BULLETIN DE LA S. M. F.

ALLÉGRET

Sur la courbe balistique

Bulletin de la S. M. F., tome 1 (1872-1873), p. 150-151
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1872-1873__1__150_1>

MÉMOIRES ET COMMUNICATIONS

Sur la courbe balistique; par M. Allégret.

(Séance du 16 avril 1873)

Si l'on suppose une loi de résistance représentée par

$$a + bv^n,$$

a, b, n étant trois constantes et v la vitesse du projectile qu'on suppose réduit à un simple point; les équations du mouvement sont

$$(1) \qquad v = \sqrt{x'^2 + y'^2},$$

et

$$(2)\qquad \begin{cases} \dfrac{dy'}{dt} = g + (a + bv^n)\dfrac{y'}{v}, \\ \dfrac{dx'}{dt} = (a + bv^n)\dfrac{x'}{v}, \end{cases}$$

en désignant par x', y' les composantes de la vitesse v par rapport à deux axes, l'un vertical et l'autre horizontal, par t le temps et par g l'accélération due à la pesanteur. On déduit des équations (2), en éliminant dt,

$$(a + bv^n)(x'dy' - y'dx') = gvdx';$$

et en posant

$$(3)\qquad y' = ux',$$

u étant une nouvelle variable auxiliaire, il viendra

$$\frac{dx'}{du} = x'^2 \frac{a + bv^n}{gv} = \frac{a}{g}(1 + u^2)^{-\frac{1}{2}} x' + \frac{b}{g}(1 + u^2)^{\frac{n-1}{2}} x'^{n+1}$$

Cette dernière équation est celle de Jacques Bernoulli. On la rend linéaire en divisant par x'^{n+1} et faisant

$$(4)\qquad z = x'^{-n},$$

ce qui la transforme en

$$(5)\qquad \frac{dz}{du} + \frac{a}{gn}(1 + u^2)^{-\frac{1}{2}} z + \frac{b}{gn}(1 + u^2)^{\frac{n-1}{2}} = 0.$$

On intégrera donc sans difficulté l'équation (5) et on aura, au moyen de (4), (3) et (1), x', y', v en fonction de u. Portant ces valeurs dans l'une des équations (2), une nouvelle quadrature donnera ensuite t en fonction de u. Enfin les coordonnées x et y du mobile seront fournies par les formules

$$x = \int x'dt, \qquad y = \int y'dt.$$

Les six quantités x, y, t, x', y' et v dépendront ainsi d'une même variable auxiliaire u. Le problème est donc complétement résolu.

Cette méthode élémentaire permet, comme on voit, de retrouver assez rapidement le résultat signalé par Jacobi, qui comprenait d'ailleurs tout ce qu'on avait obtenu antérieurement sur ce sujet.