Bulletin
de la SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

CHEEGER-DIFFÉRENTIABILITÉ D'APPLICATIONS DE CERTAINS ESPACES DE SOBOLEV

Vincent Munnier

Tome 142
Fascicule 1

2014

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE
Publié avec le concours du Centre national de la recherche scientifique
pages 63-93

Le *Bulletin de la Société Mathématique de France* est un périodique trimestriel de la Société Mathématique de France.

Fascicule 1, tome 142, janvier 2014

Diffusion

Maison de la SMF
Case 916 - Luminy
13288 Marseille Cedex 9
France
smf@smf.univ-mrs.fr

Hindustan Book Agency
O-131, The Shopping Mall
Arjun Marg, DLF Phase 1
Gurgaon 122002, Haryana
Inde

AMS
P.O. Box 6248
Providence RI 02940
USA
www.ams.org

Tarifs

Vente au numéro : 43 € ($ 64)
Abonnement Europe : 300 €, hors Europe : 334 € ($ 519)
Des conditions spéciales sont accordées aux membres de la SMF.

Secrétariat : Nathalie Christiaën

Bulletin de la Société Mathématique de France
Société Mathématique de France
Institut Henri Poincaré, 11, rue Pierre et Marie Curie
75231 Paris Cedex 05, France
Tél : (33) 01 44 27 67 99 • Fax : (33) 01 40 46 90 96
revues@smf.ens.fr • http://smf.emath.fr/

ISSN 0037-9484

Directeur de la publication : Marc Peigné

Bull. Soc. math. France
142 (1), 2014, p. 63–93

CHEEGER-DIFFÉRENTIABILITÉ D'APPLICATIONS DE CERTAINS ESPACES DE SOBOLEV

PAR VINCENT MUNNIER

RÉSUMÉ. — On prouve la Cheeger-différentiabilité des applications de l'espace de Hajlasz $M^{1,p}(X,E)$ lorsque X est un certain type d'espace métrique mesuré (les espaces PI) et lorsque E appartient à une certaine classe d'espaces de Banach (les espaces de Banach GFDA ou plus généralement, les espaces de Banach RNP) pour un paramètre p assez grand relié à la constante de doublement de la mesure supportée par X. La classe d'espace de Banach considérée est la plus large possible et la dépendance de p en la constante de doublement de la mesure supportée par X est optimale.

ABSTRACT (*Cheeger-differentiability of maps belonging to certain Sobolev spaces*)
The Cheeger-differentiability of maps f belonging to Hajlasz spaces $M^{1,p}(X,E)$ is proved. The assumption are rather simple. The metric space X is assumed to support a doubling measure μ for which a Poincaré inequality is satisfied. The target space E is assumed to be a RNP Banach space. Finally, the parameter p must be large enough compared to the doubling constant of the measure μ (a precise and optimal dependance is given by the way). Notice that the class of Banach spaces considered is the largest possible (it gives a new characterization of RNP in term of Cheeger-differentiability).

Texte reçu le ??? et accepté le ???.

VINCENT MUNNIER • *E-mail :* `vincent.munnier@ujf-grenoble.fr`, Institut Fourier (Université Joseph Fourier) 100 Rue des Maths, BP 74, 38402 St Martin d'Hères

Classification mathématique par sujets (2000). — 30L99, 46T99.

Mots clefs. — Inégalites de Poincaré, mesure doublante, espaces de Hajlasz-Sobolev.

BULLETIN DE LA SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE 0037-9484/2014/63/$ 5.00

1. Introduction

Tout d'abord, rappelons des résultats importants sur $\mathbb{R}^n$. Un théorème central en analyse réelle est le théorème de Rademacher qui affirme qu'une application lipschitzienne de $\mathbb{R}^n$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ est différentiable en Lebesgue presque tout point de $\mathbb{R}^n$. Ce résultat a été généralisé en un théorème désormais classique de Caldèron (que nous nous proposons de généraliser dans le cadre des espaces métriques PI) à savoir que tout application de $W^{1,p}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ avec $p > n$ est différentiable en Lebesgue presque tout point de $\mathbb{R}^n$. Ce théorème implique d'ailleurs le théorème de Rademacher car la dérivée faible d'une application lipschitzienne est dans L^∞. On peut pour terminer citer un fait remarquable car optimal concernant $\mathbb{R}^n$. En effet, le théorème de Rademacher-Stepanov affirme qu'une application $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ Lebesgue-mesurable est différentiable en Lebesgue presque tout point x où $\mathrm{Lip}(f)(x)$ est finie.

Ensuite, le théorème de Rademacher a été étendu pour des applications lipschitziennes définies sur des groupes de Carnot. En effet, P. Pansu, dans [18], a montré un tel théorème pour des applications lipschitziennes $f : A \to B$ avec A et B des groupes de Carnot. Il montre d'ailleurs que la différentielle ainsi obtenue est un morphisme entre les algèbre de Lie des groupes concernés. Ce résultat permet de prouver l'impossibilité d'un plongement bilipschitzien du groupe d'Heisenberg dans $\mathbb{R}^n$ et permet d'invalider pour les groupes de Carnot la théorie de la rectifiabilité classique en grande dimension. Les deux points reposent sur une remarque algébrique simple : la différentielle de Pansu entre un groupe de Carnot non commutatif et $\mathbb{R}^n$ n'est jamais injective. Ainsi, pour obtenir le premier point, prenons un point où l'application est Pansu-différentiable. Etant bilipschitzienne, la différentielle de cette application est injective contredisant le fait que le groupe d'Heisenberg n'est pas commutatif. Le second point est plus technique et repose sur une formule de l'aire valable dans les groupes de Carnot. Grossièrement, la dimension de Hausdorff de l'image d'une application lipschitzienne est reliée au rang de la différentielle de Pansu de cette application (et donc à la dimension de son noyau par le théorème du rang). A partir de là, il suffit de remarquer que la différentielle de Pansu s'effondre le long du centre du groupe d'Heisenberg. En d'autres termes, le noyau de la différentielle de Pansu est assez gros et donc l'image de l'application lipschitzienne est de petite dimension. De plus, grace à ce théorème de différentiation, P. Pansu a obtenu des critères de rigidité de type Mostow pour certains espaces symétriques (ce qui est la motivation essentielle de [18]).

Ces résultats illustrent une idée profonde : comment à partir d'un problème hautement non-linéaire comme decider si oui ou non deux espaces métriques sont bilipschitz équivalents, on peut se ramener à un problème d'algèbre linéaire par le biais d'un théorème de différentiation. Cette idée naturelle a été développée dans le travail séminal de J. Cheeger dans [4]. Cet article offre un cadre nouveau mais naturel pour étendre ces théorèmes de différentiation. En effet, il développe une théorie de la différentiation dans les espaces PI. Certains espaces métriques PI apparaissent comme des limites au sens de Hausdorff-Gromov de variétés riemanniennes complètes à courbure de Ricci minorée. Des exemples de tels espaces métriques sont évidemment : $\mathbb{R}^n$ et les variétés riemaniennes compactes pour les plus simples. Pour les plus exotiques, il y a : les groupes de Carnot (qui sont de dimension Haussdorf entière), les espaces de Laakso ainsi que les espaces de Bourdon-Pajot dont les constructions sont détaillées respectivement dans [15] et [3] (d'ailleurs, ces derniers espaces peuvent être de toute dimension de Hausdorff entière ou non et ne sont pas bilipschitziens à un espace euclidien). L'article [4] est majeur au sens où J. Cheeger a su développer un calcul au premier ordre dans les espaces métriques pour les applications lipschitziennes. Plus précisément, un théorème de type Rademacher est démontré dans le cadre des espaces métriques PI. Plus tard, dans l'article [2], dans le même contexte que celui proposé par [4], est montré un théorème de type Rademacher-Stepanov.

Tous ces résultats concernent la différentiation des applications lipschitziennes (ou à constante de Lipschitz ponctuelle supérieure finie en presque tout point) mais à valeurs dans des espaces euclidiens. Une difficulté intervient lorsque l'on veut établir des théorèmes de différentiation dans les espaces de Banach de dimension infinie. En toute généralité, de tels résultats sont faux. En effet, considérons l'application $f : [0,1] \to L^1([0,1])$ définie par $f : x \to \chi_{[0,x]}$. L'application f ainsi définie est une isométrie. Malheureusement, f n'est fortement différentiable en aucun point x de $]0,1[$ car sa différentielle faible en x est δ_x qui n'est clairement pas un élément de L^1. De plus, très peu de théorèmes concernant l'extension ou la densité des applications lipschitziennes qui sont à valeurs dans des espaces de Banach de dimension infinie sont connus. Heureusement, dans l'article [5], J. Cheeger et B. Kleiner, motivés par des questions d'informatique théorique (ces motivations sont plus longuement expliquées dans le compte rendu d'activités de [19]), surmontent ces difficultés et trouvent une condition géométrique satisfaisante sur l'espace de Banach à l'arrivée pour obtenir un théorème de type Rademacher. Plus précisément, ils obtiennent un théorème de type Rademacher pour des applications lipschitziennes entre espaces métriques PI et espaces de Banach GFDA. Ils obtiennent aussi des obstructions au plongement bilipschitzien des espaces métriques PI dans les espaces de Banach GFDA. Ce qui a pour corollaire que le groupe de Heisenberg n'est pas bilipschitz équivalent à un espace L^p (avec $p > 1$) par exemple. Grace à la théorie développée par J. Cheeger et B. Kleiner dans le cadre des espaces de Banach GFDA, nous sommes à même d'énoncer un des résultats principaux de cet article.

THÉORÈME 1.1. — *Soient X un $(1,p)$-PI espace possédant une mesure μ β-doublante et E un espace de Banach GFDA. Notons $N = \frac{\log \beta}{\log 2}$. Si f appartient à $M^{1,q}_{\mathrm{loc}}(X,E)$ avec $q > \max\{N,p\}$ alors f est Cheeger-différentiable μ-pp.*

La preuve est fondée sur un argument d'approximation des applications de $M^{1,q}(X,E)$ par les fonctions lipschitziennes. De plus, grâce aux inégalités de Poincaré supportées par X et grâce à l'inégalité maximale de Hardy-Littlewood (qui permettent un contrôle des oscillations de l'approximation), nous montrons comment les théorèmes de différentiation vraies pour les applications lipschitziennes se transmettent aux applications de l'espace $M^{1,q}(X,E)$ (qui est lorsque p est assez grand un espace de fonctions continues). En fait, pour pouvoir appliquer la construction de l'article [5], il faut obtenir l'analogue d'un théorème de [13]. C'est-à-dire pouvoir comparer la norme de la différentielle faible avec la constante de Lipschitz ponctuelle supérieure d'une application de $M^{1,q}$ pour q assez grand. Ce résultat est possible grâce à la caractérisation des espaces $N^{1,q}$ et $M^{1,q}$ donnée dans l'article [20] et grâce au théorème principal de [14] — satisfaire des inégalités de Poincaré faibles est une propriété ouverte en la régularité du gradient supérieur — étendu au cadre des espaces de Banach. Ce type de résultats, sans dépendance de la dimension, est crucial pour pouvoir appliquer la stratégie de l'article [5]. Enfin, un lemme de théorie descriptive des ensembles démontré dans l'article [7] montre comment -lorsque E possède la propriété de Radon-Nikodym- se ramener au cas d'un espace de Banach GFDA. Grace à cela nous pouvons énoncer le second résultat principal de cet article.

THÉORÈME 1.2. — *Soient X un $(1,p)$-espace PI possédant une mesure μ β-doublante* ***complète*** *et E un espace de Banach RNP. Notons $N = \frac{\log \beta}{\log 2}$. Si f appartient à $M^{1,q}_{\mathrm{loc}}(X,E)$ avec $q > \max\{N,p\}$ alors f est Cheeger-différentiable μ-pp.*

Comme les espaces de Hajlasz généralisent les espaces de Sobolev, ce théorème constitue une généralisation du théorème de Caldèron cité au début de l'introduction. De plus, ce résultat est optimal. En effet, grace à un contre-exemple de E. Stein, il existe une application de $W^{1,n}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$ qui n'est différentiable en aucun point. Plus précisément, des conditions d'intégrabilité de la dérivée faible d'une application d'un espace de Sobolev sont discutées dans [1] pour garantir ou non sa différentiabilité en Lebesgue presque tout point. De plus, le théorème 1.2 offre une nouvelle caractérisation des espaces de Banach satisfaisant la propriété de Radon-Nikodym.

Dans un premier temps, nous allons définir tous les notions et espaces entrant en jeu. Ensuite, nous rappelons la définition de la Cheeger-différentiabilité et nous allons construire un bon candidat pour être la différentielle de Cheeger pour des classes de fonctions à valeurs banachiques ayant une régularité Sobolev surcritique. Enfin, la dernière partie concerne la preuve du théorème 1.1 à proprement parlé. Cette preuve suit la méthode proposée dans l'article [5] et est fondée sur des découpages intégraux assez fins. Finalement, cette méthode couplée à une remarque présente dans l'article [7] permettra de prouver le théorème 1.2.

2. Analyse sur les espaces métriques

Soit (X, d) un espace métrique complet, muni d'une mesure extérieure positive de Radon μ. On notera $B_r(x)$ pour la boule ouverte de rayon r centrée en x de l'espace métrique X. L'intégrale considérée sur les espaces de Banach sera l'intégrale de Bochner. L'intégrale de Bochner est une généralisation naturelle de l'intégrale de Lebesgue lorsque les fonctions sont à valeurs banachiques. Pour des propriétés de cette intégrale, on peut se référer à l'article [12]. Par la suite, E désignera un espace de Banach muni de la norme $\|.\|$.

2.1. Mesure doublante

DÉFINITION 2.1. — *Une mesure μ est doublante s'il existe $\beta > 0$ tel que pour tout $r > 0$ et pour tout x appartenant à X :*

$$\mu(B_{2r}(x)) \leq \beta\mu(B_r(x)).$$

On appelle la constante β intervenant dans la définition précédente, une constante de doublement de la mesure μ. On dira qu'une mesure est β-doublante si β est une constante de doublement de μ. On rappelle une propriété de régularité des mesures doublantes dressée dans [2].

LEMME 2.1. — *Soit (X,d,μ) un espace métrique mesuré, de constante de doublement β. Soient x_0 un point de X et $r_0 > 0$. Alors pour tout x de $B_{r_0}(x_0)$ et pour tout $r < r_0$, on a :*

$$\frac{\mu\left(B_r(x)\right)}{\mu\left(B_{r_0}(x_0)\right)} \geq \frac{1}{\beta^2}\left(\frac{r}{r_0}\right)^{\frac{\log \beta}{\log 2}}.$$

Cette minoration est optimale en l'exposant $\frac{\log \beta}{\log 2}$. En effet, en prenant μ la mesure de Lebesgue portée par $X = \mathbb{R}^n$, on peut choisir $\beta = 2^n$.

2.2. Ensembles remarquables de points

Définition 2.2. — *Soit $f : X \to E$ une application μ-mesurable. On appelle x un point de Lebesgue de f si*

$$\lim_{r\to 0} \frac{1}{\mu(B_r(x))}\int_{B_r(x)} \|f(y)-f(x)\| d\mu(y) = 0.$$

Si f appartient à $L^1_{\mathrm{loc}}(X,E)$ et si la mesure μ est doublante alors, on a le théorème de différentiation de Lebesgue à savoir que μ-pp x de X est un point de Lebesgue de f. On peut se référer à [10] pour une preuve de ce résultat lorsque f est à valeurs réelles (le cas des applications à valeurs banachiques ne pose pas de difficultés supplémentaires). On rappelle aussi que la fonction maximale centrée de Hardy-Littlewood est bornée dans $L^p(X,E)$ pour $1 < p < +\infty$. Pour une preuve de ce fait, on peut aussi se référer à [10].

Définition 2.3. — *On appelle un point x_0 d'une partie A μ-mesurable de X un point de densité de A si :*

$$\lim_{r\to 0} \frac{\mu(B_r(x_0)\cap A)}{\mu(B_r(x_0)} = 1.$$

Lorsque la mesure μ est doublante, en appliquant le théorème de différentiation de Lebesgue à l'indicatrice de A (où A désigne un ensemble μ-mesurable), on obtient que μ-presque tout point de A est un point de densité de A.

Ici, (Y,d') désigne un espace métrique.

Définition 2.4. — *Une application $f : X \to Y$ est approximativement continue en x si pour tout $\varepsilon > 0$, l'ensemble*

$$S_\varepsilon(x,r) = \{x' \in B_r(x) | d'(f(x), f(x')) \leq \varepsilon\}$$

vérifie

$$\lim_{r\to 0} \frac{\mu(S_\varepsilon(x,r))}{\mu(B_r(x))} = 1.$$

L'ensemble des points de X satisfaisant la propriété de la définition précédente sera appelé l'ensemble des points de continuité approchée de f. La continuité approchée est une notion très faible. A cet effet, on rappelle la proposition suivante prouvée dans [5].

Proposition 2.1. — *Soit (X,d,μ) un espace métrique muni d'une mesure μ doublante. Soit (Y,d') un espace métrique séparable et soit $u : X \to Y$ une application μ-mesurable. Alors μ-presque tout point de X est un point de continuité approchée de u.*

2.3. Gradient supérieur

DÉFINITION 2.5. — *Une fonction $g : X \to \overline{\mathbb{R}^+}$ est appelée un gradient supérieur pour $f : X \to E$ si pour toute courbe rectifiable $c : [0,l] \to X$ paramétrée par la longueur d'arc, on a :*

$$\|f(c(l)) - f(c(0))\| \leq \int_0^l g(c(s))ds.$$

Si f est une application lisse de $\mathbb{R}^n$ à valeurs réelles alors $g = |\nabla f|$ est un gradient supérieur pour f. Dans les espaces métriques, les applications régulières seront remplacées par les applications lipschitziennes et la norme du gradient en un point sera remplacée par sa constante de Lipschitz ponctuelle supérieure.

DÉFINITION 2.6. — *La constante de Lipschitz ponctuelle supérieure d'une application $f : X \to E$ au point x est :*

$$\mathrm{Lip}(f)(x) = \limsup_{y \to x} \frac{\|f(x) - f(y)\|}{d(x,y)} = \limsup_{r \to 0} \sup_{y \in B_r(x)} \frac{\|f(x) - f(y)\|}{r}.$$

Le lemme suivant nous permet de choisir un gradient supérieur spécifique des applications lipschitziennes. Le lemme suivant figure dans [4] et dans [12].

LEMME 2.2. — *Soit (X, d, μ) un espace métrique mesuré et E un espace de Banach. Si $f : X \to E$ est une application lipschitzienne alors* $\mathrm{Lip}(f)$ *est un gradient supérieur pour f.*

On rappelle au préalable la définition suivante.

DÉFINITION 2.7. — *La constante de Lipschitz ponctuelle supérieure d'une application $f : X \to E$ au point x en restriction à $A \subset X$ est :*

$$\mathrm{Lip}_{|A}(f)(x) = \limsup_{y \to x,\ y \in A} \frac{\|f(x) - f(y)\|}{d(x,y)} = \limsup_{r \to 0} \sup_{y \in B_r(x) \cap A} \frac{\|f(x) - f(y)\|}{r}.$$

Le lemme suivant figure dans [2].

LEMME 2.3. — *Soient X un espace métrique mesuré supportant une mesure μ doublante et E un espace de Banach. Soit A une partie μ-mesurable de X. Si $f : X \to E$ est une application lipschitzienne et si x_0 est un point de densité de A alors on a*

$$\mathrm{Lip}_{|A}(f)(x_0) = \mathrm{Lip}(f)(x_0).$$

2.4. Inégalités de Poincaré. — Pour une application $f : X \to E$ qui est localement Bochner intégrable, on définit $f_{x,r}$ la moyenne de f sur une boule comme étant

$$f_{x,r} = \frac{1}{\mu(B_r(x))} \int_{B_r(x)} f d\mu.$$

Définition 2.8. — *On dit que X supporte une inégalité de Poincaré (faible) de type $(1,p)$ s'ils existent des constantes positives C, λ telles que pour tout x appartenant à X et pour tout $r > 0$, pour toute fonction f dans $L^1_{\text{loc}}(X, E)$ admettant un gradient supérieur g dans $L^p_{\text{loc}}(X, \overline{\mathbb{R}^+})$, on a l'inégalité suivante :*

$$\frac{1}{\mu(B_r(x))} \int_{B_r(x)} |f - f_{x,r}| d\mu \leq Cr \left(\frac{1}{\mu(B_{\lambda r}(x))} \int_{B_{\lambda r}(x)} g^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}}.$$

On dira que le couple (f, g) donné dans la définition 2.8 satisfait une inégalité de Poincaré de type $(1,p)$. Par l'inégalité d'Holder, l'inégalité de type $(1,1)$ est la plus forte. Sous certaines conditions géométriques sur X, on peut prendre $\lambda = 1$. On peut se référer à [9] ou encore à [10] pour des hypothèses géométriques précises sur X. Il est aussi à noter que ce type d'inégalité joue un rôle particulier dans la théorie des applications quasi-conformes. On peut se référer à l'article [11] pour plus de détails.

Définition 2.9. — *Un espace PI est la donnée d'un espace métrique complet possédant une mesure (extérieure) de Radon doublante et supportant une inégalité de Poincaré de type $(1,p)$. On dira qu'un tel espace est un $(1,p)$-espace PI.*

Les espaces PI forment une vaste classe d'espace métriques mesurés englobant les espaces euclidiens, les groupes de Carnot, les variétés à courbure de Ricci positive (si ces variétés possède la propriété du doublement du volume riemannien). De plus, il existe des espaces PI ayant une dimension de Haussdorf quelconque (les espaces de Bourdon-pajot ou les espaces de Laakso dont on peut trouver une construction dans [3] et [15] respectivement). La notion d'espaces PI est stable par passage à la limite au sens de Gromov-Hausdorff mesuré. De plus, Les espaces PI jouissent de nombreuses propriétés topologiques intéressantes . Il est bien connu que de tels espaces sont propres (les boules de ces espaces sont relativement compactes). Enfin, de tels espaces sont quasi-convexes (il existe un certain nombre de courbes rectifiables dans X). C'est-à-dire qu'à une renormalisation près de la métrique initiale par une application quasi-conforme (et même bilipschitzienne), ces espaces deviennent géodésiques. Pour une preuve de ces deux faits, on peut se référer à l'appendice de [4].

2.5. Espaces de Hajlasz

DÉFINITION 2.10. — *On définit l'espace $M^{1,p}(X,E)$ comme l'ensemble des applications $f : X \to E$ appartenant à $L^p(X,E)$ pour lesquelles il existe une application $g : X \to \overline{\mathbb{R}^+}$ appartenant à $L^p(X,\overline{\mathbb{R}^+})$ telle que pour μ-pp x,y de X :*

$$\|f(x) - f(y)\| \leq d(x,y)(g(x) + g(y)).$$

Les classes d'applications g appartenant à $L^p(X,\overline{\mathbb{R}^+})$ qui satisfont l'inégalité de la définition 2.10 seront dites associées à f dans $M^{1,p}(X,E)$. Si f appartient à $M^{1,p}(X,E)$, on peut définir :

$$\|f\|_{1,p} = \|f\|_p + \inf \|g\|_p$$

où l'infimum est pris sur toutes les application g associées à f dans $M^{1,p}(X,E)$. On peut alors remarquer que, muni de cette norme, l'espace $M^{1,p}(X,E)$ devient un espace de Banach. Un preuve de ce fait se situe dans [20]. On peut aussi définir une version locale de $M^{1,p}(X,E)$ noté $M^{1,p}_{\mathrm{loc}}(X,E)$ où l'on demande seulement sur les fonctions f et g précédentes une p-intégrabilité locale.

REMARQUE 2.1. — Lorsque $X = \mathbb{R}^n$, on peut montrer lorsque $p > 1$ que

$$M^{1,p}(X,E) = W^{1,p}(X,E).$$

Une preuve de ce fait est dans [9].

REMARQUE 2.2. — Lorsque X supporte des inégalités de Poincaré, l'ensemble des applications lipschitziennes bornées $Lip_\infty(X,E)$ est égal à $M^{1,\infty}(X,E)$. On a en particulier par la remarque 2.1 que $W^{1,\infty}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}) = Lip_\infty(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$.

Lorsque l'on parle d'une fonction f appartenant à $L^p(X,E)$ ou $M^{1,p}(X,E)$ (alors qu'il s'agit d'une classe d'équivalence d'applications), on sous-entend que l'on ne considère pas de représentants particuliers de f. Le lemme d'approximation suivant figure dans [10]. Il est l'analogue métrique du fait que les fonctions $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m)$ sont denses dans $W^{1,p}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m)$.

LEMME 2.4. — *Etant donné une fonction f de $M^{1,p}(X,\mathbb{R}^n)$ (avec $1 \leq p < +\infty$) alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une application lipschitzienne $\Phi : X \to \mathbb{R}^n$ telle que $\mu(\{f \neq \Phi\}) \leq \varepsilon$ et $\|f - \Phi\|_{1,p} \leq \varepsilon$.*

REMARQUE 2.3. — Appelons g_Φ une fonction associée à Φ dans $M^{1,p}(X,\mathbb{R}^n)$ donnée par le lemme 2.4. Un examen de la preuve donnée dans [10] montre qu'il existe une constante $C_n > 0$ tel que pour μ-pp x :

$$g(\phi)(x) \leq C_n(\|f(x)\| + g(x))$$

où g désigne une fonction associée à f dans $M^{1,p}(X,\mathbb{R}^n)$ et $\|.\|$ désigne une norme sur $\mathbb{R}^n$. De plus, si la mesure μ supportée par X est doublante alors $\mathrm{Lip}(\Phi)$ est bien contrôlée. Plus précisément, on a pour μ-pp x de X :

$$\mathrm{Lip}(\Phi)(x) \leq g_\Phi(x) \leq C_n(\|f(x)\| + g(x)).$$

Démonstration. — Soit B une boule fixée de X. En appliquant le théorème de Lusin à g_Φ sur B, on obtient pour tout $\varepsilon > 0$ un ensemble μ-mesurable $A_\varepsilon \subset B$ tel que $\mu(B \cap A_\varepsilon^c) \leq \varepsilon$ et tel que la restriction de g_Φ à A_ε est continue. Ainsi, on obtient que pour tout x de A_ε

$$\mathrm{Lip}_{|A_\varepsilon}(\Phi)(x) \leq g_\Phi(x).$$

Rappelons que comme Φ est lipschizienne, il existe une constante $L > 0$ telle que $\mathrm{Lip}(\Phi) \leq L$. En appliquant le lemme 2.3, on obtient :

$$\int_B \mathrm{Lip}(\Phi) d\mu \leq L\varepsilon + \int_B g_\Phi d\mu.$$

En faisant tendre ε vers 0, on a :

$$\frac{1}{\mu(B)} \int_B \mathrm{Lip}(\Phi) d\mu \leq \frac{1}{\mu(B)} \int_B g_\Phi d\mu.$$

Comme les points de Lebesgue de $\mathrm{Lip}(\Phi)$ et g_Φ constituent un ensemble de μ-mesure pleine de X, on obtient pour μ-pp x de X que :

$$\mathrm{Lip}(\Phi)(x) \leq g_\Phi(x) \leq C_n(\|f(x)\| + g(x)). \qquad \square$$

Remarque 2.4. — Pour les applications de $M^{1,p}_{\mathrm{loc}}(X,\mathbb{R}^n)$, on peut obtenir une version locale du lemme 2.4 en réalisant l'approximation sur une partie A de μ-mesure finie.

Remarque 2.5. — Lorsque X supporte une mesure μ doublante, en appliquant le théorème d'extension de [16], on obtient une version du lemme 2.4 valable pour les applications de $M^{1,p}(X,E)$ avec E un espace de Banach quelconque. Une preuve détaillée de ce théorème de densité se situe dans [12].

Dans le lemme suivant, on rappelle des propriétés de régularité des applications appartenant à un espace de Hajlasz $M^{1,p}(X,E)$ pour p assez grand. Ces résultats sont contenus dans [9] lorsque $E = \mathbb{R}$. Il est alors facile d'adapter les preuves de [9] au formalisme de l'intégrale de Bochner.

Lemme 2.5. — *Soient X un $(1,p)$-espace PI muni d'une mesure μ β-doublante et E un espace de Banach muni d'une norme $\|.\|$.*

(i) *Soient f appartenant à $L^1_{\mathrm{loc}}(X,E)$ et g appartenant à $L^q_{\mathrm{loc}}(X,\overline{\mathbb{R}^+})$ pour $q > p$. Si le couple (f,g) satisfait une inégalité de Poincaré de type $(1,p)$ alors f appartient à $M^{1,q}_{\mathrm{loc}}(X,E)$.*

(ii) *Posons* $N = \frac{\log \beta}{\log 2}$. *De plus, si* $p > N$ *et* h *appartient à* $M^{1,q}(X, E)$ *pour un certain* $q > p$ *alors* $\mathrm{Lip}(h)$ *appartient à* $L^q_{\mathrm{loc}}(X, \mathbb{R}^+)$. *De plus,* h *possède un représentant* $(1 - \frac{N}{q})$ *höldérien.*

2.6. Espaces de Shanmugalingam. — On définit un autre type d'espace de Sobolev fondé sur les espaces métriques qui s'avère coïncider avec un espace de Hajlasz dans le cas où X est un $(1, p)$-PI espace avec $p > 1$ (cette caractérisation est donnée dans [20]).

DÉFINITION 2.11. — *L'espace* $N^{1,p}(X, E)$ *est l'ensemble des applications* f *appartenant à* $L^p(X, E)$ *pour lesquelles il existe une application* ρ *qui est un* p*-gradient supérieur faible de* f. *Un* p*-gradient supérieur faible* ρ *de* f *est une application* μ*-mesurable positive et* p*-intégrable, définie pour un ensemble de courbes localement rectifiable* $\gamma : [0, T] \longmapsto X$ *de* p*-module négligeable et satisfait :*

$$|f(\gamma(T)) - f(\gamma(0))| \leq \int_\gamma \rho dH^1$$

où H^1 *désigne la mesure de Hausdorff* 1*-dimensionnelle déterminée par la métrique* d. *On rappelle que le* p*-module d'une famille* Γ *de courbes localement rectifiables, noté* $mod_p(\Gamma)$, *est :*

$$mod_p(\Gamma) = \inf\{\int \rho^p d\mu \mid \forall \gamma \in \Gamma : \int_\gamma \rho dH^1 \geq 1\}.$$

L'espace $N^{1,p}(X, E)$ muni de la norme :

$$\|f\|_{N^{1,p}} = \|f\|_p + \inf\{\|\rho\|_p \mid \rho \text{ est un } p\text{-gradient supérieur faible de} f\}$$

est un espace de Banach (une preuve de ce fait se situe dans [20]). Il existe aussi une version locale : $N^{1,p}_{\mathrm{loc}}(X, E)$ où l'on impose seulement sur f et ρ une p-intégrabilité locale.

3. Géométrie des espaces de Banach

Cette partie récapitule et adopte les notations employées dans l'article [5]. Soit E un espace de Banach. Notons $\|.\|$ sa norme.

3.1. Propriété FDA

DÉFINITION 3.1. — *On appelle un système inverse d'espaces de Banach la donnée d'une famille* $\{V_i, \theta_i\}_{i\in\mathbb{N}^*}$ *où les* V_i *sont des sous-espaces de dimension finie de* E *et les* $\theta_i : V_{i+1} \to V_i$ *sont des applications* 1*-lipschitziennes. De plus, une suite* (v_i) *est dite compatible si tout* i, v_i *appartient à* V_i *et vérifie :* $\theta_i(v_i) = v_{i-1}$. *On dira que les applications* θ_i *sont* ***compatibles*** *si elles satisfont la relation précédente pour toute suite compatible.*

On note la limite inverse de ce système inverse d'espaces de Banach : $\varprojlim V_i$. Elle consiste en l'ensemble des suites (v_i) compatibles pour lesquelles $\sup_i \|v_i\|$ est fini et est munie d'une structure naturelle d'espace vectoriel normé. On munit $\varprojlim V_i$ de la norme $\|\{v_i\}\| = \lim_{i\to+\infty} \|v_i\|$ où les éléments de $\varprojlim V_i$ sont notés $\{v_i\}$.

DÉFINITION 3.2. — *Une approximation de dimension finie (ou FDA en abrégé) de* E *est la donnée d'une suite de triplets* $\{(V_i, \theta_i, \pi_i)\}$ *avec* $\{V_i, \theta_i\}_{i\in\mathbb{N}^*}$ *désignant un système inverse d'espaces de Banach et où les applications compatibles* θ_i *induisent naturellement une projection* $\pi_i : E \to V_i$ *donnée par* $\pi_i(\{v_i\}) = v_i$

EXEMPLE 3.1. — Considérons $E = l^1(\mathbb{N}^*, \mathbb{R})$. Notons $(e_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ la base canonique de E. Autrement dit, on choisit $e_i = (0, \ldots 0, 1, 0, \ldots$ où le 1 apparait une seule fois à la $i$ème coordonnée. Dans ce cas là, on peut construire une FDA de prédilection pour E. On choisit tout bonnement $E_i = \mathrm{Vect}_{j\leq i}\{e_j\}$. Les projections π_i sont alors définies par : $\pi_i(u) = (u_1, \ldots, u_i)$. De plus, les applications θ_i sont les applications de restriction $\theta_i : \mathbb{R}^i \to \mathbb{R}^{i-1}$.

Sous ces conditions, on peut définir l'application

$$\pi : E \to \varprojlim V_i$$

par restriction et compatibilité : $\pi_{|V_i} = \pi_i$. De plus, π est une isométrie linéaire d'espaces de Banach. On peut remarquer qu'en fait les π_i ainsi obtenues sont de norme 1. On écrira en abrégé qu'une FDA de E est juste la donnée d'un couple $\{V_i, \pi_i\}$ satisfaisant les conditions de la définition 3.2 en omettant volontairement de parler des applications compatibles θ_i. Une FDA de E est équivalente au choix pertinent d'un système inverse d'espaces fermés de codimension finie. Une preuve de ce fait se situe dans l'article [6]. On remarque aussi que la notion de FDA n'est pas très exotique car il est prouvé dans [5] que tout espace de Banach séparable admet une FDA.

3.2. Propriété GFDA.

— Soit $\{V_i, \pi_i\}$ une FDA d'un espace de Banach E.

DÉFINITION 3.3. — *On appelle une suite décroissante et positive* $\rho_1, \ldots, \rho_N$ ε-*déterminée (avec* $\varepsilon > 0$*) si pour tout* i *appartenant à* $1, \ldots, N$*, les conditions :* $\|v\| - \|\pi_i(v)\| \leq \rho_i \|v\|$, $\|v'\| - \|\pi_i(v')\| \leq \rho_i \|v'\|$ *et* $\|\pi_N(v) - \pi_N(v')\| \leq N^{-1} \max(\|v\|, \|v'\|)$ *impliquent que* $\|v - v'\| \leq \varepsilon \max(\|v\|, \|v'\|)$.

DÉFINITION 3.4. — *Une FDA* $\{V_i, \pi_i\}$ *de* E *est dite une bonne approximation de dimension finie pour l'espace* E *si pour tout* $\varepsilon > 0$ *et pour toute suite* $\{\rho_i\}_{i \in \mathbf{N}^*}$ *décroissante et tendant vers* 0*, il existe un entier* N *pour lequel* $\rho_1, \ldots, \rho_N$ *est* ε-*déterminée.*

On dit que E est un espace de Banach GFDA s'il possède une bonne approximation de dimension finie.

REMARQUE 3.1. — Un corollaire du théorème de différentiation de l'article [5] est que $L^1(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ n'a pas la propriété GFDA. En effet, il suffit pour cela de considérer l'application $\Phi : \mathbb{R}^+ \to L^1(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ définie par $\phi(x)(t) = \chi_{[0,x]}(t)$ qui n'est Cheeger-différentiable en aucun point.

La propriété GFDA est une propriété difficile à vérifier dans la pratique. On rappelle une propriété importante des espaces de Banach GFDA établies dans [5].

PROPOSITION 3.1. — *Si* $\{V_i, \pi_i\}$ *est une bonne approximation de dimension finie de* E *alors l'application* $\pi : E \to \varprojlim V_i$ *induite par les* π_i *est une isométrie surjective d'espaces de Banach.*

3.3. Propriété RNP

DÉFINITION 3.5. — *On dit que* E *possède la propriété de Radon-Nikodym (RNP en abrégé) si pour tout espace mesuré* (T, Σ, μ) *et toute mesure* m *sur* Σ *à valeurs dans* E *absolument continue par rapport à* μ *et de variation finie, il existe* $f : T \to E$ *tel que* $f \in L^1(\mu)$ *et*

$$m(A) = \int_A f d\mu \text{ pour tout } A \in \Sigma.$$

On dira que E est un espace de Banach RNP s'il possède la propriété de Radon-Nikodym.

REMARQUE 3.2. — On sait que tout espace de Banach réflexif (comme les espaces L^p pour $1 < p < +\infty$) est un espace de Banach RNP. En revanche, $L^1([0, 1])$ n'est pas un espace de Banach RNP comme le montre le contre-exemple de la remarque 3.1.

3.4. Propriété ANP

DÉFINITION 3.6. — *Le couple (Y^*, V) a la propriété asymptotique de renormement (ANP en abrégé) si une suite $(v_k)_{k\in\mathbb{N}}$ d'éléments de V converge fortement étant donné qu'elle est faible* convergente et que la suite des normes converge vers la norme de la limite faible*.*

DÉFINITION 3.7. — *Un espace de Banach U possède la propriété asymptotique de renormement s'il existe un couple (Y^*, V) possédant l'ANP avec U isomorphe à V.*

On dira que E est un espace de Banach ANP s'il possède la propriété asymptotique de renormement.

REMARQUE 3.3. — Dans [6], il est montré qu'un espace de Banach qui est le dual d'un espace de Banach séparable est : isomorphe à un espace de Banach GFDA si et seulement si il possède RNP. De plus, il est rappelé qu'un espace de Banach RNP et séparable possède l'ANP.

4. Différentielle de Cheeger

4.1. Définitions et exemples. — Nous rappelons la définition de la Cheeger-différentiabilité comme introduite dans [4] qui généralise au cadre des espaces métriques la différentiabilité euclidienne comme le montre les exemples qui vont suivre.

Soient (X, d, μ) un espace métrique mesuré et A une partie μ-mesurable de X. Soient $f_1, \dots f_k : A \to \mathbb{R}$ des applications lipschitziennes.

DÉFINITION 4.1. — *On dit que la famille des $\{f_i\}$ est dépendante au premier ordre en A si pour μ-pp x appartenant à A, il existe une suite $(a_i(x))$ de réels non tous nuls telle que pour tout x' appartenant à A :*

$$\sum_i a_i(x)(f_i(x) - f_i(x')) = o(d(x, x')).$$

EXEMPLE 4.1. — Considérons $X = \mathbb{R}^n$. Si x est un point de différentiabilité des f_i (on sait que Lebesgue-presque tout point de $\mathbb{R}^n$ est un point de différentiabilité des f_i par le théorème de Rademacher) alors dire que la famille des $\{f_i\}$ est dépendante au premier ordre en x est équivalent à dire que la famille des $\{D_x f_i\}$ est liée. En effet, considérons une suite (a_i) de réels non tous nuls telle que pour tout x' appartenant à A :

$$(*) \qquad \sum_i a_i(f_i(x) - f_i(x')) = o(|x - x'|).$$

Soit ξ appartenant à $\mathbf{S}^{n-1}$. Prenons $x' = x + t\xi$ avec $t > 0$. En se rappelant que x est un point de différentiabilité des applications f_i, on obtient en divisant par $t > 0$ puis en faisant tendre t vers 0 dans la relation $(*)$ que pour tout $\xi \in \mathbf{S}^{n-1}$:

$$\sum_i a_i D_x f_i(\xi) = 0.$$

Ainsi, la famille des $\{D_x f_i\}$ est liée. Réciproquement, s'il existe une suite (a_i) de réels non tous nuls telle que :

$$\sum_i a_i D_x f_i = 0$$

alors, en utilisant la définition de la différentiabilité au point x pour chacune des applications f_i, on obtient que la famille des $\{f_i\}$ est dépendante au premier ordre en x.

Soit f une application lipschitzienne définie sur A à valeurs dans $\mathbb{R}$.

DÉFINITION 4.2. — *On dit que f dépend au premier ordre de la famille $\{f_i\}$ en A si la famille $\{f, f_1, \dots, f_k\}$ est dépendante au premier ordre en A.*

EXEMPLE 4.2. — Prenons $A = \mathbb{R}^n$. Considérons pour tout i appartenant à $[|1, \dots, n|]$, f_i comme étant la projection sur la i-ème composante (si (e_i) désigne la base canonique de $\mathbb{R}^n$, $f_i(x) =< x, e_i >$). Par le théorème de Rademacher sur $\mathbb{R}^n$, on a que toute application lipschitzienne $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dépend au premier ordre de la famille des $\{f_i\}$ en Lebesgue-presque tout x de $\mathbb{R}^n$.

DÉFINITION 4.3. — *On dit que la famille des $\{f_i\}$ est indépendante au premier ordre en A si pour μ-pp x de A, pour tout x' appartenant à A, une relation du type :*

$$\sum_i a_i(x)(f_i(x) - f_i(x')) = o(d(x, x'))$$

implique que $a_i(x) = 0$ pour tout i.

EXEMPLE 4.3. — Considérons $X = \mathbb{R}^n$. Si x est un point de différentiabilité des f_i (on sait que Lebesgue-presque tout point de $\mathbb{R}^n$ est un point de différentiabilité des f_i par le théorème de Rademacher) alors dire que la famille des $\{f_i\}$ est indépendante au premier ordre en x est équivalent à dire que que la famille des $\{D_x f_i\}$ est libre. En effet, considérons une suite (a_i) de réels que pour tout x' appartenant à A :

$$\sum_i a_i(f_i(x) - f_i(x')) = o(|x - x'|) \ (*).$$

Soit ξ appartenant à $\mathbf{S}^{n-1}$. Prenons $x' = x + t\xi$ avec $t > 0$. En se rappelant que x est un point de différentiabilité des applications f_i, on obtient en divisant par $t > 0$ puis en faisant tendre t vers 0 dans la relation $(*)$ que pour tout $\xi \in \mathbf{S}^{n-1}$:

$$\sum_i a_i D_x f_i(\xi) = 0.$$

Ainsi, si la famille des $\{D_x f_i\}$ est libre alors la famille des $\{f_i\}$ est indépendante au premier ordre en x. Réciproquement, considérons une relation du type :

$$\sum_i a_i D_x f_i = 0.$$

En utilisant la définition de la différentiabilité au point x pour chacune des applications f_i, on obtient si la famille des $\{f_i\}$ est indépendante au premier ordre en x que la famille des $\{D_x f_i\}$ est libre.

D'après [4], lorsque X est un espace PI, il existe une constante N ne dépendant que de la constante de doublement de la mesure μ et des constantes intervenant dans l'inégalité de Poincaré pour laquelle toute famille de $N+1$ fonctions lipschitziennes définies sur X à valeurs dans $\mathbb{R}$ est dépendante au premier ordre en X.

DÉFINITION 4.4. — *Une famille dénombrable de couples $\{A_\alpha, u_\alpha\}_{\alpha \in \mathbb{N}^*}$ est appelée un atlas si : les ensembles A_α sont μ-mesurables et s'il existe un entier N tel que pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^*$, il existe un entier $n_\alpha \leq N$ et une application lipschitzienne $u_\alpha : A_\alpha \to \mathbb{R}^{n_\alpha}$. De plus, cette famille satisfait les propriétés suivantes :*

(i) *$\bigcup_\alpha A_\alpha$ est de mesure pleine dans X c'est-à-dire $\mu(X \cap (\bigcup_\alpha A_\alpha)^c) = 0$.*

(ii) *pour chaque fonction lipschitzienne $f : X \to \mathbb{R}$, on a pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^*$, f dépend au premier ordre de la famille des $\{u_\alpha^1, \ldots, u_\alpha^n\}$ (où les u_α^i désignent la i-ème composante de u_α) en A_α.*

(iii) *pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^*$, la famille des composantes $\{u_\alpha^1, \ldots, u_\alpha^n\}$ est indépendante au premier ordre en A_α.*

En fait, les u_α sont à voir comme un système de cartes locales où les changements de cartes sont compatibles seulement presque partout. D'après [4], un espace PI admet un atlas. On peut alors définir une notion de différentiabilité relative à un atlas (ou ensemble de cartes) $\{A_\alpha, u_\alpha\}$ pour un espace métrique X.

DÉFINITION 4.5. — *Soit f une application définie sur X -un espace PI muni d'un atlas $\{A_\alpha, u_\alpha\}$-à valeurs dans un espace de Banach E. On dit que f est* ***Cheeger-différentiable*** *en $x \in A_\alpha$ s'il existe une application linéaire continue $\Phi_\alpha(x) : \mathbb{R}^{n_\alpha} \to E$ telle que pour tout $x' \in A_\alpha$, on ait :*

$$f(x') = f(x) + \Phi_\alpha(x)(u_\alpha(x') - u_\alpha(x)) + o(d(x, x')).$$

REMARQUE 4.1. — Le point (ii) de la définition 4.4 met en évidence le fait que toute application lipschitzienne $f : X \to \mathbb{R}^m$ est Cheeger-différentiable. De plus, considérons $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ une application lipschitzienne. Grâce au théorème de différentiation de [4], on a l'équivalence suivante : f est différentiable Lebesgue-pp si et seulement si f est Cheeger-différentiable Lebesgue-pp et ceci relativement à n'importe quel atlas.

4.2. Différentielle faible. — Considérons (X, d, μ) un $(1, p)$-espace PI et $(E, \|.\|)$ un espace de Banach.

4.2.1. *Rappels sur les plans tangents généralisés.* — Par une remarque présente dans l'article [5], on peut définir en μ-presque tout point de l'intersection de deux systèmes de coordonnées des fonctions de transition mesurables et bornées (en fait, des jacobiens mesurables et bornées) qui permettent de définir un fibré cotangent T^*X. Il s'agit d'un fibré vectoriel mesurable et qui porte une norme naturelle. Cette norme est caractérisée par le fait que tout application lipschitzienne $f : X \to \mathbb{R}$ définit une section mesurable Df dont la norme en restriction à chaque fibre est donnée par la constante de Lipschitz ponctuelle supérieure de f. Le fibré tangent TX est défini comme le dual du fibré T^*X et est muni de la norme duale. De plus par une remarque présente dans l'article [7], il provient directement de la définition d'un atlas que si $\{U_\alpha, u_\alpha\}$ et $\{V_\beta, v_\beta\}$ sont deux systèmes de cartes de deux atlas différents, alors la matrice des dérivées partielles $(\frac{du^i_\alpha}{dv^j_\beta})_{i,j}$ est définie presque partout et est inversible sur l'intersection $U_\alpha \cap V_\beta$. Cette quantité est un invariant bi-Lipschitz du fibré tangent mesurable TX. On appelle plan tangent généralisé en x et on note T_xX l'une des fibres mésurablement définies en un point x de X de TX préalablement défini. On note $|.|_x$ la norme en restriction au fibre T_xX provenant de la construction duale précédente. Elle provient en fait d'un produit scalaire mesurable défini sur le fibré tangent de X et est créée par la structure forte de différentiation portée par X (pour plus de détails, on peut consulter l'article [4] ainsi que l'article [13]).

4.2.2. *Exposé de la construction.* — En suivant le présentation faite dans [5], on va introduire la définition de dérivée faible généralisée (on dira simplement dérivée faible) d'une application $f : X \to E$ pour laquelle $\mathrm{Lip}(f)(x)$ est finie en μ-pp x de X. On décide ici que E soit un espace de Banach GFDA.

Soit f une application pour laquelle $\mathrm{Lip}(f)(x)$ est finie en μ-pp x de X et $\{V_i, \pi_i\}$ une FDA de E. Comme $\mathrm{Lip}(f)(x)$ est finie en μ-pp x de X alors, par le théorème de différentiation de [2], on sait que $f_i = \pi_i(f)$ est différentiable μ-pp. On obtient donc une famille compatible mais pas nécessairement bornée ponctuellement d'applications linéaires $D_x f_i : T_xE \to V_i$ définies pour μ-presque tout x et uniquement déterminées en dehors d'ensembles de μ-mesure nulle où T_xE désigne un plan tangent généralisé en x (notion développée dans [4]).

Si $(D_xf_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ est une famille bornée ponctuellement en μ-pp x de X alors, on peut alors définir la dérivée faible de f en x relativement à la FDA $\{V_i,\pi_i\}$. Il s'agit de l'application linéaire induite par les applications linéaires précédentes et que l'on note $\{D_xf_i\} : T_xE \to \varprojlim V_i$. La dérivée faible est définie pour μ-presque tout x et satisfait que $x \longmapsto \|\{D_xf_i\}\|$ est μ-mesurable.

Soit $\{A_\alpha,u_\alpha\}$ un atlas de X. Considérons F un espace vectoriel normé de dimension finie. Soit $f : X \to F$ une application Cheeger-différentiable en x relativement à l'atlas précédent (alors x appartient à A_α pour un certain α).

Définition 4.6. — *On dit que x est un point de continuité approchée de D_xf si : x est un point de densité de A_α et si $D_xf_{|A_\alpha}$ est approximativement continue en x vis-à-vis de la trivialisation $TX_{|A_\alpha} \to A_\alpha \times \mathbb{R}^{n_\alpha}$ induite par u_α.*

Dans la définition qui suit, on se sert de la définition précédente mais avec $F = V_i$.

Définition 4.7. — *Un point x est un point de continuité approchée faible si x est un point où la différentielle faible est définie et si pour tout i, x est un point de continuité approchée de D_xf_i.*

Remarque 4.2. — Grace à une remarque présente dans l'article [5], on sait que le fibré tangent TX est muni de la pseudo-distance $\|.\|_\infty = \lim_{i\to+\infty}\|.\|_i$ avec $\|.\|_i = (Df_i)^*(\|.\|_{V_i})$ qui vérifie $\|.\|_i \leq C\|.\|_{TX}$ où C est une constante ne dépendant que de la géométrie de X.

Pour les applications lipschitziennes $f : X \to E$, la différentielle faible est automatiquement (modulo le théorème de différentiation prouvée dans [4]) bien définie en μ-pp point de X. On veut ici montrer que pour une fonction f appartenant à $M^{1,p}_{\mathrm{loc}}(X,E)$ (pour p assez grand), sa différentielle faible existe en μ-pp point de X. Pour démontrer cela, il faut montrer que si $f : X \to F$ est une application lipschitzienne où F est un espace vectoriel normé de dimension finie alors en un point x où f est Cheeger-différentiable, $\mathrm{Lip}(f)(x)$ est uniformément comparable à $\|D_xf\|$ (avec des constantes indépendantes de l'espace clible). Dès que l'on aura obtenu cette dernière propriété, on aura que $x \longmapsto \|\{D_xf_i\}\|$ sera μ-mesurable. De plus, par le théorème de différentiation de [2], on aura que l'ensemble des points de continuité approchée faible de $\{D_xf_i\}$ sera de μ-mesure totale.

Pour terminer, on étendra ce dernier résultat aux espaces de Banach RNP. Lorsque la différentielle faible d'une application est bien définie, il est montré dans [6] qu'elle vit en fait dans E et non dans $\varprojlim V_i$. Une propriété des espaces de Banach RNP : l'ANP (dont la définition figure dans le paragraphe définition 3.6) permet de se ramener au cas d'un espace de Banach GFDA. Il faut de plus supposer que la mesure μ portée par X est **complète** et que l'application $f : X \to E$ dont on veut prouver la faible différentiabilité est continue (ou possède un représentant continue) ce qui est le cas si f appartient à $M^{1,p}(X, E)$ (pour p assez grand) pour pouvoir utiliser une notion de théorie descriptive des ensembles utilisée dans [7].

LEMME 4.1. — *Soient X un espace PI et F un espace vectoriel normé de dimension finie. Si $f : X \to F$ est une application* ***lipschitzienne*** *alors il existe $C > 0$ (ne dépendant que de X) telle que pour μ-pp x appartenant à X, on a :*

$$\|D_x f\| \leq C\mathrm{Lip}(f)(x).$$

Démonstration. — Soit π un élément de F^*. Alors, $\pi(f) : X \to \mathbb{R}$ est lipschitzienne. D'après le théorème de différentiation de [4] et d'après la comparaison de la norme de la Cheeger-différentielle et de la constante de Lipschitz ponctuelle supérieure d'une application lipschitzienne établie dans [13], on a pour μ-pp x de X et pour tout ξ de $T_x X$:

$$\|D_x(\pi(f))(\xi)\| \leq C\mathrm{Lip}(\pi(f))(x) \leq C\||\pi|\|\mathrm{Lip}(f)(x)$$

avec une constante $C > 0$ ne dépendant que de X. Or, on a la relation de commutation suivante :

$$\|D_x(\pi(f)(\xi)\| = \|\pi(D_x f(\xi))\|.$$

Et, par le théorème de Hahn-Banach, on a :

$$\||D_x f|\| = \sup_{|\xi|_x \leq 1, \||\pi|\| \leq 1} \|\pi(D_x f(\xi))\|$$

où $|.|_x$ désigne la norme provenant d'un produit scalaire mesurable sur le fibré tangent de X. On peut alors choisir une famille dénombrable de formes linéaires de norme plus petite que 1 et dense dans la boule unité de F^*. Une application du théorème de Hahn-Banach permet de conclure. □

LEMME 4.2. — *Soient X un $(1,p)$-espace PI supportant une mesure μ β-doublante et $(E, \|.\|)$ un espace de Banach GFDA. Posons $N = \frac{\log \beta}{\log 2}$. Si f est une application de $M^{1,q}(X, E)$ avec $q > \max\{N, p\}$ alors la différentielle faible de f existe μ-pp et $x \mapsto \|\{D_x f_i\}\|$ est μ-mesurable.*

Démonstration. — Notons $f_i = \pi_i(f)$. Alors f_i est une application de $M^{1,p}(X, V_i)$. Par le lemme 2.4, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\Phi_\varepsilon : X \longmapsto V_i$ lipschitzienne telle que $\mu(\{f_i \neq \Phi_\varepsilon\}) \leq \varepsilon$ et $\|f_i - \Phi_\varepsilon\|_{1,p} \leq \varepsilon$. Or, par le théorème de differentiation de [2], $D_x f_i$ existe en μ-pp x. Ainsi, d'après le lemme 4.1, on a : $\||D_x \Phi_\varepsilon|\| \leq C\mathrm{Lip}(\Phi_\varepsilon)(x)$ (avec C une constante indépendante de i) pour

μ-pp x de X. En notant $A_\varepsilon = \{x \in X | f_i(x) = \Phi(x)\}$ (on peut imposer que les ensembles A_ε soient croissants en ε tendant vers 0), on a pour μ-pp x de A_ε :

$$\begin{aligned}|||D_x\Phi_\varepsilon||| \leq C\mathrm{Lip}(\Phi_\varepsilon)(x) &= C\mathrm{Lip}(\Phi_\varepsilon)_{|A_\varepsilon}(x) \\ &= C\mathrm{Lip}(f_i)_{|A_\varepsilon}(x) \leq C\mathrm{Lip}(f_i)(x) \leq C\mathrm{Lip}(f)(x).\end{aligned}$$

De plus, en utilisant le théorème de [14], c'est-à-dire que l'exposant admissible dans les inégalités de Poincaré est ouvert dans $[1,+\infty[$ puis la caractérisation des différents espaces de Sobolev donnée dans [20], on obtient que pour $p > 1$: $N^{1,p}(X,V_i) = M^{1,p}(X,V_i)$. De plus, par un résultat de convergence dans les espaces de Sobolev établi dans [2], on a que si u_j converge vers u dans $N^{1,p}(X,V_i)$ alors u_j tend vers u dans $L^p(X,V_i)$ et $|||D_xu_j|||$ tend vers $|||D_xu|||$ dans $L^p(X,\mathbb{R}^+)$. Ainsi, on peut extraire une sous-suite de la suite $|||D_x\Phi_\varepsilon|||$ convergeant en μ-pp x vers $|||D_xf_i|||$ (car la suite (Φ_ε) est convergente dans $L^p(X,\mathbb{R}^+)$. De plus, la croissance des ensembles A_ε, nous permet de conclure que pour μ-pp x de X :

$$|||D_xf_i||| \leq C\mathrm{Lip}(f)(x).$$

Comme $\mathrm{Lip}(f)$ est dans $L^p(X,\mathbb{R}^+)$, le théorème de Lusin appliqué à $\mathrm{Lip}(f)$ permet alors de conclure. □

Remarque 4.3. — Le lemme 4.2 reste valable si f appartient à $M^{1,q}_{\mathrm{loc}}(X,E)$ (pour q assez grand).

Lemme 4.3. — *Soient (X,d,μ) un $(1,p)$-espace PI supportant une mesure β-doublante et $(E,\|.\|)$ un espace de Banach GFDA. Posons $N = \frac{\log\beta}{\log 2}$. Si f est une application de $M^{1,q}_{\mathrm{loc}}(X,E)$ avec $q > \max\{N,p\}$ alors l'application $x \mapsto \{D_xf_i\}$ est μ-mesurable.*

Démonstration. — Par le théorème de différentiation de [2], on a que les applications $x \longmapsto D_xf_i$ sont μ-mesurables pour tout i. Soit $A \subset X$ un ensemble de μ-mesure finie et strictement positive. Ainsi, par le théorème de Lusin, ces applications sont, sur même ensemble de mesure arbitrairement grande de A, uniformément continues en restriction à cet ensemble. De plus, par le lemme 4.2, ces applications sont bornées ponctuellement par une même constante. Comme $\lim_{i\to+\infty}\|\pi_j(D_xf_i)\| = \|\pi_j(\{D_xf_i\})\|$, le théorème d'Egorov donne une convergence uniforme sur A privé d'un ensemble de mesure arbitrairement petite. Comme les π_j sont une GFDA, on en déduit que l'application $x \mapsto \{D_xf_i\}$ est continue en restriction à un ensemble de mesure arbitrairement grand de A. Ainsi, l'application $x \mapsto \{D_xf_i\}$ est μ-mesurable. □

Remarque 4.4. — De plus, une suite v_k bornée converge faible* vers v_∞ si pour tout j : $\pi_j(v_k)$ converge vers $\pi_j(v_\infty)$. Cette condition est automatiquement satisfaite pour $v_k = D_x(f_k)$ dès que l'on sait que la différentielles faible de f en x est bien définie. Lorsque E est un espace de Banach RNP, pour pouvoir appliquer l'ANP, il faut montrer au préalable que la différentielle faible de f est à valeurs dans E (lorsque f est faiblement différentiable et possède un représentant continu). Cette dernière propriété est prouvée dans [7].

Remarque 4.5. — En fait, si E est un espace de Banach GFDA, on a, par [6], que E s'identifie par le biais de π au dual d'un espace de Banach séparable. Par [6], E possède donc l'ANP et par la définition 3.6, on en déduit que l'application $x \mapsto \{D_x f_i\}$ est continue en restriction à un ensemble de mesure arbitrairement grand. Ainsi, l'application $x \mapsto \{D_x f_i\}$ est μ-mesurable. On peut alors remarquer que le lemme 4.3 reste encore valable si E est un espace de Banach ANP (et donc reste valable si E est un espace de Banach RNP).

Nous pouvons donc terminer cette section avec une définition essentielle au bon déroulement de la preuve des deux théorèmes principaux.

Définition 4.8. — *On dit qu'une application $f : X \to E$ est finie-dimensionnelle au premier ordre en $x \in X$ s'il existe un sous-espace de dimension finie V de E pour lequel :*

$$\lim_{r \to 0} \frac{1}{r} \sup_{x' \in B_r(x)} d(f(x') - f(x), V) = 0$$

où $d(., V)$ désigne la distance dans E au sous-espace V.

On a le résultat suivant prouvé dans [5].

Proposition 4.1. — *Soit $\{V_i, \pi_i\}$ une approximation de dimension finie de E. Si $f : X \to E$ est finie-dimensionnelle au premier ordre en un point $x \in E$ et que x est un point où f est faiblement différentiable relativement au système $\{V_i, \pi_i\}$ alors f est différentiable en x.*

Ainsi, on se bornera à montrer qu'une application f de $M^{1,p}(X, E)$ (pour assez p grand en fonction de certains paramètres) est finie-dimensionnelle au premier ordre vis-à-vis de l'image de sa différentielle faible (que l'on sait de dimension finie grace à [4]).

5. Cœur de la preuve

Soit $\{A_\alpha, u_\alpha\}$ un atlas de X. On peut supposer que la différentielle des u_α (qui existe μ-presque partout par le théorème de Cheeger [4]) est inversible sur son image. En effet, les composantes de u_α sont indépendantes au premier ordre en μ-presque tout point x de A_α et comme T_xE est de dimension finie (par le théorème de Cheeger [4]) alors cela implique l'injectivité la différentielle de u_α en x. Quitte à corestreindre l'application u_α, on peut supposer que D_xu_α réalise un isomorphisme de T_xE vers $\mathbb{R}^{n_\alpha}$ (avec éventuellement un autre n_α) de norme plus petite que la constante de Lipschitz de u_α : L_α.

On peut alors définir :

$$\nu(x,i) = \sup_{\{\xi \in T_xE : \|\xi\| \leq 1\}} (\|\xi\|_\infty - \|\xi\|_i).$$

On peut remarquer que $\nu(.,i)$ est uniformément bornée, mesurable et converge μ-pp vers 0.

Théorème 5.1. — *Soient X un $(1,p)$-espace PI supportant une mesure μ β-doublante et E un espace de Banach GFDA. Notons $N = \frac{\log \beta}{\log 2}$. Si f appartient à $M^{1,q}_{\mathrm{loc}}(X,E)$ pour un certain $q > \max\{N,p\}$ alors f est Cheeger-différentiable μ-pp.*

Remarque 5.1. — Dire que f est Cheeger-différentiable μ-pp n'a pas beaucoup de sens, on a commis un abus de langage en sous-entendant que tous les représentants de f dans $M^{1,p}(X,E)$ sont Cheeger-différentiables μ-pp.

Démonstration. — On appelle encore f un représentant de f. Toutes les constantes intervenant durant les calculs seront appelées C en précisant certaines de leurs dépendances en indice lorsque cela sera nécessaire.

Première étape. — On peut toujours imposer $q > p > N = \frac{\log \beta}{\log 2}$. Ainsi, par le point (ii) du lemme 2.5, $\mathrm{Lip}(f)$ appartient à $L^q_{\mathrm{loc}}(X,\mathbb{R}^+)$ (et donc $\mathrm{Lip}(f)(x)$ est finie en μ-pp x).

Soit $\{V_i, \pi_i\}$ une bonne approximation de dimension finie de E. Comme $\{V_i, \pi_i\}$ est une bonne approximation de dimension finie de E alors π est un isométrie surjective de E vers $\varprojlim V_i$. On peut donc identifier la limite inverse $\varprojlim V_i$ à E. Notons $\pi_i(f) = f_i$. On a pour μ-pp x de X que

$$\mathrm{Lip}(f_i)(x) \leq \mathrm{Lip}(f)(x).$$

Ainsi, par [2] f_i est Cheeger-différentiable μ-pp. Et, par le lemme 4.3, f est faiblement différentiable μ-pp.

Soit $A \subset X$ tel que $0 < \mu(A) < +\infty$. Comme, par le lemme 4.2, $x \mapsto \|\{D_xf_i\}\|$ est mesurable. Par le théorème de Lusin, on obtient pour tout $\varepsilon > 0$

un ensemble $K_\varepsilon \subset A$ μ-mesurable tel que $\mu(A \cap K_\varepsilon^c) \le \varepsilon$. De plus, pour tout x de K_ε, on a $\|\{D_x f_i\}\|_{|K_\varepsilon} \le L_\varepsilon$ pour une certaine contante $L_\varepsilon \gg 1$.

Notons $\mathbf{D}(Du_\alpha)$ l'ensemble des points de A_α où u_α est différentiable. De même, notons $\mathbf{D}(\{Df_i\})$ l'ensemble des points de X où f est faiblement différentiable. On sait que ces deux ensembles sont de μ-mesure pleine dans X.

Quitte à faire des changements d'échelle, on peut supposer que pour tout α, pour tout $x \in \mathbf{D}(Du_\alpha)$ et pour tout $\xi \in \mathbb{R}^{n_\alpha}$ avec $\|\xi\| \le 1$

$$\|(D_x u_\alpha)^{-1}(\xi)\| \le \min(1, \frac{1}{L_\varepsilon}).$$

Sous ces conditions, pour tout $x \in \mathbf{D}(\{Df_i\}) \cap \mathbf{D}(Du_\alpha) \cap K_\varepsilon$, on a :

$$\|(\{D_x f_i\})(D_x u_\alpha)^{-1}(\xi)\| \le 1.$$

Notons $X_1 = \mathbf{D}(\{Df_i\}) \cap \mathbf{D}(Du_\alpha)$.

Soit $\varepsilon_1 > 0$. Par le théorème d'Egorov, il existe un ensemble $Z_{\varepsilon_1} \subset K_\varepsilon$ μ-mesurable tel que $\nu(.,i)$ converge uniformément sur Z_{ε_1} et pour lequel $\mu(K_\varepsilon \cap Z_{\varepsilon_1}^c) \le \varepsilon_1$. Autrement dit, il existe une suite ρ_i décroissante et tendant vers 0 telle que pour tout x de Z_{ε_1} : $\nu(x,i) \le \rho_i$.

Notons X_2 inclus dans $\mathbf{D}(\{Df_i\})$ l'ensemble des points de continuité approchée de $\{Df_i\}$. Cet ensemble est de μ-mesure pleine. Considérons alors $X_3 = X_1 \cap X_2$.

Soient $\varepsilon_2, \varepsilon_3 > 0$. Soit $x \in X_3$.

Comme x est un point de continuité approchée de $D_x f_j$ pour tout j alors pour un certain α, x appartient à A_α. Sous ces conditions, il existe un certain réel r_0 et un sous-ensemble μ-mesurable θ_r de $B_r(x) \cap A_\alpha$ tels que pour tout $r \le r_0$:

$$\frac{\mu(\theta_r)}{\mu(B_r(x))} \ge 1 - \varepsilon_2.$$

De plus, pour tout $x' \in \theta_r$, pour tout $\xi \in \mathbb{R}^{n_\alpha}$ avec $\|\xi\| \le 1$ et pour tout M, on a :

$$\|(D_{x'} f_j)(D_{x'} u_\alpha)^{-1}(\xi) - (D_x f_j)(D_x u_\alpha)^{-1}(\xi)\| \le \frac{1}{M}.$$

En utilisant le fait que $\{V_i, \pi_i\}$ est une bonne approximation de dimension finie de E, il existe un rang M tel que la suite ρ_i soit ε_3-déterminée. On obtient alors pour tout $x' \in \theta_r \cap Z_{\varepsilon_1}$, pour tout $\xi \in \mathbb{R}^{n_\alpha}$ avec $\|\xi\| \le 1$ et pour tout i :

$$\|(D_{x'} f_i)(D_{x'} u_\alpha)^{-1}(\xi) - (D_x f_i)(D_x u_\alpha)^{-1}(\xi)\| \le \varepsilon_3.$$

On obtient donc pour tout $x' \in \theta_r \cap Z_{\varepsilon_1}$, pour tout $\xi \in \mathbb{R}^{n_\alpha}$ avec $\|\xi\| \le 1$:

$$\|\{D_{x'} f_i\}(D_{x'} u_\alpha)^{-1}(\xi) - \{D_x f_i\}(D_x u_\alpha)^{-1}(\xi)\| \le \varepsilon_3.$$

En notant $V_x = \mathbf{Im}(\{D_x f_i\})$ (qui est de dimension finie par [4]), on a pour tout $x' \in \theta_r \cap Z_{\varepsilon_1}$, pour tout $\xi \in \mathbb{R}^{n_\alpha}$ avec $\|\xi\| \leq 1$ que

$$d\big(\{D_{x'} f_i\}(D_{x'} u_\alpha)^{-1}(\xi), V)\big) \leq \varepsilon_3.$$

Soit i un entier et considérons une forme linéaire $l \in V_i^*$ de norme plus petite que 1 s'annulant sur $\mathbf{Im}(D_x f_i) \subset V_k$. Pour tout $x' \in \theta_r \cap Z_{\varepsilon_1}$ et pour tout $\xi \in \mathbb{R}^{n_\alpha}$ avec $\|\xi\| \leq 1$, il vient par la relation précédente composée par l :

$$\begin{aligned}
&|l\left((D_{x'} f_i)(D_{x'} u_\alpha)^{-1}(\xi)\right) - l\big((D_x f_i)(D_x u_\alpha)^{-1}(\xi)\big)| \\
&\qquad\qquad = |l\left((D_{x'} f_i)(D_{x'} u_\alpha)^{-1}(\xi)\right)| \\
&\qquad\qquad = |(D_{x'}(l(f_i)))(D_{x'} u_\alpha)^{-1}(\xi)| \\
&\qquad\qquad \leq \varepsilon_3.
\end{aligned}$$

Notons X_4 l'ensemble des points de continuité approchée de $\mathrm{Lip}(f)$ et X_5 l'ensemble des points de Lebesgue de $\mathrm{Lip}(f)$. Notons alors $X_6 = Z_{\varepsilon_1} \cap X_3 \cap X_4 \cap X_5$. Par le théorème de Lusin, pour tout $\gamma > 0$, il existe un ensemble compact $K_\gamma \subset X_6$ tel que $\mu(X_6 \cap K_\gamma^c) \leq \gamma$ et tel que $\mathrm{Lip}(f)_{|K_\gamma}$ est continue. Par le théorème de Heine ($\mathrm{Lip}(f)_{|K_\gamma}$ est continue), pour tout $\varepsilon_5 > 0$, il existe η tel que pour tout $x, y \in K_\gamma$ avec $d(x,y) \leq \eta$, on a $|\mathrm{Lip}(f)(x) - \mathrm{Lip}(f)(y)| \leq \varepsilon_5$. Soit $\varepsilon_6 > 0$. Définissons pour $y \in K_\gamma$,

$$r_y = \sup_{0<r\leq\eta} \{\forall x \in B_r(y) \mid |f(x) - f(y)| \leq d(x,y)(\mathrm{Lip}(f)(y) + \varepsilon_6)\}.$$

Notons $\Gamma_k = \{y \in K_\gamma \mid r_y \geq 2^{-k}\eta\}$. Alors, Γ_k est fermé (car $\mathrm{Lip}(f)$ est continue en restriction à Γ_k) et donc est un ensemble μ-mesurable. De plus, on a $\lim_{k\to+\infty} \mu(\Gamma_k) = \mu(K_\gamma)$. Ainsi, pour γ suffisamment petit et k suffisamment grand, on a que $\mu(\Gamma_k) > 0$. Posons alors $X_7 = \Gamma_k \cap X_6$ (qui est un ensemble de mesure pleine dans Γ_k). Considérons x un point de densité de X_7. Alors, pour tout $\varepsilon_7 > 0$, il existe $r_{\varepsilon_7} > 0$ tel que pour tout $r \leq r_{\varepsilon_7}$, on a

$$\frac{\mu(\Gamma_k \cap B_r(x))}{\mu(B_r(x))} \geq 1 - \varepsilon_7.$$

Pour un tel x, on montre que f est finie-dimensionnelle au premier ordre vis-à-vis de V_x.

Deuxième étape. — Soit $r > 0$ (qui sera choisi par la suite très petit). Notons $A_0 = B_{2\lambda r}(x)$. Comme f_i appartient à $M^{1,q}_{\mathrm{loc}}(X, V_i)$, en appliquant le lemme 2.4 à i fixé, on obtient pour tout $\varepsilon_4 > 0$, des applications $\phi_{i,j} : A_0 \to V_k$ lipschitziennes vérifiant :

$$\mu\left(x \in A_0 \mid \phi_{i,j} \neq f_i\right) \leq \frac{\varepsilon_4}{2^j} \text{ et } \|\phi_{i,j} - f_i\|_{M^{1,q}(A_0,V_i)} \leq \frac{\varepsilon_4}{2^j}.$$

Soit y un point de $B_r(x)\cap\Gamma_k$ (y est un point de continuité de f car $\mathrm{Lip}(f)(y)$ est finie). Considérons une suite de boules (B_j) incluses dans A_0 et définies par $B_0 = B_{2r}(x)$ et $B_j = B_{\frac{r}{2^j}}(y)$ si $j \geq 1$. On a alors

$$\left|l(f_i)(y) - \frac{1}{\mu(B_0)}\int_{B_0} l(f_i)d\mu\right| \leq \sum_{j=0}^{+\infty}\left|\frac{1}{\mu(B_j)}\int_{B_j} l(f_i)d\mu - \frac{1}{\mu(B_{j+1})}\int_{B_{j+1}} l(f_i)d\mu\right|.$$

On a pour tout j :

$$\begin{aligned}\Big|\frac{1}{\mu(B_j)}\int_{B_j} l(f_i)d\mu &- \frac{1}{\mu(B_{j+1})}\int_{B_{j+1}} l(f_i)d\mu\Big|\\ &\leq \frac{2}{\mu(B_{j+1})}\int_{B_j}\big|l(f_i) - l(\phi_{i,j})\big|d\mu\\ &\quad + \Big|\frac{1}{\mu(B_j)}\int_{B_j} l(\phi_{i,j})d\mu - \frac{1}{\mu(B_{j+1})}\int_{B_{j+1}} \phi_{i,j}d\mu\Big|.\end{aligned}$$

Par l'inégalité d'Hölder, on a :

$$\frac{1}{\mu(B_{j+1})}\int_{B_j}\big|l(f_i) - l(\phi_{i,j})\big|d\mu \leq \frac{\varepsilon_4}{2^j}\frac{\mu(B_j)^{1-\frac{1}{q}}}{\mu(B_{j+1})} \leq C\frac{\beta^{\frac{j}{q}}}{2^j}\frac{\varepsilon_4}{\mu(A_0)}.$$

Comme X est un $(1,p)$-espace PI, on obtient :

$$\begin{aligned}\Big|\frac{1}{\mu(B_j)}\int_{B_j} l(\phi_{i,j})d\mu &- \frac{1}{\mu(B_{j+1})}\int_{B_{j+1}} l(\phi_{i,j})d\mu\Big|\\ &\leq C\frac{r}{2^j}\left(\frac{1}{\mu(\lambda B_j)}\int_{\lambda B_j}\mathrm{Lip}(l(\phi_{i,j}))^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}}.\end{aligned}$$

Notons $A_{i,j} = \{x \in A_0 : l(\phi_{i,j})(x) = l(f_i)(x)\}$. On procède au découpage suivant :

$$\begin{aligned}\int_{\lambda B_j}\mathrm{Lip}(l(\phi_{k,j}))^p d\mu = &\int_{\lambda B_j\cap A_{i,j}^c}\mathrm{Lip}(l(\phi_{i,j}))^p d\mu\\ &+\int_{\lambda B_j\cap\Gamma_k\cap\theta_{2\lambda r}\cap A_{i,j}}\mathrm{Lip}(l(\phi_{i,j}))^p d\mu\\ &+\int_{\lambda B_j\cap\Gamma_k\cap\theta_{2\lambda r}^c\cap A_{i,j}}\mathrm{Lip}(l(\phi_{i,j}))^p d\mu\\ &+\int_{\lambda B_j\cap\Gamma_k^c\cap A_{i,j}}\mathrm{Lip}(l(\phi_{i,j}))^p d\mu.\end{aligned}$$

Par la remarque 2.3, on a pour μ-pp x de A_0 :

$$\mathrm{Lip}(l(\phi_{i,j})) \leq C_i(\|f(x)\| + g(x))$$

où g désigne une fonction associée à f dans $M^{1,q}_{\mathrm{loc}}(A_0, E)$. Ainsi, par le théorème de convergence dominée appliqué à i fixé, on obtient une quantité $\alpha(\varepsilon_4)$ tendant vers 0 lorsque ε_4 tend vers 0 telle que

$$\int_{\lambda B_j \cap A_{i,j}^c} \mathrm{Lip}(l(\phi_{i,j}))^p d\mu \leq \alpha(\varepsilon_4).$$

Ainsi, comme μ est β-doublante, on obtient :

$$\frac{1}{\mu(\lambda B_j)} \int_{\lambda B_j \cap A_{i,j}^c} \mathrm{Lip}(l(\phi_{i,j}))^p d\mu \leq C\beta^j \frac{\alpha(\varepsilon_4)}{\mu(A_0)}.$$

En appliquant le lemme 2.3 à une partie du type $A_{i,j} \cap B$ où B désigne un ensemble μ-mesurable, on obtient la relation suivante :

$$\int_{A_{i,j} \cap B} \mathrm{Lip}(l(\phi_{i,j})) d\mu \leq \int_{A_{i,j} \cap B} \mathrm{Lip}(l(f_k)) d\mu.$$

De plus, par définition de la Cheeger-différentiabilité en x (x appartient à A_α pour un certain α), on a :

$$l(f_i)(x) - l(f_i)(x') = (D_x(l(f_i))(u_\alpha(x) - u_\alpha(x')) + o(d(x, y)).$$

Ainsi, pour tout i, on obtient la relation suivante :

$$\mathrm{Lip}(l(f_i))(x) \leq L_\varepsilon \|D_x(l(f_i))\|.$$

Par définition de $Z_{\varepsilon_1} \cap \theta_{2\lambda r}$, on obtient pour r assez petit :

$$\int_{\lambda B_j \cap Z_{\varepsilon_1} \cap \theta_{2\lambda r} \cap A_{i,j}} \mathrm{Lip}(l(f_i))^p d\mu \leq L_\varepsilon^p \varepsilon_3^p \mu(\lambda B_j).$$

Comme $\Gamma_k \subset Z_{\varepsilon_1}$, on obtient :

$$\int_{\lambda B_j \cap \Gamma_k \cap \theta_{2\lambda r} \cap A_{i,j}} \mathrm{Lip}(l(\phi_{i,j}))^p d\mu \leq L_\varepsilon^p \varepsilon_3^p \mu(\lambda B_j).$$

Ensuite, par définition de Z_{ε_1}, on obtient :

$$\int_{\lambda B_j \cap Z_\varepsilon \cap \theta_{2\lambda r}^c \cap A_{i,j}} \mathrm{Lip}(l(f_i))^p d\mu \leq L_\varepsilon^{2p} \mu(\theta_r^c \cap A_0).$$

Par définition de $Z_{\varepsilon_1} \cap \theta_{2\lambda r}^c$, il vient pour r assez petit :

$$\frac{1}{\mu(\lambda B_j)} \int_{\lambda B_j \cap Z_{\varepsilon_1} \cap \theta_{2\lambda r}^c \cap A_{i,j}} \mathrm{Lip}(l(f_i))^p d\mu \leq C L_\varepsilon^{2p} \beta^j \varepsilon_2.$$

Comme $\Gamma_k \subset Z_{\varepsilon_1}$, on obtient finalement :

$$\frac{1}{\mu(\lambda B_j)} \int_{\lambda B_j \cap \Gamma_k \cap \theta_r^c \cap A_{i,j}} \mathrm{Lip}(l(\phi_{i,j}))^p d\mu \leq C L_\varepsilon^{2p} \beta^j \varepsilon_2.$$

Ensuite, par l'inégalité d'Hölder, on a :

$$\begin{aligned}\int_{\lambda B_j\cap\Gamma_k^c\cap A_{i,j}}\mathrm{Lip}(l(f_i))^p d\mu \leq\ & \mu(\lambda B_j\cap\Gamma_k^c)^{1-\frac{p}{q}}\left(\int_{\lambda B_j}\mathrm{Lip}(f)^q d\mu\right)^{\frac{p}{q}}\\ \leq\ & \mu(A_0\cap\Gamma_k^c)^{1-\frac{p}{q}}\left(\int_{A_0}\mathrm{Lip}(f)^q d\mu\right)^{\frac{p}{q}}.\end{aligned}$$

Comme x est un point de densité de Γ_k, on a pour r assez petit :

$$\frac{1}{\mu(\lambda B_j)}\int_{\lambda B_j\cap\Gamma_k^c\cap A_{i,j}}\mathrm{Lip}(l(\phi_{i,j}))^p d\mu \leq C\beta^j\varepsilon_7^{1-\frac{p}{q}}\left(\frac{1}{\mu(A_0)}\int_{A_0}\mathrm{Lip}(f)^q d\mu\right)^{\frac{p}{q}}.$$

En sommant sur j à i fixé les estimations précédentes (les séries de terme général $\frac{1}{2^j}$, $\frac{\beta^{\frac{j}{p}}}{2^j}$, $\frac{\beta^{\frac{j}{q}}}{2^j}$ sont convergentes car $q>p>N=\frac{\log\beta}{\log 2}$) puis en faisant tendre ε_4 vers 0, on obtient pour tout i, pour tout l de V_i^* s'annulant sur $\mathbf{Im}(D_x f_i)$, pour tout r suffisamment petit et pour tout y de $B_r(x)\cap\Gamma_k$:

$$\begin{aligned}&\left|l(f_k)(y)-\frac{1}{\mu(B_0)}\int_{B_0}l(f_k)d\mu\right|\\ &\qquad\leq C_\varepsilon r\left(\varepsilon_2^{\frac{1}{p}}+\varepsilon_3+\varepsilon_7^{(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})}\left(\frac{1}{\mu(A_0)}\int_{A_0}\mathrm{Lip}(f)^q d\mu\right)^{\frac{1}{q}}\right).\end{aligned}$$

Ainsi, en utilisant le théorème de Hahn-Banach et la définition de limite inverse, il vient que pour tout $y\in B_r(x)\cap\Gamma_k$:

$$\begin{aligned}d\left(f(x)-f(y),V_x)\right) &= \sup_{i,l_{|\mathbf{Im}(D_x f_i)}=0}\left(l(f_i(x))-l(f_i(y))\right)\\ &\leq C_\varepsilon r\left(\varepsilon_2^{\frac{1}{p}}+\varepsilon_3+\varepsilon_7^{(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})}\left(\tfrac{1}{\mu(A_0)}\int_{A_0}\mathrm{Lip}(f)^q d\mu\right)^{\frac{1}{q}}\right).\end{aligned}$$

Comme x est un point de Lebesgue de $\mathrm{Lip}(f)$, on obtient (en notant $C_x=\mathrm{Lip}(f)(x)$) :

$$\limsup_{r\to 0}\frac{1}{r}\sup_{y\in B_r(x)\cap\Gamma_k}d\left(f(x)-f(y),V_x)\right)\leq C_\varepsilon\left(\varepsilon_2^{\frac{1}{p}}+\varepsilon_3+\varepsilon_7^{(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})}C_x\right).$$

Le lemme qui suit donne une estimation quantitative de la proximité d'un élément de $B_r(x)$ à $B_r(x)\cap\Gamma_k$ (une preuve de ce fait s'obtient en raisonnant par l'absurde et en utilisant le lemme 2.1).

LEMME 5.1. — *Il existe une constante $C>0$ (dépendant uniquement de β) telle que pour tout r suffisamment petit, pour tout $y\in B_r(x)$, il existe $z\in B_r(x)\cap\Gamma_k$ tel que $d(y,z)\leq C\varepsilon_7^{\frac{1}{N}}r$.*

Soient $a \in V_x$ et $y \in B_r(x)$. Par le lemme 5.1, il existe $z \in B_r(x) \cap \Gamma_k$ tel que $d(y,z) \leq C\varepsilon_7^{\frac{1}{N}} r$. Pour r suffisamment petit, on a $C\varepsilon_7^{\frac{1}{N}} r \leq 2^{-k}\eta$. Par définition de Γ_k et K_γ, on a donc

$$\|f(y) - f(z)\| \leq d(y,z)(\mathrm{Lip}(f)(y) + \varepsilon_6) \leq C\varepsilon_7^{\frac{1}{N}} r(C_x + \varepsilon_5 + \varepsilon_6).$$

Comme $\|f(x) - f(y) + a\| \leq \|f(x) - f(z) + a\| + \|f(y) - f(z)\|$, on obtient ainsi :

$$\begin{aligned}\limsup_{r\to 0} \frac{1}{r} \sup_{y \in B_r(x)} & d\left(f(x) - f(y), V_x\right)\right) \\ & \leq C_\varepsilon \left(\varepsilon_2^{\frac{1}{p}} + \varepsilon_3 + \varepsilon_7^{(\frac{1}{p} - \frac{1}{q})} C_x\right) + C\varepsilon_7^{\frac{1}{N}} (C_x + \varepsilon_5 + \varepsilon_6).\end{aligned}$$

En faisant tendre les différents ε_i vers 0, on en déduit que f est Cheeger-différentiable en μ presque tout point de Γ_k. Ainsi, on obtient que f est Cheeger-différentiable μ-pp.

Troisième étape. — Il ne reste plus qu'à vérifier que la Cheeger-différentielle de f est mesurable et unique.

Soit $x \in A_\alpha$ pour lequel f est différentiable en x. Pour $x' \in A_\alpha$, on a en composant par π_i dans la définition de la différentiabilité en x :

$$f_i(x') = f_i(x) + \pi_i(\Phi_\alpha)(u_\alpha(x') - u_\alpha(x)).$$

Or, par le théorème de [2], on sait que pour tout i : $\pi_i(\Phi_\alpha)$ est déterminée de manière unique modulo des ensembles de μ-mesure nulle. Ainsi, pour tout α, Φ_α est déterminée de manière unique modulo des ensembles de μ-mesure nulle. Donc la différentielle de f est déterminée de manière unique modulo des ensembles de μ-mesure nulle.

Par unicité, on a montré que $D_x f$ et $\pi^{-1}(\{D_x f_i\}) : T_x X \to E$ coïncide μ-presque partout. Or, en remarquant que $D_x f_i$ est μ-mesurable pour tout i et en utilisant le fait que E est un espace de Banach GFDA, on obtient que la différentielle de f est μ-mesurable. □

REMARQUE 5.2. — L'exposant N du théorème 5.1 est optimal. En effet, si on choisit $X = \mathbb{R}^n$, $\mu = \lambda_n$ la mesure de Lebesgue n-dimensionnelle et $E = \mathbb{R}$, en utilisant le fait que $W^{1,n}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) = M^{1,n}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ et que $(\mathbb{R}^n, \lambda_n)$ est un $(1,1)$-espace PI, on trouve que la constante N du théorème 5.1 est n (car la constante de doublement de la mesure λ_n est 2^n). Or, par un contre-exemple de Stein (on peut trouver des conditions plus précises dans [1]), on sait qu' il existe une application de $W^{1,n}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ (pour $n \geq 2$) qui n'est différentiable en aucun point.

Corollaire 5.1. — *Soit X un $(1,q)$-espace PI supportant une mesure μ β-doublante avec $q > N = \frac{\log\beta}{\log 2}$. Soit E un espace de Banach GFDA. Si f appartient à $M^{1,q}_{\mathrm{loc}}(X,E)$ alors f est Cheeger-différentiable μ-pp.*

Démonstration. — Par le théorème de [14] (en fait, ce n'est pas une application directe du théorème de [14] mais en utilisant le théorème de Hahn-Banach et un chainage de boules, on peut étendre le théorème de [14] pour des applications lipschitziennes à valeurs banachiques), X devient alors un $(1,p)$-espace PI pour un certain p vérifiant $q > p > N$. Une application du théorème 5.1 permet alors de conclure. □

Corollaire 5.2. — *Soit X un $(1,q)$-espace PI supportant une mesure μ β-doublante avec $q > N = \frac{\log\beta}{\log 2}$. Soit E un espace de Banach GFDA. Si f appartient à $N^{1,q}_{\mathrm{loc}}(X,E)$ alors f est Cheeger-différentiable μ-pp.*

Démonstration. — Par le théorème principal de [14], X est un $(1,p)$-PI espace pour un certain p tel que $q > p > N$. Ensuite, par la caractérisation des espaces de Sobolev généralisés sur les espaces PI de [20], on sait qu'il existe une application $\rho \in L^q(X,\mathbb{R}^+)$ telle que le couple $(\pi_k(f),\rho)$ satisfasse une inégalité de Poincaré de type $(1,p)$ (avec des constantes qui ne dépendent que de la constante de doublement de X et des constantes intervenant dans les inégalités de Poincaré faible de type $(1,p)$). Ainsi, comme $\{\pi_k, V_k\}$ est une approximation de dimension finie de E, on a par le lemme de Fatou que le couple (f,ρ) satisfait une inégalité de Poincaré de type $(1,p)$. Le point (i) du lemme 2.5 montre que f appartient à $M^{1,q}_{\mathrm{loc}}(X,E)$. Le corollaire 5.1 permet de conclure. □

Corollaire 5.3. — *Soit X un $(1,q)$-espace PI supportant une mesure μ β-doublante avec $q > N = \frac{\log\beta}{\log 2}$. Soit E un espace de Banach GFDA. Si $f : X \to E$ est une application mesurable telle que* $\mathrm{Lip}(f)$ *appartient à $L^q_{\mathrm{loc}}(X,\mathbb{R}^+)$ alors f est Cheeger-différentiable μ-pp.*

Démonstration. — Par le lemme de Fuglede (on peut se référer au théorème 2 de [8]), il existe un ensemble A de courbes de p-module nul tel que pour toute courbe (localement rectifiable) $\gamma \notin A$ paramétrée par sa longueur d'arc

$$\int_\gamma (\mathrm{Lip}(f))^q dH^1 < +\infty.$$

Soient x et y deux points de X. Choisissons une courbe $\gamma \notin A$ paramétrisée par sa longueur d'arc et reliant x et y. Soit $\pi \in E^*$. Définissons $\Phi_\gamma(s) = \pi(f(\gamma(s)))$: $[0,1] \to \mathbb{R}$. Grace à l'absolue continuité de Φ_γ, on a :

$$|\pi(f(x)) - \pi(f(y))| = |\int_{[0,1]} (\Phi_\gamma)'(t)| \le |||\pi||| \int_\gamma \mathrm{Lip}(f) dH^1.$$

En utilisant le théorème de Hahn-Banach, on obtient que $\mathrm{Lip}(f)$ est un q-gradient supérieur faible de f. Ainsi, f appartient à $N^{1,q}_{\mathrm{loc}}(X,E)$ et le corollaire 5.2 permet de conclure. □

Théorème 5.2. — *Soient X un $(1,p)$-espace PI muni d'une mesure μ* ***complète*** *et β-doublante et E un espace de Banach RNP. Notons $N=\frac{\log\beta}{\log 2}$. Si f appartient à $M^{1,q}_{\mathrm{loc}}(X,E)$ pour un certain $q>\max\{N,p\}$ alors f est Cheeger-différentiable μ-pp.*

Démonstration. — On peut toujours supposer que E est séparable. En effet, comme f est μ-mesurable, il existe un ensemble A de μ-mesure nulle telle que $f(X\cap A^c)$ est séparable (voir [12]). Comme RNP est héréditairement séparable (voir [17]), on peut remplacer E par $\overline{\mathrm{Vect}(f(X\cap A^c))}$.

Ainsi, par le lemme 4.2, la différentielle faible de f est bien définie μ-pp. De plus, en appliquant l'ANP du couple $(\varprojlim V_i, E)$, on en déduit une conclusion analogue au lemme 4.3. De plus, par [7], la différentielle faible est à valeurs dans E (la règle de chaine est valable car f est faiblement différentiable en μ-pp x de X et f possède un représentant continu par le point (ii) du lemme 2.5). Ainsi, en utilisant l'ANP du couple $(\varprojlim V_i, E)$ (au lieu de la propriété GFDA), un raisonnement analogue à celui effectué pour démontrer le théorème 5.1 permet de conclure. □

BIBLIOGRAPHIE

[1] A. Alberico & A. Cianchi – « Differentiability properties of Orlicz-Sobolev functions », *Ark. Mat.* **43** (2005), p. 1–28.

[2] Z. M. Balogh, K. Rogovin & T. Zürcher – « The Stepanov differentiability theorem in metric measure spaces », *J. Geom. Anal.* **14** (2004), p. 405–422.

[3] M. Bourdon & H. Pajot – « Poincaré inequalities and quasiconformal structure on the boundary of some hyperbolic buildings », *Proc. Amer. Math. Soc.* **127** (1999), p. 2315–2324.

[4] J. Cheeger – « Differentiability of Lipschitz functions on metric measure spaces », *Geom. Funct. Anal.* **9** (1999), p. 428–517.

[5] J. Cheeger & B. Kleiner – « On the differentiability of Lipschitz maps from metric measure spaces to Banach spaces », in *Inspired by S. S. Chern*, Nankai Tracts Math., vol. 11, World Sci. Publ., Hackensack, NJ, 2006, p. 129–152.

[6] ———, « Characterization of the Radon-Nikodým property in terms of inverse limits », *Astérisque* **321** (2008), p. 129–138.

[7] ———, « Differentiability of Lipschitz maps from metric measure spaces to Banach spaces with the Radon-Nikodým property », *Geom. Funct. Anal.* **19** (2009), p. 1017–1028.

[8] B. Fuglede – « Extremal length and functional completion », *Acta Math.* **98** (1957), p. 171–219.

[9] P. Hajlasz & P. Koskela – « Sobolev met Poincaré », *Mem. Amer. Math. Soc.* **145** (2000).

[10] J. Heinonen – *Lectures on analysis on metric spaces*, Universitext, Springer, New York, 2001.

[11] J. Heinonen & P. Koskela – « Quasiconformal maps in metric spaces with controlled geometry », *Acta Math.* **181** (1998), p. 1–61.

[12] J. Heinonen, P. Koskela, N. Shanmugalingam & J. T. Tyson – « Sobolev classes of Banach space-valued functions and quasiconformal mappings », *J. Anal. Math.* **85** (2001), p. 87–139.

[13] S. Keith – « A differentiable structure for metric measure spaces », *Adv. Math.* **183** (2004), p. 271–315.

[14] S. Keith & X. Zhong – « The Poincaré inequality is an open ended condition », *Ann. of Math.* **167** (2008), p. 575–599.

[15] T. J. Laakso – « Ahlfors Q-regular spaces with arbitrary $Q > 1$ admitting weak Poincaré inequality », *Geom. Funct. Anal.* **10** (2000), p. 111–123.

[16] J. R. Lee & A. Naor – « Extending Lipschitz functions via random metric partitions », *Invent. Math.* **160** (2005), p. 59–95.

[17] J. Lindenstrauss & L. Tzafriri – *Classical Banach spaces. I*, Ergebn. Math. Grenzg., vol. 92, Springer, 1977.

[18] P. Pansu – « Métriques de Carnot-Carathéodory et quasiisométries des espaces symétriques de rang un », *Ann. of Math.* **129** (1989), p. 1–60.

[19] ———, « Plongements quasiisométriques du groupe de Heisenberg dans L^p, d'après Cheeger, Kleiner, Lee, Naor », in *Actes du Séminaire de Théorie Spectrale et Géométrie. Vol. 25. Année 2006–2007*, Sémin. Théor. Spectr. Géom., vol. 25, Univ. Grenoble I, Saint-Martin-d'Hères, 2008, p. 159–176.

[20] N. Shanmugalingam – « Newtonian spaces : an extension of Sobolev spaces to metric measure spaces », *Rev. Mat. Iberoamericana* **16** (2000), p. 243–279.