Bulletin

de la SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

# PHÉNOMÈNE DE MOSER-NEWMAN POUR LES NOMBRES SANS FACTEUR CARRÉ

Christian Mauduit & Carlos Gustavo Moreira

Tome 143
Fascicule 3

2015

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE
Publié avec le concours du Centre national de la recherche scientifique
pages 599-617

Le *Bulletin de la Société Mathématique de France* est un périodique trimestriel de la Société Mathématique de France.

Fascicule 3, tome 143, septembre 2015



***Diffusion***

Maison de la SMF
Case 916 - Luminy
13288 Marseille Cedex 9
France
smf@smf.univ-mrs.fr

Hindustan Book Agency
O-131, The Shopping Mall
Arjun Marg, DLF Phase 1
Gurgaon 122002, Haryana
Inde

AMS
P.O. Box 6248
Providence RI 02940
USA
www.ams.org

***Tarifs***

*Vente au numéro :* 43 € ($ 64)
*Abonnement* Europe : 176 €, hors Europe : 193 € ($ 290)
Des conditions spéciales sont accordées aux membres de la SMF.

***Secrétariat : Nathalie Christiaën***

*Bulletin de la Société Mathématique de France*
Société Mathématique de France
Institut Henri Poincaré, 11, rue Pierre et Marie Curie
75231 Paris Cedex 05, France
Tél : (33) 01 44 27 67 99 • Fax : (33) 01 40 46 90 96
revues@smf.ens.fr • http://smf.emath.fr/



ISSN 0037-9484

Directeur de la publication : Marc PEIGNÉ

*Bull. Soc. math. France*
**143** (3), 2015, p. 599–617

# PHÉNOMÈNE DE MOSER-NEWMAN POUR LES NOMBRES SANS FACTEUR CARRÉ

PAR CHRISTIAN MAUDUIT & CARLOS GUSTAVO MOREIRA

RÉSUMÉ. — Let $\mu$ denotes the Möbius function and $\mathbf{t} = (t(n))_{n\in\mathbb{N}}$ be the Thue-Morse sequence, defined by $t(n) = +1$ if the number of 1 in the dyadic representation of $n$ is even and $t(n) = -1$ otherwise. The aim of this work is to give an asymptotic formula for $S(N) = \sum_{n<N} \mu^2(n)t(n)$ and to prove that $S(N) < 0$ for $N$ big enough. This shows that square-free integers provide a first example of non-linear Moser-Newman phenomenon. Our method gives a similar result for $z$-th power free integers.

*Texte reçu le 27 décembre 2013, révisé le 24 mai 2014 et accepté le 10 décembre 2014.*

CHRISTIAN MAUDUIT, Université d'Aix-Marseille et Institut Universitaire de France, Institut de Mathématiques de Marseille, UMR 7373 CNRS, 163, avenue de Luminy, 13288 Marseille Cedex 9, France • *E-mail :* `mauduit@iml.univ-mrs.fr`

CARLOS GUSTAVO MOREIRA, Instituto de Matemática Pura e Aplicada, UMI 2924 IMPA-CNRS, Estrada Dona Castorina 110, 22460-320 Rio de Janeiro, RJ, Brasil • *E-mail :* `gugu@impa.br`

Classification mathématique par sujets (2000). — 11A63, 11B85, 11L03, 11N25.

Mots clefs. — Suite de Thue-Morse, nombres sans facteur carré, sommes trigonométriques.

Ce travail a bénéficié des soutiens suivants : CNPq, Réseau Franco-Brésilien en Mathématiques (Proc. CNPq 60-0014/01-5 and 69-0140/03-7), Palis-Balzan Project, Agence Nationale de la Recherche (ANR-10-BLAN 0103 MUNUM), DynEurBraz (IRSES 230844), Capes-Cofecub 661/10, Capes-Mathamsud 014/2012 et Ciência sem Fronteiras (projet PVE 407308/2013-0).

## 1. Introduction

Dans tout cet article, on désigne, pour tout nombre entier positif $n$, par $s(n)$ le nombre de 1 dans la représentation binaire de $n$ (c'est-à-dire la somme des chiffres de $n$ écrit en base 2) et par $\mu$ la fonction de Möbius définie par $\mu(1) = 1, \mu(p_1 \cdots p_k) = (-1)^k$ si $p_1, \ldots, p_k$ sont des nombres premiers distincts et $\mu(n) = 0$ si $n$ est divisible par le carré d'un nombre premier. On pose $\alpha = \frac{\log 3}{\log 4}$ et, pour tout nombre réel $x$, $e(x) = \exp(2i\pi x)$.

**1.1. Phénomène de Moser-Newman. —** La suite de Thue-Morse $\mathbf{t} = (t(n))_{n\in\mathbb{N}} = ((-1)^{s(n)})_{n\in\mathbb{N}}$, dont on peut faire remonter l'origine à la note [26] publiée par Prouhet en 1851, a été étudiée par de nombreux auteurs dans des contextes variés : algèbre, analyse harmonique, arithmétique, combinatoire, géométrie, systèmes dynamiques, ... (voir [1, 18]).

Gelfond a étudié dans [11] de manière précise la répartition des progressions arithmétiques dans la suite $\mathbf{t}$, montrant en particulier que pour tout $(a, b) \in \mathbb{N}^2$, $a \neq 0$, on a

$$\sum_{n<N} t(an+b) = O(N^\alpha). \tag{1}$$

Il résulte de (1) que la fréquence d'apparition de $+1$ est égale à la fréquence d'apparition de $-1$ dans la suite $(t(3n))_{n\in\mathbb{N}}$. Mais Moser a conjecturé vers la fin des années 60 le phénomène surprenant suivant : à tout moment, le nombre d'apparitions de $+1$ est strictement supérieur à celui de $-1$, c'est-à-dire que pour tout nombre entier $N \geq 1$, on a $\sum_{n<N} t(3n) > 0$. Newman a donné une première preuve de cette conjecture dans [23] et Coquet a donné dans [4] une formule précise permettant d'exprimer la somme $\sum_{n<N} t(3n)$ : pour tout nombre entier $N \geq 1$, on a

$$\sum_{n<N} t(3n) = h(N) + N^\alpha F(\log_4 N), \tag{2}$$

avec

$$h(N) = \begin{cases} 0 & \text{si } N \text{ pair} \\ \frac{(-1)^{s(3N-1)}}{3} & \text{si } N \text{ impair} \end{cases}$$

et $F$ une fonction continue nulle part dérivable de période 1 vérifiant

$$\inf F = \frac{2\sqrt{3}}{3}, \quad \sup F = \frac{55}{3}(\frac{3}{65})^\alpha \tag{3}$$

et qu'il a étudié de manière détaillée. En particulier il montre que si l'on pose $x(N) = \frac{3N}{4^{\lfloor \log_4 3N \rfloor}} \in [1, 4[$, on a alors

$$F(\log_4 N) = 2 \cdot 3^{\alpha-1} x^{-1} \phi(x), \tag{4}$$

avec $\phi(x) = \sum_{a\geq 0} \frac{d(a)}{3^a}$, où les coefficients $d(a)$, à valeurs dans l'ensemble $\{0, \pm\frac{1}{2}, \pm 1, \pm\frac{3}{2}, \pm 2\}$, sont déterminés explicitement en fonctions du développement 4-adique du nombre réel $x \in [1, 4[$ et en déduit que si les nombres réels $x$ et $y$ vérifient $1 \leq x < y < x + \frac{1}{4^u} \leq 4$, alors

$$|\phi(x) - \phi(y)| \leq \frac{2}{3^u}. \tag{5}$$

Drmota et Stoll ont montré dans [7] que, pour tout nombre entier $N \geq 1$, on a $\sum_{n<N} t(3n+1) < 0$ et $\sum_{n<N} t(3n+2) \leq 0$ (voir également [8]). Le cas général des sommes associées à des progressions arithmétiques quelconques

$$\sum_{n<N} t(an+b), \quad (a,b) \in \mathbb{N}^2, \quad a \neq 0 \tag{6}$$

est techniquement plus délicat. Drmota et Skałba ont donné dans [6] des formules analogues à celle de Coquet ([2]) pour la somme (6) (voir également [12] pour le cas où $a$ est un nombre premier, [13] pour le cas où $a = 3^r 5^s$ ($(r,s) \in \mathbb{N}^2$) et [7] pour une généralisation aux sommes $\sum_{n<N} e(s_q(an+b)/m)$, où $s_q$ désigne la fonction somme des chiffres en base $q$ et $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$) dont ils ont pu déduire en particulier les résultats remarquables suivants (voir également [2] pour le cas où $m$ divise $q$ ou $q-1$) :

– si $3 \mid a$ ou si $a-1$ est une puissance de 4, alors $\sum_{n<N} t(an) > 0$ pour tout nombre entier $N$ assez grand ;
– le nombre de nombres premiers $p \leq x$ tels que $\sum_{n<N} t(pn) > 0$ pour tout nombre entier $N$ assez grand est négligeable par rapport à $\frac{x}{\log x}$.

Pour tous nombres entiers positifs $a$ et $b$ les suites $(t(an+b))_{n\in\mathbb{N}}$ sont 2-automatiques (voir [9, Chapter 5] pour cette notion) et les résultats précédents reposent sur des estimations fines des valeurs propres des matrices associées à ces automates. Mais lorsque $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas une progression arithmétique (ou une suite *ad hoc*), les méthodes issues de l'algèbre linéaire ne sont plus directement utilisables et on ne connaît aucun résultat concernant le signe de $\sum_{n<N} t(u_n)$. Citons par exemple les deux conjectures suivantes, dues à Drmota, Mauduit, Rivat, Shevelev et Skałba :

Conjecture 1.1. — *Pour tout nombre entier $N \geq 5$, on a*[(1)] $\sum_{n<N} t(n^2) < 0$.

(1) On sait, d'après [20], que $\sum_{n<N} t(n^2) = o(N)$.

Conjecture 1.2 (voir [28, 29]). — *Pour tout nombre entier $N \geq 11$, on a* $\sum_{n=1}^{N} t(p_n) < 0$ *($p_n$ désigne le $n$-ième nombre premier)*(2).

**1.2. Présentation du théorème principal. —** Il résulte de [17] et [14] que $\sum_{n<N} \mu(n)t(n) = o(N)$, c'est-à-dire que la fonction de Möbius est, en ce sens, orthogonale à la suite de Thue-Morse $\mathbf{t}$. Ceci illustre sur cet exemple le principe d'aléa de Möbius (voir [15, page 338]), principe dont Sarnak a donné dans [27] une version plus précise en l'énonçant dans le cadre plus formel de la théorie des systèmes dynamiques. Remarquons que Dartyge et Tenenbaum ont démontré dans [5] que $\sum_{n<N} \mu(n)t(n) = O(N/\log\log N)$ et que Mauduit et Rivat ont obtenu dans [21] un théorème des nombres premiers pour la suite $\mathbf{t}$, la méthode introduite dans [21] permettant de démontrer que $\sum_{n<N} \mu(n)t(n) = O(N^{\lambda})$, avec $\lambda < 1$.

Il serait naturel d'énoncer, en vertu de ce principe, la conjecture suivante :

Conjecture 1.3. — *La somme $\sum_{n<N} \mu(n)t(n)$ change infiniment souvent de signe.*

L'objectif de cet article est d'étudier le comportement de la somme $\sum_{n<N} \mu^2(n)t(n)$. Les fonctions $\mu$ et $\mu^2$ ont une grande complexité symbolique au sens suivant : Peckner a montré dans [25] (voir également [27]) que l'entropie topologique du système dynamique symbolique des nombres sans facteur carré $(X(\mu^2), T)$(3) (où $T$ est le décalage sur l'espace $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ et $X(\mu^2)$ l'adhérence pour la topologie produit de $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ de l'orbite de $\mu^2$ sous l'action de $T$) est strictement positive, égale à $\frac{6}{\pi^2}\log 2$. Le système dynamique symbolique $(X(\mu^2), T)$ étant un facteur du système dynamique de Möbius $(X(\mu), T)$, cela montre que l'entropie topologique de $(X(\mu), T)$ est également strictement positive, comprise entre(3) $\frac{6}{\pi^2}\log 2$ et $\frac{6}{\pi^2}\log 3$.

Notons $\mathfrak{Q}$ l'ensemble des nombres entiers qui ne sont divisibles par le carré d'aucun nombre premier et posons, pour tout nombre entier $N \geq 1$

$$S(N) = \sum_{\substack{n<N \\ n\in\mathfrak{Q}}} t(n) = \sum_{n<N} \mu^2(n)t(n). \tag{7}$$

L'approche directe développée par Gelfond dans [11] permet de montrer que $S(N) = O\left(N^{\frac{1+\alpha}{2}}\right)$ (et [16] annonce, sans démonstration, la majoration $S(N) = O\left(N^{\alpha}\right)$), mais aucune de ces méthodes ne permet d'étudier le signe de $S(N)$. L'objet de ce travail est de présenter une méthode permettant de

(2) On sait, d'après [21], que $\sum_{n<N} t(p_n) = o(N)$.

(3) Cellarosi et Sinai ont étudié dans [3] le facteur de Pinsker de $(X(\mu^2), T)$.

déterminer le comportement de la somme $S(N)$ et de démontrer le théorème suivant :

THÉORÈME 1.1. — *On a*

$$S(N) = -\frac{2}{\pi^2}(1+o(1)) \sum_{\substack{n<N \\ 3|n}} t(n)$$

$$= -\frac{2}{\pi^2}(1+o(1)) \left(\frac{N}{3}\right)^{\alpha} F\left(\log_4 \frac{N}{3}\right),$$

*où $F$ est la fonction de Coquet.*

COROLLAIRE 1.2. — *Il existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout nombre entier $N \geq N_0$ on a $S(N) < 0$.*

Pour démontrer ce théorème, nous allons montrer que pour tout $d_0 \in 2\mathbb{N}+1$, il existe $\beta(d_0) < \alpha$ et $\varepsilon(d_0)$ vérifiant $\lim\limits_{d_0 \to +\infty} \varepsilon(d_0) = 0$ tels que

$$S(N) = -\frac{2}{\pi^2} \left(\frac{N}{3}\right)^{\alpha} F\left(\log_4 \frac{N}{3}\right) + R(N),$$

avec

$$|R(N)| \leq \varepsilon(d_0) N^{\alpha} + O_{d_0}(N^{\beta(d_0)})$$

et où $F$ est la fonction de Coquet définie par (2).

## 2. Lemme technique

L'étude du comportement du produit trigonométrique $\prod\limits_{j<k} \left|\sin \pi \frac{2^j \ell}{d}\right|$ pour $(d,k,\ell) \in \mathbb{N}^3$, $d \neq 0$, joue un rôle crucial dans plusieurs travaux consacrés à la suite de Thue-Morse ou à l'étude de la fonction somme des chiffres. Par exemple, les résultats principaux de [11] et [24] reposent sur le fait que ce produit trigonométrique est majoré uniformément en $\ell$ et $d$ par $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{k-1}$ et les résultats de [22] et [19] sur une majoration uniforme en $\ell$ de la forme $e^{-ck/\log d}$, avec $c > 0$.

Mais ces majorations uniformes en $\ell$ sont trop grossières pour permettre d'étudier le signe de $S(N)$. Pour ce faire, nous allons démontrer une majoration en moyenne sur $\ell$ de ces produits trigonométriques, qui est l'objet du lemme suivant.

LEMME 2.1. — *Si $d \in 2\mathbb{N}+1$ et si $k \geq 2\lfloor \log_2 d \rfloor$, alors*

$$\frac{1}{d} \sum_{\ell<d} \prod_{j<k} \left|\sin \pi \frac{2^j \ell}{d}\right| \leq \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^k \frac{\sqrt{3}}{d^{\log_2(3/2)}}.$$

*Démonstration.* — Posons $r = \lfloor \log_2 d \rfloor$ (c'est-à-dire $2^r \leq d < 2^{r+1}$).

Comme $k \geq 2r$, on écrit

$$\prod_{j<k} \left| \sin \pi \frac{2^j \ell}{d} \right| = \prod_{j<2r} \left| \sin \pi \frac{2^j \ell}{d} \right| \prod_{2\ell \leq j<k} \left| \sin \frac{2^j \pi \ell}{d} \right|$$

et on commence par majorer le dernier terme par $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{k-2\ell-1}$ (voir par exemple [11, Lemme II], [24, Lemma pp. 72-73] ou [10, formule (2.10)]).

Pour majorer $\sum\limits_{\ell<d} \prod\limits_{j<2r} \left| \sin \pi \frac{2^j \ell}{d} \right|$, on remarque que $d$ étant impair, la multiplication par $2^r$ est une bijection de $\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$, et donc

$$\begin{aligned}\sum_{\ell<d} \prod_{j<2r} \left| \sin \pi \frac{2^j \ell}{d} \right| &= \sum_{\ell<d} \prod_{j<r} \left| \sin \pi \frac{2^j \ell}{d} \right| \prod_{j<r} \left| \sin \pi \frac{2^j (2^r \ell)}{d} \right| \\ &\leq \sum_{\ell<d} \prod_{j<r} \sin^2 \pi \frac{2^j \ell}{d}\end{aligned}$$

en appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

Or

$$\begin{aligned}\sum_{\ell<d} \prod_{j<r} \sin^2 \pi \frac{2^j \ell}{d} &= \frac{1}{4^r} \sum_{\ell<d} \prod_{j<r} \left| 1 - e\left(\frac{2^j \ell}{d}\right) \right|^2 = \frac{1}{4^r} \sum_{\ell<d} \left| \sum_{n<2^r} (-1)^{s(n)} e\left(\frac{n\ell}{d}\right) \right|^2 \\ &= \frac{1}{4^r} \sum_{\ell<d} \sum_{n,m<2^r} (-1)^{s(n)+s(m)} e\left(\frac{(n-m)\ell}{d}\right) \\ &= \frac{d}{4^r} \sum_{\substack{n,m<2^r \\ d|(n-m)}} (-1)^{s(n)+s(m)} = \frac{d}{2^r}.\end{aligned}$$

On obtient donc finalement :

$$\begin{aligned}&\frac{1}{d} \sum_{\ell<d} \prod_{j<k} \left| \sin \pi \frac{2^j \ell}{d} \right| \\ &\leq \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{k-2r-1} \frac{1}{d} \sum_{\ell<d} \prod_{j<2r} \left| \sin \pi \frac{2^j \ell}{d} \right| \\ &\leq \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{k-2r-1} \frac{1}{2^r} = \frac{\sqrt{3}^k}{\sqrt{3} 2^{k-1} (3/2)^r} = \frac{\sqrt{3}^k}{\sqrt{3} 2^{k-1} 2^{r \log_2(3/2)}},\end{aligned}$$

ce qui termine la preuve puisque $2^r > \frac{d}{2}$. □

## 3. Démonstration du théorème principal

Posons, pour tout nombre entier $d \geq 1$ et pour tout $a \in \mathbb{Z}$

$$S_d^{(a)}(N) = \sum_{\substack{n<N \\ n\equiv a(d)}} (-1)^{s(n)}.$$

On a grâce à un argument classique d'inclusion-exclusion

$$S(N) = \sum_{d<\sqrt{N}} \mu(d) S_{d^2}^{(0)}(N)$$

et, en distinguant le cas $d$ pair du cas $d$ impair

$$S(N) = \sum_{\substack{d<\sqrt{N} \\ d\equiv 1(2)}} \mu(d) \left( S_{d^2}^{(0)}(N) - S_{d^2}^{(0)}(\frac{N}{4}) \right).$$

Effectuons le découpage suivant de $S$ :

$$S = S^0 + S^1 + S^2,$$

avec

$$S^0(N) = \sum_{\substack{d\leq d_0 \\ d\equiv 1(2)}} \mu(d)(S_{d^2}^{(0)}(N) - S_{d^2}^{(0)}(N)),$$

$$S^1(N) = \sum_{\substack{d_0<d\leq N^{1/4} \\ d\equiv 1(2)}} \mu(d)(S_{d^2}^{(0)}(N) - S_{d^2}^{(0)}(\frac{N}{4}))$$

et

$$S^2(N) = \sum_{\substack{N^{1/4}<d<\sqrt{N} \\ d\equiv 1(2)}} \mu(d)(S_{d^2}^{(0)}(N) - S_{d^2}^{(0)}(\frac{N}{4})).$$

### 3.1. Majoration de $S^2$

$$\begin{aligned} |S^2(N)| &\leq \sum_{\substack{N^{1/4}<d<N^{1/2} \\ d\equiv 1\ (2)}} \sum_{\substack{N/4\leq n<N \\ n\equiv 0\ (d^2)}} 1 \leq \sum_{\substack{N^{1/4}<d<N^{1/2} \\ d\equiv 1\ (2)}} \left( \frac{3N}{4d^2} + 1 \right) \\ &\leq \frac{3}{4} N \int_{\lfloor N^{1/4} \rfloor}^{+\infty} \frac{dx}{x^2} + \frac{N^{1/2} - N^{1/4} + 1}{2} \\ &\leq \frac{3N}{4\lfloor N^{1/4} \rfloor} + \frac{N^{1/2}+1}{2} \leq N^{3/4} \end{aligned}$$

pour $N \geq N_0$.

### 3.2. Majoration de $S^1$

Nous avons

$$|S^1(N)| \le \sum_{\substack{d_0<d\le N^{1/4}\\ d\equiv 1(2)}} \left(\left|S_{d^2}^{(0)}(N)\right| + \left|S_{d^2}^{(0)}(\frac{N}{4})\right|\right) \tag{8}$$

et nous allons donc maintenant majorer $S_d^{(0)}(N)$ pour tout nombre entier impair $d$.

Pour tout nombre entier $k \ge 1$, on a

$$\begin{aligned} S_d^{(a)}(2^k) &= \sum_{\substack{n<2^k\\ n\equiv a(d)}} (-1)^{s(n)} = \sum_{n<2^k} (-1)^{s(n)} \frac{1}{d} \sum_{\ell<d} e\left(\frac{(n-a)\ell}{d}\right) \\ &= \frac{1}{d} \sum_{\ell<d} e\left(-\frac{a\ell}{d}\right) \sum_{n<2^k} (-1)^{s(n)} e\left(\frac{n\ell}{d}\right) \\ &= \frac{1}{d} \sum_{\ell<d} e\left(-\frac{a\ell}{d}\right) \prod_{j<k} \left(1 - e\left(\frac{2^j\ell}{d}\right)\right). \end{aligned} \tag{9}$$

Si $N = 2^k + N'$ avec $N' < 2^k$, on a

$$\begin{aligned} S_d^{(a)}(N) &= \sum_{\substack{n<2^k\\ n\equiv a(d)}} (-1)^{s(n)} + \sum_{\substack{n<N'\\ n\equiv a-2^k(d)}} (-1)^{s(2^k+n)} \\ &= S_d^{(a)}(2^k) + S_d^{(a-2^k)}(N'). \end{aligned}$$

On en déduit que si $N = 2^{k_1} + \cdots + 2^{k_\nu}$, avec $k_1 > \cdots > k_\nu \ge 0$ est la représentation 2-adique du nombre entier $N$, alors

$$S_d^{(0)}(N) = \sum_{i=1}^{\nu} (-1)^{i+1} S_d^{(a_i)}(2^{k_i}),$$

où l'on a posé $a_1 = 0$ et $a_i = -\sum_{j<i} 2^{k_j}$ pour $i \in \{2, \ldots, \nu\}$.

Posons $r = \lfloor \log_2 d \rfloor$.

– Si $k_i < 2r$, on majore les sommes $S_d^{(a_i)}(2^{k_i})$ trivialement par

$$\left|S_d^{(a_i)}(2^{k_i})\right| \le \sum_{\substack{n<2^{k_i}\\ n\equiv a_i(d)}} 1 \le \frac{2^{k_i}}{d} + 1.$$

– Si $k_i \geq 2r$, on majore les sommes $S_d^{(a_i)}(2^{k_i})$ grâce au lemme 2.1 par

$$\begin{aligned}\left|S_d^{(a_i)}(2^{k_i})\right| &\leq \frac{1}{d}\sum_{\ell<d}\prod_{j<k_i}\left|1-e\left(\frac{2^j\ell}{d}\right)\right| \\ &\leq \frac{\sqrt{3}^{k_i+1}}{d^{\log_2 3/2}}.\end{aligned}$$

Il en résulte que si l'on pose $\ell = \max\{i, k_i \geq 2r\}$, on a

$$\begin{aligned}S_d^{(0)}(N) &= \left|\sum_{i=1}^{\ell}(-1)^{i+1}S_d^{(a_i)}(2^{k_i}) + \sum_{i=\ell+1}^{\nu}(-1)^{i+1}S_d^{(a_i)}(2^{k_i})\right| \\ &\leq \frac{\sqrt{3}}{d^{\log_2 3/2}}\sum_{i=1}^{\ell}\sqrt{3}^{k_i} + \sum_{i=\ell+1}^{\nu}\left(\frac{2^{k_i}}{d}+1\right) \\ &\leq \frac{\sqrt{3}}{d^{\log_2 3/2}}\frac{\sqrt{3}^{k_i+1}-1}{\sqrt{3}-1} + \frac{2^{2r}-1}{d} + 2r \\ &\leq \frac{3}{2}(1+\sqrt{3})\frac{N^\alpha}{d^{\log_2 3/2}} + d + 2\lfloor\log_2 d\rfloor,\end{aligned}$$

et donc en reportant dans (8) :

$$\begin{aligned}|S^1(N)| &\leq 2(1+\sqrt{3})N^\alpha\sum_{d>d_0}\frac{1}{d^{\log_2 9/4}} + 2\sum_{1\leq d\leq N^{1/4}}d^2 + 4\sum_{1\leq d\leq N^{1/4}}\lfloor 2\log_2 d\rfloor \\ &\leq \frac{2(1+\sqrt{3})}{\log_2 9/8}\frac{N^\alpha}{d_0^{\log_2 9/8}} + \frac{2}{3}(\lfloor(N^{1/4}\rfloor+1)^3 + 8\lfloor N^{1/4}\rfloor\log_2\lfloor N^{1/4}\rfloor \\ &\leq \frac{2(1+\sqrt{3})}{\log_2 9/8}\frac{N^\alpha}{d_0^{\log_2 9/8}} + N^{3/4}\end{aligned}$$

pour $N \geq N_1$.

**3.3. Estimation de $S^0$. —** Nous allons procéder d'une manière légèrement différente selon que $d$ est un multiple de 3 ou non.

Écrivons

$$S^0(N) = S_+^0(N) + S_-^0(N)$$

avec

$$S_+^0(N) = \sum_{\substack{d\leq d_0\\ d\equiv 1(2)\\ d\equiv 0(3)}}\mu(d)\left(S_{d^2}^{(0)}(N) - S_{d^2}^{(0)}\left(\frac{N}{4}\right)\right)$$

et

$$S^0_-(N) = \sum_{\substack{d\le d_0\\ d\equiv 1(2)\\ d\not\equiv 0(3)}} \mu(d)\left(S^{(0)}_{d^2}(N) - S^{(0)}_{d^2}\left(\frac{N}{4}\right)\right)$$

et commençons par majorer $S^0_-(N)$.

Notons $s$ l'ordre multiplicatif de 2 modulo $d$, $q = 2^s$ et $\lambda_d = \sup_{\ell=1,\dots,d-1} |\lambda_d(\ell)|$ avec, pour tont $\ell \in \{1,\dots,d-1\}$, $\lambda_d(\ell) = \prod_{j<s}\left(1 - e\left(\frac{2^j\ell}{d}\right)\right)$. (Remarquons que si $d = 1$ on a $s = 1$ et $\lambda_1 = 0$.)

Lemme 3.1. — *Pour tout nombre entier impair $d \ge 1$ on a $\lambda_d \le 3^{s/2}$ et $\lambda_d = 3^{s/2}$ si et seulement si $d \equiv 0(3)$.*

*Démonstration.* — Voir [6, lemme 4]. □

Pour tout nombre entier $k \ge 1$, on a d'après (9)

$$\begin{aligned} S^{(a)}_d(q^k) &= S^{(a)}_d(2^{ks})\\ &= \frac{1}{d}\sum_{\ell<d} e\left(-\frac{a\ell}{d}\right)\prod_{j<ks}\left(1 - e\left(\frac{2^j\ell}{d}\right)\right)\\ &= \frac{1}{d}\sum_{\ell<d} e\left(-\frac{a\ell}{d}\right)\lambda^k_d(\ell), \end{aligned}$$

et donc

$$\left|S^{(a)}_d(q^k)\right| \le \lambda^k_d \tag{10}$$

(et si $k = 0, S^{(a)}_d(1) \le 1$).

Si $N = \delta q^k + N'$ avec $N' < q^k$, on a

$$S^{(a)}_d(N) = \sum_{j<\delta}(-1)^{s(j)}S^{(a-j)}_d(q^k) + (-1)^{s(\delta)}S^{(a-\delta)}_d(N').$$

On en déduit que si

$$\begin{aligned} &N = \delta_1 q^{k_1} + \dots + \delta_\nu q^{k_\nu}, \quad \text{avec} \quad k_1 > \dots > k_\nu \ge 0,\\ &\delta_i \in \{0,\dots,q-1\} \quad \text{pour tout} \quad i \in \{1,\dots,\nu\} \text{ et } \delta_1 \ge 1 \end{aligned} \tag{11}$$

est la représentation $q$-adique du nombre entier $N$, alors

$$S^{(0)}_d(N) = \sum_{i=1}^{\nu}(-1)^{s_i}\sum_{\delta<\delta_i}(-1)^{s(\delta)}S^{(a_i-\delta)}_d(q^{k_i}),$$

où l'on a posé

$$s_1 = 0 \quad \text{et} \quad s_i = \sum_{j<i} s(\delta_j) \quad \text{pour} \quad i \in \{2, \dots, \nu\},$$
$$a_1 = 0 \quad \text{et} \quad a_i = \sum_{j<i} \delta_j \quad \text{pour} \quad i \in \{2, \dots, \nu\}.$$

Il en résulte d'après (10) que

$$\begin{aligned} \left|S_d^{(0)}(N)\right| &\le \sum_{i=1}^{\nu} \sum_{\delta<\delta_i} \left|S_d^{(a_i-\delta)}(q^{k_i})\right| \le \sum_{i=1}^{\nu} \delta_i \lambda_d^{k_i} \\ &\le (q-1)\frac{\lambda_d^{k_i+1}-1}{\lambda_d-1} \le C(d)N^{\alpha(d)}, \end{aligned}$$

où l'on a posé $C(1)=1$, $\alpha(1)=0$ et si $d \ge 3$, $C(d) = \frac{(q-1)\lambda_d}{\lambda_{d-1}}$ et

$$\alpha(d) = \frac{\log \lambda_d}{\log q} = \frac{1}{s}\log_2 \lambda_d.$$

On en déduit

$$\begin{aligned} |S_-^0(N)| &\le \sum_{\substack{d\le d_0 \\ d\equiv 1,5(6)}} \left(\left|S_{d^2}^{(0)}(N)\right| + \left|S_{d^2}^{(0)}\left(\frac{N}{4}\right)\right|\right) \\ &\le \sum_{\substack{d\le d_0 \\ d\equiv 1,5(6)}} \frac{4^{\alpha(d^2)}+1}{4^{\alpha(d^2)}} C(d^2) N^{\alpha(d^2)} \le C(d_0)N^{\alpha(d_0)} \end{aligned}$$

avec

$$C(d_0) = \sum_{\substack{d\le d_0 \\ d\equiv 1,5(6)}} \frac{4^{\alpha(d^2)}+1}{4^{\alpha(d^2)}} C(d^2)$$

et

$$\alpha(d_0) = \max_{\substack{d\le d_0 \\ d\equiv 1,5(6)}} \alpha(d^2) < \alpha$$

d'après le lemme 3.1.

Lorsque $d$ est un multiple de 3, nous allons extraire de (9) les deux termes correspondant à $\ell = \frac{d}{3}$ et $\ell = \frac{2d}{3}$ et traiter la somme restante de manière analogue au cas précédent. Pour tout nombre entier $k \ge 1$, on a d'après (9) :

$$\begin{aligned} S_d^{(a)}(q^k) &= S_d^{(a)}(2^{ks}) \\ &= \frac{1}{d} w^{-a} \prod_{j<ks} (1 - w^{2^j}) + \frac{1}{d} w^{a} \prod_{j<ks} (1 - w^{-2^j}) \end{aligned}$$

$$+\frac{1}{d}\sum_{\substack{\ell=1\\ \ell\neq d/3\\ \ell\neq 2d/3}}^{d-1} e\left(-\frac{al}{d}\right)\prod_{j<ks}\left(1-e\left(\frac{2^j\ell}{d}\right)\right),$$

où l'on a posé $w=e(\frac{1}{3})$.

Il en résulte que

$$S_d^{(a)}(q^k)=\frac{3}{d}S_3^{(a)}(q^k)+\frac{1}{d}\sum_{\substack{\ell=1\\ \ell\neq d/3\\ \ell\neq 2d/3}}^{d-1} e\left(-\frac{al}{d}\right)\lambda_d^{k_i}(\ell).$$

On a donc, si (8) désigne la représentation $q$-adique du nombre entier $N$,

$$S_d^{(0)}(N)=\frac{3}{d}S_3^{(0)}(N)+R_d(N),$$

avec

$$R_d(N)=\frac{1}{d}\sum_{i=1}^{\nu}(-1)^{s_i}\sum_{\delta<\delta_i}(-1)^{s(\delta)}\sum_{\substack{\ell=1\\ \ell\neq d/3\\ \ell\neq 2d/3}}^{d-1} e\left(-\frac{(a_i-\delta)}{d}\,\ell\right)\lambda_d^{k_i}(\ell).$$

Posons

$$\lambda_d^*=\sup_{\substack{\ell=1,\ldots,d-1\\ \ell\neq d/3\\ \ell\neq 2d/3}}|\lambda_d(\ell)|<3^{s/2}$$

(d'après le lemme 3.1).

Nous allons maintenant exprimer $S_3^{(0)}(N)$ et $S_3^{(0)}\left(\frac{N}{4}\right)$ en fonction de la fonction $F$ de Coquet définie par (2). C'est l'objet des deux lemmes élémentaires suivants.

Lemme 3.2. — *Pour tout nombre entier $N\geq 1$, on a*

$$S_3^{(0)}(N)=\left(\frac{N}{3}\right)^{\alpha}F\left(\log_4\frac{N}{3}\right)+b(N),$$

*avec $|b(N)|\leq 23$.*

*Démonstration.* — En remplaçant $N$ par $\left\lceil\frac{N}{3}\right\rceil$ dans (2) et en reprenant les estimations dues à Coquet dans [4] (voir (2), (3) et (4)) on obtient

$$S_3^{(0)}(N)=h\left(\left\lceil\frac{N}{3}\right\rceil\right)+\left(\frac{N}{3}\right)^{\alpha}F\left(\log_4\frac{N}{3}\right)+R(N)$$

où

$$R(N)\leq\left(\left\lceil\frac{N}{3}\right\rceil^{\alpha}-\left(\frac{N}{3}\right)^{\alpha}\right)\sup F+\left(\frac{N}{3}\right)^{\alpha}\left(F\left(\log_4\frac{N}{3}\right)-F\left(\log_4\left\lceil\frac{N}{3}\right\rceil\right)\right)$$

$$\leq \frac{110}{3.65^\alpha}\frac{1}{N^{1-\alpha}} + \frac{2}{3}N^\alpha \left| x\left(\frac{N}{3}\right)^{-\alpha} \phi\left(x\left(\frac{N}{3}\right)\right) - x\left(\left\lceil\frac{N}{3}\right\rceil\right)^{-\alpha} \phi\left(x\left\lceil\frac{N}{3}\right\rceil\right)\right|,$$

avec $\phi$ définie par (4). Pour tout nombre entier $N \geq 3$, on a $\lfloor \log_4 3\left\lceil \frac{N}{3}\right\rceil \rfloor = \lfloor \log_4 N \rfloor$ (car pour des raisons de congruence le nombre entier $3\left\lceil \frac{N}{3}\right\rceil$ n'est jamais de la forme $4^k$ ou $4^k+1$). On en déduit que

$$x\left(\frac{N}{3}\right) = \frac{N}{4^{\lfloor \log_4 N\rfloor}}$$

et

$$x\left(\left\lceil\frac{N}{3}\right\rceil\right) = \frac{3\lceil N/3\rceil}{4^{\lfloor \log_4 N\rfloor}},$$

ce qui implique d'après (5)

$$\left|\phi\left(x\left(\frac{N}{3}\right)\right) - \phi\left(x\left\lceil\frac{N}{3}\right\rceil\right)\right| \leq \frac{4}{3^{\lfloor \log_4 N\rfloor}} \leq \frac{12}{N^\alpha}$$

et donc d'après (3) et (4)

$$\begin{aligned} R(N) &\leq \frac{110}{3.65^\alpha}\frac{1}{N^{1-\alpha}} + 8 + \frac{2}{3}N^\alpha \left| x\left(\frac{N}{3}\right)^{-\alpha} - x\left(\left\lceil\frac{N}{3}\right\rceil^{-\alpha}\right)\right| \sup_{x\in[1,4]} \phi(x) \\ &\leq 8 + \left(\frac{110}{3.65^\alpha} + 16\alpha\right)\frac{1}{N^{1-\alpha}} \leq 22.03. \end{aligned}$$

□

Lemme 3.3. — *Pour tout nombre entier $N \geq 1$, on a*

$$S_3^{(0)}\left(\frac{N}{4}\right) = \frac{1}{3}S_3^{(0)}(N) + B(N),$$

*avec* $|B(N)| \leq 33$.

*Démonstration.* — En effet, si $N = 4M$ alors

$$\begin{aligned} S_3^{(0)}\left(\frac{N}{4}\right) &= S_3^{(0)}(M) = \left(\frac{M}{3}\right)^\alpha F\left(\log_4 \frac{M}{3}\right) + b(M) \\ &= \frac{1}{3}S_3^{(0)}(4M) + b(M) - \frac{1}{3}b(4M) \end{aligned}$$

en appliquant le lemme 3.2 pour $N = M$ puis $N = 4M$.

Si $N = 4M + r$ avec $r \in \{1,2,3\}$ alors

$$S_3^{(0)}\left(\frac{N}{4}\right) = S_3^{(0)}(M+1) = S_3^{(0)}(M) + b_0(M) \quad \text{avec} \quad |b_0(M)| \leq 1,$$

ce qui entraine de la même manière

$$S_3^{(0)}\left(\frac{N}{4}\right) = \frac{1}{3}S_3^{(0)}(4M) + b(M) - \frac{1}{3}b(4M) + b_0(M)$$

$$= \frac{1}{3} S_3^{(0)}(4M + r) - \frac{1}{3} b_r(M) + b(M) - \frac{1}{3} b(4M) + b_0(M),$$

avec $|b_r(M)| \leq r$. □

On a donc

$$\begin{aligned} S_d^{(0)}(N) - S_d^{(0)}\left(\frac{N}{4}\right) &= \frac{3}{d}\left(S_3^{(0)}(N) - S_3^{(0)}\left(\frac{N}{4}\right)\right) + R_d(N) - R_d\left(\frac{N}{4}\right) \\ &= \frac{2}{d} S_3^{(0)}(N) - \frac{3}{d} B(N) + R_d(N) - R_d\left(\frac{N}{4}\right) \end{aligned}$$

d'après le lemme 3.3, et donc

$$S_+^0(N) = 2 \sum_{\substack{d \leq d_0 \\ d \equiv 1(2) \\ d \equiv 0(3)}} \frac{\mu(d)}{d^2} S_3^{(0)}(N) + R^0(N),$$

où

$$R^0(N) = \sum_{\substack{d \leq d_0 \\ d \equiv 1(2) \\ d \equiv 0(3)}} \left(-\frac{3}{d^2} B(N) + R_{d^2}(N) - R_{d^2}\left(\frac{N}{4}\right)\right)$$

vérifie

$$|R^0(N)| \leq C_0(d_0) + C_1(d_0) N^{\alpha^*(d_0)},$$

avec

$$C_0(d_0) = 90 \sum_{\substack{d \leq d_0 \\ d \equiv 3(6)}} \frac{1}{d^2}, \quad C_1(d_0) = \sum_{\substack{d \leq d_0 \\ d \equiv 3(6)}} \frac{4^{\alpha^*(d^2)} + 1}{4^{\alpha^*(d^2)}} \frac{(q-1)\lambda_{d^2}^*}{\lambda_{d^2}^* - 1}$$

et

$$\alpha^*(d_0) = \max_{\substack{d \leq d_0 \\ d \equiv 3(6)}} \frac{\log \lambda_{d^2}^*}{\log q} < \alpha.$$

D'après le lemme 3.2, on a

$$2 \sum_{\substack{d \leq d_0 \\ d \equiv 1(2) \\ d \equiv 0(3)}} \frac{\mu(d)}{d^2} S_3^0(N) = 2 \sum_{\substack{d \leq d_0 \\ d \equiv 1(2) \\ d \equiv 0(3)}} \frac{\mu(d)}{d^2} \left(\left(\frac{N}{3}\right)^\alpha F\left(\log_4 \frac{N}{3}\right) + b(N)\right).$$

Pour calculer le terme principal, nous allons utiliser le lemme suivant :

Lemme 3.4. —

$$\sum_{\substack{d \equiv 1(2) \\ d \equiv 0(3)}} \frac{\mu(d)}{d^2} = -\frac{1}{\pi^2}.$$

*Démonstration.* — On a

$$\frac{6}{\pi^2}=\sum_{d\geq 1}\frac{\mu(d)}{d^2}=\sum_{d\equiv 1(2)}\frac{\mu(d)}{d^2}+\sum_{d\equiv 1(2)}\frac{\mu(2d)}{4d^2}=\frac{3}{4}\sum_{d\equiv 1(2)}\frac{\mu(d)}{d^2}.$$

On en déduit

$$\begin{aligned}\frac{8}{\pi^2}=\sum_{d\equiv 1(2)}\frac{\mu(d)}{d^2}&=\sum_{\substack{d\equiv 1(2)\\ d\equiv 0(3)}}\frac{\mu(d)}{d^2}+\sum_{\substack{d\equiv 1(2)\\ d\equiv 1,2(3)}}\frac{\mu(d)}{d^2}\\ &=\sum_{\substack{d\equiv 1(2)\\ d\equiv 1,2(3)}}\frac{\mu(3d)}{9d^2}+\sum_{\substack{d\equiv 1(2)\\ d\equiv 1,2(3)}}\frac{\mu(d)}{d^2}=\frac{8}{9}\sum_{\substack{d\equiv 1(2)\\ d\equiv 1,2(3)}}\frac{\mu(d)}{d^2}\end{aligned}$$

et donc que

$$\sum_{\substack{d\equiv 1(2)\\ d\equiv 0(3)}}\frac{\mu(d)}{d^2}=-\frac{1}{\pi^2}. \qquad \square$$

Il résulte du lemme 3.4 que

$$2\sum_{\substack{d\leq d_0\\ d\equiv 1(2)\\ d\equiv 0(3)}}\frac{\mu(d)}{d^2}S_3^{(0)}(N)=2\left(-\frac{1}{\pi^2}+K(d_0)\right)\left(\frac{N}{3}\right)^{\alpha}F\left(\log_4\frac{N}{3}\right)+B_0(N),$$

avec

$$|B_0(N)|\leq B_0=2\sum_{d\equiv 3(6)}\frac{1}{d^2}$$

et

$$|K(d_0)|\leq\frac{1}{d_0}.$$

Puisque

$$2|K(d_0)|\left(\frac{N}{3}\right)^{\alpha}F\left(\log_4\frac{N}{3}\right)\leq\frac{110}{3.(65)^{\alpha}}\frac{N^{\alpha}}{d_0},$$

on en déduit

$$S_+^0(N)=-\frac{2}{\pi^2}\left(\frac{N}{3}\right)^{\alpha}F\left(\log_4\frac{N}{3}\right)+R_+^0(N)$$

avec

$$|R_+^0(N)|\leq B_0+C_0(d_0)+C_1(d_0)N^{\alpha^*(d_0)}+\frac{110}{3(65)^{\alpha}}\frac{N^{\alpha}}{d_0}.$$

En rassemblant tous ces résultats, on obtient

$$S(N)=-\frac{2}{\pi^2}\left(\frac{N}{3}\right)^{\alpha}F\left(\log_4\frac{N}{3}\right)+R(N),$$

où

$$R(N)=R_+^0(N)+S_-^0(N)+S^1(N)+S^2(N)$$

vérifie

$$
\begin{aligned}
|R(N)| \le B_0 + C_0(d_0) + C_1(d_0)N^{\alpha^*(d_0)} \\
+ C(d_0)N^{\alpha(d_0)} + 2N^{3/4} \\
+ \frac{2(1+\sqrt{3})}{\log_2 9/8}\frac{N^\alpha}{d_0^{\log_2 9/8}} + \frac{110}{3.(65)^\alpha}\frac{N^\alpha}{d_0},
\end{aligned}
$$

ce qui achève la démonstration du théorème 1.1.

## 4. Conclusion, généralisation

Il résulte des calculs précédents que, puisque

$$\frac{2}{\pi^2}\left(\frac{N}{3}\right)^\alpha F\left(\log_4 \frac{N}{3}\right) \ge \frac{4N^\alpha}{\pi^2 3^{\alpha+\frac{1}{2}}},$$

il suffit de choisir $d_0$ tel que

$$\frac{2(1+\sqrt{3})}{\log_2 9/8}\frac{1}{{d_0}^{\log_2 9/8}} + \frac{110}{3.(65)^\alpha}\frac{1}{d_0} < \frac{4}{\pi^2.3^{\alpha+\frac{1}{2}}}$$

pour en déduire que la somme $S(N)$ est strictement négative pour $N$ assez grand.

Ces résultats se généralisent facilement lorsque l'on remplace, pour tout nombre entier $z \ge 2$, l'ensemble $\mathfrak{Q}$ par l'ensemble $\mathfrak{Q}_z$ des nombres entiers qui ne sont divisible par la puissance $z$-ième d'aucun nombre premier.

En effet, en suivant la même méthode, on montre que pour tout $d_0 \in 2\mathbb{N}+1$, il existe $\beta(d_0) < \alpha$ et $\varepsilon(d_0)$ vérifiant $\lim\limits_{d_0\to+\infty} \varepsilon(d_0) = 0$ tels que

$$\sum_{\substack{n<N\\ n\in\mathfrak{Q}_z}} t(n) = \frac{-3.2^z}{(2^z-1)(3^z-1)\zeta(z)}\left(\frac{N}{3}\right)^\alpha G_z\left(\log_4\frac{N}{3}\right) + R(N),$$

avec $\zeta$ la fonction zêta de Riemann,

$$|R(N)| \le \varepsilon(d_0)N^d + O_{d_0}(N^{\beta(d_0)})$$

et

$$G_z(x) = F(x) - \frac{1}{3^{z/2}}F\left(x - \left\lfloor\frac{z}{2}\right\rfloor\right),$$

où $F$ est la fonction de Coquet.

La fonction $G_z$ est strictement positive, minorée par

$$2\frac{3^{z/2}-1}{3^{(z+1)/2}}$$

lorsque $z$ est pair et, d'après (3), par

$$\frac{2\sqrt{3}}{3} - \frac{1}{3^{z/2}}\frac{55}{3}\left(\frac{3}{65}\right)^{\alpha} \geq \frac{2\sqrt{3}}{3} - \sqrt{3}\frac{55}{27}\left(\frac{3}{65}\right)^{\alpha} > 0$$

lorsque $z$ est impair.

Un calcul analogue à celui effectué pour le lemme 3.4 montre que pour tout nombre entier $z \geq 2$, on a

$$\sum_{\substack{d\equiv 1(2)\\ d\equiv 0(3)}} \frac{\mu(d)}{d^z} = -\frac{2^z}{(2^z-1)(3^z-1)\zeta(z)}.$$

et on en déduit le théorème suivant :

THÉORÈME 4.1. — *Pour tout nombre entier $z \geq 2$ on a*

$$\sum_{\substack{n<N\\ n\in\Omega_z}} t(n) = -\frac{3.2^z}{(2^z-1)(3^z-1)\zeta(z)}(1+o(1))\left(\frac{N}{3}\right)^{\alpha} G_z\left(\log_4\frac{N}{3}\right)$$

*avec*

$$G_z(x) = F(x) - \frac{1}{3^{z/2}}F\left(x - \left\lfloor\frac{z}{2}\right\rfloor\right) > 0,$$

*où $F$ est la fonction de Coquet.*

## BIBLIOGRAPHIE

[1] J.-P. ALLOUCHE & J. SHALLIT – « The ubiquitous Prouhet-Thue-Morse sequence », in *Sequences and their applications (Singapore, 1998)*, Springer Ser. Discrete Math. Theor. Comput. Sci., Springer, London, 1999, p. 1–16.

[2] I. BOREICO, D. EL-BAZ & T. STOLL – « On a conjecture of Dekking : the sum of digits of even numbers », *J. Théor. Nombres Bordeaux* **26** (2014), p. 17–24.

[3] F. CELLAROSI & Y. G. SINAI – « Ergodic properties of square-free numbers », *J. Eur. Math. Soc. (JEMS)* **15** (2013), p. 1343–1374.

[4] J. COQUET – « A summation formula related to the binary digits », *Invent. Math.* **73** (1983), p. 107–115.

[5] C. DARTYGE & G. TENENBAUM – « Sommes des chiffres de multiples d'entiers », *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)* **55** (2005), p. 2423–2474.

[6] M. DRMOTA & M. SKAŁBA – « Rarified sums of the Thue-Morse sequence », *Trans. Amer. Math. Soc.* **352** (2000), p. 609–642.

[7] M. DRMOTA & T. STOLL – « Newman's phenomenon for generalized Thue-Morse sequences », *Discrete Math.* **308** (2008), p. 1191–1208.

[8] J.-M. Dumont – « Discrépance des progressions arithmétiques dans la suite de Morse », *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* **297** (1983), p. 145–148.

[9] S. Eilenberg – *Automata, languages, and machines. Vol. A*, Academic Press, New York, 1974, Pure and Applied Mathematics, Vol. 58.

[10] E. Fouvry & C. Mauduit – « Sommes des chiffres et nombres presque premiers », *Math. Ann.* **305** (1996), p. 571–599.

[11] A. O. Gel′fond – « Sur les nombres qui ont des propriétés additives et multiplicatives données », *Acta Arith.* **13** (1967/1968), p. 259–265.

[12] S. Goldstein, K. A. Kelly & E. R. Speer – « The fractal structure of rarefied sums of the Thue-Morse sequence », *J. Number Theory* **42** (1992), p. 1–19.

[13] P. J. Grabner – « A note on the parity of the sum-of-digits function », in *Séminaire Lotharingien de Combinatoire (Gerolfingen, 1993)*, Prépubl. Inst. Rech. Math. Av., vol. 1993/34, Univ. Louis Pasteur, Strasbourg, 1993, p. 35–42.

[14] K.-H. Indlekofer & I. Kátai – « Investigations in the theory of $q$-additive and $q$-multiplicative functions. I », *Acta Math. Hungar.* **91** (2001), p. 53–78.

[15] H. Iwaniec & E. Kowalski – *Analytic number theory*, American Mathematical Society Colloquium Publications, vol. 53, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2004.

[16] A. A. Karatsuba & B. Novak – « Arithmetic problems with numbers of a special type », *Mat. Zametki* **66** (1999), p. 315–317.

[17] I. Kátai – « A remark on a theorem of H. Daboussi », *Acta Math. Hungar.* **47** (1986), p. 223–225.

[18] C. Mauduit – « Multiplicative properties of the Thue-Morse sequence », *Period. Math. Hungar.* **43** (2001), p. 137–153.

[19] C. Mauduit, C. Pomerance & A. Sárközy – « On the distribution in residue classes of integers with a fixed sum of digits », *Ramanujan J.* **9** (2005), p. 45–62.

[20] C. Mauduit & J. Rivat – « La somme des chiffres des carrés », *Acta Math.* **203** (2009), p. 107–148.

[21] ______, « Sur un problème de Gelfond : la somme des chiffres des nombres premiers », *Ann. of Math.* **171** (2010), p. 1591–1646.

[22] C. Mauduit & A. Sárközy – « On the arithmetic structure of the integers whose sum of digits is fixed », *Acta Arith.* **81** (1997), p. 145–173.

[23] D. J. Newman – « On the number of binary digits in a multiple of three », *Proc. Amer. Math. Soc.* **21** (1969), p. 719–721.

[24] D. J. Newman & M. Slater – « Binary digit distribution over naturally defined sequences », *Trans. Amer. Math. Soc.* **213** (1975), p. 71–78.

[25] R. Peckner – « Uniqueness of the measure of maximal entropy for the squarefree flow », prépublication arXiv:1205.2905.

[26] E. Prouhet – « Mémoire sur quelques relations entre les puissances de nombres », *C. R. Acad. Sci. Paris* **33** (1851).

[27] P. Sarnak – « Three lectures on the Möbius fonction, randomness and dynamics », `http://publications.ias.edu/sites/default/files/MobiusFunctionsLectures%282%29.pdf`, 2010.

[28] V. Shevelev – « Generalized Newman phenomena and digit conjectures on primes », *Int. J. Math. Math. Sci.* (2008), Art. ID 908045.

[29] ———, « A conjecture on primes and a step towards justification », prépublication arXiv:0706.0786.