z - a_i \varpi_F^n}{\varpi_F^m}\big)^{\underline{i}}$ et en utilisant l'hypothèse de récurrence, que l'on a :

$$\forall a_i \in R, \quad \chi_2(\varpi_F^m)\varpi_F^{m\underline{d}_{S\backslash J}} \Big(\frac{z}{\varpi_F^m}\Big)^{\underline{i}} \mathbf{1}_{D(\varpi_F^n a_i, n+m)} \in \Lambda.$$

Ceci assure en particulier que l'on a :

$$\sum_{a_i \in R} \chi_2(\varpi_F^m)\varpi_F^{m\underline{d}_{S\backslash J}} \varpi_F^{-m\underline{i}} z^{\underline{i}} \mathbf{1}_{D(\varpi_F^n a_i, n+m)} = \chi_2(\varpi_F^m)\varpi_F^{m\underline{d}_{S\backslash J}} \varpi_F^{-m\underline{i}} z^{\underline{i}} \mathbf{1}_{D(0,n)} \in \Lambda,$$

ce qui implique que $\lambda z^{\underline{i}} \mathbf{1}_{D(0,n)} \in \Lambda$, et permet de conclure. □

Remarque 5.2. — La condition (i) de la proposition 5.1 peut s'exprimer par l'égalité suivante :

$$\mathrm{val}_{\mathbb{Q}_p}(\chi_1(p)) + \mathrm{val}_{\mathbb{Q}_p}(\chi_2(p)) + |\underline{d}_{S\backslash J}| = 0. \tag{5.2}$$

On termine cette section par quelques remarques sur le cas localement algébrique. Soient $\chi_1, \chi_2 \colon F^\times \to E^\times$ deux caractères localement constants et $\underline{d}$ un $|S|$-uplet d'entiers positifs ou nuls. Posons :

$$I(\chi, \underline{d}) = \Big(\bigotimes_{\sigma\in S} (\mathrm{Sym}^{d_\sigma} E^2)^\sigma\Big) \otimes_E \Big(\mathrm{Ind}_P^G \chi_1 \otimes \chi_2 |\cdot|^{-1}\Big),$$

où $\mathrm{Ind}_P^G(\chi_1 \otimes \chi_2|\cdot|^{-1})$ désigne l'induite lisse usuelle. D'après la proposition 5.1 et d'après [21, Lemme 7.9] on connait deux conditions nécessaires pour que $I(\chi, \underline{d})^\wedge$ soit non nul, à savoir :

(i) $\mathrm{val}_{\mathbb{Q}_p}(\chi_1(p)) + \mathrm{val}_{\mathbb{Q}_p}(\chi_2(p)) + [F : \mathbb{Q}_p] + |\underline{d}| = 0$;
(ii) $\mathrm{val}_{\mathbb{Q}_p}(\chi_2(p)) + [F : \mathbb{Q}_p] + |\underline{d}| \geq 0$ et $\mathrm{val}_{\mathbb{Q}_p}(\chi_1(p)) + [F : \mathbb{Q}_p] + |\underline{d}| \geq 0$.

On voit que (i) et (ii) sont équivalentes à

(i′) $\mathrm{val}_{\mathbb{Q}_p}(\chi_1(p)) + \mathrm{val}_{\mathbb{Q}_p}(\chi_2(p)) + [F : \mathbb{Q}_p] + |\underline{d}| = 0$;
(ii′) $\mathrm{val}_{\mathbb{Q}_p}(\chi_2(p)) \leq 0$ et $\mathrm{val}_{\mathbb{Q}_p}(\chi_1(p)) \leq 0$.

Rappelons la conjecture suivante qui est un cas particulier d'une conjecture plus générale due à Breuil et Schneider [9].

Conjecture 5.3. — *Avec les notations précédentes, les conditions* (i′) *et* (ii′) *sont aussi des conditions suffisantes à la non nullité de* $I(\chi, \underline{d})^\wedge$.

Remarque 5.4. — La conjecture 5.3 est démontrée dans les cas suivants :

- lorsque $F = \mathbb{Q}_p$ [3, Corollaire 5.3.1] ;
- orsque $\chi_2\chi_1^{-1}$ est un caractère modérément ramifié avec $\underline{d} = \underline{0}$ [29, Proposition 0.10], ou [18, Théorème 1.2] pour une preuve alternative ;
- lorsque $\chi_2\chi_1^{-1}$ est un caractère non ramifié avec certaines conditions sur $\underline{d}$ [14].

5.2. Passage au dual. — On conserve les notations du §5.1. Supposons que les conditions (i) et (ii) de la proposition 5.1 soient satisfaites, ce qui implique en particulier que $r \geq 0$. Posons à nouveau :

$$J' = J \coprod \{\sigma \in S\backslash J,\, d_\sigma + 1 > r\}, \quad \chi_1' = \chi_1, \quad \chi_2' = \chi_2 \prod_{\sigma \in J'\backslash J} \sigma^{d_\sigma}.$$

On sait que l'on dispose d'une immersion fermée G-équivariante :

$$I(\chi, J, \underline{d}_{S\backslash J}) \hookrightarrow I(\chi', J', \underline{d}_{S\backslash J'}). \tag{5.3}$$

Le prochain résultat donne des informations sur les vecteurs localement $\mathbb{Q}_p$-analytiques de $I(\chi, J, \underline{d}_{S\backslash J})^\wedge$.

Proposition 5.5. — *Supposons que les conditions de la proposition 5.1 soient satisfaites. Alors les conditions suivantes sont équivalentes et vérifiées :*

(i) *Toute application continue, E-linéaire et G-équivariante $I(\chi, J, \underline{d}_{S\backslash J}) \to B$, avec B un G-Banach unitaire, s'étend de manière unique en une application continue, E-linéaire et G-équivariante $I(\chi', J', \underline{d}_{S\backslash J'}) \to B$.*

(ii) *L'application canonique $I(\chi, J, \underline{d}_{S\backslash J}) \to I(\chi, J, \underline{d}_{S\backslash J})^\wedge$ s'étend de manière unique en une application continue, E-linéaire et G-équivariante $I(\chi', J', \underline{d}_{S\backslash J'}) \to I(\chi, J, \underline{d}_{S\backslash J})^\wedge$.*

(iii) *L'application* (5.3) *induit un isomorphisme de G-Banach unitaires :*

$$I(\chi, J, \underline{d}_{S\backslash J})^\wedge \xrightarrow{\sim} I(\chi', J', \underline{d}_{S\backslash J'})^\wedge .$$

Démonstration. — L'équivalence des conditions (i), (ii) et (iii) est claire. Breuil montre (i) en supposant de plus que l'application de $I(\chi, J, \underline{d}_{S\backslash J})$ dans B est injective [8, Théorème 7.1]. Une preuve analogue, qui utilise de façon cruciale [8, Lemme 6.1], permet de démontrer le cas général. □

D'après la proposition 5.5 (iii), donner une description explicite de $I(\chi, J, \underline{d}_{S\backslash J})^\wedge$ revient à donner une description explicite de $I(\chi', J', \underline{d}_{S\backslash J'})^\wedge$. On peut ainsi supposer que :

$$\forall \sigma \in S\backslash J, \quad r \geq d_\sigma + 1\,, \tag{5.4}$$

ou encore que $J = J'$.

Rappelons (§5.1) que le complété unitaire universel de $I(\chi, J, \underline{d}_{S\backslash J})$ est le complété par rapport au sous-$\mathscr{O}_E[P]$-réseau Λ engendré par les vecteurs :

$$\mathbf{1}_{\mathscr{O}_F}(z) z^{\underline{n}_{S\backslash J}} z^{\underline{m}_J} \quad \text{et} \quad \mathbf{1}_{F-\mathscr{O}_F}(z) \chi_2 \chi_1^{-1}(z) z^{\underline{d}_{S\backslash J} - \underline{n}_{S\backslash J}} z^{-\underline{m}_J} \tag{5.5}$$

pour tout $\underline{0} \leqslant \underline{n}_{S\backslash J} \leqslant \underline{d}_{S\backslash J}$ et tout $\underline{m}_J \in \mathbb{N}^J$.

De plus, on note $I(\chi, J, \underline{d}_{S\backslash J})^\vee$ le dual continu de l'espace $I(\chi, J, \underline{d}_{S\backslash J})$ muni de la topologie forte. Si $\mu \in I(\chi, J, \underline{d}_{S\backslash J})^\vee$ et $f \in I(\chi, J, \underline{d}_{S\backslash J})$, on note, pour tout ouvert U de F :

$$\mu\Big(\mathbf{1}_U f\Big) = \int_U f(z)\mu(z)\,.$$

D'après la remarque 2.4, l'application canonique $I(\chi, J, \underline{d}_{S\backslash J}) \to I(\chi, J, \underline{d}_{S\backslash J})^\wedge$ est d'image dense. Par suite on a une injection continue

$$(I(\chi, J, \underline{d}_{S\backslash J})^\wedge)^\vee \hookrightarrow I(\chi, J, \underline{d}_{S\backslash J})^\vee. \tag{5.6}$$

Le résultat suivant donne une caractérisation utile de l'image de l'application (5.6).

Proposition 5.6. — *Soit $\mu \in I(\chi, J, \underline{d}_{S\backslash J})^\vee$. Alors $\mu \in (I(\chi, J, \underline{d}_{S\backslash J})^\wedge)^\vee$ si et seulement s'il existe une constante $C_\mu \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ telle que l'on ait, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, tout $a \in F$, tout $\underline{0} \leqslant \underline{n}_{S\backslash J} \leqslant \underline{d}_{S\backslash J}$ et tout $\underline{m}_J \in \mathbb{N}^J$:*

$$\Big| \int_{D(a,n)} (z-a)^{\underline{n}_{S\backslash J}} (z-a)^{\underline{m}_J} \mu(z) \Big| \leq C_\mu q^{n(r - |\underline{n}_{S\backslash J}| - |\underline{m}_J|)}\,; \tag{5.7}$$

$$(5.8) \quad \Big|\int_{F\setminus D(a,n+1)} \chi_2\chi_1^{-1}(z-a)(z-a)^{\underline{d}_{S\setminus J}-\underline{n}_{S\setminus J}}(z-a)^{-\underline{m}_J}\mu(z)\Big| \leq C_\mu q^{n(|\underline{n}_{S\setminus J}|+|\underline{m}_J|-r)}.$$

Démonstration. — La distribution μ s'étend en une forme linéaire continue sur $I(\chi, J, \underline{d}_{S\setminus J})^\wedge$ si et seulement s'il existe une constante $C_\mu \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ telle que :

$$(5.9) \qquad \forall f \in \Lambda, \quad \Big|\int_F f(z)\mu(z)\Big| \leq C_\mu.$$

En utilisant (5.5) et l'identité

$$\left[\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right](\mathbf{1}_{\mathcal{O}_F}(z)z^{\underline{n}_{S\setminus J}}z^{\underline{m}_J}) = \mathbf{1}_{F-\mathcal{O}_F}(z)\chi_2\chi_1^{-1}(z)z^{\underline{d}_{S\setminus J}-\underline{n}_{S\setminus J}}z^{-\underline{m}_J},$$

on obtient immédiatement que (5.9) est équivalente aux deux conditions suivantes :

$$(5.10) \qquad \Big|\mu\Big(b(\mathbf{1}_{\mathcal{O}_F}(z)z^{\underline{n}_{S\setminus J}}z^{\underline{m}_J})\Big)\Big| \leq C_\mu ;$$

$$(5.11) \qquad \Big|\mu\Big(b\left[\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right](\mathbf{1}_{\mathcal{O}_F}(z)z^{\underline{n}_{S\setminus J}}z^{\underline{m}_J})\Big)\Big| \leq C_\mu ;$$

pour tout $b \in \Big\{\left[\begin{smallmatrix} \varpi_F^n & a \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right] ; n \in \mathbb{Z}, a \in F\Big\}$, tout $\underline{0} \leqslant \underline{n}_{S\setminus J} \leqslant \underline{d}_{S\setminus J}$ et tout $\underline{m}_J \in \mathbb{N}^J$. Or, en appliquant la formule (4.4) et d'après (5.2), on obtient que

$$\begin{aligned} &\Big|\mu\Big(\left[\begin{smallmatrix} \varpi_F^n & a \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right](\mathbf{1}_{\mathcal{O}_F}(z)z^{\underline{n}_{S\setminus J}}z^{\underline{m}_J})\Big)\Big| \\ &\qquad = \Big|\mu\Big(\mathbf{1}_{D(a,n)}(z)\chi_2(\varpi_F^n)\varpi_F^{n\underline{d}_{S\setminus J}}\Big(\frac{z-a}{\varpi_F^n}\Big)^{\underline{n}_{S\setminus J}}\Big(\frac{z-a}{\varpi_F^n}\Big)^{\underline{m}_J}\Big)\Big| \\ &\qquad = q^{n(|\underline{n}_{S\setminus J}|+|\underline{m}_J|-r)}\Big|\mu\Big(\mathbf{1}_{D(a,n)}(z)(z-a)^{\underline{n}_{S\setminus J}}(z-a)^{\underline{m}_J}\Big)\Big| \end{aligned}$$

d'où la condition (5.7).

Un calcul analogue montre que la condition (5.11) est équivalente à la condition (5.8). □

DÉFINITION 5.7. — On appelle *distribution $(J, \underline{d}_{S\setminus J})$-tempérée d'ordre r sur F* une forme linéaire continue sur l'espace de Banach $B(\chi, J, \underline{d}_{S\setminus J})$.

D'après ce que l'on a vu dans la Section §3.2, on sait que $\mathcal{F}(\mathcal{O}_F, J, \underline{d}_{S\setminus J})$ s'injecte de façon continue dans $C^r(\mathcal{O}_F, J, \underline{d}_{S\setminus J})$ et que son image y est dense. En utilisant le fait que $I(\chi, J, \underline{d}_{S\setminus J})$ (resp. $B(\chi, J, \underline{d}_{S\setminus J})$) s'identifie topologiquement à deux copies de $\mathcal{F}(\mathcal{O}_F, J, \underline{d}_{S\setminus J})$ (resp. $C^r(\mathcal{O}_F, J, \underline{d}_{S\setminus J})$), on en déduit l'existence d'une injection $\mathrm{GL}_2(F)$-équivariante continue

$$I(\chi, J, \underline{d}_{S\setminus J}) \hookrightarrow B(\chi, J, \underline{d}_{S\setminus J}),$$

dont l'image est dense dans $B(\chi, J, \underline{d}_{S\setminus J})$, puis d'une injection continue

$$(5.12) \qquad B(\chi, J, \underline{d}_{S\setminus J})^\vee \hookrightarrow I(\chi, J, \underline{d}_{S\setminus J})^\vee.$$

Le résultat suivant donne une caractérisation utile de l'image de l'application (5.12).

Proposition 5.8. — *Soit $\mu \in I(\chi, J, \underline{d}_{S\backslash J})^\vee$. Alors μ est tempérée d'ordre r sur F si et seulement s'il existe une constante $C_\mu \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ telle que l'on ait :*

$$\left|\int_{D(a,n)} (z-a)^{\underline{n}_{S\backslash J}}(z-a)^{\underline{m}_J}\mu(z)\right| \leq C_\mu q^{n(r-|\underline{n}_{S\backslash J}|-|\underline{m}_J|)} \tag{5.13}$$

pour tout $a \in \varpi_F\mathcal{O}_F$, tout $\underline{0} \leqslant \underline{n}_{S\backslash J} \leqslant \underline{d}_{S\backslash J}$, tout $\underline{m}_J \in \mathbb{N}^J$ et tout $n \geq 1$;

$$\left|\int_{F\backslash D(0,n+1)} \chi_2\chi_1^{-1}(z) z^{\underline{d}_{S\backslash J}-\underline{n}_{S\backslash J}} z^{-\underline{m}_J}\mu(z)\right| \leq C_\mu q^{n(|\underline{n}_{S\backslash J}|+|\underline{m}_J|-r)} \tag{5.14}$$

pour tout $\underline{0} \leqslant \underline{n}_{S\backslash J} \leqslant \underline{d}_{S\backslash J}$, tout $\underline{m}_J \in \mathbb{N}^J$ et tout $n \leq 0$;

$$\left|\int_{D(\frac{1}{a}, n-\frac{2\mathrm{val}_F(a)}{f})} \chi_2\chi_1^{-1}(z) z^{\underline{d}_{S\backslash J}}\Big(\frac{1}{z}-a\Big)^{\underline{n}_{S\backslash J}}\Big(\frac{1}{z}-a\Big)^{\underline{m}_J}\mu(z)\right| \tag{5.15}$$
$$\leq C_\mu q^{n(r-|\underline{n}_{S\backslash J}|-|\underline{m}_J|)}$$

pour tout $a \in \mathcal{O}_F - \{0\}$, tout $\underline{0} \leqslant \underline{n}_{S\backslash J} \leqslant \underline{d}_{S\backslash J}$, tout $\underline{m}_J \in \mathbb{N}^J$ et tout entier $n > \frac{\mathrm{val}_F(a)}{f}$.

Démonstration. — L'application (4.2) (resp. (4.5)) induit un isomorphisme topologique de $I(\chi, J, \underline{d}_{S\backslash J})^\vee$ dans $(\mathscr{F}(\mathcal{O}_F, J, \underline{d}_{S\backslash J})^\vee)^2$ (resp. de $B(\chi, J, \underline{d}_{S\backslash J})^\vee$ dans $(C^r(\mathcal{O}_F, J, \underline{d}_{S\backslash J})^\vee)^2$). Si l'on note (μ_1, μ_2) l'élément de $(\mathscr{F}(\mathcal{O}_F, J, \underline{d}_{S\backslash J})^\vee)^2$ qui correspond à μ via cet isomorphisme, il est clair que μ est tempérée d'ordre r sur F si et seulement si les distributions μ_1 et μ_2 sont $(J, \underline{d}_{S\backslash J})$-tempérées d'ordre r sur $\mathcal{O}_F$. D'après le théorème 3.8, la distribution μ_1 (resp. μ_2) est $(J, \underline{d}_{S\backslash J})$-tempérée d'ordre r sur $\mathcal{O}_F$ si et seulement s'il existe une constante $C_{\mu_1} \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ (resp. $C_{\mu_2} \in \mathbb{R}_{\geq 0}$) telle que pour tout $a \in \mathcal{O}_F$, tout $\underline{0} \leqslant \underline{n}_{S\backslash J} \leqslant \underline{d}_{S\backslash J}$, tout $\underline{m}_J \in \mathbb{N}^J$ et tout $n \geq 0$, on ait :

$$\left|\mu_1\Big(\mathbf{1}_{D(a,n)}(z)(z-a)^{\underline{n}_{S\backslash J}}(z-a)^{\underline{m}_J}\Big)\right| \leq C_{\mu_1} q^{n(r-|\underline{n}_{S\backslash J}|-|\underline{m}_J|)}\ ; \tag{5.16}$$

$$\left|\mu_2\Big(\mathbf{1}_{D(a,n)}(z)(z-a)^{\underline{n}_{S\backslash J}}(z-a)^{\underline{m}_J}\Big)\right| \leq C_{\mu_2} q^{n(r-|\underline{n}_{S\backslash J}|-|\underline{m}_J|)}\ . \tag{5.17}$$

La fonction f correspondant au couple

$$(f_1, f_2) = (\mathbf{1}_{D(a,n)}(z)(z-a)^{\underline{n}_{S\backslash J}}(z-a)^{\underline{m}_J}, 0)$$

via (4.3) est la fonction $\mathbf{1}_{D(\varpi_F a, n+1)}(z)\big(\frac{z}{\varpi_F}-a\big)^{\underline{n}_{S\backslash J}}\big(\frac{z}{\varpi_F}-a\big)^{\underline{m}_J}$. Ainsi, la condition (5.16) se traduit par

$$\left|\mu\Big(\mathbf{1}_{D(\varpi_F a, n+1)}(z)(z-\varpi_F a)^{\underline{n}_{S\backslash J}}(z-\varpi_F a)^{\underline{m}_J}\Big)\right| \leq C_{\mu_1} q^{(n+1)(r-|\underline{n}_{S\backslash J}|-|\underline{m}_J|)}$$

pour tout $a \in \mathcal{O}_F$, tout $\underline{0} \leqslant \underline{n}_{S\setminus J} \leqslant \underline{d}_{S\setminus J}$, tout $\underline{m}_J \in \mathbb{N}^J$ et tout $n \geq 0$, d'où (5.13).

La fonction f correspondant au couple

$$(f_1, f_2) = (0, \mathbf{1}_{D(a,n)}(z)(z-a)^{\underline{n}_{S\setminus J}}(z-a)^{\underline{m}_J})$$

via (4.3) est la fonction $\mathbf{1}_{\{z:\ |\frac{1}{z}-a|\leq|\varpi_F^n|\}}(z)\chi_2\chi_1^{-1}(z)z^{\underline{d}_{S\setminus J}}\big(\frac{1}{z}-a\big)^{\underline{n}_{S\setminus J}}\big(\frac{1}{z}-a\big)^{\underline{m}_J}$. Nous devons ici distinguer deux cas.

- Si $a \in D(0,n)$, on a $\{z:\ |\frac{1}{z}-a| \leq |\varpi_F^n|\} = F\setminus D(0,-n+1)$; la condition (5.17) se traduit alors par

$$\Big|\mu\Big(\mathbf{1}_{F\setminus D(0,-n+1)}(z)\chi_2\chi_1^{-1}(z)z^{\underline{d}_{S\setminus J}}\Big(\frac{1}{z}-a\Big)^{\underline{n}_{S\setminus J}}\Big(\frac{1}{z}-a\Big)^{\underline{m}_J}\Big)\Big| \leq C_{\mu_2}q^{n(|\underline{n}_{S\setminus J}|+|\underline{m}_J|-r)} \tag{5.18}$$

  pour tout $\underline{0} \leqslant \underline{n}_{S\setminus J} \leqslant \underline{d}_{S\setminus J}$, tout $\underline{m}_J \in \mathbb{N}^J$ et tout $n \geq 0$. En développant $\big(\frac{1}{z}-a\big)^{\underline{n}_{S\setminus J}}$ et $\big(\frac{1}{z}-a\big)^{\underline{m}_J}$, on voit directement l'équivalence des conditions (5.18) et (5.14).
- Si $a \in \mathcal{O}_F\setminus D(0,n)$, on a $\{z:\ |\frac{1}{z}-a| \leq |\varpi_F^n|\} = D(\frac{1}{a}, n - \frac{2\mathrm{val}_F(a)}{f})$, et la condition (5.17) se traduit alors par la condition (5.15). □

Corollaire 5.9. — *Soit $\mu \in I(\chi, J, \underline{d}_{S\setminus J})^\vee$. Alors $\mu \in \Pi(\chi, J, \underline{d}_{S\setminus J})^\vee$ si et seulement s'il existe une constante $C_\mu \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ vérifiant* (5.13), (5.14), (5.15) *ainsi que les deux conditions supplémentaires suivantes :*

$$\int_F z^{\underline{n}_{S\setminus J}}z^{\underline{m}_J}\mu(z) = 0; \tag{5.19}$$

$$\int_F \chi_2\chi_1^{-1}(z-a)(z-a)^{\underline{d}_{S\setminus J}-\underline{n}_{S\setminus J}}(z-a)^{-\underline{m}_J}\mu(z) = 0 \tag{5.20}$$

pour tout $a \in F$, tout $\underline{0} \leqslant \underline{n}_{S\setminus J} \leqslant \underline{d}_{S\setminus J}$ et tout $\underline{m}_J \in \mathbb{N}^J$ tels que $r - (|\underline{n}_{S\setminus J}| + |\underline{m}_J|) > 0$.

Démonstration. — C'est une conséquence immédiate de la proposition 5.8 et du lemme 4.6. □

6. Preuve du théorème principal

Conservons les notations du §5.1 et supposons que les conditions (i) et (ii) de la proposition 5.1 soient vérifiées. Rappelons que cela revient à dire que le caractère central de $I(\chi, J, \underline{d}_{S\setminus J})$ est entier et que l'inégalité $\mathrm{val}_{\mathbb{Q}_p}(\chi_2(p)) + |\underline{d}_{S\setminus J}| \geq 0$ est vérifiée. De plus, par la proposition 5.5 on sait que calculer le complété unitaire universel de $I(\chi, J, \underline{d}_{S\setminus J})$ revient à calculer le complété unitaire universel de $I(\chi', J', \underline{d}_{S\setminus J'})$. On peut donc supposer que $J = J'$.

Nous nous proposons de montrer que les conditions (5.7) et (5.8) sélectionnent exactement les distributions $(J, \underline{d}_{S\setminus J})$-tempérées d'ordre r sur F annulant toutes les fonctions de la forme $[z \mapsto z^{\underline{n}_{S\setminus J}} z^{\underline{m}_J}]$ et $[z \mapsto \chi_2\chi_1^{-1}(z-a)(z-a)^{\underline{d}_{S\setminus J}-\underline{n}_{S\setminus J}}(z-a)^{-\underline{m}_J}]$ avec $a \in F$, $\underline{m}_J \in \mathbb{N}^J$ et $\underline{0} \leqslant \underline{n}_{S\setminus J} \leqslant \underline{d}_{S\setminus J}$ tels que $r - (|\underline{n}_{S\setminus J}| + |\underline{m}_J|) > 0$. Plus précisément nous allons prouver le résultat suivant.

Théorème 6.1. — *Soit $\mu \in I(\chi, J, \underline{d}_{S\setminus J})^\vee$. Les deux conditions suivantes sont équivalentes.*

(A) *La distribution μ vérifie les conditions* (5.7) *et* (5.8) *;*

(B) *La distribution μ vérifie les conditions* (5.13), (5.14), (5.15), (5.19) *et* (5.20).

6.1. Preuve de (A) $\Longrightarrow$ (B). — Supposons que μ vérifie les conditions (5.7) et (5.8). Alors μ vérifie *a fortiori* (5.13) et (5.14). Pour montrer que (5.7) implique (5.15), quitte à changer la constante C_μ, on a besoin de l'équivalence suivante.

Lemme 6.2. — *Quitte à modifier la constante C_μ, la condition* (5.15) *est équivalente à la condition suivante :*

(i) *Il existe un entier $n_0 > 0$ tel que* (5.15) *est satisfaite pour tout $a \in \mathcal{O}_F - \{0\}$, tout $\underline{0} \leqslant \underline{n}_{S\setminus J} \leqslant \underline{d}_{S\setminus J}$, tout $\underline{m}_J \in \mathbb{N}^J$ et tout $n > n_0 + \frac{\mathrm{val}_F(a)}{f}$.*

Démonstration. — (5.15) $\Rightarrow$ (i) est immédiat.

Montrons que $(i) \Rightarrow$ (5.15). Soit $a \in \mathcal{O}_F - \{0\}$ et $\frac{\mathrm{val}_F(a)}{f} < n \le n_0 + \frac{\mathrm{val}_F(a)}{f}$. Si l'on pose $n' = n + n_0$, on peut écrire alors $D\big(\frac{1}{a}, n - \frac{2\mathrm{val}_F(a)}{f}\big)$ comme union de disques de la forme $D' = D\big(\frac{1}{a'}, n' - \frac{2\mathrm{val}_F(a)}{f}\big)$ avec $|a| = |a'|$ (et donc $|a-a'| \le q^{-n}$). En écrivant $\big(\frac{1}{z}-a\big)^{\underline{i}} = \big(\big(\frac{1}{z}-a'\big)+\big(a'-a\big)\big)^{\underline{i}}$ avec $\underline{i} \in \{\underline{n}_{S\setminus J}, \underline{m}_J\}$, puis en développant, on obtient que

$$\begin{aligned}
&\Big|\mu\Big(\mathbf{1}_{D'}(z)\chi_2\chi_1^{-1}(z)z^{\underline{d}_{S\setminus J}}\Big(\frac{1}{z}-a\Big)^{\underline{n}_{S\setminus J}}\Big(\frac{1}{z}-a\Big)^{\underline{m}_J}\Big)\Big| \\
&\le \sup_{\substack{\underline{0}\leqslant \underline{k}_{S\setminus J}\leqslant \underline{n}_{S\setminus J}\\ \underline{0}\leqslant \underline{l}_J\leqslant \underline{m}_J}} \Big\{|a-a'|^{|\underline{n}_{S\setminus J}|-|\underline{k}_{S\setminus J}|+|\underline{m}_J|-|\underline{l}_J|} \\
&\qquad\qquad \cdot \Big|\mu\Big(\mathbf{1}_{D'}(z)\chi_2\chi_1^{-1}(z)z^{\underline{d}_{S\setminus J}}\Big(\frac{1}{z}-a'\Big)^{\underline{k}_{S\setminus J}}\Big(\frac{1}{z}-a'\Big)^{\underline{l}_J}\Big)\Big|\Big\} \\
&\le \sup_{\substack{\underline{0}\leqslant \underline{k}_{S\setminus J}\leqslant \underline{n}_{S\setminus J}\\ \underline{0}\leqslant \underline{l}_J\leqslant \underline{m}_J}} q^{n(-|\underline{n}_{S\setminus J}|+|\underline{k}_{S\setminus J}|-|\underline{m}_J|+|\underline{l}_J|)} C_\mu q^{n'(r-|\underline{k}_{S\setminus J}|-|\underline{l}_J|)} \quad \text{par (i)} \\
&= C_\mu q^{n(r-|\underline{n}_{S\setminus J}|-|\underline{m}_J|)} q^{(n'-n)r} \\
&\le C'_\mu q^{n(r-|\underline{n}_{S\setminus J}|-|\underline{m}_J|)},
\end{aligned}$$

où l'on a posé $C'_\mu \overset{\text{déf}}{=} C_\mu q^{n_0 r}$. Comme le dernier terme ne dépend pas du choix de a on peut conclure. □

PROPOSITION 6.3. — *Quitte à modifier la constante C_μ, la condition* (5.7) *implique la condition* (5.15).

Démonstration. — Notons n_0 le plus petit entier positif tel que $(\chi_2\chi_1^{-1})|_{D(1,n_0)}$ soit une fonction J-analytique. D'après le lemme 6.2 il suffit de montrer que la condition (5.15) est satisfaite pour tout $a \in \mathscr{O}_F - \{0\}$, tout $\underline{0} \leqslant \underline{n}_{S\setminus J} \leqslant \underline{d}_{S\setminus J}$, tout $\underline{m}_J \in \mathbb{N}^J$ et tout $n > n_0 + \frac{\mathrm{val}_F(a)}{f}$. Posons $D = D\big(\frac{1}{a}, n - \frac{2\mathrm{val}_F(a)}{f}\big)$. D'après l'égalité

$$\mathbf{1}_D(z)\Big(\frac{1}{z} - a\Big)^{\underline{n}_{S\setminus J}} = \mathbf{1}_D(z)(-1)^{\underline{n}_{S\setminus J}} z^{-\underline{n}_{S\setminus J}} a^{\underline{n}_{S\setminus J}}\Big(z - \frac{1}{a}\Big)^{\underline{n}_{S\setminus J}},$$

on obtient, en écrivant $z^{\underline{d}_{S\setminus J}-\underline{n}_{S\setminus J}} = (z - \frac{1}{a} + \frac{1}{a})^{\underline{d}_{S\setminus J}-\underline{n}_{S\setminus J}}$ et en développant, que

$$\begin{aligned}&\mathbf{1}_D(z)z^{\underline{d}_{S\setminus J}}\Big(\frac{1}{z} - a\Big)^{\underline{n}_{S\setminus J}}\\ &\qquad = \mathbf{1}_D(z)\sum_{\underline{0}\leqslant\underline{k}_{S\setminus J}\leqslant\underline{d}_{S\setminus J}-\underline{n}_{S\setminus J}} \mu_{\underline{k}_{S\setminus J}} a^{-\underline{k}_{S\setminus J}+\underline{n}_{S\setminus J}}\Big(z - \frac{1}{a}\Big)^{\underline{d}_{S\setminus J}-\underline{k}_{S\setminus J}},\end{aligned}$$

avec $\mu_{\underline{k}_{S\setminus J}} \in \mathbb{N}$. De même, en écrivant $z^{-\underline{m}_J} = (z - \frac{1}{a} + \frac{1}{a})^{-\underline{m}_J}$ et en développant, on a :

$$\mathbf{1}_D(z)z^{-\underline{m}_J} = \mathbf{1}_D(z)a^{\underline{m}_J}\sum_{\underline{r}_J\geqslant\underline{0}} \lambda_{\underline{r}_J} a^{\underline{r}_J}\Big(z - \frac{1}{a}\Big)^{\underline{r}_J},$$

avec $\lambda_{\underline{r}_J} \in \mathbb{N}$ on en déduit que

$$\begin{aligned}\mathbf{1}_D(z)\Big(\frac{1}{z} - a\Big)^{\underline{m}_J} &= \mathbf{1}_D(z)(-1)^{\underline{m}_J} z^{-\underline{m}_J} a^{\underline{m}_J}\Big(z - \frac{1}{a}\Big)^{\underline{m}_J}\\ &= \mathbf{1}_D(z)\sum_{\underline{r}_J\geqslant\underline{0}} \lambda_{\underline{r}_J} a^{2\underline{m}_J+\underline{r}_J}\Big(z - \frac{1}{a}\Big)^{\underline{m}_J+\underline{r}_J}.\end{aligned}$$

Remarquons maintenant que, pour tout $z \in D$, on a

$$az \in D\Big(1, n - \frac{\mathrm{val}_F(a)}{f}\Big) \subseteq D(1, n_0),$$

ce qui implique que

$$\begin{aligned}\mathbf{1}_D(z)\chi_2\chi_1^{-1}(z) &= \chi_2\chi_1^{-1}(a^{-1})\mathbf{1}_D(z)\chi_2\chi_1^{-1}(az)\\ &= \chi_2\chi_1^{-1}(a^{-1})\mathbf{1}_D(z)\sum_{\underline{l}_J\geqslant\underline{0}} b_{\underline{l}_J}(az-1)^{\underline{l}_J}\\ &= \chi_2\chi_1^{-1}(a^{-1})\mathbf{1}_D(z)\sum_{\underline{l}_J\geqslant\underline{0}} b_{\underline{l}_J}a^{\underline{l}_J}\Big(z-\frac{1}{a}\Big)^{\underline{l}_J},\end{aligned}$$

avec $b_{\underline{l}_J}\in E$ et $|b_{\underline{l}_J}|q^{-n_0}\to 0$ quand $|\underline{l}_J|\to+\infty$. Notons alors $C=\sup_{\underline{l}_J}|b_{\underline{l}_J}|$. Comme, d'après (5.2), on a $|\chi_2\chi_1^{-1}(a^{-1})|=|a|^{|\underline{d}_{S\setminus J}|-2r}$, on déduit des égalités précédentes que :

$$\begin{aligned}&\Big|\mu\Big(\mathbf{1}_D(z)\chi_2\chi_1^{-1}(z)z^{\underline{d}_{S\setminus J}}\Big(\frac{1}{z}-a\Big)^{\underline{n}_{S\setminus J}}\Big(\frac{1}{z}-a\Big)^{\underline{m}_J}\Big)\Big|\\ &\quad\leq\; C|a|^{|\underline{d}_{S\setminus J}|-2r}\sup_{\substack{\underline{0}\leqslant\underline{k}_{S\setminus J}\leqslant\underline{d}_{S\setminus J}-\underline{n}_{S\setminus J}\\ \underline{l}_J\geqslant\underline{0},\ \underline{r}_J\geqslant\underline{0}}}\Big\{|a|^{2|\underline{m}_J|+|\underline{r}_J|+|\underline{l}_J|-|\underline{k}_{S\setminus J}|+|\underline{n}_{S\setminus J}|}\\ &\qquad\cdot\Big|\mu\Big(\mathbf{1}_D(z)\Big(z-\frac{1}{a}\Big)^{\underline{d}_{S\setminus J}-\underline{k}_{S\setminus J}}\Big(z-\frac{1}{a}\Big)^{\underline{m}_J+\underline{l}_J+\underline{r}_J}\Big)\Big|\Big\}.\end{aligned}$$

Comme la condition (5.7) implique l'inégalité

$$\begin{aligned}&\Big|\mu\Big(\mathbf{1}_D(z)\Big(z-\frac{1}{a}\Big)^{\underline{d}_{S\setminus J}-\underline{k}_{S\setminus J}}\Big(z-\frac{1}{a}\Big)^{\underline{m}_J+\underline{l}_J+\underline{r}_J}\Big)\Big|\\ &\qquad\qquad\leq C_\mu\Big|\frac{\varpi_F^n}{a^2}\Big|^{|\underline{d}_{S\setminus J}|-|\underline{k}_{S\setminus J}|+|\underline{m}_J|+|\underline{l}_J|+|\underline{r}_J|-r},\end{aligned}$$

on en déduit finalement que

$$\Big|\mu\Big(\mathbf{1}_D(z)\chi_2\chi_1^{-1}(z)z^{\underline{d}_{S\setminus J}}\Big(\frac{1}{z}-a\Big)^{\underline{n}_{S\setminus J}}\Big(\frac{1}{z}-a\Big)^{\underline{m}_J}\Big)\Big|\leq CC_\mu q^{n(r-|\underline{n}_{S\setminus J}|-|\underline{m}_J|)},$$

ce qui prouve le résultat annoncé. □

D'après la proposition 6.3, on peut étendre μ en une distribution $(J,\underline{d}_{S\setminus J})$-tempérée d'ordre r sur F. Il reste à montrer que μ, vu comme élément de $B(\chi,J,\underline{d}_{S\setminus J})^\vee$, est nul sur l'espace $L(\chi,J,\underline{d}_{S\setminus J})$. Or, d'après (5.7), on a, pour tout $\underline{0}\leqslant\underline{n}_{S\setminus J}\leqslant\underline{d}_{S\setminus J}$ et tout $\underline{m}_J\in\mathbb{N}^J$ tels que $r-(|\underline{n}_{S\setminus J}|+|\underline{m}_J|)>0$:

$$\Big|\int_{D(0,n)} z^{\underline{n}_{S\setminus J}}z^{\underline{m}_J}\mu(z)\Big|\to 0\quad\text{quand}\quad n\to-\infty$$

tandis que d'après (5.8), on a, pour tout $a\in F$, tout $\underline{0}\leqslant\underline{n}_{S\setminus J}\leqslant\underline{d}_{S\setminus J}$ et tout $\underline{m}_J\in\mathbb{N}^J$ tels que $r-(|\underline{n}_{S\setminus J}|+|\underline{m}_J|)>0$:

$$\Big|\int_{F\setminus D(a,n+1)}\chi_2\chi_1^{-1}(z-a)(z-a)^{\underline{d}_{S\setminus J}-\underline{n}_{S\setminus J}}(z-a)^{-\underline{m}_J}\mu(z)\Big|\to 0\text{ quand }n\to+\infty.$$

Ceci prouve la nullité recherchée et permet de terminer la preuve de l'implication $(A) \Longrightarrow (B)$.

6.2. Preuve de (B) $\Longrightarrow$ (A). — Montrer que les conditions (5.13), (5.14), (5.15), (5.19) et (5.20) impliquent les conditions (5.7) et (5.8) requiert quelques préliminaires. Commençons par donner une autre caractérisation des conditions (5.7) et (5.8).

Lemme 6.4. — *La condition* (5.7) *est satisfaite (quitte à changer C_μ) si et seulement si les trois conditions suivantes sont vérifiées.*

(i) (5.7) *est vérifiée pour tout $a \in F$ et tout $n \in \mathbb{Z}$ tels que $D(a,n) \cap \varpi_F \mathcal{O}_F = \varnothing$, tout $0 \leqslant \underline{n}_{S\setminus J} \leqslant \underline{d}_{S\setminus J}$ et tout $\underline{m}_J \in \mathbb{N}^J$;*

(ii) (5.7) *est vérifiée pour tout $a \in \varpi_F \mathcal{O}_F$, tout $n \in \mathbb{N}_{>0}$, tout $0 \leqslant \underline{n}_{S\setminus J} \leqslant \underline{d}_{S\setminus J}$ et tout $\underline{m}_J \in \mathbb{N}^J$;*

(iii) (5.7) *est vérifiée pour $a = 0$, pour tout entier $n \leq 0$, tout $0 \leqslant \underline{n}_{S\setminus J} \leqslant \underline{d}_{S\setminus J}$ et tout $\underline{m}_J \in \mathbb{N}^J$ tels que $r - (|\underline{n}_{S\setminus J}| + |\underline{m}_J|) > 0$.*

Démonstration. — Seule l'implication (i) + (ii) + (iii) $\Rightarrow$ (5.7) est à prouver. Pour cela il suffit de vérifier la condition (5.7) pour $a = 0$, pour tout entier $n \leq 0$, tout $0 \leqslant \underline{n}_{S\setminus J} \leqslant \underline{d}_{S\setminus J}$ et tout $\underline{m}_J \in \mathbb{N}^J$ tels que $r - (|\underline{n}_{S\setminus J}| + |\underline{m}_J|) \leq 0$.

Notons $R \subset \mathcal{O}_F$ un système de représentants des classes de $\mathcal{O}_F/\varpi_F\mathcal{O}_F$ contenant 0 et fixons $m \in \mathbb{N}_{>0}$ tel que $n + m > 0$. On a alors :

$$\begin{aligned}&\mathbf{1}_{D(0,n)}(z) z^{\underline{n}_{S\setminus J}} z^{\underline{m}_J}\\ &\quad = \mathbf{1}_{D(0,n+m)}(z) z^{\underline{n}_{S\setminus J}} z^{\underline{m}_J} + \sum_{j=0}^{m-1} \sum_{a_i \in R-\{0\}} \mathbf{1}_{D(a_i\varpi_F^{n+j}, n+j+1)}(z) z^{\underline{n}_{S\setminus J}} z^{\underline{m}_J}.\end{aligned}$$

En utilisant (ii) et l'inégalité $r - (|\underline{n}_{S\setminus J}| + |\underline{m}_J|) \leq 0$, on obtient que :

$$\left|\mu\Big(\mathbf{1}_{D(0,n+m)}(z) z^{\underline{n}_{S\setminus J}} z^{\underline{m}_J}\Big)\right| \leq C_\mu q^{(n+m)(r-|\underline{n}_{S\setminus J}|-|\underline{m}_J|)} \leq C_\mu q^{n(r-|\underline{n}_{S\setminus J}|-|\underline{m}_J|)}.$$

Il reste à minorer les termes de la somme. Soit $a_i \in R - \{0\}$ et $0 \leq j \leq m-1$. En écrivant $z^{\underline{n}_{S\setminus J}} = (z - a_i\varpi_F^{n+j} + a_i\varpi_F^{n+j})^{\underline{n}_{S\setminus J}}$ (resp. $z^{\underline{m}_J} = (z - a_i\varpi_F^{n+j} +$

$a_i\varpi_F^{n+j})^{\underline{m}_J})$ et en développant, on obtient que

$$\begin{aligned}
&\left|\mu\Big(\mathbf{1}_{D(a_i\varpi_F^{n+j},n+j+1)}(z)z^{\underline{n}_{S\setminus J}}z^{\underline{m}_J}\Big)\right|\\
\leq &\sup_{\substack{\underline{0}\leqslant \underline{l}_{S\setminus J}\leqslant \underline{n}_{S\setminus J}\\ \underline{0}\leqslant \underline{k}_J\leqslant \underline{m}_J}} \Big\{\Big|\mu\Big(\mathbf{1}_{D(a_i\varpi_F^{n+j},n+j+1)}(z)(a_i\varpi_F^{n+j})^{\underline{l}_{S\setminus J}}(a_i\varpi_F^{n+j})^{\underline{k}_J}\\
&\qquad\qquad \cdot (z-a_i\varpi_F^{n+j})^{\underline{n}_{S\setminus J}-\underline{l}_{S\setminus J}}(z-a_i\varpi_F^{n+j})^{\underline{m}_J-\underline{k}_J}\Big)\Big|\Big\}\\
\leq &\sup_{\substack{\underline{0}\leqslant \underline{l}_{S\setminus J}\leqslant \underline{n}_{S\setminus J}\\ \underline{0}\leqslant \underline{k}_J\leqslant \underline{m}_J}} q^{-(n+j)(|\underline{l}_{S\setminus J}|+|\underline{k}_J|)}C_\mu q^{(n+j+1)(r-|\underline{n}_{S\setminus J}|+|\underline{l}_{S\setminus J}|-|\underline{m}_J|+|\underline{k}_J|)} \quad \text{par (i)}\\
\leq &\; C_\mu q^r q^{(n+j)(r-|\underline{n}_{S\setminus J}|-|\underline{m}_J|)}.
\end{aligned}$$

Comme $r-(|\underline{n}_{S\setminus J}|+|\underline{m}_J|)\leq 0$, on a :

$$q^{(n+j)(r-|\underline{n}_{S\setminus J}|-|\underline{m}_J|)}\leq q^{n(r-|\underline{n}_{S\setminus J}|-|\underline{m}_J|)},$$

d'où le résultat. □

Rappelons que pour tout entier $k\geq 1$ on désigne par $S_k\subset \mathcal{O}_F^\times$ un système de représentants des classes de $(\mathcal{O}_F/\varpi_F^k\mathcal{O}_F)^\times$, et que l désigne le plus petit entier positif tel que $\chi_1|_{D(a_i,l)}$ et $\chi_2|_{D(a_i,l)}$ soient des fonctions J-analytiques sur l'ouvert $D(a_i,l)$ pour tout $a_i\in S_l$. Notons $D(a,n,n+1)=D(a,n)\backslash D(a,n+1)$ pour tout $a\in F$ et tout $n\in\mathbb{Z}$.

Lemme 6.5. — *Supposons que la condition* (5.7) *soit satisfaite. Alors la condition* (5.8) *est satisfaite si et seulement si les deux conditions suivantes sont vérifiées.*

(i) (5.8) *est vraie pour tout $a\in F$, tout $n\geq 0$, tout $\underline{0}\leqslant \underline{n}_{S\setminus J}\leqslant \underline{d}_{S\setminus J}$ et tout $\underline{m}_J\in\mathbb{N}^J$ tels que $r-(|\underline{n}_{S\setminus J}|+|\underline{m}_J|)>0$;*
(ii) (5.8) *est vraie pour $a=0$, pour tout $n\leq 0$, tout $\underline{0}\leqslant \underline{n}_{S\setminus J}\leqslant \underline{d}_{S\setminus J}$ et tout $\underline{m}_J\in\mathbb{N}^J$ tels que $r-(|\underline{n}_{S\setminus J}|+|\underline{m}_J|)\leq 0$.*

Démonstration. — (5.8) $\Rightarrow (i),(ii)$ est immédiat.

Montrons $(i)+(ii)\Rightarrow$ (5.8). Pour cela, il suffit de vérifier la condition (5.8) dans les trois cas suivants :

- $a\in F$, tout $n<0$, $\underline{0}\leqslant \underline{n}_{S\setminus J}\leqslant \underline{d}_{S\setminus J}$ et $\underline{m}_J\in\mathbb{N}^J$ tels que $r-(|\underline{n}_{S\setminus J}|+|\underline{m}_J|)>0$;
- $a\neq 0$, $n\in\mathbb{Z}$, $\underline{0}\leqslant \underline{n}_{S\setminus J}\leqslant \underline{d}_{S\setminus J}$ et $\underline{m}_J\in\mathbb{N}^J$ tels que $r-(|\underline{n}_{S\setminus J}|+|\underline{m}_J|)\leq 0$;
- $a=0$, $n>0$, $\underline{0}\leqslant \underline{n}_{S\setminus J}\leqslant \underline{d}_{S\setminus J}$ et $\underline{m}_J\in\mathbb{N}^J$ tels que $r-(|\underline{n}_{S\setminus J}|+|\underline{m}_J|)\leq 0$.

Remarquons d'abord que l'on a :

$$\forall a \in F, n \in \mathbb{Z}, \quad \mathbf{1}_{D(a,n,n+1)} = \sum_{a_i \in S_l} \mathbf{1}_{D(a+a_i\varpi_F^n, n+l)} \,.$$

Ainsi, un raisonnement analogue à celui prouvant le lemme 4.6 permet de montrer, en utilisant (5.7), que pour tout $a \in F$, tout $n \in \mathbb{Z}$, tout $\underline{0} \leqslant \underline{n}_{S\backslash J} \leqslant \underline{d}_{S\backslash J}$ et tout $\underline{m}_J \in \mathbb{N}^J$ on a, quitte à modifier C_μ :

$$\Big|\mu\Big(\mathbf{1}_{D(a,n,n+1)}(z)\chi_2\chi_1^{-1}(z-a)(z-a)^{\underline{d}_{S\backslash J}-\underline{n}_{S\backslash J}}(z-a)^{-\underline{m}_J}\Big)\Big| \leq C_\mu q^{n(|\underline{n}_{S\backslash J}|+|\underline{m}_J|-r)}\,. \tag{6.1}$$

On conclut alors comme suit.

Premier cas. — Soit $n < 0$ et fixons un entier $m \geq 1$ tel que que $n + m > 0$. Puisque

$$\forall a \in F, \quad \mathbf{1}_{F\backslash D(a,n)} = \mathbf{1}_{F\backslash D(a,n+m)} - \sum_{j=0}^{m-1} \mathbf{1}_{D(a,n+j,n+j+1)}\,,$$

on déduit le premier cas de (i) et de (6.1).

Deuxième cas. — Soit $a \neq 0$ et $n \in \mathbb{Z}$. Choisissons $m \in \mathbb{Z}$ tel que $n - m < 0$ et $F\backslash D(a, n-m) = F\backslash D(0, n-m)$. En utilisant l'égalité

$$\mathbf{1}_{F\backslash D(a,n)} = \mathbf{1}_{F\backslash D(a,n-m)} + \sum_{j=0}^{m+1} \mathbf{1}_{D(a,n-m-j,n-m-j+1)}\,,$$

on déduit le deuxième cas de (ii) et de (6.1).

Troisième cas. — Le même raisonnement que celui mené dans le deuxième cas s'applique. □

Remarquons que (5.13) est exactement (5.7) avec $a \in \varpi_F\mathcal{O}_F$, tout $n \in \mathbb{N}_{>0}$, tout $0 \leqslant \underline{n}_{S\backslash J} \leqslant \underline{d}_{S\backslash J}$ et tout $\underline{m}_J \in \mathbb{N}^J$ et que (5.14) est exactement (5.8) pour $a = 0$, pour tout $n \leq 0$, tout $\underline{0} \leqslant \underline{n}_{S\backslash J} \leqslant \underline{d}_{S\backslash J}$ et tout $\underline{m}_J \in \mathbb{N}^J$. D'après les lemmes 6.4 et 6.5 il reste alors à montrer :

(i) (5.7) pour tout $a \in F$ et tout $n \in \mathbb{Z}$ tels que $D(a,n) \cap \varpi_F\mathcal{O}_F = \varnothing$, tout $0 \leqslant \underline{n}_{S\backslash J} \leqslant \underline{d}_{S\backslash J}$ et tout $\underline{m}_J \in \mathbb{N}^J$;

(ii) (5.7) pour $a = 0$, pour tout entier $n \leq 0$, tout $0 \leqslant \underline{n}_{S\backslash J} \leqslant \underline{d}_{S\backslash J}$ et tout $\underline{m}_J \in \mathbb{N}^J$ tels que $r - (|\underline{n}_{S\backslash J}| + |\underline{m}_J|) > 0$;

(iii) (5.8) pour tout $a \in F$, tout $n \geq 0$, tout $\underline{0} \leqslant \underline{n}_{S\backslash J} \leqslant \underline{d}_{S\backslash J}$ et tout $\underline{m}_J \in \mathbb{N}^J$ tels que $r - (|\underline{n}_{S\backslash J}| + |\underline{m}_J|) > 0$.

La proposition suivante montre que (5.15) implique (i).

Proposition 6.6. — *La condition* (5.15) *implique la condition* (5.7) *pour tout disque $D(a,n)$ avec $a \in F$ et $n \in \mathbb{Z}$ tels que $D(a,n) \cap \varpi_F \mathcal{O}_F = \varnothing$, tout $0 \leqslant \underline{n}_{S\setminus J} \leqslant \underline{d}_{S\setminus J}$ et tout $\underline{m}_J \in \mathbb{N}^J$.*

Démonstration. — Un calcul analogue à celui de la proposition 6.3 montre que la condition (5.15) est équivalente à

$$\Big|\int_{D(\frac{1}{a}, n - \frac{2\mathrm{val}_F(a)}{f})} z^{\underline{d}_{S\setminus J}} \Big(\frac{1}{z} - a\Big)^{\underline{n}_{S\setminus J}} \Big(\frac{1}{z} - a\Big)^{\underline{m}_J} \mu(z)\Big| \leq C_\mu |a|^{2r - |\underline{d}_{S\setminus J}|} q^{n(r - |\underline{n}_{S\setminus J}| - |\underline{m}_J|)} \tag{6.2}$$

pour tout $a \in \mathcal{O}_F - \{0\}$, tout $\underline{0} \leqslant \underline{n}_{S\setminus J} \leqslant \underline{d}_{S\setminus J}$, tout $\underline{m}_J \in \mathbb{N}^J$ et tout entier $n > \frac{\mathrm{val}_F(a)}{f}$.

Soit $a \in \mathcal{O}_F - \{0\}$ et $n > \frac{\mathrm{val}_F(a)}{f}$. Posons $D = D\big(\frac{1}{a}, n - \frac{2\mathrm{val}_F(a)}{f}\big)$. Pour tout $0 \leqslant \underline{n}_{S\setminus J} \leqslant \underline{d}_{S\setminus J}$ on a alors les identités suivantes :

$$\begin{aligned}
\mathbf{1}_D(z)\Big(z - \frac{1}{a}\Big)^{\underline{n}_{S\setminus J}} &= \mathbf{1}_D(z)(-1)^{\underline{n}_{S\setminus J}} a^{-\underline{n}_{S\setminus J}} z^{\underline{n}_{S\setminus J}} \Big(\frac{1}{z} - a\Big)^{\underline{n}_{S\setminus J}} \\
&= \mathbf{1}_D(z)(-1)^{\underline{n}_{S\setminus J}} a^{-\underline{n}_{S\setminus J}} \Big(\frac{1}{z} - a + a\Big)^{\underline{d}_{S\setminus J} - \underline{n}_{S\setminus J}} z^{\underline{d}_{S\setminus J}} \Big(\frac{1}{z} - a\Big)^{\underline{n}_{S\setminus J}} \\
&= \mathbf{1}_D(z) \sum_{\underline{0} \leqslant \underline{k}_{S\setminus J} \leqslant \underline{d}_{S\setminus J} - \underline{n}_{S\setminus J}} \lambda_{\underline{k}_{S\setminus J}} a^{\underline{k}_{S\setminus J} - \underline{n}_{S\setminus J}} z^{\underline{d}_{S\setminus J}} \Big(\frac{1}{z} - a\Big)^{\underline{d}_{S\setminus J} - \underline{k}_{S\setminus J}}
\end{aligned}$$

avec $\lambda_{\underline{k}_{S\setminus J}} \in \mathbb{N}$. Un calcul analogue au précédent montre que :

$$\mathbf{1}_D(z)\Big(z - \frac{1}{a}\Big)^{\underline{m}_J} = \mathbf{1}_D(z) \sum_{\underline{r}_J \geqslant \underline{0}} \mu_{\underline{r}_J} a^{-2\underline{m}_J - \underline{r}_J} \Big(\frac{1}{z} - a\Big)^{\underline{r}_J + \underline{m}_J}$$

avec $\mu_{\underline{r}_J} \in \mathbb{N}$. Ces deux égalités combinées à la condition (6.2) impliquent que :

$$\begin{aligned}
&\Big|\mu\Big(\mathbf{1}_D(z)\Big(z - \frac{1}{a}\Big)^{\underline{n}_{S\setminus J}} \big(z - \frac{1}{a}\big)^{\underline{m}_J}\Big)\Big| \\
&\leq \Big| a^{-\underline{n}_{S\setminus J}} a^{-2\underline{m}_J} \\
&\qquad \cdot \sup_{\substack{\underline{r}_J \geqslant \underline{0} \\ \underline{0} \leqslant \underline{k}_{S\setminus J} \leqslant \underline{d}_{S\setminus J} - \underline{n}_{S\setminus J}}} a^{\underline{k}_{S\setminus J}} a^{-\underline{r}_J} \mu\Big(\mathbf{1}_D(z) z^{\underline{d}_{S\setminus J}} \Big(\frac{1}{z} - a\Big)^{\underline{d}_{S\setminus J} - \underline{k}_{S\setminus J}} \Big(\frac{1}{z} - a\Big)^{\underline{r}_J + \underline{m}_J}\Big)\Big| \\
&\leq C_\mu |a|^{-|\underline{n}_{S\setminus J}| - 2|\underline{m}_J|} \\
&\qquad \cdot \sup_{\substack{\underline{r}_J \geqslant \underline{0} \\ \underline{0} \leqslant \underline{k}_{S\setminus J} \leqslant \underline{d}_{S\setminus J} - \underline{n}_{S\setminus J}}} |a|^{|\underline{k}_{S\setminus J}| - |\underline{r}_J|} |a|^{2r - |\underline{d}_{S\setminus J}|} q^{n(r - |\underline{d}_{S\setminus J}| + |\underline{k}_{S\setminus J}| - |\underline{r}_J| - |\underline{m}_J|)}
\end{aligned}$$

$$= C_\mu |a|^{2r-2|\underline{n}_{S\setminus J}|-2|\underline{m}_J|} q^{n(r-|\underline{n}_{S\setminus J}|-|\underline{m}_J|)}$$
$$= C_\mu q^{(n-\frac{2\mathrm{val}_F(a)}{f})(r-|\underline{n}_{S\setminus J}|-|\underline{m}_J|)}.$$

Lorsque $a \in \mathcal{O}_F - \{0\}$ et $n > \frac{\mathrm{val}_F(a)}{f}$, $D\left(\frac{1}{a}, n - \frac{2\mathrm{val}_F(a)}{f}\right)$ parcourt tous les disques $D(b,m) \subset F$ avec $b \in F$ et $m \in \mathbb{N}$ dans F tels que $D(b,m) \cap \varpi_F \mathcal{O}_F = \varnothing$, ce qui permet conclure. □

En utilisant les conditions (5.19) et (5.20) on voit que montrer (ii) et (iii) revient à montrer (quitte à modifier la constante C_μ) que, d'une part,

$$\left| \int_{F\setminus D(0,n)} z^{\underline{n}_{S\setminus J}} z^{\underline{m}_J} \mu(z) \right| \leq C_\mu q^{n(r-|\underline{n}_{S\setminus J}|-|\underline{m}_J|)} \tag{6.3}$$

pour tout entier $n \leq 0$, tout $0 \leqslant \underline{n}_{S\setminus J} \leqslant \underline{d}_{S\setminus J}$ et tout $\underline{m}_J \in \mathbb{N}^J$ tels que $r - (|\underline{n}_{S\setminus J}| + |\underline{m}_J|) > 0$ et

$$\left| \int_{D(a,n+1)} \chi_2\chi_1^{-1}(z-a)(z-a)^{\underline{d}_{S\setminus J}-\underline{n}_{S\setminus J}}(z-a)^{-\underline{m}_J} \mu(z) \right| \leq C_\mu q^{n(|\underline{n}_{S\setminus J}|+|\underline{m}_J|-r)} \tag{6.4}$$

pour tout $a \in F$, tout $n \geq 0$, tout $\underline{0} \leqslant \underline{n}_{S\setminus J} \leqslant \underline{d}_{S\setminus J}$ et tout $\underline{m}_J \in \mathbb{N}^J$ tels que $r - (|\underline{n}_{S\setminus J}| + |\underline{m}_J|) > 0$.

Rappelons que l'on a posé, pour tout $f \in B(\chi, J, \underline{d}_{S\setminus J})$,

$$\|f\|_B = \sup\left(\|f_1\|_{C^r}, \|f_2\|_{C^r}\right), \tag{6.5}$$

où (f_1, f_2) désigne l'élément de $C^r\left(\mathcal{O}_F, J, \underline{d}_{S\setminus J}\right)^2$ qui correspond à f via l'isomorphisme (4.5).

Les conditions (6.3) et (6.4) sont alors une conséquence immédiate du lemme suivant.

Lemme 6.7. — • *Il existe une constante $C \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ telle que pour tout entier $n \leq 0$, tout $\underline{0} \leqslant \underline{n}_{S\setminus J} \leqslant \underline{d}_{S\setminus J}$ et tout $\underline{m}_J \in \mathbb{N}^J$ vérifiant $r - (|\underline{n}_{S\setminus J}| + |\underline{m}_J|) > 0$ on a :*

$$\|\mathbf{1}_{F\setminus D(0,n+1)}(z) z^{\underline{n}_{S\setminus J}} z^{\underline{m}_J}\|_B \leq C q^{n(r-|\underline{n}_{S\setminus J}|-|\underline{m}_J|)}.$$

• *Il existe une constante $C \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ telle que pour tout $a \in F$, tout entier $n \geq 1$, tout $\underline{0} \leqslant \underline{n}_{S\setminus J} \leqslant \underline{d}_{S\setminus J}$ et tout $\underline{m}_J \in \mathbb{N}^J$ vérifiant $r - (|\underline{n}_{S\setminus J}| + |\underline{m}_J|) > 0$, on a :*

$$\|\mathbf{1}_{D(a,n)}(z)\chi_2\chi_1^{-1}(z-a)(z-a)^{\underline{d}_{S\setminus J}-\underline{n}_{S\setminus J}}(z-a)^{-\underline{m}_J}\|_B \leq C q^{n(|\underline{n}_{S\setminus J}|+|\underline{m}_J|-r)}.$$

Démonstration. — Pour tout $\underline{0} \leqslant \underline{n}_{S\setminus J} \leqslant \underline{d}_{S\setminus J}$ et tout $\underline{m}_J \in \mathbb{N}^J$ tels que $r - (|\underline{n}_{S\setminus J}| + |\underline{m}_J|) > 0$, notons $f_{\underline{n}_{S\setminus J},\underline{m}_J}$ la fonction de $\mathcal{O}_F$ dans E définie par :

$$\forall z \in \mathcal{O}_F, \quad f_{\underline{n}_{S\setminus J},\underline{m}_J}(z) = \chi_2\chi_1^{-1}(z) z^{\underline{d}_{S\setminus J}-\underline{n}_{S\setminus J}} z^{-\underline{m}_J}.$$

D'après le lemme 4.6 c'est une fonction de classe C^r. Posons :
(6.6)
$$C = \sup\left\{\|f_{\underline{n}_{S\setminus J},\underline{m}_J}\|_{C^r} : \underline{0} \leqslant \underline{n}_{S\setminus J} \leqslant \underline{d}_{S\setminus J},\ \underline{m}_J \in \mathbb{N}^J \text{ et } r - (|\underline{n}_{S\setminus J}| + |\underline{m}_J|) > 0\right\}.$$

Par (6.5), on sait que
$$\|\mathbf{1}_{F\setminus D(0,n+1)}(z) z^{\underline{n}_{S\setminus J}} z^{\underline{m}_J}\|_B = \|\mathbf{1}_{D(0,-n)}(z) f_{\underline{n}_{S\setminus J},\underline{m}_J}(z)\|_{C^r}.$$

On peut réécrire $\|\mathbf{1}_{D(0,-n)}(z) f_{\underline{n}_{S\setminus J},\underline{m}_J}(z)\|_{C^r}$ sous la forme :
$$\left|\chi_2\chi_1^{-1}(\varpi_F^{-n})(\varpi_F^{-n})^{\underline{d}_{S\setminus J}-\underline{n}_{S\setminus J}}(\varpi_F^{-n})^{-\underline{m}_J}\right| \left\|\mathbf{1}_{D(0,-n)}(z) f_{\underline{n}_{S\setminus J},\underline{m}_J}\left(\frac{z}{\varpi_F^{-n}}\right)\right\|_{C^r}.$$
Comme (5.2) assure que l'on a :
$$\left|\chi_2\chi_1^{-1}(\varpi_F^{-n})(\varpi_F^{-n})^{\underline{d}_{S\setminus J}-\underline{n}_{S\setminus J}}(\varpi_F^{-n})^{-\underline{m}_J}\right| = q^{n(2r-|\underline{n}_{S\setminus J}|-|\underline{m}_J|)},$$
et comme le lemme 3.2 assure que
$$\left\|\mathbf{1}_{D(0,-n)}(z) f_{\underline{n}_{S\setminus J},\underline{m}_J}\left(\frac{z}{\varpi_F^{-n}}\right)\right\|_{C^r} \leq Cq^{-nr},$$
on en déduit que
$$\|\mathbf{1}_{F\setminus D(0,n+1)}(z) z^{\underline{n}_{S\setminus J}} z^{\underline{m}_J}\|_B \leq Cq^{n(r-|\underline{n}_{S\setminus J}|-|\underline{m}_J|)}.$$

On distingue maintenant deux cas.

(i) Supposons $a \in \varpi_F \mathcal{O}_F$. Par (6.5), on a alors
$$\begin{aligned}\|\mathbf{1}_{D(a,n)}(z)\chi_2\chi_1^{-1}(z-a)(z-a)^{\underline{d}_{S\setminus J}-\underline{n}_{S\setminus J}}(z-a)^{-\underline{m}_J}\|_B \\ = \|\mathbf{1}_{D(\frac{a}{\varpi_F},n-1)}(z) f_{\underline{n}_{S\setminus J},\underline{m}_J}(\varpi_F z - a)\|_{C^r}.\end{aligned}$$
Comme la norme C^r est invariante par translation, on en déduit l'égalité suivante :
$$\|\mathbf{1}_{D(\frac{a}{\varpi_F},n-1)}(z) f_{\underline{n}_{S\setminus J},\underline{m}_J}(\varpi_F z - a)\|_{C^r} = \|\mathbf{1}_{D(0,n-1)}(z) f_{\underline{n}_{S\setminus J},\underline{m}_J}(\varpi_F z)\|_{C^r}.$$
On peut réécrire $\|\mathbf{1}_{D(0,n-1)}(z) f_{\underline{n}_{S\setminus J},\underline{m}_J}(\varpi_F z)\|_{C^r}$ sous la forme :
$$\left|\chi_2\chi_1^{-1}(\varpi_F^{n})(\varpi_F^{n})^{(\underline{d}_{S\setminus J}-\underline{n}_{S\setminus J})}(\varpi_F^{n})^{-\underline{m}_J}\right| \left\|\mathbf{1}_{D(0,n-1)}(z) f_{\underline{n}_{S\setminus J},\underline{m}_J}\left(\frac{z}{\varpi_F^{n-1}}\right)\right\|_{C^r}.$$
D'après (5.2), on a :
$$\left|\chi_2\chi_1^{-1}(\varpi_F^{n})(\varpi_F^{n})^{(\underline{d}_{S\setminus J}-\underline{n}_{S\setminus J})}(\varpi_F^{n})^{-\underline{m}_J}\right| = q^{n(-2r+|\underline{n}_{S\setminus J}|+|\underline{m}_J|)}$$
tandis que le lemme 3.2 assure que l'on a :
$$\left\|\mathbf{1}_{D(0,n-1)}(z) f_{\underline{n}_{S\setminus J},\underline{m}_J}\left(\frac{z}{\varpi_F^{n-1}}\right)\right\|_{C^r} \leq Cq^{(n-1)r}.$$

On en conclut que
$\|\mathbf{1}_{D(a,n)}(z)\chi_2\chi_1^{-1}(z-a)(z-a)^{\underline{d}_{S\setminus J}-\underline{n}_{S\setminus J}}(z-a)^{-\underline{m}_J}\|_B \leq Cq^{-r}q^{n(-r+|\underline{n}_{S\setminus J}|+|\underline{m}_J|)}$.

(ii) Supposons que $a \notin \varpi_F \mathcal{O}_F$. Par (6.5), on a :

$$\begin{aligned}\|\mathbf{1}_{D(a,n)}(z)\chi_2\chi_1^{-1}(z-a)&(z-a)^{\underline{d}_{S\setminus J}-\underline{n}_{S\setminus J}}(z-a)^{-\underline{m}_J}\|_B\\ &= \left|\chi_2\chi_1^{-1}(a)a^{\underline{d}_{S\setminus J}-\underline{n}_{S\setminus J}}a^{-\underline{m}_J}\right|\\ &\quad\cdot\left\|\mathbf{1}_{D\left(\frac{1}{a},n-\frac{2\mathrm{val}_F(a)}{f}\right)}(z)z^{\underline{n}_{S\setminus J}}z^{\underline{m}_J}f_{\underline{n}_{S\setminus J},\underline{m}_J}\Big(z-\frac{1}{a}\Big)\right\|_{C^r}.\end{aligned}$$

En écrivant $z^{\underline{n}_{S\setminus J}} = (z-\frac{1}{a}+\frac{1}{a})^{\underline{n}_{S\setminus J}}$, $z^{\underline{m}_J} = (z-\frac{1}{a}+\frac{1}{a})^{\underline{m}_J}$, puis en développant et en utilisant l'invariance par translation de la norme C^r, on obtient que

$$\begin{aligned}&\left\|\mathbf{1}_{D\left(\frac{1}{a},n-\frac{2\mathrm{val}_F(a)}{f}\right)}(z)z^{\underline{n}_{S\setminus J}}z^{\underline{m}_J}f_{\underline{n}_{S\setminus J},\underline{m}_J}\Big(z-\frac{1}{a}\Big)\right\|_{C^r}\\ &\qquad\leq \sup_{\substack{\underline{0}\leqslant\underline{\alpha}_J\leqslant\underline{m}_J\\ \underline{0}\leqslant\underline{\beta}_{S\setminus J}\leqslant\underline{n}_{S\setminus J}}} |a|^{-|\underline{\alpha}_J|-|\underline{\beta}_{S\setminus J}|}\left\|\mathbf{1}_{D\left(0,n-\frac{2\mathrm{val}_F(a)}{f}\right)}(z)f_{\underline{\beta}_{S\setminus J},\underline{\alpha}_J}(z)\right\|_{C^r}.\end{aligned}$$

D'après le lemme 3.2, on a :

$$\begin{aligned}&\left\|\mathbf{1}_{D\left(0,n-\frac{2\mathrm{val}_F(a)}{f}\right)}(z)f_{\underline{\beta}_{S\setminus J},\underline{\alpha}_J}(z)\right\|_{C^r}\\ &\qquad\leq C\left|\chi_2\chi_1^{-1}\Big(\frac{\varpi_F^n}{a^2}\Big)\Big(\frac{\varpi_F^n}{a^2}\Big)^{\underline{d}_{S\setminus J}-\underline{\beta}_{S\setminus J}}\Big(\frac{\varpi_F^n}{a^2}\Big)^{-\underline{\alpha}_J}\right|\left|\frac{\varpi_F^n}{a^2}\right|^{-r}.\end{aligned}$$

Comme la borne supérieure du membre de droite de l'inégalité ci-dessus est atteinte pour $\underline{\alpha}_J = \underline{m}_J$ et $\underline{\beta}_{S\setminus J} = \underline{n}_{S\setminus J}$ on déduit de (5.2) que

$$\|\mathbf{1}_{D(a,n)}(z)\chi_2\chi_1^{-1}(z-a)(z-a)^{\underline{d}_{S\setminus J}-\underline{n}_{S\setminus J}}(z-a)^{-\underline{m}_J}\|_B \leq Cq^{r-|\underline{n}_{S\setminus J}|-|\underline{m}_J|},$$

ce qui prouve le résultat. □

Le lemme 6.7 termine la preuve de l'implication $(B) \Longrightarrow (A)$, et donc la preuve du théorème 6.1. Ainsi, on a montré que l'espace de Banach dual du complété cherché est isomorphe dans $I(\chi, J, \underline{d}_{S\setminus J})^\vee$ au sous-espace de Banach de $B(\chi, J, \underline{d}_{S\setminus J})^\vee$ formé des μ s'annulant sur $L(\chi, J, \underline{d}_{S\setminus J})$, c'est-à-dire à $\Pi(\chi, J, \underline{d}_{S\setminus J})^\vee$. En particulier, $\Pi(\chi, J, \underline{d}_{S\setminus J})^\vee$ est un G-Banach unitaire.

Rappelons que dans [25], Schneider et Teitelbaum introduisent la catégorie $\mathrm{Mod}^{fl}_{\mathrm{comp}}(\mathcal{O}_E)$ des $\mathcal{O}_E$-modules sans torsion, linéairement topologiques, séparés compacts, où les morphismes sont les applications $\mathcal{O}_E$-linéaires continues. Pour tout objet M de $\mathrm{Mod}^{fl}_{\mathrm{comp}}(\mathcal{O}_E)$ on définit le E-espace de Banach $(M^d, \|\cdot\|)$ par :

$$M^d \overset{\text{déf}}{=} \mathrm{Hom}^{\mathrm{cont}}_{\mathcal{O}_E}(M, E) \text{ muni de la norme } \|l\| \overset{\text{déf}}{=} \sup_{x\in M}|l(x)|.$$

Notons $\mathrm{Mod}^{fl}_{\mathrm{comp}}(\mathcal{O}_E)_{\mathbb{Q}}$ la catégorie ayant les mêmes objets que la catégorie $\mathrm{Mod}^{fl}_{\mathrm{comp}}(\mathcal{O}_E)$ mais dont morphismes sont définis par :

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Mod}^{fl}_{\mathrm{comp}}(\mathcal{O}_E)_{\mathbb{Q}}}(A,B) \stackrel{\text{déf}}{=} \mathrm{Hom}_{\mathrm{Mod}^{fl}_{\mathrm{comp}}(\mathcal{O}_E)}(A,B)\otimes E.$$

Dans [25, Théorème 1.2], il est montré que le foncteur $M \mapsto M^d$ induit une anti-équivalence de catégories entre $\mathrm{Mod}^{fl}_{\mathrm{comp}}(\mathcal{O}_E)_{\mathbb{Q}}$ et la catégorie des E-espaces de Banach.

Corollaire 6.8. — *Il existe un isomorphisme G-équivariant d'espaces de Banach p-adiques :*

$$I(\chi, J, \underline{d}_{S\setminus J})^{\wedge} \xrightarrow{\sim} \Pi(\chi, J, \underline{d}_{S\setminus J}).$$

Démonstration. — L'argument est analogue à celui permettant de prouver [3, Théorème 4.3.1]. D'après [24, Lemme 9.9], on a une injection fermée G-équivariante

$$\Pi(\chi, J, \underline{d}_{S\setminus J}) \hookrightarrow \Big(\Pi(\chi, J, \underline{d}_{S\setminus J})^{\vee}\Big)^{\vee},$$

ce qui assure notamment que $\Pi(\chi, J, \underline{d}_{S\setminus J})$ est un G-Banach unitaire. Par la propriété universelle du complété unitaire universel, l'application $I(\chi, J, \underline{d}_{S\setminus J}) \to \Pi(\chi, J, \underline{d}_{S\setminus J})$ induit alors un morphisme G-équivariant continu de $I(\chi, J, \underline{d}_{S\setminus J})^{\wedge}$ vers $\Pi(\chi, J, \underline{d}_{S\setminus J})$, qui induit à son tour un morphisme continu sur les duaux munis de leur topologie faible, qui sont des éléments de $\mathrm{Mod}^{fl}_{\mathrm{comp}}(\mathcal{O}_E)_{\mathbb{Q}}$. Or, d'après le théorème 6.1, ce morphisme est bijectif et continu. C'est donc, d'après [6, Lemme 4.2.2] un isomorphisme pour les topologies faibles. Par dualité [25, Théorème 1.2], on obtient alors l'isomorphisme topologique $\mathrm{GL}_2(F)$-équivariant de l'énoncé. □

Remarque 6.9. — Le corollaire 6.8 généralise [3, Théorème 4.3.1] pour $F = \mathbb{Q}_p$. Mentionnons que ce résultat joue un rôle important dans la preuve par Berger et Breuil de la non nullité de l'espace $I(\chi, J, \underline{d}_{S\setminus J})^{\wedge}$.

6.3. Exemple. — Introduisons quelque notations supplémentaires et rappelons la construction des représentations considérées dans [8]. Si $\lambda \in E^{\times}$, on désigne par $\mathrm{unr}_F(\lambda)\colon F^{\times} \to E^{\times}$ le caractère non ramifié défini par $x \mapsto \lambda^{\mathrm{val}_F(x)}$. Soient $\alpha, \tilde{\alpha} \in E^{\times}$ et $\underline{k} \in \mathbb{N}^S_{>1}$. Fixons J_1, J_2 deux sous-ensembles de S tels que $J_1 \subseteq J_2 \subseteq S$. Considérons les deux caractères algébriques suivants :

$$\chi_1 = \mathrm{unr}_F(\alpha^{-1}) \prod_{\sigma\in J_1} \sigma^{k_\sigma - 1}, \quad \chi_2 = \mathrm{unr}_F(p\tilde{\alpha}^{-1}) \prod_{\sigma\in J_1} \sigma^{-1} \prod_{\sigma\in J_2\setminus J_1} \sigma^{k_\sigma - 2},$$

et posons :

$$\pi(J_1, J_2) = \Big(\bigotimes_{\sigma\in S\setminus J_2} (\mathrm{Sym}^{k_\sigma - 2} E^2)^{\sigma}\Big) \otimes_E \Big(\mathrm{Ind}_P^G \chi_1 \otimes \chi_2\Big)^{J_2\text{-an}}.$$

D'après la proposition 5.1, on connaît deux conditions nécessaires pour que le complété unitaire universel de la représentation $\mathbb{Q}_p$-analytique $\pi(J_1, J_2)$ soit non nul. Un calcul immédiat montre qu'elles sont équivalentes aux conditions suivantes :

$$-(\mathrm{val}_F(\alpha) + \mathrm{val}_F(\tilde{\alpha})) + \sum_{\sigma\in S}(k_\sigma - 1) = 0\,; \tag{6.7}$$

$$-\mathrm{val}_F(\tilde{\alpha}) + \sum_{\sigma\in S\backslash J_1}(k_\sigma - 1) \geq 0. \tag{6.8}$$

Supposons que (6.7) et (6.8) soient vérifiées. On a alors nn particulier l'inégalité suivante :

$$-\mathrm{val}_F(\alpha) + \sum_{\sigma\in J_1}(k_\sigma - 1) \leq 0.$$

Posons $r = \mathrm{val}_F(\alpha) - \sum_{\sigma\in J_1}(k_\sigma - 1)$ et

$$J_3 = J_2 \coprod \{\sigma \in S\backslash J_2,\ k_\sigma - 1 > r\}.$$

D'après la proposition 5.5, on sait que l'application fermée et G-équivariante

$$\begin{aligned}\pi(J_1, J_2) &\hookrightarrow \pi(J_1, J_3)\\ &\overset{\text{déf}}{=} \Big(\bigotimes_{\sigma\in S\backslash J_3}(\mathrm{Sym}^{k_\sigma-2}E^2)^\sigma\Big) \otimes_E \Big(\mathrm{Ind}_P^G \chi_1 \otimes \chi_2 \prod_{\sigma\in J_3\backslash J_2}\sigma^{k_\sigma-2}\Big)^{J_3\text{-an}}\end{aligned}$$

induit un isomorphisme G-équivariant de $\pi(J_1, J_2)^\wedge$ dans $\pi(J_1, J_3)^\wedge$. Posons alors

$$\chi_1' = \chi_1, \quad \chi_2' = \chi_2 \prod_{\sigma\in J_3\backslash J_2}\sigma^{k_\sigma-2},$$

et

$$B(\chi, J_3, (k_\sigma - 2)_{\sigma\notin J_3}) = C^r(\mathcal{O}_F, J_3, (k_\sigma - 2)_{\sigma\notin J_3}) \oplus C^r(\mathcal{O}_F, J_3, (k_\sigma - 2)_{\sigma\notin J_3}).$$

C'est un espace de Banach sur E muni d'une action continue de G (voir la preuve du lemme 4.5). D'après le lemme 4.6, la fonction $h_{(n_\sigma)_{\sigma\notin J_3},(m_\sigma)_{\sigma\in J_3}}$ définie par

$$h_{(n_\sigma)_{\sigma\notin J_3},(m_\sigma)_{\sigma\in J_3}}(z) = \chi_2'\chi_1'^{-1}(z)\prod_{\sigma\notin J_3}\sigma(z)^{k_\sigma-2-n_\sigma}\prod_{\sigma\in J_3}\sigma(z)^{-m_\sigma}$$

se prolonge sur $\mathcal{O}_F$ en une fonction de classe C^r. Si l'on désigne par $L(\chi, J_3, (k_\sigma - 2)_{\sigma\notin J_3})$ le sous-espace de $B(\chi, J_3, (k_\sigma - 2)_{\sigma\notin J_3})$ engendré par les couples de fonctions

$$\Big(z \mapsto \prod_{\sigma\notin J_3}\sigma(\varpi_F z)^{n_\sigma}\prod_{\sigma\in J_3}\sigma(\varpi_F z)^{m_\sigma},\, z\mapsto h_{(n_\sigma)_{\sigma\notin J_3},(m_\sigma)_{\sigma\in J_3}}(z)\Big)$$

et

$$\Big(z \mapsto h_{(n_\sigma)_{\sigma\notin J_3},(m_\sigma)_{\sigma\in J_3}}(\varpi_F z - a),$$
$$z \mapsto h_{(n_\sigma)_{\sigma\notin J_3},(m_\sigma)_{\sigma\in J_3}}(1-az)\prod_{\sigma\notin J_3}\sigma(z)^{n_\sigma}\prod_{\sigma\in J_3}\sigma(z)^{m_\sigma}\Big)$$

avec $a \in F$, $(m_\sigma)_{\sigma\in J_3} \in \mathbb{N}^{J_3}$ et $(n_\sigma)_{\sigma\notin J_3} \leq (k_\sigma - 2)_{\sigma\notin J_3}$ tels que $r - \sum_{\sigma\notin J_3} n_\sigma - \sum_{J_3} m_\sigma > 0$, le corollaire 6.8 assure alors que l'on a

$$\pi(J_1,J_2)^\wedge \xrightarrow{\sim} B(\chi, J_3, \underline{k}_{S\setminus J_3} - 2)/L(\chi, J_3, \underline{k}_{S\setminus J_3} - 2).$$

BIBLIOGRAPHIE

[1] Y. Amice – « Duals », in *Proceedings of the Conference on p-adic analysis (Nijmegen, 1978)*, Report, vol. 7806, Katholieke Univ., Nijmegen, 1978, p. 1–15.

[2] Y. Amice & J. Vélu – « Distributions p-adiques associées aux séries de Hecke », in *Journées arithmétiques de Bordeaux*, Astérisque, vol. 24–25, Soc. Math. France, Paris, 1975, p. 119–131.

[3] L. Berger & C. Breuil – « Sur quelques représentations potentiellement cristallines de $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ », *Astérisque* **330** (2010), p. 155–211.

[4] N. Bourbaki – *Éléments de mathématique. Fasc. XXXIII. Variétés différentielles et analytiques. Fascicule de résultats (paragraphes 1 à 7)*, Actualités Scientifiques et Industrielles, vol. 1333, Hermann, Paris, 1967.

[5] C. Breuil – « Sur quelques représentations modulaires et p-adiques de $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$. II », *J. Inst. Math. Jussieu* **2** (2003), p. 23–58.

[6] ———, « Invariant $\mathscr{L}$ et série spéciale p-adique », *Ann. Sci. École Norm. Sup.* **37** (2004), p. 559–610.

[7] ———, « Série spéciale p-adique et cohomologie étale complétée », *Astérisque* **331** (2010), p. 65–115.

[8] ———, « Remarks on some locally $\mathbb{Q}_p$-analytic representations of $\mathrm{GL}_2(F)$ in the crystalline case », in *Non-abelian fundamental groups and Iwasawa theory*, London Math. Soc. Lecture Note Ser., vol. 393, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2012, p. 212–238.

[9] C. Breuil & P. Schneider – « First steps towards p-adic Langlands functoriality », *J. reine angew. Math.* **610** (2007), p. 149–180.

[10] P. Colmez – « Fonctions d'une variable p-adique », *Astérisque* **330** (2010), p. 13–59.

[11] ———, « La série principale unitaire de $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ », *Astérisque* **330** (2010), p. 213–262.

[12] ———, « Représentations de $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ et (ϕ,Γ)-modules », *Astérisque* **330** (2010), p. 281–509.

[13] M. De Ieso – « Espaces de fonctions de classe C^r sur O_F », *Indagationes Math.* **24** (2013), p. 530–556.

[14] ———, « Existence de normes invariantes pour GL_2 », *J. Number Theory* **133** (2013), p. 2729–2755.

[15] M. Emerton – « p-adic L-functions and unitary completions of representations of p-adic reductive groups », *Duke Math. J.* **130** (2005), p. 353–392.

[16] J.-M. Fontaine – « Représentations p-adiques des corps locaux. I », in *The Grothendieck Festschrift, Vol. II*, Progr. Math., vol. 87, Birkhäuser, 1990, p. 249–309.

[17] H. Frommer – « The locally analyitic principal series of split reductive groups », prépublication, 2003.

[18] D. Kazhdan & E. de Shalit – « Kirillov models and integral structures in p-adic smooth representations of $GL_2(F)$ », *J. Algebra* **353** (2012), p. 212–223.

[19] E. Nagel – « Fractional non-Archimedean calculus in one variable », *p-Adic Numbers Ultrametric Anal. Appl.* **4** (2012), p. 271–305.

[20] ———, « Fractional non-Archimedean calculus in many variables », *p-Adic Numbers Ultrametric Anal. Appl.* **5** (2013), p. 22–64.

[21] V. Paškūnas – « Admissible unitary completions of locally $\mathbb{Q}_p$-rational representations of $\mathrm{GL}_2(F)$ », *Represent. Theory* **14** (2010), p. 324–354.

[22] ———, « The image of Colmez's Montréal functor », prépublication arXiv:1005.2008.

[23] M. van der Put – « Algèbres de fonctions continues p-adiques », *Proc. Kon. Ned. Akad. v. Wetensch.* **A 71** (1968), p. 556–661.

[24] P. Schneider – *Nonarchimedean functional analysis*, Springer Monographs in Math., Springer, Berlin, 2002.

[25] P. Schneider & J. Teitelbaum – « Banach space representations and Iwasawa theory », *Israel J. Math.* **127** (2002), p. 359–380.

[26] ———, « p-adic boundary values », *Astérisque* **278** (2002), p. 51–125.

[27] B. Schraen – « Représentations p-adiques de $\mathrm{GL}_2(L)$ et catégories dérivées », *Israel J. Math.* **176** (2010), p. 307–361.

[28] E. de Shalit – « Mahler bases, Lubin-Tate groups and elementary p-adic analysis », prépublication, 2009.

[29] M.-F. Vignéras – « A criterion for integral structures and coefficient systems on the tree of $\mathrm{PGL}(2,F)$ », *Pure Appl. Math. Q.* **4** (2008), p. 1291–1316.

[30] M. Vishik – « Non-Archimedean measures connected with Dirichlet series », *Math. USSR Sbornik* **28** (1976), p. 216–228.