Bulletin
de la SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

NOMBRE DE CLASSES DES TORES DE MULTIPLICATION COMPLEXE ET BORNES INFÉRIEURES POUR LES ORBITES GALOISIENNES DE POINTS SPÉCIAUX

Emmanuel Ullmo & Andrei Yafaev

Tome 143
Fascicule 1

2015

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE
Publié avec le concours du Centre national de la recherche scientifique
pages 197-228

Le *Bulletin de la Société Mathématique de France* est un périodique trimestriel de la Société Mathématique de France.

Fascicule 1, tome 143, janvier 2015

Diffusion

Maison de la SMF
Case 916 - Luminy
13288 Marseille Cedex 9
France
`smf@smf.univ-mrs.fr`

Hindustan Book Agency
O-131, The Shopping Mall
Arjun Marg, DLF Phase 1
Gurgaon 122002, Haryana
Inde

AMS
P.O. Box 6248
Providence RI 02940
USA
`www.ams.org`

Tarifs

Vente au numéro : 43 € ($ 64)
Abonnement Europe : 176 €, hors Europe : 193 € ($ 290)
Des conditions spéciales sont accordées aux membres de la SMF.

Secrétariat : Nathalie Christiaën

Bulletin de la Société Mathématique de France
Société Mathématique de France
Institut Henri Poincaré, 11, rue Pierre et Marie Curie
75231 Paris Cedex 05, France
Tél : (33) 01 44 27 67 99 • Fax : (33) 01 40 46 90 96
`revues@smf.ens.fr` • `http://smf.emath.fr/`

ISSN 0037-9484

Directeur de la publication : Marc Peigné

Bull. Soc. math. France
143 (1), 2015, p. 197–228

NOMBRE DE CLASSES DES TORES DE MULTIPLICATION COMPLEXE ET BORNES INFÉRIEURES POUR LES ORBITES GALOISIENNES DE POINTS SPÉCIAUX

PAR EMMANUEL ULLMO & ANDREI YAFAEV

RÉSUMÉ. — Dans cet article nous donnons des bornes inférieures pour les nombres de classe de tores algébriques à multiplication complexe. Nous en déduisons des bornes inférieures pour la taille des orbites galoisiennes de points spéciaux (inconditionellement et sous l'hypothèse de Riemann généralisée).

ABSTRACT (*Complex multiplication tori class number and inferior boundary of special point Galois orbits*)

In this paper we give lower bounds for class numbers of CM algebraic tori. We deduce lower bounds for the size of the Galois orbits of special points in Shimura varieties (unconditionally and under the Generalised Riemann Hypothesis).

1. Introduction

Ce papier est motivé par la conjecture d'André-Oort dont voici l'énoncé.

CONJECTURE 1.1 (André-Oort). — *Soit S une varieté de Shimura et soit $\Sigma \subset S$ un ensemble de points spéciaux. Alors les composantes irréductibles de l'adhérence de Zariski de Σ sont des sous-variétés spéciales de S.*

Texte reçu le 27 février 2012, accepté le 19 juillet 2013.

EMMANUEL ULLMO, Université de Paris-Sud, Bat 425, 91405, Orsay Cedex France • *E-mail :* `ullmo@math.u-psud.fr`
ANDREI YAFAEV, University College London, Department of Mathematics, 25 Gordon street, WC1H OAH, London, United Kingdom • *E-mail :* `yafaev@math.ucl.ac.uk`

Classification mathématique par sujets (2000). — 11G18.

Cette conjecture a été récemment démontrée par Klingler et les deux auteurs [27], [14] en admettant l'hypothèse de Riemann généralisée. La strategie consistait à combiner des méthodes galoisiennes et géométriques d'Edixhoven avec des techniques ergodiques de Clozel-Ullmo. Très récemment, Jonathan Pila a mis en place une stratégie faisant intervenir des idées issues de la logique pour attaquer la conjecture d'André-Oort [19], [21]. Cette nouvelle approche a déjà permi [20] de démontrer la conjecture d'André-Oort pour des produits de courbes modulaires de manière inconditionnelle. Qu'on adopte la stratégie d'Edixhoven ou celle de Pila, un des ingrédients majeurs est une borne inférieure suffisamment forte pour la taille des orbites sous Galois des points spéciaux des variétés de Shimura.

Il est à noter que la stratégie de Pila nécessite des meilleures bornes que celles requises par la méthode d'Edixhoven. La minoration de la taille des orbites sous Galois des points spéciaux obtenue dans [27] dépend de la validité de l'hypothèse de Riemann généralisée et est insuffisante pour les applications à la méthode de Pila. Notons que l'on ne sait pas à ce jour que sur l'espace de module $\mathbb{A}_g$ des variétés abéliennes principalement polarisées de dimension $g \geq 4$ il n'y a qu'un nombre fini de points correspondants à des variétés abéliennes à multiplication complexe définies sur des extensions de $\mathbb{Q}$ de degré borné.

Le but principal de cet article est d'obtenir des minorations pour la taille des orbites sous Galois de point spéciaux utilisables dans la stratégie de Pila. Nous obtenons en toute généralité ces bornes sous l'hypothèse de Riemann généralisée et dans certains cas de manière inconditionnelle. Notons aussi qu'il n'est pas évident de prévoir exactement le type de bornes nécessaire pour la méthode de Pila mais nous pensons que celles que nous obtenons sont difficilement améliorables qualitativement et probablement adaptées aux applications en vue.

Un point spécial x d'une variété de Shimura définit un tore algébrique T sur $\mathbb{Q}$ et un corps de nombres CM $E = E(x,T)$, le corps reflex. On dispose alors d'un morphisme de tores algébriques sur $\mathbb{Q}$ dit de réciprocité

$$r = r_{x,T} : R_E := \mathrm{Res}_{E/\mathbb{Q}}\mathbb{G}_{m,E} \to T.$$

Soit M un tore algébrique sur $\mathbb{Q}$. Soit K_M^m le sous-groupe compact ouvert maximal de $M(\mathbb{A}_f)$. Le groupe de classes h_M de M est par définition le groupe fini

$$h_M = M(\mathbb{Q})\backslash M(\mathbb{A}_f)/K_M^m.$$

Le morphisme de réciprocité r induit au niveau des groupes de classes une application $\overline{r} : h_{R_E} \to h_T$ et l'orbite sous Galois du point spécial x est minorée par le cardinal de l'image de $\overline{r}$. Minorer la taille de l'orbite sous Galois de x revient donc à minorer le cardinal de l'image de $\overline{r}$.

La stratégie suivie dans ce papier est d'abord de minorer la taille du groupe de classes de T puis de borner la taille du conoyau de $\overline{r}$. Les bornes obtenues pour la taille de h_T sont inconditionnelles et ont la forme voulue. Nous pouvons minorer le conoyau de $\overline{r}$ quand le noyau de r est connexe de manière inconditionelle et obtenir les bornes voulues pour l'orbite de Galois de x dans ce cas. Nous donnons des critères assurant la connexité du noyau de r dans la section 4. Par exemple ce noyau est toujours connexe si x est un point spécial de $\mathbb{A}_g$ pour $g \leq 3$ ou si x est "Galois générique " pour g arbitraire.

Quand le noyau de r n'est pas connexe, l'estimation du conoyau de $\overline{r}$ semble être un problème sérieux de géométrie algébrique et de cohomologie galoisienne que nous n'avons pas su résoudre sans l'hypothèse de Riemann généralisée.

Précisons un peu la nature des résultats obtenus. Soit M un tore algébrique sur $\mathbb{Q}$ de dimension d. Soit L le corps de décomposition de M et D_L la valeur absolue de son discriminant. Notre but est de donner une borne inférieure pour h_M en fonction de D_L. Soit $X^*(M)$ le groupe de caractères de M et χ_M le caractère de la représentation d'Artin correspondante de $G = \mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q})$. On considère la fonction L d'Artin associée que l'on dénote $L(s, M)$ et ρ_M son quasi-résidu dont la définition est donnée à la section 2.1.2.

On définit ensuite le *quasi-discriminant* D_M de M. Il est défini comme le rapport entre deux mesures de Haar sur $M(\mathbb{A})$. La proposition 3.1 donne une formule fermée qui relie D_M au conducteur d'Artin $a(M)$ du module galoisien $X^*(M) \otimes \mathbb{Q}$ et au cardinal du groupe des composantes du modèle de Néron de type fini de M sur $\mathbb{Z}$. Shyr [25] montre la formule :

$$h_M R_M = w_M \tau_M \rho_M D_M^{1/2} \tag{1}$$

où w_M est la taille du 'groupe des unités de M', R_M le régulateur de M et τ_M le nombre de Tamagawa. Il est à noter que dans le cas du tore $M = \mathrm{Res}_{F/\mathbb{Q}}\mathbb{G}_{mF}$ où F est un corps de nombres, on retrouve la formule classique pour le nombre de classes de l'anneau des entiers de F.

En explicitant et en évaluant les invariants arithmétiques de M intervenant dans la formule de Shyr (1) on montre que

$$h_M R_M \gg D_L^{\mu} \tag{2}$$

où les constantes ne dépendent que de d et sont explicites en fonction de d. La forme précise du résultat est donnée dans le théorème 2.3. Une fois la formule fermée pour D_M obtenue les résultats principaux sont une minoration de la forme voulue pour le conducteur d'Artin $a(M)$ (proposition 3.2) et une estimation de type Brauer-Siegel pour le quasi-résidu ρ_M (proposition 2.1). Il est à noter que dans le cas où M est un tore de multiplication complexe T le régulateur R_T est trivial et nous obtenons une minoration de h_T.

On applique ensuite notre formule pour h_T au problème de minoration des orbites galoisiennes des points spéciaux dans les variétés de Shimura.

Soit (G,X) une donnée de Shimura, K un sous-groupe compact ouvert de $G(\mathbb{A}_f)$ et $\mathrm{Sh}_K(G,X) := G(\mathbb{Q})\backslash(X\times G(\mathbb{A}_f)/K)$ la variété de Shimura associée. On peut sans perte de généralités supposer que G est semisimple de type adjoint.

Soit $x=\overline{(h,1)}$ un point spécial. Alors le groupe de Mumford-Tate T de h est un tore de multiplication complexe. Soit K_T le sous-groupe compact ouvert $T(\mathbb{A}_f)\cap K$ de $T(\mathbb{A}_f)$. On dispose donc d'un morphisme de réciprocité

$$r\colon \mathrm{Res}_{E/\mathbb{Q}}\mathbb{G}_{m,E}\longrightarrow T$$

où comme précédemment E désigne le corps reflex de $(T,\{x\})$. L'orbite galoisienne $O(x)$ de $x=\overline{(h,1)}$ a pour taille le cardinal de l'image de $r((E\otimes\mathbb{A}_f)^*)$ dans $T(\mathbb{Q})\backslash T(\mathbb{A}_f)/K_T$. On démontre alors dans la section 5.1 que

$$|O(x)|\gg B^{i(T)}|K_T^m/K_T||\mathrm{Im}(\overline{r})|$$

où $\mathrm{Im}(\overline{r})$ désigne l'image de $r((E\otimes\mathbb{A}_f)^*)$ dans $T(\mathbb{Q})\backslash T(\mathbb{A}_f)/K_T^m$, B est une constante ne dépendant que de la variété de Shimura $\mathrm{Sh}_K(G,X)$ et $i(T)$ est le cardinal de l'ensemble des nombres premiers p tels que la projection de K_T dans $T(\mathbb{Q}_p)$ n'est pas égale à $K_{T,p}^m$.

Quand le point spécial x varie dans $\mathrm{Sh}_K(G,X)$ parmi les points tels que r_x est à noyau connexe, un résultat de Clozel et du premier auteur [6] assure que le conoyau de $\overline{r}$ est uniformément borné. On obtient dans ce cas en utilisant l'équation (2) une minoration satisfaisante de $|O(x)|$ sous la forme

$$|O(x)|\gg B^{i(T)}|K_T^m/K_T|D_L^{\mu} \tag{3}$$

pour un μ explicite. C'est par exemple le cas pour un point du module des variétés abéliennes principalement polarisées correspondant à une variété abélienne simple de dimension g pour $g\leq 3$ ou pour un point à multiplication complexe "général du point de vue galoisien" pour g arbitraire. Les résultats principaux que nous obtenons dans cette direction sont donnés dans la section 5.2.

Un argument simple montre que le nombre de composantes connexes du noyau de r_x est uniformément borné quand x varie parmi les points spéciaux de $\mathrm{Sh}_K(G,X)$. On en déduit que l'image de $\overline{r}$ contient l'image de l'élevation à la puissance n de h_T dans h_T pour n uniformément borné.

En utilisant l'hypothèse de Riemann généralisée on montre dans la section 6 une minoration de l'orbite sous Galois de x de la forme voulue

$$|O(x)|\gg B^{i(T)}|K_T^m/K_T|D_L^{\mu}. \tag{4}$$

Ce résultat est indépendant des parties précédentes.

Finalement, il est à noter que Tsimerman (voir [26]) a obtenu des résultats comparables aux notres simultanément.

2. Préliminaires

2.1. Formule de classes généralisée. — Nous rappelons dans cette partie une formule due à Ono [17] et [18] et Shyr [25] donnant le nombre de classes d'un tore algébrique T sur $\mathbb{Q}$ qui généralise la formule classique de Dedekind pour le nombre de classes de l'anneau des entiers d'un corps de nombres. On définit et on estime le quasi-résidu ρ_T de T qui intervient dans cette formule. On énonce un des résultats principaux que nous avons en vue qui donne une minoration du produit du nombre de classes de h_T de T par le régulateur R_T (théorème 2.3). Dans les applications à la multiplication complexe que nous avons en vue le régulateur R_T sera toujours égal à 1 de sorte que l'on aura dans ce cas une minoration du nombre de classes h_T.

2.1.1. *Nombre de classes des tores.* — On note $\mathbb{A}$ (resp. $\mathbb{A}_f$) l'anneau des adèles (resp. des adèles finis) de $\mathbb{Q}$. Soit G un groupe algébrique sur $\mathbb{Q}$. Soit K un sous-groupe compact ouvert de $G(\mathbb{A}_f)$, le nombre de classe $h_G(K)$ de G relativement à K est défini comme le cardinal de l'ensemble fini $G(\mathbb{Q})\backslash G(\mathbb{A}_f)/K$ ([22] thm. 5.1).

Si T est un tore sur $\mathbb{Q}$, et p est premier on note $K_{T,p}^m$ l'unique sous-groupe compact ouvert maximal de $T(\mathbb{Q}_p)$. Alors $K_T^m := \prod_p K_{T,p}^m$ est l'unique sous-groupe compact ouvert maximal de $T(\mathbb{A}_f)$. Le nombre de classe h_T de T est défini comme

$$h_T := h_T(K_T^m). \tag{5}$$

On note $K_{T,\infty}^m$ le sous-groupe compact maximal de $T(\mathbb{R})$. Le groupe $T(\mathbb{Q}) \cap K_{T,\infty}^m K_T^m$ est alors fini et on note

$$w_T = |T(\mathbb{Q}) \cap K_{T,\infty}^m K_T^m|. \tag{6}$$

2.1.2. *Fonction L d'Artin de T et estimations de ρ_T.* — Soit T un tore algébrique sur $\mathbb{Q}$, on note $X^*(T)$ le $\mathbb{Z}$-module libre $\mathrm{Hom}(T_{\overline{\mathbb{Q}}}, \mathbb{G}_{m,\overline{\mathbb{Q}}})$ des caractères de T. Pour toute extension E de $\mathbb{Q}$ on note $X^*(T)_E$ le sous-module de $X^*(T)$ formé des caractères qui sont rationnels sur E. Soit L un corps de décomposition de T et $G = \mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q})$ le groupe de Galois de L sur $\mathbb{Q}$. Le groupe G agit sur $X^*(T)$ et on note χ_T le caractère de cette représentation.

On note $L(s,T) = L(s,\chi_T)$ la fonction L d'Artin défini par le G-module $X^*(T) \otimes \mathbb{C}$. On dispose d'un produit Eulérien $L(s,T) = \prod_p L_p(s,T)$, avec pour tout nombre premier p

$$L_p(s,T) = \det(1 - p^{-s} Frob_{\mathfrak{p}} | X^*(T)^{I_{\mathfrak{p}}})^{-1}.$$

Dans cette somme portant sur les nombres premiers p, $\mathfrak{p}$ désigne une place arbitraire de L au dessus de p, $I_{\mathfrak{p}} \subset G_{\mathfrak{p}}$ désigne le sous-groupe d'inertie du groupe de décomposition $G_{\mathfrak{p}} = \mathrm{Gal}(L_{\mathfrak{p}}/\mathbb{Q}_p)$ et $Frob_{\mathfrak{p}} \in G_{\mathfrak{p}}/I_{\mathfrak{p}}$ est le Frobenius en $\mathfrak{p}$.

Soit h le nombre de classes de conjugaison de G et $\chi_1, \dots, \chi_h$ les caractères des représentations irréductibles de G. On suppose que χ_1 est le caractère de la représentation triviale. Par la théorie des fonctions L d'Artin [2] [3], si on a la décomposition $\chi_T = \sum_{i=1}^h m_i \chi_i$ alors

$$L(s,T) = \zeta(s)^{m_1} \prod_{j=2}^h L(s,\chi_j)^{m_j}$$

avec $\zeta(s)$ la fonction zeta de Riemann et $L(s,\chi_i)$ la fonction L d'Artin de χ_i. Dans cette situation

$$\rho_T = \lim_{s\to 1}(s-1)^{m_1} L(s,T) = \prod_{i=2}^h L(1,\chi_j)^{m_j} \tag{7}$$

est fini et non nul.

Soit H un sous-groupe de G et χ_H le caractère d'une représentation de H. On note χ_H^* le caractère de G induit de χ_H. Par définition, on a donc

$$\chi_H^*(\alpha) = \frac{1}{|H|} \sum_{g\in G} \chi'_H(g\alpha g^{-1})$$

χ'_H désignant l'extension de χ_H à G nulle en dehors de H.

Soit $H_1, \dots, H_r$, un système de représentants des sous-groupes cycliques de G à conjugaison près. On note $\mathbf{1}_{H_i}$ le caractère de la représentation triviale de H_i. Par la théorie d'Artin, ([17] 1.5.3) il existe des entiers naturels (m, λ_i, ν_i) premiers entre eux dans leur ensemble qui sont déterminés par le G-module $X^*(T)$ tels que

$$m\chi_T + \sum_{i=1}^r \lambda_i \mathbf{1}_{H_i}^* = \sum_{i=1}^r \nu_i \mathbf{1}_{H_i}^*. \tag{8}$$

Soit F_i les sous-corps de L correspondants à H_i par la théorie de Galois on en déduit une isogénie ([17] thm. 1.5.1)

$$T^m \times \prod_{i=1}^r (\mathrm{Res}_{F_i/\mathbb{Q}}\mathbb{G}_m)^{\lambda_i} \simeq \prod_{i=1}^r (\mathrm{Res}_{F_i/\mathbb{Q}}\mathbb{G}_m)^{\nu_i}. \tag{9}$$

On on aura besoin de l'énoncé suivant de type Brauer-Siegel concernant la taille de ρ_T.

PROPOSITION 2.1. — *Soit d un entier et ϵ un réel positif. Soit T un tore algébrique sur $\mathbb{Q}$ de dimension d. Soit L le corps de décomposition de T et D_L la valeur absolue du discriminant de L. Il existe des constantes $c_1 = c_1(d,\epsilon)$ et $c_2 = c_2(d,\epsilon)$ (dépendants uniquement de d et ϵ) telles que*

$$c_1 D_L^{-\epsilon} \leq \rho_T \leq c_2 D_L^{\epsilon}. \tag{10}$$

Preuve. On déduit de l'équation (9) l' égalité de fonctions L

$$L(s,T)^m \prod_{i=1}^{r} \zeta_{F_i}(s)^{\lambda_i} = \prod_{i=1}^{r} \zeta_{F_i}(s)^{\nu_i}$$

où l'on note $\zeta_E(s)$ la fonction zêta d'un corps de nombres E. Pour tout $i \in \{1,\dots,r\}$, $\zeta_{F_i}(s)$ a un pôle simple de résidu noté ρ_{F_i}. Soit m_1 l'ordre du pôle en $s=1$ de $L(s,T)$. On trouve que

$$mm_1 = \sum_{i=1}^{r} (\nu_i - \lambda_i)$$

et

$$\rho_T^m = \prod_{i=1}^{r} \rho_{F_i}^{\nu_i - \lambda_i}.$$

Quand T varie parmi les tores de dimension d, il n'y a qu'un nombre fini de possibilités pour le groupe de Galois G comme groupe abstrait. Quand G est fixé, il n'y a qu'un nombre fini de possibilités à isomorphismes près pour $X^*(T)\otimes\mathbb{Q}$ comme G-module. Comme les entiers m, λ_i, ν_i ne dépendent que du G-module $X^*(T)\otimes\mathbb{Q}$, ils sont bornés quand T parcourt l'ensemble des tores algébriques sur $\mathbb{Q}$ de dimension d.

On est donc ramené au lemme suivant.

LEMME 2.2. — *Soit d un entier et ϵ un réel positif. Soit L une extension galoisiennne de $\mathbb{Q}$ de degré d et soit E une sous-extension de L. Il existe des constantes $c_1' = c_1'(d,\epsilon)$ et $c_2' = c_2'(d,\epsilon)$ (ne dépendants que de d et ϵ) telles que*

$$c_1' D_L^{-\epsilon} \leq \rho_E \leq c_2' D_L^{\epsilon}.$$

D'après ([16] XVI-1) lemme 1, on sait que $\rho_E \ll D_E^{\epsilon}$. On a par ailleurs la relation $D_L = D_E^{[L:E]} N_{E/\mathbb{Q}}(D_{L/E})$ où $D_{L/E}$ désigne le discriminant relatif et $N_{E/\mathbb{Q}}$ la norme de E à $\mathbb{Q}$. Ceci démontre la majoration du lemme.

Pour la minoration, on utilise ([16] XVI-2) théorème 2 qui assure que

$$\rho_E \gg \rho_L D_L^{-\frac{\epsilon}{2}}$$

et ([16] XVI-2) théorème 1 qui assure que

$$\rho_L \gg D_L^{-\frac{\epsilon}{2}}.$$

2.1.3. *Mesures de Haar sur $T(\mathbb{A})$ et le quasi-discriminant D_T.* — Soit T un tore algébrique sur $\mathbb{Q}$ de rang r. Soit v une place de $\mathbb{Q}$ et r_v le rang de $X^*(T)_{\mathbb{Q}_v}$. Soit $\chi_{v,1},\dots,\chi_{v,r_v}$ une $\mathbb{Z}$-base de $X^*(T)_{\mathbb{Q}_v}$ et

$$\pi_v : T(\mathbb{Q}_v) \to (\mathbb{R}_+^\times)^{r_v}$$
$$x \mapsto \pi_v(x) = (|\chi_{v,i}(x)|_v)_{1\leq i\leq r_v}.$$

Pour $v=\infty$, π_∞ induit un isomorphisme $\overline{\pi_\infty} : T(\mathbb{R})/K_{T,\infty}^m \simeq (\mathbb{R}_+^\times)^{r_\infty}$. On note

$$dt_\infty := \overline{\pi_\infty}^*(\wedge_{i=1}^{r_\infty}\frac{dt_i}{t_i})$$

et ν_∞ la mesure de Haar sur $T(\mathbb{R})$ amalgamant dt_∞ et la mesure de Haar normalisée sur $K_{T,\infty}^m$.

Pour $v=p$ fini, π_p induit un isomorphisme $\overline{\pi_p} : T(\mathbb{Q}_p)/K_{T,p}^m \simeq \mathbb{Z}^{r_p}$. On note dt_p le pull-back par $\overline{\pi_p}$ de la mesure discrète sur $\mathbb{Z}^{r_p}$ et ν_p la mesure de Haar sur $T(\mathbb{Q}_p)$ amalgamant dt_p et la mesure de Haar normalisée sur $K_{T,p}^m$. On obtient ainsi une mesure de Haar

$$\nu_T := \prod_{v\in\Sigma_\mathbb{Q}} \nu_v \tag{11}$$

sur $T(\mathbb{A})$.

Soit ω une forme différentielle $\mathbb{Q}$-rationnelle non nulle de degré maximal sur T. Pour tout $v\in\Sigma_\mathbb{Q}$, ω induit une mesure de Haar $|\omega_v|$ sur $T(\mathbb{Q}_v)$. On sait alors que

$$|\omega_T| := |\omega_\infty| \prod_{p\in\Sigma_{\mathbb{Q},f}} L_p(1,T)|\omega_p| \tag{12}$$

définit une mesure de Haar dite de Tamagawa sur $T(\mathbb{A})$ indépendante du choix de ω.

Il existe alors une constante positive c_T telle que $|\omega_T| = c_T\nu_T$. On appelle alors quasi-discriminant de T le nombre

$$D_T := \frac{1}{c_T^2}. \tag{13}$$

2.1.4. *Formule de classes d'un tore algébrique.* — Soit T un tore sur $\mathbb{Q}$, Shyr [25] montre la formule de classes suivante :

$$h_T R_T = w_T\tau_T\rho_T D_T^{\frac{1}{2}}. \tag{14}$$

Dans cette formule R_T est le régulateur de T défini comme le covolume de l'image du réseau des unités $T(\mathbb{Q})\cap K_T^m$ dans $\mathbb{R}^{r_\infty-r}$ ([17], p. 131) et τ_T est le nombre de Tamagawa de T ([17], 3.5).

Quand $T=\mathrm{Res}_{F/\mathbb{Q}}\mathbb{G}_{m,F}$ pour un corps de nombres F, on vérifie que $h_T = h_F$ est le nombre de classes de F, $R_T = R_F$ est le régulateur de F, $w_T = w_F$

le nombre de racines de l'unité de F, $\rho_T = \rho_F$ est le résidu en 1 de la fonction zêta du corps F. Soit r (resp. s) le nombre de places réelles (resp. complexes à conjugaison complexe près) de F et D_F la valeur absolue du discriminant de F. Alors $D_T = \frac{D_F}{2^{2r}(2\pi)^{2s}}$. Comme dans cette situation $\tau_T = 1$, on retrouve la formule classique de la théorie des nombres :

$$h_F R_F = 2^{-r}(2\pi)^{-s} w_F \rho_F D_F^{\frac{1}{2}}.$$

2.1.5. *Minoration du nombre de classes d'un tore algébrique.* — Nous pouvons maintenant énoncer un des résultats principaux que nous avons en vue.

THÉORÈME 2.3. — *Soit d un entier positif. Il existe des constantes positives $\lambda(d)$ et $B(d)$ telles que pour tout tore algébrique T sur $\mathbb{Q}$ de dimension d et tout $\epsilon > 0$, il existe une constante positive $c(d,\epsilon)$ telle que*

$$h_T R_T \geq c(d,\epsilon) B(d)^{i(L)} D_L^{\frac{\lambda(d)}{2} - \epsilon}. \tag{15}$$

Dans cette équation L désigne le corps de décomposition de T, D_L désigne la valeur absolue du discriminant de L et $i(L)$ désigne le nombre de nombres premiers divisant D_L.

Si le régulateur R_T est trivial on obtient une minoration de h_T. On verra que c'est le cas pour les tores associés à la multiplication complexe. La constante $\lambda(d)$ est explicitée dans la définition 3.4. Elle est facilement calculable pour d fixé et on pourrait l'étudier quand d varie. Un calcul à la main donne par exemple $\lambda(1) = 1$, $\lambda(2) = \lambda(3) = \frac{2}{5}$, $\lambda(4) = \lambda(5) = \frac{4}{11}$ et $\lambda(6) = \lambda(7) = \frac{1}{5}$. Un test de parité simple dans la définition de $\lambda(n)$ montre que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\lambda(2n) = \lambda(2n+1)$.

La preuve du théorème sera donnée dans la section 3.4 et sera une conséquence simple d'estimations sur les invariants w_T, τ_T, ρ_T et D_T intervenant dans la formule de Shyr (14).

2.2. Modèles entiers des tores

2.2.1. *Conducteurs d'Artin.* — Soit p un nombre premier et K une extension finie de $\mathbb{Q}_p$. On note O_K son anneau d'entiers, m_K l'idéal maximal de O_K et $\kappa_K = \mathbb{F}_q$ son corps résiduel. On note O_K^{hs} le hensélisé stricte de O_K et K^{hs} le corps des fractions de O_K^{hs}. Soit π une uniformisante de O_K, on normalise la valuation v de K de sorte que $v(\pi) = 1$. La valeur absolue associée est alors $|\alpha| = q^{-v(\alpha)}$.

Soit L une extension finie galoisienne de K. On note $G = \mathrm{Gal}(L/K)$ le groupe de Galois de L sur K. Soit

$$\Delta_{-1} := G \supset \Delta_0 \supset \Delta_1 \supset \cdots$$

la filtration décroissante de ramification avec $\Delta_0 = I$ le sous-groupe d'inertie et Δ_1 le sous-groupe d'inertie sauvage. On note $g_i = |\Delta_i|$.

Soit V une représentation linéaire complexe de dimension finie de G, le conducteur d'Artin $a(V)$ de V est défini ([24] VI-2) par

$$a(V) := \sum_{i \geq 0} \frac{g_i}{g_0} \dim(V/V^{\Delta_i}). \tag{16}$$

Quand V est modérément ramifié $a(V) = \dim(V/V^I)$ et $a(V) = 0$ quand V est non ramifié.

2.2.2. *Modèles entiers des tores.* — On fixe encore un nombre premier p et une extension finie K de $\mathbb{Q}_p$. Soit T un tore sur K de dimension d. Il existe un modèle $\underline{T}$ de T sur O_K de type fini et lisse sur O_K tel que $\underline{T}(O_K^{hs})$ est le sous-groupe maximal borné de $T(K^{hs})$. On dira que $\underline{T}$ est le modèle de Néron-Raynaud de type fini de T. Dans cette situation $\underline{T}(O_K)$ est le compact maximal de $T(K)$.

Le modèle de Néron-Raynaud $\underline{T}^{NR}$ défini dans [4] est un modèle lisse de T sur O_K tel que $\underline{T}^{NR}(O_K^{hs}) = T(K^{hs})$. Ce modèle est localement de type fini sur O_K.

Les composantes de l'élément neutre de $\underline{T}$ et $\underline{T}^{NR}$ coïncident. On note $\underline{T}^0$ la composante de l'élément neutre de $\underline{T}$ et $\phi(\underline{T}) := \underline{T}/\underline{T}^0$ le groupe des composantes connexes de $\underline{T}$. Alors $\phi(\underline{T})$ est un schéma en groupe fini étale et est déterminé par le G-module $\phi(\underline{T})(\overline{\mathbb{Q}}_p)$.

Soit L le corps de décomposition de T. Soit

$$R := \mathrm{Res}_{L/K} T_L = \mathrm{Res}_{L/K} \mathbb{G}_{m,L}^d$$

alors

$$\underline{R} = \mathrm{Res}_{O_L/O_K} \mathbb{G}_{m,O_L}^d.$$

Le tore T se plonge canoniquement dans R.

Soit T_{O_K} la fermeture schématique de T dans $\underline{R}$, alors $\underline{T}$ s'obtient à partir de T_{O_K} par un procédé de lissage décrit dans [4], voir aussi ([5] section 3). Si l'extension L de K est modérément ramifié par le théorème 4.2 de [8], T_{O_K} est lisse et coïncide donc avec $\underline{T}$.

On aura besoin du résultat suivant dans la suite.

Proposition 2.4. — *Il existe une constante $\Phi = \Phi(d)$ (ne dépendant que de d) telle que pour tout tore T de dimension au plus d sur K*

$$|\phi(\underline{T})| \leq \Phi(d). \tag{17}$$

Comme le modèle de Néron-Raynaud (de type fini ou non) commute au changement de base non ramifié, on peut pour calculer $|\phi(\underline{T})|$ supposer que $K = K^{hs}$. Si L est le corps de décomposition de T, alors $G = \mathrm{Gal}(L/K) = I$ est le groupe d'inertie.

Soit T_s le sous-tore déployé maximal de T et T_a le tore quotient anisotrope T/T_s. D'après [5] lemme 11.2, en passant aux modèles de Néron-Raynaud de type fini sur O_K, on obtient une suite exacte courte

$$1 \to \underline{T_s} \to \underline{T} \to \underline{T_a} \to 0.$$

LEMME 2.5. — *On a l'égalité* $\phi(\underline{T}) = \phi(\underline{T}_a)$.

Preuve. Comme $\underline{T}_s = \mathbb{G}_{m,O_K}^{d'}$ pour un certain $d' \leq d$, $\underline{T}_s$ est connexe et la suite exacte précédente induit une suite exacte courte

$$1 \to \underline{T_s}^0 \to \underline{T}^0 \to \underline{T_a}^0 \to 0.$$

Le lemme s'obtient alors par une application du lemme du serpent.

On peut donc supposer que T est anisotrope sur K. Alors $X^*(T)^I = 0$ et par [29] cor. 2.19 on en déduit que $|\phi(\underline{T})| = |H^1(I, X^*(T))|$. Comme T est de dimension $d_1 \leq d$, et L est le corps de décomposition de K, $I = \mathrm{Gal}(L/K)$ agit fidèlement sur $X^*(T) = \mathbb{Z}^{d_1}$. Le nombre de sous-groupes finis de $\mathrm{GL}_{d_1,\mathbb{Z}}$ à conjugaison près est fini. Il existe donc qu'un nombre fini de possibilités pour $|H^1(I, X^*(T))|$. Ceci termine la preuve de la proposition 2.4.

2.2.3. *Mesure de Haar et conducteur d'Artin.* — On garde les notations de la section précédente. On note $\omega(\underline{T})$ la puissance extérieure maximale de l'espace des 1-formes différentielles sur $\underline{T}$. C'est un O_K-module libre de rang 1 et on choisit un générateur ω de $\omega(\underline{T})$. La mesure de Haar $|\omega|$ associée sur $T(K)$ est indépendante du choix de ω.

Fixons un isomorphisme $\phi : T_L \to \mathbb{G}_{m,L}^d$. Le modèle de Néron-Raynaud de type fini de $\mathbb{G}_{m,L}^d$ est $\mathbb{G}_{m,O_L}^d$. Soit ω_0 un générateur de $\phi^*(\omega(\mathbb{G}_{m,O_L}^d))$ et $|\omega_0|$ la mesure de Haar sur $T(L)$ associée.

Soit $a(T)$ le conducteur d'Artin de la représentation $X^*(T) \otimes \mathbb{Q}$ de $\mathrm{Gal}(L/K)$. Gross et Gan ([13] sections 4-5) montrent qu'il existe une classe $\Theta \in O_K/O_K^{\times 2}$ telle que

$$v(\Theta) = a(T)$$

et telle que $\frac{\omega_0}{\sqrt{\Theta}}$ soit rationnelle sur K. Par le théorème 7.3 de [13] on a

$$|\omega| = \frac{|\omega_0|}{|\sqrt{\Theta}|}. \tag{18}$$

La proposition 4.7 de [12] montre alors que

$$\int_{\underline{T}^0(O_F)} L_p(1,T)|\underline{\omega}| = 1. \tag{19}$$

Le résultat de Gross est en fait beaucoup plus général. Il s'applique à un groupe réductif arbitraire sur K et aux modèles entiers sur O_K donnés par la théorie de Bruhat-Tits. Dans le cas d'un tore, ces modèles coïncident avec les modèles de Néron-Raynaud de type fini. Dans les notations de [12] le motif M qui apparaît est juste $X^*(T)$ pour un tore de sorte que l'on a la relation $\det(1-F|M^\vee(1)^I) = \det(1-\frac{F}{p}|X^*(T)^I) = L_p(1,T)^{-1}$.

3. Le quasi-discriminant D_T

Soit T un tore sur $\mathbb{Q}$ de dimension d. Soit L le corps de décomposition de T. Le but de cette partie est de donner une formule fermée pour le quasi-discriminant D_T de T et de comparer D_T à la valeur absolue du discriminant D_L de L.

Soit $\underline{T}$ le modèle de Néron-Raynaud de type fini de T sur $\mathbb{Z}$. Pour tout nombre premier p, $\underline{T}_p := \underline{T}_{\mathbb{Z}_p}$ est le modèle de Néron-Raynaud de type fini de $T_{\mathbb{Q}_p}$ sur $\mathbb{Z}_p$ décrit dans la section 2.2.2. Soit $\phi_{T,p} := \phi(\underline{T}_p)$ le groupe des composantes de $\underline{T}_p$. On note $a(T)$ le conducteur d'Artin de $X^*(T)\otimes\mathbb{Q}$. Donc $a(T) = \prod_p p^{a_p(T)}$ où $a_p(T)$ est le conducteur d'Artin de $X^*(T_{\mathbb{Q}_p})\otimes\mathbb{Q}$.

Soit $\mathbb{S} := \mathrm{Res}_{\mathbb{C}/\mathbb{R}}\mathbb{G}_{m,\mathbb{C}}$ le tore de Deligne. On a une décomposition en produit direct sous la forme

$$T_{\mathbb{R}} = \mathbb{G}_{m,\mathbb{R}}^a \times \mathbb{S}^b \times SO(2)_{\mathbb{R}}^c \tag{20}$$

avec $\dim(T) = a + 2b + c$ ([28], p. 106).

3.1. Une formule fermée pour D_T. — Le but de cette section est de montrer la formule fermée suivante pour le quasi-discriminant D_T de T.

Proposition 3.1. — *On a*

$$D_T = \frac{a(T)}{2^{2a}(2\pi)^{2b+2c}\prod_p |\phi_{T,p}(\mathbb{F}_p)|^2}. \tag{21}$$

Preuve. Soit $\omega(\underline{T})$ la puissance extérieure maximale de l'espace des 1-formes différentielles invariantes sur $\underline{T}$. Alors $\omega(\underline{T})$ est un $\mathbb{Z}$-module libre de rang 1 dont on fixe un générateur ω.

Soit L le corps de décomposition de T. Fixons un isomorphisme $\phi : T_L \to \mathbb{G}_{m,L}^d$. Soit α_0 un générateur du $\mathbb{Z}$-module libre de rang 1 $\omega(\mathbb{G}_{m,\mathbb{Z}}^d)$ et $\omega_0 := \phi^*\alpha_0$. D'après [13] cor. 3.7, il existe $D \in \mathbb{Q}^*/\mathbb{Q}^{*2}$ tel que $\frac{\omega_0}{\sqrt{D}}$ est rationnel sur $\mathbb{Q}$.

On peut fixer un représentant D dans $\mathbb{Q}^*$ de la manière suivante. Pour tout nombre premier p, on note ω_p et $\omega_{0,p}$ les différentielles invariantes sur

$T_{\mathbb{Q}_p}$ induites par ω et ω_0. D'après les résultats de la section 2.2.3, il existe $\Theta_p \in \mathbb{Q}_p/\mathbb{Q}_p^{*2}$, vérifant $v_p(\Theta_p) = a(X^*(T_{\mathbb{Q}_p}))$, tel que

$$\frac{\omega_{0,p}}{\sqrt{\Theta_p}} \tag{22}$$

soit rationnel sur $\mathbb{Q}_p$ et tel que

$$|\omega_p| = \frac{|\omega_{0,p}|}{|\sqrt{\Theta_p}|}.$$

Comme $\frac{\omega_{0,p}}{\sqrt{D}}$ et $\frac{\omega_{0,p}}{\sqrt{\Theta_p}}$ sont deux formes différentielles invariantes rationnelles sur $T_{\mathbb{Q}_p}$ on voit que $v_p(D) - v_p(\Theta_p)$ est pair. En changeant D en Dp^{2k} pour un k convenable, on peut supposer que

$$v_p(D) = v_p(\Theta_p) = a(X^*(T_{\mathbb{Q}_p})).$$

On peut donc en notant $a_p = a(X^*(T_{\mathbb{Q}_p}))$ choisir D au signe près sous la forme

$$D = \epsilon(T) \prod_p p^{a_p} = \epsilon(T) a(T)$$

avec $\epsilon(T) = \pm 1$.

On suppose dans la suite que D est ainsi normalisé. Le signe $\epsilon(T)$ dépend de $T_{\mathbb{R}}$. Un calcul direct utilisant la décomposition (20) de $T_{\mathbb{R}}$ montre que $i^{b+c}\omega_{0,\infty}$ est rationnelle sur $T_{\mathbb{R}}$. Comme la forme différentielle $\frac{\omega_{0,\infty}}{\sqrt{\epsilon(T)}}$ est aussi rationnelle sur $T_{\mathbb{R}}$, on en déduit que $\epsilon(T) = (-1)^{b+c}$.

Un choix normalisé de D est donc

$$D = (-1)^{b+c} a(T).$$

Soit $\nu_T = \nu_\infty \prod_p \nu_p$ la mesure de Haar sur $T(\mathbb{A}_f)$ définie dans la section 2.1.3. En utilisant la forme invariante $\mathbb{Q}$-rationnelle $\frac{\omega_0}{\sqrt{D}}$ dans la définition de $|\omega_T|$ et l'équation (22), on trouve

$$|\omega_T| = \frac{|\omega_{0,\infty}|}{\sqrt{a(T)}} \prod_p |\omega_p| L_p(1, T)$$

et par définition

$$\nu_T = \sqrt{D_T} |\omega_T|.$$

Un calcul simple aux places réelles utilisant la décomposition (20) de $T_{\mathbb{R}}$ montre que

$$|\omega_{0,\infty}| = 2^a (2\pi)^{c+b} \nu_{T,\infty}.$$

Fixons un compact U_∞ de $T(\mathbb{R})$ d'intérieur non vide et suffisamment régulier. Alors

$$\int_{U_\infty \times \prod_p K_{T,p}^m} |\omega_T| = \frac{1}{2^a (2\pi)^{b+c}\sqrt{D_T}} \int_{U_\infty} |\omega_{0,\infty}|$$
$$= \int_{U_\infty} \frac{|\omega_{0,\infty}|}{\sqrt{a(T)}} \prod_p \int_{K_{T,p}^m} |\omega_{T,p}| L_p(T,1).$$

Par définition du modèle de Néron-Raynaud de type fini de T, $\underline{T}_p(\mathbb{Z}_p) = K_{T,p}^m$ pour tout premier p.

On en déduit que

$$\int_{K_{T,p}^m} |\omega_{T,p}| L_p(T,1) = |\phi_{T,p}(\mathbb{F}_p)| \int_{\underline{T}_p^0(\mathbb{Z}_p)} |\omega_{T,p}| L_p(T,1) = |\phi_{T,p}(\mathbb{F}_p)|$$

en utilisant l'équation (19). Ceci termine la preuve de la proposition 3.1

3.2. Minoration de $a(T)$ et de D_T. — On conserve les notations de la section 3. Le but de cette partie est de montrer les minorations suivantes du conducteur d'Artin $a(T)$ et du quasi-discriminant D_T de T.

PROPOSITION 3.2. — *Soit d un entier positif. Il existe de constantes $c(d)$, $c'(d)$, $A(d)$ et $\lambda(d)$ strictement positives telles que pour tout tore T sur $\mathbb{Q}$ de dimension d dont le corps de décomposition est L, on a*

$$a(T) \geq c(d) D_L^{\lambda(d)} \tag{23}$$

et

$$D_T \geq c'(d) A(d)^{i(L)} D_L^{\lambda(d)}. \tag{24}$$

Dans cette dernière équation $i(L)$ désigne le nombre de nombres premiers divisant D_L.

La minoration de D_T est une conséquence de la minoration de $a(T)$, de la formule fermée pour D_T donnée à la proposition 3.1 et de la majoration du cardinal du groupe des composantes du modèle de Néron $\underline{T}$ de T obtenue à la proposition 2.4. On peut prendre $A(d) = \frac{1}{\Phi(d)^2}$ (avec les notations de 2.4) et $c'(d) = \frac{c(d)}{(2\pi)^{2d}}$.

Les constantes $\lambda(d)$ et $c(d)$ sont explicitées dans les définitions 3.4 et 3.6.

On utilisera essentiellement le lemme élémentaire suivant.

LEMME 3.3. — *Soit X un $\mathbb{Q}$-vectoriel de dimension d muni d'une action fidèle ρ d'un groupe cyclique $I = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ pour un entier $n = \prod p^{n_p}$. Soit $\phi(x)$ la fonction indicatrice d'Euler. Le nombre n_ρ de caractère non triviaux de I intervenant dans $X \otimes \mathbb{C}$ vérifie*

$$n_\rho \geq \sum_{p|n} \phi(p^{n_p}) - \epsilon(n)$$

avec $\epsilon(n) = 0$ si $n_2 \neq 1$ ou $n = 2$ et $\epsilon(n) = 1$ sinon. En particulier $\sum_{p|n} \phi(p^{n_p}) - \epsilon(n) \leq d$.

Preuve. Soit σ un générateur de I. Alors $\rho(\sigma)$ est diagonalisable dans $X \otimes \mathbb{C}$. Les valeurs propres de σ sont des racines n-ièmes de l'unité. Soit $d_1, d_2, \ldots, d_r$ les ordres des valeurs propres de σ. Comme l'action est fidèle les d_i ne sont pas égaux à 1. Si $(x_1, \ldots, x_s)$ est un s-tuple d'entiers on note $p(x_1, \ldots, x_s)$ le plus petit commun multiple des x_i. Comme σ est d'ordre n, on a $p(d_1, \ldots, d_r) = n$. Si σ admet une valeur propre d'ordre d_i, l'irréductibilité des polynômes cyclotomiques sur $\mathbb{Q}$ montre que σ admet toutes les racines primitives d_i-ième de l'unité comme valeurs propres. Comme les valeurs propres de σ déterminent des caractères de I intervenant dans $X \otimes \mathbb{C}$, on en déduit que

$$n_\rho \geq \sum_{i=1}^{r} \phi(d_i).$$

Il suffit donc de minorer le second membre de cette inégalité par

$$\sum_{p|n} \phi(p^{n_p}) - \epsilon(n)$$

quand $(d_1, \ldots, d_r)$ varie parmi les diviseurs de n tels que $p(d_1, \ldots, d_r) = n$.

On note v_p la valuation p-adique normalisée sur $\mathbb{Q}$. Pour tout nombre premier p divisant n, il existe un entier $i \in \{1, \ldots, r\}$ tel que $v_p(d_i) = v_p(n)$. En divisant les entiers d_i convenablement, on peut supposer que pour tout p divisant n et pour tout $i \in \{1, \ldots, r\}$, $v_p(d_i) = v_p(n)$ ou $v_p(d_i) = 0$ et qu'il existe un indice i tel que $v_p(d_i) = v_p(n)$. On obtient alors le résultat en remarquant que si a et b sont des entiers premiers entre eux $\phi(ab) = \phi(a)\phi(b) \geq \phi(a) + \phi(b)$ dès que $\min(a, b) \geq 3$ et que si a est impair $\phi(2a) = \phi(a) = \phi(a) + \phi(2) - 1$.

DÉFINITION 3.4. — *On définit les fonctions sur $\mathbb{N}^*$,*

$$\psi(s) := \max\{n = \prod p^{n_p} \in \mathbb{N} |\ \sum_{p|n} \phi(p^{n_p}) - \epsilon(n) \leq s\}$$

et

$$\lambda(s) := \min_{n = \prod p^{n_p} \leq \psi(s)} \frac{\sum_{p|n} \phi(p^{n_p}) - \epsilon(n)}{n - 1}. \tag{25}$$

LEMME 3.5. — *Soit T un tore sur $\mathbb{Q}$ de dimension d, L son corps de décomposition et $R_L := \mathrm{Res}_{L/\mathbb{Q}}\mathbb{G}_{m,L}$. Soit $\mathfrak{p}$ une place de L divisant un premier p. On suppose l'extension locale $L_\mathfrak{p}/\mathbb{Q}_p$ modérément ramifiée. On note $D_\mathfrak{p}$ et $I_\mathfrak{p}$ le groupe de décomposition et le groupe d'inertie en $\mathfrak{p}$. Soit $a_p(T)$ et $a_p(R_L)$ les conducteurs d'Artin des $D_\mathfrak{p}$-modules $X^*(T_{\mathbb{Q}_p})$ et $X^*(R_{L,\mathbb{Q}_p})$ respectivement. Alors*

$$a_p(T) \geq \lambda(d) a_p(R_L). \tag{26}$$

Preuve. Soit χ_T le caractère du $I_\mathfrak{p}$-modules $X^*(T_{\mathbb{Q}_p}) \otimes \mathbb{C}$ et χ_R celui de $X^*(R_{L,\mathbb{Q}_p}) \otimes \mathbb{C}$. Soit $a_{I_\mathfrak{p}}$ le caractère de la représentation d'Artin de $I_\mathfrak{p}$. Si on note $< , >_{I_\mathfrak{p}}$ le produit scalaire hermitien canonique sur l'espace des fonctions centrales sur $I_\mathfrak{p}$, alors d'après Serre ([24], VI-2),

$$a_p(T) =< \chi_T, a_{I_\mathfrak{p}} >_{I_\mathfrak{p}}, \quad \text{et } a_p(R_L) =< \chi_R, a_{I_\mathfrak{p}} >_{I_\mathfrak{p}} .$$

Comme l'extension $L_\mathfrak{p}/\mathbb{Q}_p$ est modérément ramifiée le groupe d'inertie $I_\mathfrak{p}$ est cyclique d'ordre $e_\mathfrak{p}$. Comme L est le corps de décomposition de T, $Gal(L/\mathbb{Q})$ agit fidèlement sur $X^*(T)$. Comme $I_\mathfrak{p}$ est un sous-groupe de $Gal(L/\mathbb{Q})$, il agit aussi fidèlement sur $X^*(T)$. Dans cette situation $a_{I_\mathfrak{p}}$ est le caractère de la représentation d'augmentation de $I_\mathfrak{p}$ ([24], prop. 2, p. 108). Par définition $a_{I_\mathfrak{p}}$ est donc la somme des caractères non triviaux de $I_\mathfrak{p} = \mathbb{Z}/e_\mathfrak{p}\mathbb{Z}$.

On en déduit que $a_p(T)$ est minoré par le nombre de caractères distincts non triviaux de $I_\mathfrak{p}$ apparaissant dans $X^*(T) \otimes \mathbb{C}$. Le résultat est alors une application du lemme 3.3 et du fait que $a_p(R_L) = e_\mathfrak{p} - 1$.

DÉFINITION 3.6. — *Soit s un entier, on note $\alpha(s)$ l'ordre maximal d'un sous-groupe fini de $\mathrm{GL}_s(\mathbb{Q})$.*

On définit alors

$$c(s) = \prod_{p \leq s+1} \frac{1}{p^{\alpha(s)^2}}. \tag{27}$$

Des bornes très précises sur $\alpha(s)$ sont données dans [11] *et* [10].

On peut maintenant démontrer la proposition 3.2 avec les constantes $\lambda(d)$ et $c(d)$ de 3.4 et 3.6. D'après [24] VI-3, on a

$$a(T) = \prod_p p^{a_p(T)} \text{ et } a(R_L) = \prod_p p^{a_p(R_L)}.$$

Si $p > d+1$, soit $\mathfrak{p}$ une place de L au dessus de p. Le groupe d'inertie $I_\mathfrak{p}$ agit fidèlement dans $X^*(T)$ car L est le corps de décomposition de T. Le lemme 3.3 assure qu'il n'y a pas de sous-groupes cycliques d'ordre p dans $I_\mathfrak{p}$. La ramification en $\mathfrak{p}$ est donc modérée et par le lemme 3.5

$$p^{a_p(T)} \geq (p^{a_p(R_L)})^{\lambda(d)}.$$

Soit p un nombre premier plus petit que $d+1$. Comme L est le corps de décomposition de T, le groupe de Galois G agit fidèlement dans $X^*(T)$. En particulier $\dim(X^*(R_L)) = [L:\mathbb{Q}] = |G| \leq \alpha(d)$ et une majoration simple du conducteur d'Artin utilisant la définition donne $a_p(R_L) \leq \alpha(d)^2$.

Comme $a_p(T) \geq 0$ et $\lambda(d) \leq 1$ on obtient

$$p^{a_p(T)} \geq \frac{1}{p^{\alpha(d)^2}} (p^{a_p(R_L)})^{\lambda(d)}.$$

Comme $D_L = a(R_L)$, on finit la preuve de la proposition 3.2 en combinant les résultats obtenus pour les différents nombres premiers p.

3.3. Les invariants cohomologiques de T. — On garde les notations précédentes, en particulier T est un tore sur $\mathbb{Q}$ de dimension fixée r. Le but de cette partie est de donner des bornes uniformes pour la taille du nombre de Tamagawa τ_T de T. Les bornes que nous avons en vue seront des conséquences immédiates de l'interprétation cohomologique de cette quantité.

On utilise les notations de l'appendice de Kottwitz et Shelstad [15] concernant la dualité de Tate-Nakayama. On note donc pour tout tore S sur $\mathbb{Q}$

$$H^i(\mathbb{A}, S) := H^i(\mathbb{Q}, S(\overline{\mathbb{A}}))$$
$$H^i(\mathbb{A}/\mathbb{Q}, S) := H^i(\mathbb{Q}, S(\overline{\mathbb{A}})/S(\overline{\mathbb{Q}}))$$

et $\ker^i(\mathbb{Q}, S)$ le noyau de l'application naturelle $H^i(\mathbb{Q}, S) \to H^i(\mathbb{A}, S)$. On note $\tilde{H}^i(.,.)$ les groupe de cohomologie modifiés à la Tate correspondants.

3.3.1. *Estimation de τ_T.* — Le but de cette partie est de montrer l'estimation de τ_T suivante.

Proposition 3.7. — *Il existe des constantes positives $c_1(r)$, et $c_2(r)$ ne dépendant que de r telles que pour tout tore T sur $\mathbb{Q}$ de dimension r :*

$$c_1(r) \leq \tau_T \leq c_2(r). \tag{28}$$

D'après le résultat principal de Ono [18] on a

$$\tau_T = \frac{|H^1(\mathbb{Q}, X^*(T))|}{|\ker^1(\mathbb{Q}, T)|}. \tag{29}$$

On a $H^1(\mathbb{Q}, X^*(T)) = H^1(\mathbb{Q}, \mathbb{Z}^r)$ et $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ opère via un sous-groupe fini G de $\mathrm{GL}_r(\mathbb{Z})$. En utilisant la suite d'inflation-restriction ([24] VII-6), on vérifie que $H^1(\mathbb{Q}, \mathbb{Z}^r) = H^1(G, \mathbb{Z}^r)$. A r fixé, il n'y a, à isomophisme près, qu'un nombre fini de choix pour G. On en déduit une borne uniforme pour $|H^1(\mathbb{Q}, X^*(T))|$ en fonction de r.

Par ailleurs, un calcul de cohomologie galoisienne utilisant la dualité de Nakayama-Tate ([18] 2.2–2.3) montre que $\ker^1(\mathbb{Q}, T)$ est un quotient de $H^2(\mathbb{Q}, X^*(T))$. Comme précédemment on vérifie que $H^2(\mathbb{Q}, X^*(T)) =$

$H^2(G,\mathbb{Z}^r)$ pour un sous-goupe G de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$. On en déduit que $|\ker(1(\mathbb{Q},T)|$ est aussi uniformément borné en fonction de r. Ceci termine la preuve de la proposition au vu de l'expression de τ_T dans l'équation (29).

3.4. Preuve du théorème 2.3. — Il s'agit juste de collecter les résultats des parties précédentes en partant de la formule de classe de Shyr pour T donnée à l'équation (14) :

$$h_T R_T = w_T \tau_T \rho_T D_T^{\frac{1}{2}}.$$

On remarque que $w(T) \geq 1$ car c'est un entier. On pourrait borner $w(T)$ en fonction de d mais nous n'en n'auront pas d'usages. Les minorations de $\rho(T)$ (prop. 2.1), de D_T (prop. 3.2) et de τ_T (prop. 3.7) permettent de finir la minoration de $h_T R_T$ recherchée au théorème 2.3.

4. Connexité du noyau des morphismes de réciprocités

4.1. Corps de multiplication complexe et types CM. — Soit E un corps CM de degré $2g$ sur $\mathbb{Q}$. Soit F son sous-corps totalement réel maximal. On note E^c (resp. F^c) la clôture galoisienne de E (resp. F) et $\rho \in \mathrm{Aut}(E^c/\mathbb{Q})$ la conjugaison complexe. On pose

$$J = \mathrm{Hom}(E,\overline{\mathbb{Q}}) = \mathrm{Gal}(E^c/E)\backslash\mathrm{Gal}(E^c/\mathbb{Q})$$

et on fixe un type CM $\Sigma \subset J$ de sorte que

$$J = \Sigma \cup \Sigma^\rho \text{ et } \Sigma \cap \Sigma^\rho = \varnothing.$$

On notera contrairement aux parties précédentes $\mathfrak{g} := \mathrm{Gal}(E^c/\mathbb{Q})$ réservant la lettre G pour les groupes réductifs intervenants dans la suite. Le groupe de Galois $\mathfrak{g}$ opère à droite transitivement et fidèlement sur J. On indexe les éléments de Σ par les indices $\{1,\dots,g\}$ et ceux de Σ^ρ par les indices $\{-1,\dots,-g\}$ avec la convention que $k.\rho = -k$ pour tout $k \in \{1,\dots,g\}$. Soit $C_g := (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^g \rtimes S_g$ le centralisateur de ρ dans $S_J = S_{2g}$. Par convention C_g et S_g opèrent à droite sur J par permutation. Pour $\sigma \in S_g$ et tout $k \in \{1,\dots,g\}$ on a $k.\sigma = \sigma^{-1}(k)$ et $(-k).\sigma = -\sigma^{-1}(k)$.

On dispose du résultat suivant de Dodson ([7] 1.1).

Proposition 4.1. — (a) *On a une suite exacte*

$$1 \to (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^v \to \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}_0 \to 1.$$

Dans cette suite $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^v$ *est identifié au sous-groupe* $\mathrm{Gal}(E^c/F^c)$ *de* $\mathfrak{g}$ *et* $\mathfrak{g}_0 := \mathrm{Gal}(F^c/\mathbb{Q})$. *On a toujours* $v \geq 1$ *car le groupe engendré par* ρ *est un sous-groupe de* $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^v$.

(b) *Le groupe* $\mathfrak{g}$ *muni de son action sur* J *s'identifie à un sous-groupe de* C_g. *Le groupe* $\mathfrak{g}_0$ *s'identifie à un sous-groupe de* S_g, *il agit transitivement sur*

$\{1,\dots,g\}$ et il agit sur le sous-groupe $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^v \subset (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^g$ de C_g par permutation des coordonnées.

(c) *On peut écrire*

$$\mathfrak{g} = \cup_{\sigma\in\mathfrak{g}_0}(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^v(s(\sigma),\sigma) \subset C_g \tag{30}$$

où $(s(\sigma),\sigma)$ est un relévement arbitraire de σ.

Soit $j : (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^g \to (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^g/(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^v$ la surjection canonique. Alors $js : \mathfrak{g}_0 \to (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^g/(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^v$ est un 1-cocycle.

On note $\mathfrak{h} = \mathrm{Gal}(E^c/E)$ et on pose

$$\tilde{\Sigma} := \{\alpha \in \mathfrak{g}, \mathfrak{h}\alpha \in \Sigma\} = \sqcup_{i=1}^{g} \mathfrak{h}\alpha_i.$$

On rappelle que le type CM Σ est dit primitif si il ne provient pas d'un type CM sur un sous-corps CM stricte de E. Si Σ est primitif alors

$$\mathfrak{h} = \{\alpha \in \mathfrak{g}, \alpha\tilde{\Sigma} = \tilde{\Sigma}\}.$$

Soit

$$\mathfrak{h}' := \{\alpha \in \mathfrak{g}, \tilde{\Sigma}\alpha = \tilde{\Sigma}\} := \{\alpha \in \mathfrak{g}, \alpha\tilde{\Sigma}' = \tilde{\Sigma}'\}$$

avec $\tilde{\Sigma}' := \tilde{\Sigma}^{-1} = \{x^{-1},\ x \in \tilde{\Sigma}\}$. Soit E' le sous-corps de E^c attaché à $\mathfrak{h}'$ par la correspondance de Galois. Alors E' est le corps reflex de (E,Σ), c'est un corps CM. On pose $[E' : \mathbb{Q}] := 2g'$. Soit Σ' l'image de $\tilde{\Sigma}'$ dans

$$\mathrm{Hom}(E', \overline{\mathbb{Q}}) = \mathfrak{h}'\backslash\mathfrak{g}.$$

Alors Σ' est un type CM primitif sur E'. On dit que (E',Σ') est le dual de (E,Σ). Si (E,Σ) est primitif, alors (E,Σ) est le dual de (E',Σ').

Dans la description (30) de $\mathfrak{g}$ comme sous-groupe de C_g, le fixateur de Σ est le sous-groupe des éléments de la forme $(1,\sigma)$ de $\mathfrak{g}$. Soit

$$\mathfrak{g}_\Sigma := \{\sigma \in \mathfrak{g}_0,\ s(\sigma) \in (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^v\}.$$

Alors $\mathfrak{h}' = \{(1,\sigma),\ \sigma \in \mathfrak{g}_\Sigma\}$ En particulier on a

$$[E' : \mathbb{Q}] = 2g' = 2^v[\mathfrak{g}_0 : \mathfrak{g}_\Sigma].$$

Remarque 4.2. — *Si on change le type CM Σ en $\Sigma.b$ pour $b \in (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^g$ cela revient à conjuguer $\mathfrak{g}$ dans S_{2g} par b. On change alors la section $s(\sigma)$ par multiplication par le cobord $b\sigma(b)(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^v$ dans la description de $\mathfrak{g}$ comme sous-groupe de C_g de la proposition 4.1–c.*

On utilisera le résultat suivant de Dodson ([7] 2.1.2).

Proposition 4.3. — *Soit E un corps CM de degré $2g$ sur $\mathbb{Q}$. Le cocycle $js : \mathfrak{g}_0 \to (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^g/(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^v$ de 4.1–c est trivial si et seulement si il existe un type CM, Σ_1 sur E dont le corps reflex E_1 est de degré 2^v sur $\mathbb{Q}$.*

Remarquer que la nullité du cocycle js est indépendante du choix d'un type CM Σ au vu de la remarque précédente. Noter que dans ce cas l'image de js dans $H^2(\mathfrak{g}_0,(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^v) = Ext^1(\mathfrak{g}_0,(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^v)$ est nul. La suite exacte de la proposition 4.1-a est alors scindée. Nous utiliserons la proposition précédente dans le cas suivant

LEMME 4.4. — *Soit E un corps CM de degré $2g$ contenant un corps quadratique imaginaire E'. Alors $v=1$ et le cocycle js est trivial.*

Dans cette situation $E=FE'$ et $E^c=F^cE'$ donc $[E^c:F^c]=2$ et $v=1$. Soit Σ' un type CM sur E' et Σ son extension à E. Avec les notations précédentes $\tilde{\Sigma}=\mathfrak{h}=\tilde{\Sigma}^{-1}$. On en déduit que E' est le corps reflex de (E,Σ) et que le cocycle js est trivial, d'après la proposition 4.3.

4.2. Tores de multiplication complexe, le cas du groupe symplectique. — Fixons la forme bilinéaire alternée ψ_g de matrice

$$J_g=\begin{pmatrix} 0 & -1_g \\ 1_g & 0\end{pmatrix}$$

sur $\mathbb{Q}^{2g}$ et notons $G=\mathrm{GSp}_{2g}$ le groupe de similitudes symplectiques associé. On garde les notations de la section précédente concernant le corps de multiplication complexe E. On peut trouver un élément $\iota\in E$ tel que $\iota^\rho=-\iota$. Ainsi E est muni de la forme $\mathbb{Q}$-linéaire alternée

$$<x,y>=\mathrm{Tr}_{E/\mathbb{Q}}(x^\rho\iota y).$$

On peut alors fixer un isomorphisme symplectique $(E,<\ ,\ >)\simeq(\mathbb{Q}^{2g},\psi_g)$.

Soit $R_E:=\mathrm{Res}_{E/\mathbb{Q}}\mathbb{G}_{m,E}$. L'espace des caractères $X^*(R_E)$ s'écrit alors

$$X^*(R_E)=\oplus_{\phi\in\mathrm{Hom}(E,\overline{\mathbb{Q}})}\mathbb{Z}\phi=\oplus_{\alpha\in\mathfrak{h}\backslash\mathfrak{g}}\mathbb{Z}\mathfrak{h}\alpha.$$

Il sera utile de l'écrire de la manière suivante qui fait intervenir le type CM Σ :

$$X^*(R_E)=\oplus_{i=1}^g\mathbb{Z}[\alpha_i]\oplus\oplus_{i=1}^g\mathbb{Z}[\overline{\alpha_i}]=\oplus_{i=1}^g\mathbb{Z}[\alpha_i]\oplus\oplus_{i=1}^g\mathbb{Z}[\alpha_{-i}]$$

où l'on a noté $[\alpha_i]$ l'élément $\mathfrak{h}\alpha_i$ du type CM $\Sigma\subset\mathrm{Hom}(E,\overline{\mathbb{Q}})$ et $[\alpha_{-i}]=[\overline{\alpha_i}]$ l'élément $\mathfrak{h}\alpha_i\rho$ de Σ^ρ. On a une description identique pour le réseau $X_*(R_E)$ des cocaractères de R_E.

Soit U_E le sous-tore de R_E défini par

$$U_E:=\{x\in R_E, xx^\rho=1\}.$$

Soit GU_E le sous-tore de R_E en gendré par U_E et $\mathbb{G}_{m,\mathbb{Q}}\subset R_E$. Le tore GU_E s'identifie à un tore maximal de G.

La théorie de Deligne construit un paramètre de Hodge $h:\mathbb{S}\to R_E\otimes\mathbb{R}$ se factorisant par $GU_E\otimes\mathbb{R}\subset G_{\mathbb{R}}$.

Le module des cocaractères $X_*(GU_E)$ de GU_E est le sous-module de $X_*(R_E)$ qui se décrit par

$$X_*(GU_E) = \left\{ \sum_{i=1}^{g} n_i[\alpha_i] + n_{-i}[\alpha_{-i}],\ n_i + n_{-i} = n_j + n_{-j} \text{ pour tout } i,\, j \right\}.$$

Le cocaractère $\mu = \mu_h$ de GU_E associé au paramètre de Hodge est dans cette description $\mu = \sum_{i=1}^{g}[\alpha_i]$. Si on note $e_i = [\alpha_i] - [\alpha_{-i}]$ on a

$$X_*(GU_E) = \mathbb{Z}\mu \oplus \oplus_{i=1}^{g}\mathbb{Z}e_i.$$

On rappelle que E' désigne le corps reflex de (E, Σ) et que $\mathfrak{h}'$ est le sous-groupe de $\mathfrak{g}$ associé à E' par la correspondance de Galois. Le morphisme de réciprocité

$$r : R_{E'} \to R_E \tag{31}$$

se factorise par GU_E. Il se décrit au niveau des cocaractères de la manière suivante.

$$X_*(r) : X_*(R_{E'}) = \oplus_{\beta \in \mathfrak{h}'\backslash\mathfrak{g}} \mathfrak{h}'\beta \longrightarrow X_*(R_E)$$

$$\mathfrak{h}'\beta \mapsto \sum_{i=1}^{g} \mathfrak{h}\alpha_i\beta = \sum_{i=1}^{g} \mathfrak{h}\alpha_{i.\beta} = \sum_{i=1}^{g} [\alpha_{i.\beta}]$$

où β agit sur $\{\pm 1, \pm 2, \ldots, \pm g\}$ via la description de $\mathfrak{g}$ donné à la proposition 4.1.

On définit le sous-module $L_\mu := X_*(r)(X_*(R'_E))$ de $X_*(GU_E)$. Soit $L'_\mu := (L_\mu \otimes \mathbb{Q}) \cap X_*(GU_E)$. Alors L'_μ est un sous-$\mathbb{Z}$-module galoisien saturé de $X_*(GU_E)$. Le sous-tore $M = MT(\mu)$ de GU_E associé à L'_μ est le groupe de Mumford-Tate de μ (ou de h). Par définition M est le plus petit $\mathbb{Q}$-sous-tore de GU_E tel que $\mu_{\mathbb{C}}$ se factorise par $M_{\mathbb{C}}$. Le lemme suivant est alors une conséquence de l'équivalence de catégories entre la catégorie des tores algébriques et celle des $\mathbb{Z}$-modules galoisiens libres de rang fini :

LEMME 4.5. — *Le morphisme de réciprocité r est à noyau connexe si et seulement si $L_\mu = L'_\mu$.*

Voici un critère simple qui assure la connexité de r.

PROPOSITION 4.6. — *Si dans la suite exacte*

$$1 \to (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^v \to \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}_0 \to 1$$

de la proposition 4.1 on a $v = g$, alors $L_\mu = X_*(GU_E)$ et r est à noyau connexe.

Preuve. Dans cette situation le groupe $\mathfrak{g}$ contient les transpositions $\tau_k = (k, -k)$ pour $k \in \{1, \dots, g\}$. On en déduit que L_μ contient $\mu - \mu.\tau_k = e_k$. Donc $L_\mu = L'_\mu = X_*(GU_E)$ et r est à noyau connexe.

Ce résultat précise un énoncé de Clozel et du premier auteur ([6], sec. 3.2) où le cas où $\mathfrak{g} = C_g$ est obtenu. Noter que ce dernier cas, appelé "Galois générique" dans [6] est le cas générique comme expliqué dans ([6], sec. 2).

PROPOSITION 4.7. — *Si $g \leq 3$ le morphisme de réciprocité r est à noyau connexe.*

Preuve. Le cas $g = 1$ est bien connu. On a alors $E = E'$ et r est un isomorphisme.

Dans le cas $g = 2$, si $v = 2$, on peut appliquer la proposition 4.6. On peut donc supposer que $v = 1$. Le groupe $\mathfrak{g}_0 = S_2$ est engendré par la transposition $\sigma = (1, 2)$. Le choix de s n'étant bien défini qu'à multiplication par ρ près, on peut supposer que $s(\sigma) = \mathrm{Id}$ où que $s(\sigma)$ est la transposition $(1, -1)$. Dans le premier cas $L_\mu = \mathbb{Z}\mu \oplus \mathbb{Z}(e_1 + e_2) = L'_\mu$ et dans le second $L_\mu = X_*(GU_E)$. Noter que si le type CM Σ est primitif, le résultat de Ribet ([23], 3.5) nous assure que le rang de L_μ est 3 donc que le premier cas n'intervient pas.

Pour $g = 3$ on peut comme précédemment supposer que $1 \leq v < 3$. Le cas $v = 2$ est en fait exclu. En effet $\mathfrak{g}_0$ est soit S_3 soit le groupe alternée A_3. Dans tout les cas il contient le trois-cycle $\sigma_0 = (1, 2, 3)$. Les seuls points fixes de σ_0 dans son action sur $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^3$ sont Id et ρ. Comme σ_0 préserve $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^v$ on trouve que $v = 2$ est impossible. Pour $g = p$ un nombre premier arbitraire cet argument montre que p divise $2^v - 2$.

Quand $v = 1$, $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^v = \{\mathrm{Id}, \rho\}$ est central dans $\mathfrak{g}$. dans cette situation la suite exacte

$$1 \to \{\mathrm{Id}, \rho\} \to \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}_0 \to 1$$

est scindé car ρ est de signature -1 donc $\mathfrak{g} \cap A_{2g}$ fournit un scindage. La sous-extension de E^c associée à $\mathfrak{g} \cap A_{2g}$ est un corps quadratique imaginaire $\mathbb{Q}[\sqrt{-\delta}]$ et intervient comme un corps reflex de E pour un type CM de E. Par le corollaire 2.1.2 de [7] on en déduit que le cocycle $js : \mathfrak{g}_0 \to (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^g/\{\mathrm{Id}, \rho\}$ de la proposition 4.1 est trivial. Il existe donc $b \in (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^g$ tel que $js(\sigma) = b\sigma(b)\{\mathrm{Id}, \rho\}$ pour tout $\sigma \in \mathfrak{g}_0$. On peut alors choisir $s(\sigma) = b\sigma(b)$.

Si $b \in \{\mathrm{Id}, \rho\}$, $s(\sigma) = \mathrm{Id}$ pour tout $\sigma \in \mathfrak{g}_0$ alors L_μ est engendré par μ et μ^ρ. On en déduit que $L_\mu = \mathbb{Z}\mu \oplus \mathbb{Z}(e_1 + e_2 + e_3) = L'_\mu$. Dans cette situation le corps reflex est $\mathbb{Q}[\sqrt{-\delta}]$ et le type CM Σ n'est pas primitif par le résultat de Ribet ([23], 3.5).

Si $b \notin \{\mathrm{Id}, \rho\}$, $(s(\sigma), \sigma)$ agit sur μ via l'action de $b.\sigma^{-1}(b)$. On remarque $b\sigma_0^{-1}(b)$ est une permutation paire non triviale. C'est donc un produit de 2 transpositions. Donc $\rho b\sigma_0^{-1}(b) = (i, -i)$ pour un $i \in \{1, 2, 3\}$ et $\rho b\sigma_0^{-2}(b) =$

$\rho b\sigma_0(b) = (j,-j)$ avec $j \neq i$. On en déduit que L_μ contient $e_i = \mu - \mu.(i,-i)$ et e_j. Comme il contient $\mu - \mu.\rho = e_1 + e_2 + e_3$, on trouve que $L_\mu = X_*(GU_E)$.

REMARQUE 4.8. — *Le lecteur intéréssé par la complexité combinatoire peut regarder la table des cas possibles donné par Dodson ([7] p.23) dans le cas $g = 4$. On peut construire des exemples de corps CM de degré 8 et de type CM Σ tel que $L'_\mu/L_\mu \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Par exemple on suppose que $\mathfrak{g}_0 \simeq (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$ est le groupe de Klein engendré par les doubles transpositions et si on a une suite exacte scindé*

$$1 \to \{1,\rho\} \to \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}_0 \to 1$$

tel que $s(\sigma) = b\sigma(b)$ avec b la transposition $(1,-1)$. Un calcul simple montre que

$$L_\mu = \{\sum_{i=1}^{4} n_i e_i + r\mu |\ \sum_{i=1}^{4} n_i \in 2\mathbb{Z}\}$$

qui est d'indice 2 dans $L'_\mu = X_*(GU_E)$. En particulier r n'est pas à noyau connexe dans ce cas.

La proposition suivante montre que l'indice de L_μ dans L'_μ peut être divisible par des entiers arbitrairement grands :

PROPOSITION 4.9. — *Soit p un nombre premier impair. Il existe un corps CM E de degré $2p$ et un type CM sur E tel que $L'_\mu/L_\mu \simeq \mathbb{Z}/(p-2)\mathbb{Z}$.*

Preuve. Soit F un corps totalement réel qui est une extension galoisienne de $\mathbb{Q}$ de groupe $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. De tels F existent comme sous-extensions convenables de corps cyclotomiques. Soit K un corps quadratique imaginaire et $E = FK$. Alors E est un corps CM qui est galoisien sur $\mathbb{Q}$ de groupe $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. Dans cette situation, pour tout type CM sur E, on a la suite exacte scindée

$$1 \to \{1,\rho\} \to \mathfrak{g} \to \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \to 1$$

et par le lemme 4.4 le cocycle $js : \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \to (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^p/\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ est trivial. Il existe donc $a \in (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^p$ tel que $s(\sigma) = a\sigma(a)$ pour tout $\sigma \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. Après renumérotation de $\{1,\ldots,p\}$, on peut supposer que $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ est engendré par le p-cycle $(1,2,\ldots,p)$. On peut par ailleurs par un choix convenable du type CM sur E utilisant la remarque 4.2 supposer que $a = (1,-1)$. Un calcul simple montre alors que L_μ est engendré par μ, $\sum_{k=1}^{p} e_k$ et les $(e_1 + e_i)$ avec $i \in \{2,\ldots,p\}$. On vérifie alors que L_μ est de rang maximal $p+1$ et que $X^*(GU_E)/L_\mu \simeq \mathbb{Z}/(p-2)\mathbb{Z}$.

5. Points spéciaux des variétés de Shimura

Dans cette section on commence à aborder le problème de minoration des orbites galoisiennes de points spéciaux dans les variétés de Shimura. On considère une donée de Shimura (G,X). On peut sans perte de généralité supposer que G est le groupe de Mumford-Tate générique de X. On peut aussi supposer que K est net. Avec ces hypothèses $\Gamma := K \cap G(\mathbb{Q})$ agit sans points fixes sur X. On peut aussi sans perte de généralité ne s'intéresser qu'à des points de la composante S de $\mathrm{Sh}_K(G,X)$ qui est l'image de $X^+ \times \{1\}$ dans $\mathrm{Sh}_K(G,X)$ (où X^+ désigne une composante connexe de X). On fixe dans la suite une représentation fidèle $G \hookrightarrow \mathrm{GL}_n$. Ceci permet de definir les modèles entiers de G et de ses sous-groupes algébriques. On suppose également que K est le produit $K = \prod_p K_p$ où K_p est un sous-groupe compact ouvert de $G(\mathbb{Q}_p)$.

Soit $(T,\{h\}) \subset (G,X)$ une donnée de Shimura spéciale telle que T est le groupe de Mumford-Tate de h. On note $K_T = K \cap T(\mathbb{A}_f)$. La non maximalité du sous-groupe compact ouvert K_T contribue à la taile de l'orbite sous Galois du point spécial $x = \overline{(h,1)}$. Nous décrivons le résultat précis dans une première partie puis nous rappelons dans une deuxième des résultats de Clozel et du premier auteur [6] concernant l'image des morphismes de réciprocité au niveau des groupes de classes sous des hypothèses de connexité du noyau du morphisme de réciprocité.

5.1. Passage de K_T^m à K_T

PROPOSITION 5.1. — *Soit (G,X) une donnée de Shimura. Soit K un sous-groupe compact ouvert de $G(\mathbb{A}_f)$.*

Soit $(T,\{h\}) \subset (G,X)$ une donnée de Shimura spéciale et L le corps de décomposition de T. On suppose que T est le groupe de Mumford-Tate de h. Soit K_T^m le sous-groupe compact ouvert maximal de $T(\mathbb{A}_f)$ et soit $K_T = K \cap T(\mathbb{A}_f)$. Soit $r\colon R_L := \mathrm{Res}_{L/\mathbb{Q}}\mathbb{G}_{m,L} \longrightarrow T$ le morphisme de réciprocité et U l'image de $r((\mathbb{A}_f \otimes L)^*)$ dans $T(\mathbb{Q})\backslash T(\mathbb{A}_f)/K_T^m$.

On a

$$|\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/L)\cdot\overline{(h,1)}| \gg B^{i(T)}|K_T^m/K_T|\cdot|U|$$

où B est une constante uniforme et $i(T)$ désigne le nombre de premiers p tels que $K_{T,p}^m \neq K_{T,p}$.

LEMME 5.2. — *Soit N le noyau du morphisme naturel*

$$T(\mathbb{Q})\backslash T(\mathbb{A}_f)/K_T \longrightarrow T(\mathbb{Q})\backslash T(\mathbb{A}_f)/K_T^m.$$

Alors

$$|N| = c|K_T^m/K_T|$$

où $c = c(x)$ est une constante uniformement bornée quand $x = \overline{(h,1)}$ varie parmi les points CM de S.

Démonstration. — Il est facile de voir que

$$N = (T(\mathbb{Q}) \cap K_T^m) \backslash K_T^m / K_T.$$

Le groupe $T(\mathbb{Q}) \cap K_T^m$ est fini d'ordre borné uniformément quand $x = \overline{(h,1)}$ varie parmi les points CM de S. En effet il existe un sous-groupe compact ouvert net K_T^{net} de $T(\mathbb{A}_f)$ d'indice uniformément borné dans K_T^m. Le groupe $K_T^{\mathrm{net}} \cap T(\mathbb{Q})$ est trivial car de torsion dans un sous-groupe compact ouvert net. On en déduit que $|T(\mathbb{Q}) \cap K_T^m| \leq |K_T^m / K_T^{\mathrm{net}}|$ donc que $T(\mathbb{Q}) \cap K_T^m$ est fini d'ordre borné uniformément. □

Démonstration. — Sans perte de généralité, on peut supposer que le groupe compact ouvert K est net.

Notons d'abord qu'il suffit de montrer que $|\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/L) \cdot \overline{(h,1)}|$ est au moins de la taille de l'image de $r((\mathbb{A}_f \otimes L)^*)$ dans $T(\mathbb{Q}) \backslash T(\mathbb{A}_f)/K_T$. En effet, supposons que ce soit le cas. On constate alors que

$$|\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/L) \cdot \overline{(h,1)}| \geq |U||\Theta|$$

où Θ est l'image de $r((\mathbb{A}_f \otimes L)^*) \cap K_T^m$ dans K_T^m/K_T. D'après [27], lemme 2.18, on a

$$|\Theta| \gg B^{i(T)} |K_T^m / K_T|$$

où B est une constante uniforme et $i(T)$ est comme dans l'énoncé.

Démontrons maintenant que $|\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/L) \cdot x|$ est au moins de la taille de l'image de $r((\mathbb{A}_f \otimes L)^*)$ dans $T(\mathbb{Q}) \backslash T(\mathbb{A}_f)/K_T$. L'inclusion de données de Shimura $(T, \{h\}) \subset (G, X)$ induit un morphisme de variétés de Shimura :

$$\mathrm{Sh}_{K_T}(T, \{h\}) \longrightarrow \mathrm{Sh}_K(G, X).$$

Ce morphisme est défini sur le composé du corps reflexe de $(T, \{h\})$ et celui de (G, X). De plus, par le lemme 2.2 de [27], ce morphisme est injectif. On en déduit que la taille de l'orbite sous Galois de $x = \overline{(h,1)}$ est, a une constante uniforme près, la taille de l'image de $r((\mathbb{A}_f \otimes L)^*)$ dans $T(\mathbb{Q}) \backslash T(\mathbb{A}_f)/K_T$.

5.2. Morphisme de réciprocité à noyaux connexes. — Si T est un tore sur $\mathbb{Q}$, on note $\pi(T)$ le groupe $T(\mathbb{A}_f)/T(\mathbb{Q})^-$ (adhérence topologique), modifiant un peu la notation de Deligne. Si $(T, \{h\})$ est une sous-donnée de Shimura de (G, X) telle que T est le groupe de Mumford-Tate de h, et $r : R_L \to T$ le morphisme de réciprocité on note $r_{\mathbb{A}_f/\mathbb{Q}} : \pi(R_L) \to \pi(T)$ le morphisme induit.

On rappelle que l'on note $h_T = T(\mathbb{Q}) \backslash T(\mathbb{A}_f)/K_T^m$ le groupe de classes de T. On dispose alors du résultat suivant ([6] thm. 3.3).

THÉORÈME 5.3. — *Si $(T,\{h\})$ varie parmi les sous-données CM de (G,X) telles que le noyau*

$$N=\ker(r:R_L\to T) \tag{32}$$

est connexe, le conoyau de $r_{\mathbb{A}_f/\mathbb{Q}}:\pi(R)\to\pi(T)$ est de taille uniformément bornée.

On en déduit en particulier que le conoyau de $\overline{r}:h_{R_L}\to h_T$ est uniformément borné quand $(T,\{h\})$ varie parmi les sous-données CM telles que le noyau de r est connexe. Dans formulation de ([6] thm 3.3) le corps reflex de $(T,\{h\})$ à la place de L. La preuve donnée dans ce texte vaut pour L à la place du corps reflex. Il est simple de montrer que les énoncés du théorème pour L et pour le corps reflex sont en fait équivalents.

En combinant ce résultat avec la proposition 5.1 et le théorème 2.3 on obtient un des résultats principaux que nous avons en vue dans ce texte.

COROLLAIRE 5.4. — *Soit (G,X) une donnée de Shimura telle que G est le groupe de Mumford-Tate générique sur X. Soit K un sous-groupe compact ouvert de $G(\mathbb{A}_f)$. Soit d le rang absolu de G.*

Soit $(T,\{h\})\subset(G,X)$ une sous–donnée de Shimura spéciale et L le corps de décomposition de T. On suppose que T est le groupe de Mumford-Tate de h et que le noyau du morphisme de réciprocité $r:R_L\to T$ est connexe. Alors pour tout $\epsilon>0$

(33)

$$|\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/L)\cdot\overline{(h,1)}|\gg B^{i(T)}|K_T^m/K_T|\cdot|h_T|\geq c(d,\epsilon)C^{i(T)}|K_T^m/K_T|D_L^{\frac{\lambda(d)}{2}-\epsilon}$$

où C est une constante ne dépendant que de d et $i(T)$ désigne le nombre de premiers p tels que $K_{T,p}^m\neq K_{T,p}$. La constante positive $\lambda(d)$ est explicitée dans la définition 3.4 et $c(\epsilon,d)$ est une constante strictement positive ne dépendant que de d et de ϵ.

En utilisant la proposition 4.7 et le fait que $\lambda(2)=\lambda(3)=\frac{2}{5}$, on trouve le résultat suivant qui généralise le cas bien connu $g=1$.

COROLLAIRE 5.5. — *Soit $\epsilon>0$. Soit $x=\overline{(h,1)}$ un point CM du module $\mathbb{A}_g$ des variétés abéliennes principalement polarisées de dimension $g=2$ ou $g=3$ correspondant à une variété abélienne simple. Soit $T=T_x$ le groupe de Mumford-Tate de h. Alors*

$$|\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/L)\cdot\overline{(h,1)}|\geq c(\epsilon)C^{i(T)}|K_T^m/K_T|D_L^{\frac{1}{5}-\epsilon} \tag{34}$$

pour une constante $c(\epsilon)$ ne dépendant pas de x.

Pour $g = 1$, on a $\lambda(1) = 1$ et on retrouve les estimations classiques (en $D_L^{\frac{1}{2}-\epsilon}$) de la taille du groupe de Picard d'un corps quadratique imaginaire. Pour obtenir des minorations de l'orbite sous Galois d'un point CM de $\mathbb{A}_g$ on peut en général se ramener au cas des variétés abéliennes simples.

Soit (G, X) une donnée de Shimura et $(T, \{h\}) \subset (G, X)$ une sous–donnée de Shimura spéciale. On dit que T est Galois générique si l'image I de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ dans $\mathrm{Aut}(X^*(T))$ est maximale (parmi les images possibles pour un sous-tore de G). Nous faisons référence à ([6] 2.1) pour une définition plus précise. Notons que d'après la proposition 2.1 de [6] les sous-données spéciales Galois génériques de (G, X) existent pour tout (G, X), elles sont même génériques en un sens expliqué dans [6]. Il est montré dans [6] dans de nombreux cas que le morphisme de réciprocité est à noyau connexe pour les sous-données de Shimura $(T, \{h\}) \subset (G, X)$ avec T Galois générique. C'est par exemple le cas si G est $\mathbb{Q}$-simple adjoint de type B_l, C_l et dans certains cas de type D_l et A_l que le lecteur pourra consulter dans [6]. Dans tout ces cas si on fait varier le point spécial x parmi des sous-données Galois génériques on obtient des minorations inconditionnelles pour la taille de l' orbite sous Galois de x de la forme donnée dans l'équation (33). Nous n'écrirons pas l'énoncé le plus général possible. Retenons seulement le résultat suivant qui concerne $\mathbb{A}_g$ qui est une conséquence des résultats précédents et de la proposition 4.6.

COROLLAIRE 5.6. — *Soit g un entier. Soit A une variété abélienne principalement polarisée de dimention g. On suppose que* $\mathrm{End}(A) \otimes \mathbb{Q} = E$ *est un corps CM de degré $2g$ vérifiant les hypothèses de la proposition 4.6. Soit x le point spécial de $\mathbb{A}_g$ associé à A. On dira que x est « suffisamment Galois générique ». Noter que si x est Galois générique A a la propriété requise. En conservant les notations des énoncés précédents, quand x varie parmi les points spéciaux suffisamment Galois génériques*

$$|\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/L) \cdot \overline{(h,1)}| \geq c(d,\epsilon) C^{i(T)} |K_T^m/K_T| D_L^{\frac{\lambda(d)}{2}-\epsilon}. \tag{35}$$ □

6. Bornes pour le noyau de réciprocité sous GRH

Dans cette section on améliore les bornes pour les orbites de Galois de points spéciaux données dans [30].

THÉORÈME 6.1. — *Admettons l'hypothèse de Riemann généralisée pour les corps CM. Soit (G, X) une donnée de Shimura et $x = (h, 1)$ un point CM de $\mathrm{Sh}_K(G, X)$. Soit T le groupe de Mumford-Tate de h.*

Soit L le corps de décomposition de T et D_L la valeur absolue du discriminant de L.

On a

$$\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/F)\cdot\overline{(x,1)}\gg B^{i(T)}|K_T^m/K_T|D_L^{\mu}$$

où $\mu>0$ est uniforme.

Démonstration. — L'apparition du facteur $B^{i(T)}|K_T^m/K_T|$ a été traitée précedemment (c.f. 5.1).

Soit, comme avant, $r\colon R_L\longrightarrow T$ le morphisme de réciprocité et $\overline{r}\colon h_L\longrightarrow h_T$ le morphisme induit par r au niveau des groupes de classes de R_L et de T respectivement. Il suffit de montrer que

$$|\mathrm{Im}(\overline{r})|\gg D_L^{\mu}.$$

La preuve s'inspire de [1] et de [30].

On définit, suivant [1], pour un groupe abélien H et un entier l, $M_H(l)$ comme étant le plus petit entier A tel que pour tout l-uplet $(g_1,\dots,g_l)$ d'éléments de H, il existe $(a_1,\dots,a_l)\in\mathbb{Z}^n\backslash\{0\}$ avec $\sum_j|a_j|\leq A$ vérifiant $g_1^{a_1}\cdots g_l^{a_l}=1$.

Prenons $l=|H|$ et soit $g_1,\dots,g_l\in H$. Si $g_i=1$ pour un certain i, alors on a une relation multiplicative non-triviale en les g_i avec $A=1$. Autrement, on a une relation de la forme $g_ig_j^{-1}=1$ pour des indices $i\neq j$. Dans tous les cas, on a une relation $g_1^{a_1}\cdots g_l^{a_l}=1$ avec $\sum|a_i|\leq 2$. On voit donc que pour $l=|H|$, on a

$$M_H(l)\leq 2.$$

Prenons maintenant $H=h_L/\ker(\overline{r})$.

On va démontrer l'estimation suivante :

$$M_H(l)>c\frac{\log(D_L)}{\log(l)+\log\log(D_L)} \tag{36}$$

où $c>0$ est une constante uniforme.

Cette estimation implique celle désirée pour $|H|$:

$$|H|>\frac{D_L^{c/2}}{\log(D_L)}\gg D_L^{\mu}$$

avec $\mu>0$ uniforme.

On va maintenant démontrer l'inégalité (36). Rappelons quelques notions et résultats de la section 2 de [30]. D'après la proposition 2.2 de [9] on peut supposer G adjoint. Le morphisme de réciprocité $r\colon R_L\longrightarrow T$ induit une inclusion $X^*(T)\subset X^*(R_L)$ et on a une base canonique de $X^*(R_L)$ donnée par énumération des éléments de $\mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q})$. Il existe une base $\mathscr{B}$ de $X^*(T)$ telle que les coordonnées des caractères χ de $\mathscr{B}$ par rapport à la base canonique de $X^*(R_L)$, sont bornées uniformément. De plus comme G est supposé adjoint pour tout caractère χ de $\mathscr{B}$, $\chi\overline{\chi}$ est le caractère trivial.

Soit $l \geq 1$ un entier et $p_1, \ldots, p_l$, l premiers qui décomposent T et $a_1, \ldots, a_l$ des entiers relatifs. Pour chaque i, on fixe une place v_i de L au déssus de p_i et un idèle P_i dans $(L \otimes \mathbb{A}_f)^*$ qui est l'uniformisante à la place v_i et 1 ailleurs. Considerons $I = P_1^{a_1} \cdots P_r^{a_l} \subset (L \otimes \mathbb{A}_f)^*$ et sa classe $\overline{I}$ dans h_L. Supposons que $\overline{I}$ soit dans le noyau de $\overline{r}$ i.e

$$r(I) = \pi k$$

où $\pi \in T(\mathbb{Q})$ et $k \in K_T^m$. Soit $\pi_i = \chi_i(\pi) \subset L^*$. Le lemme 2.15 de [30] montre que $\mathbb{Q}[\pi_1, \ldots, \pi_r] = L$.

Soit t une borne uniforme sur les coordonnées des χ_i. On voit alors que $\pi_i' := (p_1^{|a_1|} \cdots p_l^{|a_l|})^t \pi_i \in O_L$ et le fait que $\chi_i \overline{\chi_i}$ est le caractère trivial implique que

$$|\sigma(\pi_i')| \leq (p_1^{|a_1|} \cdots p_l^{|a_l|})^{2t}$$

pour tout $\sigma \in \mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q})$.

Soit n_L le degré de l'extension L sur $\mathbb{Q}$. Comme L est le corps de décomposition d'un tore de dimension d fixé, n_L est uniformément borné. On peut choisir une base $b_1, \ldots, b_{n_L}$ de L sur $\mathbb{Q}$ avec $b_k = \prod_{i=1}^d \pi_i'^{n_{i,k}}$ pour des entiers naturels $n_{i,k}$ tels que $n_{i,k} \leq n_L$. Il suffit de remarquer en effet que pour tout i, les éléments $1, \pi_i', \ldots, \pi_i'^{n_L}$ sont linéairement dépendants.

Le fait que les b_i sont dans O_L et que $b_1, \ldots, b_{n_L}$ forment une base de L sur $\mathbb{Q}$, implique que $\mathbb{Z}[b_1, \ldots, b_{n_L}]$ est un ordre dans O_L. En particulier

$$|\mathrm{Discr}(\mathbb{Z}[b_1, \ldots, b_{n_L}])| \geq D_L \tag{37}$$

D'autre part, $|\mathrm{Discr}(\mathbb{Z}[b_1, \ldots, b_{n_L}])|$ est le déterminant de la matrice $(\mathrm{Tr}_{L/\mathbb{Q}}(b_i b_j))$. Par l'inégalité d'Hadamard, si b est un majorant de tous les $|\mathrm{Tr}_{L/\mathbb{Q}}(b_i b_j)|$, alors

$$|\mathrm{Discr}(\mathbb{Z}[b_1, \ldots, b_{n_L}])| \leq c(n_L) b^{n_L}$$

où $c(n_L)$ ne dépend que de n_L (on peut prendre $c(n_L) = n_L^{n_L}$).

Du fait que $|\sigma(\pi_i')| \leq (p_1^{|a_1|} \cdots p_l^{|a_l|})^{2A}$, on déduit qu'il existe un entier uniforme D (ne dépendant que de n_L) tel que

$$|\mathrm{Tr}_{L/\mathbb{Q}}(b_i b_j)| \leq (p_1^{|a_1|} \cdots p_l^{|a_l|})^D$$

et donc, par l'inégalité d'Hadamard, après avoir remplace D par Dn_L

$$|\mathrm{Discr}\mathbb{Z}[b_1, \ldots, b_{n_L}]| \leq c(n_L)(p_1^{|a_1|} \cdots p_l^{|a_l|})^D.$$

Notons $c = 1/c(n_L)$. L'équation (37) donne alors :

$$(p_1^{|a_1|} \cdots p_l^{|a_l|})^D \geq c D_L.$$

Nous allons maintenant choisir l et p_i.

Rappelons une conséquence du théorème de Chebotarev effectif. Le lecteur pourra consulter le lemme 2.1 de [1] pour une preuve.

THÉORÈME 6.2. — *Admettons l'hypothèse de Riemann généralisée. On note $\pi_L(x)$ le nombre de premiers p totalement decomposés dans L tels que $p \leq x$. Il existe des constantes absolues (et effectivement calculables) $c_1 > 0$ et $c_2 > 0$ tels que*

$$\pi_L(x) \geq c_2 \frac{x}{\log(x)}$$

pour tout $x \geq c_1 \log(D_L)^2 (\log\log D_L)^4$.

Soit maintenant $l \geq 1$ un premier. Nous avons

$$x = c_3 l \log(l) + c_1 \log(D_L)^2 (\log\log D_L)^4$$

où c_3 est une constante uniforme que nous allons expliciter. Nous voulons choisir la constante c_3 telle que $c_2 \frac{x}{\log(x)} \geq l$. Notons que (si $x \geq e$)

$$\frac{x}{\log(x)} \geq \frac{c_3 l \log(l)}{\log(c_3) + 2\log(l)}.$$

On a alors $c_2 \frac{x}{\log(x)} \geq l$ dès que $\frac{c_2 c_3}{\log(c_3)+2} \geq 1$. On peut alors par exemple prendre $c_3 = \max(e, \frac{4}{{c_2}^2})$.

On peut trouver $p_1, \ldots, p_l$ décomposés dans L et vérifiant

$$p_i \leq x.$$

Soit maintenant I un élément comme avant. On note $A = \sum_{i=1}^{l} |a_i|$. Ce qui précède donne

$$AD \log(x) \geq \log(cD_L).$$

Par ailleurs, il y a une constante uniforme c_5 telle que

$$\log(x) \leq c_5(\log(l) + \log\log(D_L)).$$

On obtient donc une borne inférieure pour A de la forme souhaitée. Ceci achève la preuve de l'inégalité (36) et du théorème. □

BIBLIOGRAPHIE

[1] F. AMOROSO & R. DVORNICICH – « Lower bounds for the height and size of the ideal class group in CM-fields », *Monatsh. Math.* **138** (2003), p. 85–94.

[2] E. ARTIN – « Über eine neue Art von L-Reihen », *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg* **3** (1923), p. 89–108.

[3] ———, « Zur Theorie der L-Reihen mit allgemeinen Gruppencharakteren », *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg* **8** (1931), p. 292–306.

[4] S. BOSCH, W. LÜTKEBOHMERT & M. RAYNAUD – *Néron models*, Ergebnisse Math. Grenzg., vol. 21, Springer, Berlin, 1990.

[5] C.-L. Chai & J.-K. Yu – « Congruences of Néron models for tori and the Artin conductor », *Ann. of Math.* **154** (2001), p. 347–382.

[6] L. Clozel & E. Ullmo – « Équidistribution adélique des tores et équidistribution des points CM », *Doc. Math.* extra vol. (2006), p. 233–260.

[7] B. Dodson – « The structure of Galois groups of CM-fields », *Trans. Amer. Math. Soc.* **283** (1984), p. 1–32.

[8] B. Edixhoven – « Néron models and tame ramification », *Compositio Math.* **81** (1992), p. 291–306.

[9] B. Edixhoven & A. Yafaev – « Subvarieties of Shimura varieties », *Ann. of Math.* **157** (2003), p. 621–645.

[10] W. Feit – « Finite linear groups and theorems of Minkowski and Schur », *Proc. Amer. Math. Soc.* **125** (1997), p. 1259–1262.

[11] S. Friedland – « The maximal orders of finite subgroups in $\mathrm{GL}_n(\mathbf{Q})$ », *Proc. Amer. Math. Soc.* **125** (1997), p. 3519–3526.

[12] B. H. Gross – « On the motive of a reductive group », *Invent. Math.* **130** (1997), p. 287–313.

[13] B. H. Gross & W. T. Gan – « Haar measure and the Artin conductor », *Trans. Amer. Math. Soc.* **351** (1999), p. 1691–1704.

[14] B. Klingler & A. Yafaev – « The André-Oort conjecture », *Ann. of Math.* **180** (2014), p. 867–925.

[15] R. E. Kottwitz & D. Shelstad – « Foundations of twisted endoscopy », *Astérisque* **255** (1999).

[16] S. Lang – *Algebraic number theory*, Graduate Texts in Math., vol. 110, Springer, New York, 1994.

[17] T. Ono – « Arithmetic of algebraic tori », *Ann. of Math.* **74** (1961), p. 101–139.

[18] ———, « On the Tamagawa number of algebraic tori », *Ann. of Math.* **78** (1963), p. 47–73.

[19] J. Pila – « Rational points of definable sets and results of André-Oort-Manin-Mumford type », *Int. Math. Res. Not.* **2009** (2009), p. 2476–2507.

[20] ———, « O-minimality and the André-Oort conjecture for $\mathbb{C}^n$ », *Ann. of Math.* **173** (2011), p. 1779–1840.

[21] J. Pila & A. J. Wilkie – « The rational points of a definable set », *Duke Math. J.* **133** (2006), p. 591–616.

[22] V. Platonov & A. Rapinchuk – *Algebraic groups and number theory*, Pure and Applied Mathematics, vol. 139, Academic Press, Inc., Boston, MA, 1994.

[23] K. A. Ribet – « Division fields of abelian varieties with complex multiplication », *Mém. Soc. Math. France* **2** (1980/81), p. 75–94.

[24] J-P. Serre – *Corps locaux*, Hermann, Paris, 1968.

[25] J. M. Shyr – « On some class number relations of algebraic tori », *Michigan Math. J.* **24** (1977), p. 365–377.

[26] J. Tsimerman – « Brauer-Siegel for arithmetic tori and lower bounds for Galois orbits of special points », *J. Amer. Math. Soc.* **25** (2012), p. 1091–1117.

[27] E. Ullmo & A. Yafaev – « Galois orbits and equidistribution of special subvarieties : towards the André-Oort conjecture », *Ann. of Math.* **180** (2014), p. 823–865.

[28] V. E. Voskresenskiĭ – *Algebraic groups and their birational invariants*, Translations of Mathematical Monographs, vol. 179, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1998.

[29] X. Xarles – « The scheme of connected components of the Néron model of an algebraic torus », *J. reine angew. Math.* **437** (1993), p. 167–179.

[30] A. Yafaev – « A conjecture of Yves André », *Duke Math. J.* **132** (2005), p. 393–407.