BULLETIN DE LA S. M. F.

PEROTT

Sur un théorème de Gauss

Bulletin de la S. M. F., tome 10 (1882), p. 87-88

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1882__10__87_1>

© Bulletin de la S. M. F., 1882, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Sur un théorème de Gauss; par M. Perott.

(Séance du 7 avril 1882.)

L'illustre Gauss a démontré, dans son Mémoire intitulé : *Summatio quarumdam serierum singularium,* que, dans le cas où m et μ sont des nombres entiers et $m > \mu$, l'expression

$$\frac{(1-x^m)(1-x^{m-1})\ldots(1-x^{m-\mu+1})}{(1-x)(1-x^2)\ldots(1-x^\mu)}$$

est une fonction entière de x. Nous nous proposons de donner une nouvelle démonstration de ce théorème.

On sait que, d étant un diviseur de n, et f_d le produit des facteurs linéaires de $x^n - 1$ qui correspondent aux racines primitives de $x^d - 1 = 0$, on a toujours l'identité

$$x^n - 1 = \prod_{(n)} f_d,$$

où le produit s'étend à tous les diviseurs de n.

On aura par conséquent

$$\frac{(1-x^m)(1-x^{m-1})\ldots(1-x^{m-\mu+1})}{(1-x)(1-x^2)\ldots(1-x^\mu)}$$

$$= \frac{(1-x^m)(1-x^{m-1})\ldots(1-x)}{(1-x)(1-x^2)\ldots(1-x^\mu)(1-x)(1-x^2)\ldots(1-x^{m-\mu})}$$

$$= \frac{\prod_{(1)} f_d \prod_{(2)} f_d \cdots \prod_{(m)} f_d}{\prod_{(1)} f_d \prod_{(2)} f_d \cdots \prod_{(\mu)} f_d \prod_{(1)} f_d \prod_{(2)} f_d \cdots \prod_{(m-\mu)} f_d}$$

$$= \prod_{d=1}^{d=m} f_d^{\,\mathrm{E}\left(\frac{m}{d}\right) - \mathrm{E}\left(\frac{\mu}{d}\right) - \mathrm{E}\left(\frac{m-\mu}{d}\right)}.$$

L'expression

$$\mathrm{E}\left(\frac{m}{d}\right) - \mathrm{E}\left(\frac{\mu}{d}\right) - \mathrm{E}\left(\frac{m-\mu}{d}\right)$$

ne peut jamais devenir négative et par conséquent la proposition énoncée se trouve démontrée.