BULLETIN DE LA S. M. F.

G. HUMBERT

Sur une généralisation de la théorie des fractions continues algébriques

Bulletin de la S. M. F., tome 8 (1880), p. 191-196

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1880__8__191_1>

© Bulletin de la S. M. F., 1880, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Sur une généralisation de la théorie des fractions continues algébriques; par M. G. Humbert.

(Séance du 21 mai 1880.)

I. Dans une lettre à M. Fuchs, publiée dans le *Journal de Crelle,* M. Hermite a donné les résultats suivants :

Soient $n+1$ quantités $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$ et n polynômes entiers en x, de degré m, $P_0, P_1, \ldots, P_n$.

Considérons l'expression

$$E(x) = P_1 \log \frac{x - x_1}{x - x_0} + P_2 \log \frac{x - x_2}{x - x_0} + \ldots + P_n \log \frac{x - x_n}{x - x_0}.$$

Cette expression est égale à un polynôme entier de degré $m-1$, plus une fonction, qui, ordonnée par rapport aux puissances décroissantes de x, commence par un terme en $\frac{1}{x}$:

$$E(x) = \Pi_{n-1}(x) + \frac{\alpha_1}{x} + \frac{\alpha_2}{x^2} + \ldots$$

Les polynômes $P_1, P_2, \ldots, P_n$ renferment $(m+1)n$ coefficients; on pourra, en disposant de ces coefficients, faire disparaître dans $E(x)$ les termes en

$$\frac{1}{x}, \frac{1}{x^2}, \ldots, \frac{1}{x^{(m+1)n-1}}.$$

On aura ainsi $(m+1)n-1$ équations homogènes entre les $(m+1)n$ inconnues.

Ce problème est une généralisation de celui qui conduit à la théorie des fractions continues algébriques.

M. Hermite, dans le cas cité, a montré que les polynômes $P_1(x), \ldots, P_n(x)$ satisfont à une équation différentielle linéaire de degré $(n+1)$, dans laquelle le coefficient d'une dérivée, y^{μ}, est un polynôme de degré μ; de plus, une $(n+1)^{\text{ième}}$ solution de cette équation est la fonction

$$P_1 \log \frac{x-x_1}{x-x_0} + \cdots + P_n \log \frac{x-x_n}{x-x_0} - \Pi_{n-1}(x).$$

II. On peut donner des résultats analogues pour des fonctions plus générales que les logarithmes qu'a considérés M. Hermite.

Je définirai ces fonctions de la manière suivante.

Soient $n+1$ quantités $x_0, x_1, \ldots, x_n$, rangées, si elles sont réelles, par ordre de grandeur croissante, et $\Delta(x)$ le polynôme

$$\Delta(x) = (x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_n).$$

Soient $G(x)$ un polynôme quelconque de degré $(n-1)$ et $K(x)$ une fonction définie par l'équation

$$\frac{K'(x)}{K(x)} = \frac{G(x)}{\Delta(x)}.$$

Cela posé, les fonctions introduites au lieu des logarithmes de M. Hermite sont les suivantes :

$$z_1 = \int_{x_0}^{x_1} \frac{K(z)}{\Delta(z)} \frac{dz}{x-z},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$z_n = \int_{x_{n-1}}^{x_n} \frac{K(z)}{\Delta(z)} \frac{dz}{x-z}.$$

$K(z)$ est évidemment de la forme

$$K(z) = A(x - x_0)^{\mu_0}(x - x_1)^{\mu_1} \ldots (x - x_n)^{\mu_n}.$$

Les intégrales précédentes n'auront de sens que si $K(x)$ s'annule par les valeurs $x_0, x_1, \ldots, x_n$ de la variable; ou, si

$$\mu_0 > 0, \quad \mu_1 > 0, \quad \ldots. \quad \mu_n > 0.$$

Je supposerai cette condition remplie; alors les polynômes de degré m, $P_1(x), P_2(x), \ldots, P_n(x)$, seront déterminés par la condition que l'expression

$$P_1 z_1 + P_2 z_2 + \ldots + P_n z_n,$$

ordonnée suivant les puissances décroissantes de x, ne contienne pas de termes en $\frac{1}{x}, \frac{1}{x^2}, \ldots, \frac{1}{x^{(m+1)n-1}}$.

III. Si l'on suppose

$$G(x) = \Delta'(x),$$

on a

$$K(x) = \Delta(x).$$

Nos fonctions deviennent

$$z_1 = \int_{x_0}^{x_1} \frac{dz}{x - z} = -\log \frac{x - x_1}{x - x_0},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$z_n = \int_{x_{n-1}}^{x_n} \frac{dz}{x - z} = -\log \frac{x - x_n}{x - x_{n-1}}.$$

Ce ne sont pas tout à fait celles de M. Hermite, qui donne aux logarithmes de sa formule le même dénominateur $(x - x_0)$; mais la forme que j'adopte a l'avantage d'introduire des polynômes P_1, $P_2, \ldots, P_n$ qui jouissent de la propriété d'avoir toutes leurs racines réelles, et comprises respectivement entre

$$x_0 \text{ et } x_1, \quad x_1 \text{ et } x_2, \quad \ldots, \quad x_{n-1} \text{ et } x_n,$$

pourvu, toutefois, que $x_0, x_1, \ldots, x_n$ soient réels. Les polynômes de M. Hermite n'ont pas la même propriété.

On peut donner de ce théorème la démonstration suivante.

IV. De la définition des polynômes $P_1(x)$, ... on déduit, comme on le fait dans la théorie des fractions continues algébriques, les relations fondamentales,

$$\int_{x_0}^{x_1} \frac{K(z)}{\Delta(z)} P_1(z) z dz + \ldots + \int_{x_{n-1}}^{x_n} \frac{K(z)}{\Delta(z)} P_n(z) z dz = 0,$$

$$\int_{x_0}^{x_1} \frac{K(z)}{\Delta(z)} P_1(z) z dz + \ldots + \int_{x_{n-1}}^{x} \frac{K(z)}{\Delta(z)} P_n(z) z dz = 0,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$\int_{x_0}^{x_1} \frac{K(z)}{\Delta(z)} P_1(z) z^{(m+1)n-2} dz + \ldots + \int_{x_{n-1}}^{x_n} \frac{K(z)}{\Delta(z)} P_n(z) z^{(m+1)n-2} dz = 0.$$

On peut résumer ces formules en une seule,

$$\int_{x_0}^{x_1} \frac{K(z)}{\Delta(z)} P_1(z) \Pi_{(m+1)n-2}(z) dz + \ldots + \int_{x_0}^{x_1} \frac{K(z)}{\Delta(z)} P_n(z) \Pi_{(m+1)n-2}(z) dz = 0,$$

en désignant par $\Pi_{(m+1)n-2}(z)$ un polynôme quelconque en z, au plus de degré $(m+1)n-2$.

Cette propriété des polynômes $P_1(z)$, $P_2(z)$, ... suffit pour démontrer le théorème énoncé.

Je remarque d'abord que la fonction $\frac{K(x)}{\Delta(x)}$ ne peut changer de signe entre x_0 et x_1, entre x_1 et x_2, ..., x_{n-1} et x_n.

Soient maintenant

$\alpha_1, \beta_1, \ldots, \lambda_1$ les racines de $P_1(x)$ comprises entre x_0 et x_1,

$\alpha_2, \beta_2, \ldots, \lambda_2$ » $P_2(x)$ » x_1 et x_2,

$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$\alpha_n, \beta_n, \ldots, \lambda_n$ » $P_n(x)$ » x_{n-1} et x_n.

Chacun de ces groupes se compose d'un nombre quelconque de racines, nombre inférieur à m cependant.

Posons

$$P_1(x) = (x-\alpha_1)\ldots(x-\lambda_1)\chi_1(x),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$P_n(x) = (x-\alpha_n)\ldots(x-\lambda_n)\chi_n(x).$$

Si les fonctions $\chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_n$ se réduisent à des constantes, le

théorème est démontré; sinon, il y aura au moins une de ces fonctions qui sera du premier degré ou d'un degré supérieur.

Par suite, le degré du produit

$$(z-\alpha_1)(z-\beta_1)\dots(z-\lambda_1)(z-\alpha_2)\dots(z-\lambda_2)\dots(z-\alpha_n)\dots(z-\lambda_n)$$

ne pourra pas surpasser $mn-1$.

Or on a

$$\sum\int_{x_0}^{x_1}\frac{K(z)}{\Delta(z)}P_1(z)\Pi_{(m+1)n-2}(z)dz=0.$$

Nous pouvons prendre

$$\Pi_{(m+1)n-2}(z)=(z-\alpha_1)(z-\beta_1)\dots(z-\lambda_1)\dots(z-\lambda_n)\Theta(z);$$

$\Theta(z)$ sera au moins de degré

$$(m+1)n-2-mn+1=n-1.$$

Le produit $P_1(z)\Pi_{(m+1)n-2}(z)$ sera alors de la forme

$$f_1(z)\Theta(z),$$

$f_1(z)$ ne changeant pas de signe entre x_0 et x_1; de même

$$P_n(z)\Pi_{(m+1)n-2}(z)=f_n(z)\Theta(z),$$

$f_n(z)$ ne changeant pas de signe entre x_{n-1} et x_n.

Prenons maintenant

$$\Theta(z)=(x_1-z)^{\varepsilon_1}(x_2-z)^{\varepsilon_2}\dots(x_{n-1}-z)^{\varepsilon_{n-1}},$$

$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_{n-1}$ étant égaux à 0 ou à $+1$.

On peut évidemment les supposer tous égaux à 1, puisque $\Theta(z)$ est au moins de degré $n-1$.

L'intégrale $\int_{x_0}^{x_1}f_1(z)\Theta(z)dz$ a un signe indépendant des valeurs des quantités ε.

La seconde intégrale $\int_{x_1}^{x_2}f_2(z)\Theta(z)dz$ aura pour $\varepsilon_1=0$ un certain signe et pour $\varepsilon_1=1$ le signe contraire, quelles que soient, d'ailleurs, les valeurs des autres quantités $\varepsilon_2, \varepsilon_3, \dots, \varepsilon_{n-1}$.

Donc, en choisissant la valeur de ε_1, cette intégrale aura même signe que la première.

La troisième intégrale $\int_{x_2}^{x_3} f_3(z)\Theta(z)dz$ aura de même pour $\varepsilon_2 = 0$ un certain signe, pour $\varepsilon_2 = 1$ le signe contraire, quelles que soient les valeurs des ε qui suivent.

On pourra donc encore choisir ε_2 de manière à lui donner même signe qu'à la première.

En continuant ce raisonnement, on voit qu'on pourra donner aux $n-1$ intégrales qui suivent la première le même signe qu'à cette première.

Il est donc impossible que la somme de ces intégrales soit nulle.

Ainsi, en supposant que les polynômes $P_1(z)\ldots P_n(x)$ n'ont pas toutes leurs racines réelles et comprises respectivement entre x_0 et $x_1, \ldots, x_{n-1}$ et x_n, on arrive à une absurdité; il faut donc conclure que cette proposition est vraie et que, par suite :

Théorème.— *L'un quelconque des polynômes* $P, P_\mu(x)$, *a toutes ses racines réelles et comprises entre* $x_{\mu-1}$ *et* x_μ.