BULLETIN DE LA S. M. F.

JACQUES CHAUMAT
ANNE-MARIE CHOLLET

Propriétés de division par des fonctions de $A^\infty(D)$

Bulletin de la S. M. F., tome 114 (1986), p. 153-174
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1986__114__153_0>

© Bulletin de la S. M. F., 1986, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Bull. Soc. math. France,
114, 1986, p. 153-174.

PROPRIÉTÉS DE DIVISION PAR DES FONCTIONS DE $A^\infty(D)$

PAR

JACQUES CHAUMAT et ANNE-MARIE CHOLLET (*)

RÉSUMÉ. — Soit D un domaine strictement pseudo-convexe de $\mathbb{C}^n$ à frontière ∂D de classe C^∞. On note $C^\infty(\bar{D})$ l'algèbre des fonctions continues ainsi que toutes leurs dérivées dans $\bar{D}$ et $A^\infty(D)$ la classe des fonctions holomorphes dans D appartenant à $C^\infty(\bar{D})$.

Soit E un sous-ensemble fermé de ∂D. On désigne par C_E^∞ [resp. A_E^∞] l'idéal de $C^\infty(\bar{D})$ [resp. $A^\infty(D)$] formé des fonctions plates sur E. On dit que E a la propriété de division par des fonctions de $A^\infty(D)$ si, pour toute famille de fonctions $(f_i)_{i\in\mathbb{N}}$ de C_E^∞, il existe une fonction F de A_E^∞ nulle seulement sur E et une famille de fonctions $(k_i)_{i\in\mathbb{N}}$ de C_E^∞ vérifiant $f_i = Fk_i$, pour tout entier i.

On montre qu'un sous-ensemble fermé E de ∂D vérifiant la propriété de division par des fonctions de $A^\infty(D)$ est un ensemble d'interpolation d'ordre infini pour $A^\infty(D)$, c'est-à-dire que, pour toute fonction f de $C^\infty(\bar{D})$ telle que $\bar{\partial} f$ soit plate sur E, il existe une fonction F de $A^\infty(D)$ telle que $f-F$ soit dans C_E^∞.

On donne des conditions suffisantes sur E pour qu'il vérifie la propriété de division par des fonctions de $A^\infty(D)$. Elles s'expriment en termes de $N_\varepsilon(E)$ le nombre minimum de boules relatives à la pseudo-distance usuelle sur ∂D, de rayon ε, dont la réunion recouvre E.

ABSTRACT. — Let D be a strictly pseudoconvex domain in $\mathbb{C}^n$ with C^∞-boundary ∂D. $C^\infty(\bar{D})$ will denote the algebra of functions continuous with all their derivatives in $\bar{D}$ and $A^\infty(D)$ is the class of the holomorphic functions in D belonging to $C^\infty(\bar{D})$.

Let E be a closed subset of ∂D. C_E^∞ [resp. A_E^∞] will denote the ideal of $C^\infty(\bar{D})$ [resp. $A^\infty(D)$] consisting of all the functions flat on E. The set E is said to have the division property by functions in $A^\infty(D)$ if, for every family of functions $(f_i)_{i\in\mathbb{N}}$ in C_E^∞, there exist a function F in A_E^∞ vanishing only on E and a family of functions $(k_i)_{i\in\mathbb{N}}$ in C_E^∞ such that $f_i = Fk_i$, for every integer i.

We prove that every closed subset which has the division property by functions in $A^\infty(D)$ is an interpolation set of infinite order for $A^\infty(D)$, i.e., for every function f in $C^\infty(\bar{D})$ such that $\bar{\partial} f$ is flat on E, there exists a function F in $A^\infty(D)$ such that $f-F$ belongs to C_E^∞.

Sufficient conditions are given for E to have the division property by functions in $A^\infty(D)$. They are expressed in terms of $N_\varepsilon(E)$ the minimal number of balls, with respect to the usual pseudodistance on ∂D, of radius ε, whose union covers E.

(*) Texte reçu le 20 décembre 1985.

J. CHAUMAT et A. M. CHOLLET, Département de Mathématiques, Université Paris-Sud, 91405 Orsay Cedex, France.

BULLETIN DE LA SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE — 0037-9484/1986/02 153 22/$4.20
© Gauthier-Villars

Soit D un domaine strictement pseudo-convexe dans $\mathbb{C}^n$ à frontière régulière ∂D. On note $C^\infty(\bar{D})$ l'algèbre des fonctions de classe C^∞ sur $\bar{D}$, l'adhérence de D et $A^\infty(D)$ la sous-algèbre de $C^\infty(\bar{D})$ formée des fonctions holomorphes dans D.

Soit E un sous-ensemble fermé de ∂D; on désigne par C_E^∞ [resp. A_E^∞ l'idéal de $C^\infty(\bar{D})$ [resp. $A^\infty(D)$] formé des fonctions plates sur E.

Dans leurs études des idéaux de $A^\infty(D)$ de type fini [2] J. BRUNA et J. M. ORTEGA prouvent la propriété suivante. Soit E une sous-variété compacte de ∂D dont l'espace tangent en chaque point est dans l'espace tangent complexe à ∂D; alors, pour toute famille $(f_i)_{i\in\mathbb{N}}$ de A_E^∞, il existe une fonction F de A_E^∞ et une famille de fonctions $(k_i)_{i\in\mathbb{N}}$ de A_E^∞ vérifiant $f_i = Fk_i$, pour tout entier i.

Dans le cas $n=1$, lorsque D est le disque unité du plan complexe, les sous-ensembles E de ∂D tels que A_E^∞ ne soit pas trivial et qui vérifient cette propriété de division sont caractérisés par la condition de Carleson $\int_0^1 N_\varepsilon(E)\,d\varepsilon < \infty$ où $N_\varepsilon(E)$ est le nombre minimal d'intervalles de rayon ε dont la réunion recouvre E ([3], [4], [6]).

On introduit et on étudie dans ce travail une propriété de division plus forte. On dit que E vérifie la propriété de division par $A^\infty(D)$ si, pour toute famille de fonctions $(f_i)_{i\in\mathbb{N}}$ de C_E^∞, il existe une fonction F de A_E^∞ nulle seulement sur E et une famille de fonctions $(k_i)_{i\in\mathbb{N}}$ de C_E^∞ vérifiant $f_i = Fk_i$, pour tout entier i.

On montre qu'un sous-ensemble fermé E de ∂D vérifiant la propriété de division par $A^\infty(D)$ est d'interpolation d'ordre infini pour $A^\infty(D)$, c'est-à-dire que, pour toute fonction f de $C^\infty(\bar{D})$ telle que $\bar{\partial} f$ soit plate sur E, il existe une fonction F de $A^\infty(D)$ telle que $f-F$ soit dans C_E^∞.

On donne des conditions suffisantes sur E pour qu'il vérifie la propriété de division par $A^\infty(D)$. Elles s'expriment comme dans [5] à l'aide de $N_\varepsilon(E)$ le nombre minimal de boules de rayon ε dont la réunion recouvre E. Mais les boules sont relatives à la pseudo-distance usuelle sur ∂D.

Dans le cas $n=1$, en utilisant la caractérisation des ensembles d'interpolation d'ordre infini [1], on montre que E a la propriété de division par $A^\infty(D)$ si et seulement s'il est d'interpolation d'ordre infini pour $A^\infty(D)$. On ignore si cette équivalence subsiste dans le cas $n>1$ pour les sous-ensembles portés par des sous-variétés de ∂D totalement réelles.

La proposition 2 et le théorème 12 sous la condition (10.1) ont été obtenus indépendamment par J. BRUNA et J. M. ORTEGA [3]. Les auteurs ont construit [7] d'autres exemples d'ensembles vérifiant la propriété de division par $A^\infty(D)$; ce sont, en particulier, les sous-ensembles E de ∂D localement inclus dans une sous-variété de ∂D dont l'espace tangent est dans l'espace tangent complexe à ∂D. Il s'agit là d'une amélioration du résultat de J. BRUNAT et J. M. ORTEGA précédemment cité [2].

On peut relier la propriété de division à des propriétés formelles algébriques notamment à la propriété de platitude de l'idéal A_E^∞ comme l'ont montré J. BRUNA et J. M. ORTEGA [2]. Les auteurs remercient le Referee pour ce développement (paragraphes 16 à 19). On y trouve une autre présentation de la proposition 2 obtenue comme conséquence de la résolution de l'équation $\bar\partial u = f$ avec $\bar\partial f = 0$ dans les formes différentielles à coefficients dans C_E^∞.

Dans tout ce qui suit D désigne un domaine borné de $\mathbb{C}^n$ à frontière ∂D de classe C^∞. Le domaine D est donc défini par la donnée d'une fonction r de classe C^∞ dans un voisinage de $\bar D$, l'adhérence de D, telle que

(i) $D = \{ z \in \mathbb{C}^n;\ r(z) < 0 \}$,

(ii) grad $r \neq 0$ sur ∂D.

Le domaine D sera dit strictement pseudo-convexe si, de plus, r est strictement plurisousharmonique dans un voisinage de ∂D, c'est-à-dire, si l'on a

(iii) $\sum_{j,k=1}^n \dfrac{\partial^2 r}{\partial z_j \partial \bar z_k}(z)\, w_j \bar w_k > 0,$

pour tout $w \neq 0$ de $\mathbb{C}^n$ et tout z de ∂D.

On dit alors que r est une fonction définissant D.

On note $A^\infty(D)$ la classe des fonctions holomorphes dans D dont toutes les dérivées sont continues dans $\bar D$.

1. DÉFINITIONS. — Un sous-ensemble fermé E de ∂D est un ensemble de zéros pour $A^\infty(D)$ s'il existe une fonction f de $A^\infty(D)$ telle que l'on ait $E = \{ z \in \bar D;\ f(z) = 0 \}$.

On dit qu'une fonction de classe C^∞ sur $\bar D$ est plate sur E si elle s'annule ainsi que toutes ses dérivées sur E. De même on dit qu'une forme

différentielle de classe C^∞ sur $\bar{D}$ est plate sur E si ses coefficients sont plats sur E.

Un sous-ensemble fermé E de ∂D est un ensemble d'interpolation d'ordre infini pour $A^\infty(D)$, si, pour toute fonction g de classe C^∞ dans $\mathbb{C}^n$ telle que $\bar{\partial} g$ soit plate sur E, il existe une fonction f de $A^\infty(D)$ telle que $f-g$ soit plate sur E.

On désigne par C_E^∞ [resp. A_E^∞] l'idéal dans $C^\infty(\bar{D})$ [resp. $A^\infty(D)$] formé des fonctions plates sur E.

Un sous-ensemble fermé E de ∂D vérifie la propriété de division par $A^\infty(D)$ si, pour toute suite $(f_i)_{i\in\mathbb{N}}$ de fonctions de C_E^∞, il existe une fonction F de A_E^∞ nulle seulement sur E et une suite de fonctions $(k_i)_{i\in\mathbb{N}}$ de C_E^∞ telles que l'on ait $f_i = Fk_i$, pour tout i dans $\mathbb{N}$.

2. PROPOSITION. — *Un sous-ensemble fermé E de ∂D vérifiant la propriété de division par $A^\infty(D)$ est un ensemble d'interpolation d'ordre infini pour $A^\infty(D)$.*

Preuve. — Soit f une fonction de classe C^∞ dans $\mathbb{C}^n$ telle que $\bar{\partial} f$ soit plate sur E. On a $\bar{\partial} f = \sum_{i=1}^n f_i \, d\bar{z}_i$ et les fonctions f_i sont de classe C^∞ dans $\mathbb{C}^n$ et plates sur E. Alors, par hypothèse, il existe une fonction F de A_E^∞ nulle seulement sur E et des fonctions k_i, $i=1, \ldots, n$ de C_E^∞ telles que l'on ait $f_i = Fk_i$, pour $i=1, \ldots, n$.

La forme différentielle $\bar{\partial} f/F = \sum_{i=1}^n k_i \, d\bar{z}_i$ est une (0.1) forme de classe C^∞ dans $\bar{D}$, $\bar{\partial}$-fermée. Il existe donc [12] une fonction u de classe C^∞ dans $\bar{D}$ telle que l'on ait $\bar{\partial} f/F = \bar{\partial} u$ dans $\bar{D}$.

Alors, si on pose $G = f - Fu$, la fonction G est une fonction de $A^\infty(D)$ telle que $G-f$ soit plate sur E.

3. PROPOSITION. — *Une réunion finie de sous-ensembles fermés de ∂D vérifiant la propriété de division par $A^\infty(D)$ vérifie la propriété de division par $A^\infty(D)$.*

Preuve. — Soient E_1 et E_2 deux sous-ensembles fermés de ∂D vérifiant la propriété de division par $A^\infty(D)$ et $(f_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de classes C^∞ sur $\bar{D}$, plates sur $E_1 \cup E_2$. Il existe une fonction F_1 de $A^\infty(D)$, plate sur E_1, nulle seulement sur E_1 et une suite de fonctions $(h_i)_{i\in\mathbb{N}}$ de classe C^∞ sur $\bar{D}$, plates sur E_1 telles que l'on ait, pour tout i dans $\mathbb{N}$, $f_i = F_1 h_i$.

Puisque F_1 ne s'annule que sur E_1, les fonctions $(h_i)_{i\in\mathbb{N}}$ sont plates sur $E_1 \cup E_2$. Il existe donc une fonction F_2 de $A^\infty(D)$ plate sur E_2, nulle

seulement sur E_2 et une suite de fonctions $(k_i)_{i\in\mathbb{N}}$ de classe C^∞ dans $\bar{D}$, plates sur E_2 telles que l'on ait, pour tout i dans $\mathbb{N}$, $h_i = F_2 k_i$. Ici encore, les fonctions $(k_i)_{i\in\mathbb{N}}$ sont plates sur $E_1 \cup E_2$ et l'on a, pour tout i dans $\mathbb{N}$, $f_i = F_1 F_2 k_i$, ce qui achève la preuve de la proposition.

4. Soit r une fonction définissant D. Si β est un réel, on note

$$D_\beta = \{ z; r(z) < \beta \} \qquad \text{avec} \quad D_0 = D.$$

Il existe $\beta_0 > 0$ tel que,

pour tout β, $|\beta| < \beta_0$, D_β soit un domaine borné, à frontière de classe C^∞, défini par $r - \beta$,

$V = \bigcup_{|\beta|<\beta_0} \partial D_\beta$ soit un ouvert contenant ∂D

et, enfin, pour tout z de V, il existe un unique $\beta(z)$, $|\beta(z)| < \beta_0$ pour lequel z appartienne à $\partial D_{\beta(z)}$.

Soit z un point de $\mathbb{C}^n$, on désigne par J la structure presque complexe de $T_z(\mathbb{C}^n)$ l'espace tangent en z à $\mathbb{C}^n$ considéré comme espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. Soit M une sous-variété de $\mathbb{C}^n$ et $T_z(M)$ son espace tangent en z; M est dite totalement réelle si, en tout point z de M, on a $T_z(M) \cap JT_z(M) = \{0\}$.

Pour tout z de V, on note $T_z^c(\partial D_{\beta(z)})$ l'espace tangent complexe en z à $\partial D_{\beta(z)}$; c'est, par définition, le sous espace complexe maximal de $T_z(\partial D_{\beta(z)})$ l'espace tangent en z à $\partial D_{\beta(z)}$.

Pour tout z de V, on note $\nu(z)$ le vecteur unitaire de la normale en z à $\partial D_{\beta(z)}$ orienté vers l'extérieur; on a alors la décomposition orthogonale complexe

$$T_z(\mathbb{C}^n) = \mathbb{C}[\nu(z)] \oplus T_z^c(\partial D_{\beta(z)})$$

et la décomposition orthogonale réelle

$$T_z(\partial D_{\beta(z)}) = \mathbb{R}[i\nu(z)] \oplus T_z^c(\partial D_{\beta(z)}).$$

Pour tout z de V, on note Π_z la projection orthogonale complexe sur $\mathbb{C}[\nu(z)]$.

Pour tout couple (z, w) de $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n$, on note $|z - w|$ la distance euclidienne de z à w.

Soit χ une fonction de classe C^∞ sur $]-\infty, 0]$, positive, vérifiant $\chi(t) = 1$ pour $-\beta_0/2 \leqslant t \leqslant 0$ et $\chi(t) = 0$ pour $t \leqslant -\beta_0$.

Pour tout couple (z, w) de $\bar{D} \times \bar{D}$, on pose

$$(4.1)\quad \rho(z,w)=\chi(\beta(z))\,|\Pi_z(z-w)| + \chi(\beta(w))\,|\Pi_w(z-w)|+|z-w|^2-r(z)-r(w).$$

ρ est une fonction à valeurs positives vérifiant les propriétés suivantes:

(*a*) $\rho(z,w)=0$ si et seulement si z et w appartiennent à ∂D et $z=w$;

(*b*) il existe une constante $K>0$ telle que l'on ait

$$(4.2)\qquad \rho(z,w)\leqslant K[\rho(z,t)+\rho(t,w)],\quad \text{pour } z, w \text{ et } t \text{ dans } \bar{D}.$$

On dit alors que ρ définit une pseudo-distance sur ∂D.

Il existe une constante $C>0$ telle que l'on ait

$$(4.3)\quad |z-w|^2\leqslant\rho(z,w)\leqslant C|z-w| \quad \text{pour tout } (z,w) \text{ de } \partial D\times\bar{D}.$$

Si E est un sous-ensemble de ∂D, on note, pour tout z de $\bar{D}$,

$$\rho(z,E)=\inf_{w\in E}\rho(z,w).$$

Dans la suite, on ne considérera de boules que pour la pseudo-distance ρ; pour tout z de ∂D et tout $r>0$, on notera

$$B_r(z)=B(z,r)=\{w\in\partial D;\ \rho(z,w)<r\},$$

la boule de centre z et de rayon r.

5. NOTATIONS. — Pour simplifier la rédaction, on écrira « pour tout z dans E, $a(z)\approx b(z)$ » ou encore « pour tout z dans E, $a(z)$ est équivalent à $b(z)$ » pour exprimer qu'il existe des constantes c et C, strictement positives, telles que, pour tout z dans E, $ca(z)\leqslant b(z)\leqslant Ca(z)$. De même, la proposition « pour tout z dans E, $a(z)\ll b(z)$ » signifiera qu'il existe une constante $C>0$ telle que, pour tout z dans E, $a(z)\leqslant Cb(z)$. Plus généralement, on pourra écrire $a(z)\ll b(z)+O(1)$ lorsqu'il existera des constantes C et C', strictement positives, telles que, pour tout z dans E, on ait $a(z)\leqslant Cb(z)+C'$.

6. Soit D un domaine borné strictement pseudo-convexe dans $\mathbb{C}^n$, à frontière de classe C^∞. On sait ([8], [9]) qu'il existe une fonction H, une fonction r définissant D, un voisinage V de ∂D et des constantes A, a, M, m, β, strictement positives, vérifiant les propriétés suivantes:

(*a*) H appartient à $C^\infty(V,\mathcal{H}(D_\beta))$, (c'est-à-dire, H est de classe C^∞ dans $V\times D_\beta$ et, pour chaque ζ de V, la fonction $z\to H(\zeta,z)$ est holomorphe dans D_β);

(*b*) Re $H(\zeta, z)$ est strictement positive pour tout (ζ, z) de $\partial D \times \bar{D}$, $\zeta \neq z$;

(*c*) pour tout (ζ, z) de $\partial D \times \bar{D}$, on a

$$-r(z)+m|\zeta-z|^2 \leqslant \operatorname{Re} H(\zeta, z) \leqslant M|\zeta-z|^2-r(z), \tag{6.1}$$

(*d*) pour tout (ζ, z) de $\partial D \times \bar{D}$, on a

$$a|H(\zeta, z)| \leqslant \rho(\zeta, z) \leqslant A|H(\zeta, z)|. \tag{6.2}$$

7. Pour tout sous-ensemble E fermé de ∂D et pour tout $\varepsilon > 0$, on désigne par $\tilde{N}_\varepsilon(E)$ le nombre minimal de boules de rayon ε dont la réunion recouvre E. On sait [Proposition 2 de l'appendice [5]] que l'on peut recouvrir E par des boules de rayon ε dont les centres sont situés sur E, à des distances mutuelles supérieures ou égales à ε, et dont le nombre, noté $N_\varepsilon(E)$, est équivalent à $\tilde{N}_\varepsilon(E)$. On dira que ces boules forment un ε-recouvrement de E. On ne considérera dans la suite que de tels recouvrements.

8. LEMME. — *Soit* $\gamma : [-1,1] \to \partial D$ *une courbe de classe* C^∞ *de* ∂D *dont la tangente en chaque point n'est pas dans l'espace tangent complexe à* ∂D.

Soit E *un sous-ensemble compact de* $\gamma(]-1,1[) = \Gamma$. *Il existe un voisinage ouvert* O *de* E *dans* $\mathbb{C}^n$, *une constante* $C > 0$ *et une application* π *de* O *sur* $\Gamma \cap O$ *de classe* C^∞ *tels que*

(*a*) *si* z *appartient à* $\Gamma \cap O$, *on ait* $\pi(z) = z$;

(*b*) *pour tout* z *dans* $O \cap \bar{D}$ *et tout* t *dans* $[-1,1]$, *on ait*

$$|\gamma(t)-\pi(z)| \approx \rho(\gamma(t), \pi(z)), \tag{8.1}$$

$$|H(\gamma(t), z)| \geqslant C[\rho(\gamma(t), \pi(z)) + \rho(\pi(z), z)]. \tag{8.2}$$

La preuve de ce lemme est donnée dans [5].

La proposition suivante est un raffinement de la proposition 18 de [5]. On améliore l'estimation 18(*b*).

9. PROPOSITION. — *Soit* E *un sous-ensemble fermé de* ∂D *vérifiant la condition*

(9.1) *il existe* $\gamma : [-1,1] \to \partial D$ *une courbe de* ∂D *dont la tangente en chaque point n'est pas dans l'espace tangent complexe à* ∂D *telle que l'on ait*

$$E \subset \gamma(]-1,1[) = \Gamma,$$

et

$$\int_0^r N_\varepsilon(B_r \cap E)\, d\varepsilon \ll r(\log 1/r + O(1))$$

pour tout r, $0<r\leqslant 1$ *et toute boule* B_r *de rayon* r *centrée sur* ∂D. *Alors il existe une fonction* ψ *holomorphe au voisinage de tout point de* $\bar{D}\setminus E$, *de partie réelle strictement positive dans* $\bar{D}\setminus E$ *qui vérifie les estimations suivantes*

(*a*) $\operatorname{Re}\psi(z) \gg \log 1/\rho(z, E) + O(1)$, *pour tout* z *de* $\bar{D}\setminus E$;

(*b*) $\operatorname{Re}\psi(z) \ll \log 1/\rho(z, E) + O(1)$, *pour tout* z *de* $\bar{D}\setminus E$;

(*c*) $|D^\alpha \psi(z)| \leqslant C(|\alpha|)\, o(z, E)^{-|\alpha|-1}$, *pour tout multi-indice* α *de longueur* $|\alpha|$ *et tout* z de $\bar{D}\setminus E$.

Preuve. — La condition (9.1) implique la condition de Carleson, à savoir

$$\int_0^1 N_\varepsilon(E)\, d\varepsilon < \infty,$$

qui s'écrit encore

$$\sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} N_{2^{-k}}(E) < \infty. \tag{9.2}$$

Soit ψ la fonction définie sur D par

$$\psi(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{N_k} \frac{2^{-k}}{2^{-k} + H(\zeta_{j,k}, z)}, \tag{9.3}$$

où, pour chaque entier k, $(\zeta_{j,k})$, $j=1, \ldots, N_k = N_{2^{-k}}(E)$ désigne la suite des centres des boules $B_{j,k}$, $j=1, \ldots, N_k = N_{2^{-k}}(E)$ d'un 2^{-k}-recouvrement de E. On sait que, par définition, $\zeta_{j,k}$ appartient à E. On vérifie, comme dans la preuve de la proposition 8 [5], que ψ est holomorphe au voisinage de tout point de $\bar{D}\setminus E$, de partie réelle strictement positive dans $\bar{D}\setminus E$ et satisfait les estimations (*a*) et (*c*) de la proposition. On se propose d'obtenir l'estimation (*b*). On a, pour tout z de $\bar{D}\setminus E$,

$$\operatorname{Re}\psi(z) \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} \sum_{j=1}^{N_k} \frac{2^{-k} + \operatorname{Re} H(\zeta_{j,k}, z)}{|2^{-k} + H(\zeta_{j,k}, z)|^2}.$$

De là, si on suppose z dans O et $\rho(z, \pi(z)) < 1/2$, on a, en utilisant les propriétés de H et (8.2),

$$\operatorname{Re}\psi(z)\ll\sum_{k=1}^{\infty}2^{-k}\sum_{j=1}^{N_k}\frac{2^{-k}+|\zeta_{j,k}-z|^2-r(z)}{2^{-2k}+\rho(\zeta_{j,k},\pi(z))^2+\rho(\pi(z),z)^2}$$

ou encore

$$\operatorname{Re}\psi(z)\ll\sum_{k=1}^{\infty}2^{-k}\sum_{j=1}^{N_k}\frac{2^{-k}+|\zeta_{j,k}-\pi(z)|^2+|\pi(z)-z|^2-r(z)}{2^{-2k}+\rho(\zeta_{j,k},\pi(z))^2+\rho(\pi(z),z)^2}.$$

En utilisant (8.1) et l'inégalité $|\pi(z)-z|^2-r(z)\leqslant\rho(\pi(z),z)$ on a

$$\operatorname{Re}\psi(z)\ll\sum_{k=1}^{\infty}2^{-k}\sum_{j=1}^{N_k}\frac{2^{-k}+\rho(\zeta_{j,k},\pi(z))^2+\rho(\pi(z),z)}{2^{-2k}+\rho(\zeta_{j,k},\pi(z))^2+\rho(\pi(z),z)^2}$$

et donc, à l'aide de (9.2),

$$\text{(9.4)}\quad \operatorname{Re}\psi(z)\ll O(1)+\sum_{k=1}^{\infty}2^{-k}\sum_{j=1}^{N_k}\frac{2^{-k}+\rho(\pi(z),z)}{2^{-2k}+\rho(\zeta_{j,k},\pi(z))^2+\rho(\pi(z),z)^2}.$$

On distingue deux cas.

Premier cas: $\rho(\pi(z),z)>\rho(z,E)^2$.

$$\text{(9.5)}\quad \operatorname{Re}\psi(z)\ll O(1)+\sum_{2^{-k}\geqslant\rho(\pi(z),z)}\sum_{j=1}^{N_k}\frac{2^{-2k}}{2^{-2k}+\rho(\pi(z),\zeta_{j,k})^2}+\sum_{2^{-k}<\rho(\pi(z),z)}\sum_{j=1}^{N_k}\frac{2^{-k}\rho(\pi(z),z)}{\rho(\pi(z),z)^2+\rho(\pi(z),\zeta_{j,k})^2}.$$

Soit S_1 et S_2 les deux séries intervenant dans cette inégalité. On se propose de majorer tout d'abord S_1. Pour cela, on note, pour k et l entiers positifs,

$$A_{l,k}=\{j;\,2^l2^{-k}<\rho(\pi(z),\zeta_{j,k})\leqslant2^{l+1}2^{-k}\},$$
$$B_{l,k}=\{j;\,\rho(\pi(z),\zeta_{j,k})\leqslant2^l2^{-k}\},$$

et card $A_{l,k}$ [resp. card $B_{l,k}$] le cardinal de $A_{l,k}$ [resp. $B_{l,k}$]. On a alors, en utilisant (8.1) et en remarquant que les $\zeta_{j,k}$ sont situés le long d'une courbe à une distance mutuelle au moins égale à 2^{-k},

$$\operatorname{card}B_{l,k}\ll2^l\qquad\text{et}\qquad\operatorname{card}A_{l,k}\leqslant\operatorname{card}B_{l+1,k}.$$

De là

$$S_1 \ll \sum_{2^{-k} \geqslant \rho(\pi(z), z)} \left(\sum_{j \in B_{0,k}} 1 + \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{j \in A_{l,k}} \frac{1}{1+2^{2l}} \right)$$

$$\ll \sum_{2^{-k} \geqslant \rho(\pi(z), z)} \left(\operatorname{card} B_{0,k} + \sum_{l=0}^{\infty} \frac{\operatorname{card} B_{l+1,k}}{1+2^{2l}} \right)$$

$$\ll \sum_{2^{-k} \geqslant \rho(\pi(z), z)} \left(1 + \sum_{l=0}^{\infty} \frac{2^{l+1}}{1+2^{2l}} \right),$$

$$S_1 \ll \sum_{2^{-k} \geqslant \rho(\pi(z), z)} 1 \ll \log \frac{1}{\rho(\pi(z), z)} + O(1). \tag{9.6}$$

Pour majorer S_2, on note, pour k et l entiers positifs,

$$C_{l,k} = \{ j;\ 2^l \rho(\pi(z), z) < \rho(\pi(z), \zeta_{j,k}) \leqslant 2^{l+1} \rho(\pi(z), z) \},$$

$$D_{l,k} = \{ j;\ \rho(\pi(z), \zeta_{j,k}) \leqslant 2^l \rho(\pi(z), z) \}.$$

On a

$$\operatorname{card} D_{l,k} \leqslant N_{2^{-k}}(B_{2^l \rho(\pi(z), z)} \cap E) \tag{9.7}$$

et

$$\operatorname{card} C_{l,k} \leqslant \operatorname{card} D_{l+1,k}$$

et donc

$$S_2 \ll \frac{1}{\rho(\pi(z), z)} \left[\sum_{2^{-k} < \rho(\pi(z), z)} 2^{-k} \operatorname{card} D_{0,k} + \sum_{2^{-k} < \rho(\pi(z), z)} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{2^{-k}}{1+2^{2l}} \operatorname{card} D_{l+1,k} \right].$$

On majore S_2 en remplaçant

$$\sum_{2^{-k} < \rho(\pi(z), z)} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{2^{-k}}{1+2^{2l}} \operatorname{card} D_{l+1,k}$$

par

$$\sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{1+2^{2l}} \sum_{2^{-k} < 2^l \rho(\pi(z), z)} 2^{-k} \operatorname{card} D_{l+1,k}.$$

on utilise ensuite l'hypothèse (9.1) et (9.7) pour remarquer que, pour tout l, on a

$$\sum_{2^{-k}<2^l\rho(\pi(z),z)} 2^{-k}\,\mathrm{card}\,D_{l,k} \leqslant 2^l\rho(\pi(z),z)\left[\log\frac{1}{2^l\rho(\pi(z),z)}+O(1)\right].$$

On a donc, puisque $\sum_l 2^l/(1+2^{2l})\log 1/2^l<\infty$,

$$S_2 \ll \log\frac{1}{\rho(\pi(z),z)}+O(1). \tag{9.8}$$

On déduit de (9.5), (9.6) et (9.8) que, pour tout z vérifiant $\rho(\pi(z),z)>\rho(z,E)^2$, on a

$$\mathrm{Re}\,\psi(z)\ll\log\frac{1}{\rho(\pi(z),z)}+O(1)\ll\log\frac{1}{\rho(z,E)}+O(1), \tag{9.9}$$

ce qui achève la preuve de l'estimation (*b*), dans le premier cas.

Deuxième cas: $\rho(\pi(z),z)\leqslant\rho(z,E)^2$.

On reprend l'inégalité (9.4)

$$\mathrm{Re}\,\psi(z)\ll O(1)+\sum_{k=1}^{\infty}2^{-k}\sum_{j=1}^{N_k}\frac{2^{-k}+\rho(\pi(z),z)}{2^{-2k}+\rho(\zeta_{j,k},\pi(z))^2+\rho(\pi(z),z)^2}.$$

On a, pour tout k et pour tout j,

$$\rho(\pi(z),z)\leqslant\rho(z,\zeta_{j,k})^2\ll\rho(\pi(z),z)^2+\rho(\zeta_{j,k},\pi(z))^2,$$

de là

$$\mathrm{Re}\,\psi(z)\ll O(1)+\sum_{k=1}^{\infty}2^{-k}\sum_{j=1}^{N_k}\frac{2^{-k}}{2^{-2k}+\rho(\zeta_{j,k},\pi(z))^2}.$$

Comme précédemment, on écrit

$$\mathrm{Re}\,\psi(z)\ll O(1)+\sum_{2^{-k}\geqslant\rho(\pi(z),E)}\sum_{j=1}^{N_k}\frac{2^{-2k}}{2^{-2k}+\rho(\pi(z),\zeta_{j,k})^2}+\sum_{2^{-k}<\rho(\pi(z),E)}\sum_{j=1}^{N_k}\frac{2^{-2k}}{2^{-2k}+\rho(\pi(z),\zeta_{j,k})^2}.$$

Soit S_1' et S_2' les deux séries intervenant dans cette inégalité. La première somme se majore comme S_1 et on obtient

$$S_1' \ll \log \frac{1}{\rho(\pi(z), E)} + O(1).$$

On a

$$\rho(z, E) \ll \rho(\pi(z), z) + \rho(\pi(z), E) \leqslant \rho(z, E)^2 + \rho(\pi(z), E),$$

et donc

$$\rho(z, E) \ll \rho(\pi(z), E), \tag{9.10}$$

d'où

$$S_1' \ll \log \frac{1}{\rho(z, E)} + O(1). \tag{9.11}$$

On majore maintenant S_2'; on a

$$S_2' \ll \sum_{2^{-k} < \rho(\pi(z), E)} 2^{-k} \sum_{j=1}^{N_k} \frac{2^{-k}}{\rho(\pi(z), \zeta_{j,k})^2}.$$

Des propriétés des 2^{-k}-recouvrements rappelés dans le paragraphe 7, on déduit que pour tout k vérifiant $2^{-k} < \rho(\pi(z), E)$ et pour tout $j = 1, \ldots, N_k$, on a

$$2^{-k} < \rho(\pi(z), \zeta_{j,k}) \tag{9.12}$$

et, de plus, il existe une constante c_1, $0 < c_1 < 1$, telle que pour tout k et pour tout $j = 1, \ldots, N_k$, les boules $B'_{j,k}$ de centre $\zeta_{j,k}$ et de rayon $c_1 2^{-k}$ soient disjointes.

On vérifie aisément que l'on a, pour tout ζ dans $B'_{j,k}$,

$$\rho(\pi(z), \zeta_{j,k}) \approx \rho(\pi(z), \zeta). \tag{9.13}$$

Soit

$$I_{j,k} = \{ t \in]-1, 1[; \gamma(t) \in B'_{j,k} \}.$$

Puisque le long de Γ, d'après (8.1), la pseudo-distance et la distance euclidienne sont équivalentes, la mesure de Lebesgue de $I_{j,k}$ notée $|I_{j,k}|$, vérifie

$$|I_{j,k}| \approx 2^{-k}.$$

De là, on a donc, pour tout k vérifiant $2^{-k} < \rho(\pi(z), E)$ et pour tout $j = 1, \ldots, N_k$, d'après (9.13) et (8.1),

$$\frac{2^{-k}}{\rho(\pi(z), \zeta_{j,k})^2} \approx \frac{2^{-k}}{|\pi(z) - \zeta_{j,k}|^2} \approx \int_{I_{j,k}} \frac{dt}{|\pi(z) - \gamma(t)|^2}.$$

Puisque les intervalles $I_{j,k}$ sont disjoints et qu'on a d'après (8.1) et (9.13),

$$|\pi(z) - \gamma(t)| \gg, \qquad \rho(\pi(z), E),$$

on a donc

$$\sum_{j=1}^{N_k} \frac{2^{-k}}{|\pi(z) - \zeta_{j,k}|^2} \ll \sum_{j=1}^{N_k} \int_{I_{j,k}} \frac{dt}{|\pi(z) - \gamma(t)|^2}$$

$$\ll \int_{\cup_{j=1}^{N_k} I_{j,k}} \frac{dt}{|\pi(z) - \gamma(t)|^2}$$

$$\ll \int_{\rho(\pi(z), E)}^{\cdot} \frac{du}{u^2} \ll \frac{1}{\rho(\pi(z), E)}$$

et donc

$$S_2' \ll \sum_{2^{-k} < \rho(\pi(z), E)} \frac{2^{-k}}{\rho(\pi(z), E)} = O(1). \tag{9.14}$$

On a d'après (9.11) et (9.14)

$$\operatorname{Re} \psi(z) \ll \log \frac{1}{\rho(\pi(z), E)} + O(1)$$

et donc, d'après (9.10),

$$\operatorname{Re} \psi(z) \ll \log \frac{1}{\rho(z, E)} + O(1). \tag{9.15}$$

L'estimation (b) de la proposition est donc établie dans les deux cas d'après (9.9) et (9.15).

La proposition suivante est un raffinement de la proposition 19 de [5]. On ne suppose plus E porté par une sous-variété de ∂D.

10. PROPOSITION. — *Soit E un sous-ensemble compact de ∂D vérifiant la condition*

$$\int_0^r N_\varepsilon(B_r \cap E)\, d\varepsilon \ll r, \tag{10.1}$$

pour tout r, $0<r\leqslant 1$ et toute boule B_r de rayon r centrée sur ∂D. Alors, il existe une fonction ψ holomorphe au voisinage de tout point de $\bar{D}\setminus E$, de partie réelle strictement positive dans $\bar{D}\setminus E$ qui vérifie les estimations suivantes:

(a) $\operatorname{Re}\psi(z)\gg \log 1/\rho(z, E)+O(1)$, *pour tout z de $\bar{D}\setminus E$;*

(b) $\operatorname{Re}\psi(z)\ll \log 1/\rho(z, E)+O(1)$, *pour tout z de $\bar{D}\setminus E$;*

(c) $|D^\alpha\psi(z)|\leqslant C(|\alpha|)\,\rho(z, E)^{-|\alpha|-1}$, *pour tout multi-indice α de longueur $|\alpha|$ et tout z de $\bar{D}\setminus E$.*

Preuve. — On définit, comme dans la preuve de la proposition 9, la fonction ψ par

$$\psi(z)=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{N_k}\frac{2^{-k}}{2^{-k}+H(\zeta_{j,k}, z)},$$

avec les mêmes notations. Seule, diffère la preuve de l'estimation *(b)* que l'on développe maintenant.

On a pour tout $z\in\bar{D}\setminus E$

$$\operatorname{Re}\psi(z)\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}2^{-k}\sum_{j=1}^{N_k}\frac{2^{-k}+\operatorname{Re}H(\zeta_{j,k}, z)}{|2^{-k}+H(\zeta_{j,k}, z)|^2}.$$

Donc, en utilisant les propriétés de H, si on suppose $\rho(z, E)<1/2$, on a

$$\operatorname{Re}\psi(z)\ll\sum_{k=1}^{\infty}2^{-k}\sum_{j=1}^{N_k}\frac{2^{-k}+\rho(\zeta_{j,k}, z)}{2^{-2k}+\rho(\zeta_{j,k}, z)^2},$$

$$\operatorname{Re}\psi(z)\ll\sum_{k=1}^{\infty}2^{-k}\sum_{j=1}^{N_k}\frac{1}{2^{-k}+\rho(\zeta_{j,k}, z)}. \tag{10.2}$$

On note, pour tout $(l, k)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}$

$$C_{l,k}=\{j;\, 2^l\rho(z,E)<\rho(\zeta_{j,k},z)\leqslant 2^{l+1}\rho(z,E)\},$$
$$D_{l,k}=\{j;\, \rho(\zeta_{j,k},z)\leqslant 2^l\rho(z,E)\}.$$

et on a

$$\operatorname{card} D_{l,k}\leqslant N_2{}^{-k}(B_{2^l\rho(z,E)}\cap E). \tag{10.3}$$

On déduit de (10.2)

$$\operatorname{Re}\psi(z)\ll\sum_{k=1}^{\infty}2^{-k}\left(\frac{\operatorname{card} D_{0,k}}{2^{-k}+\rho(z,E)}+\sum_{l=0}^{L_z}\frac{\operatorname{card} C_{l,k}}{2^{-k}+2^l\rho(z,E)}\right).$$

Ici $2^{L_z}\rho(z,E)$ est équivalent à 1 ce qui implique

$$L_z\ll\operatorname{Log}\frac{1}{\rho(z,E)}+O(1),$$

car D est borné.

On intègre par parties la somme portant sur l; on obtient

$$\operatorname{Re}\psi(z)\ll\sum_{k=1}^{\infty}2^{-k}\sum_{l=1}^{L_z}\frac{2^l\rho(z,E)}{2^{-2k}+2^{2l}\rho(z,E)^2}\operatorname{card} D_{l,k}+O(1).$$

On échange les sommations et on coupe la somme sur k en deux parties

$$\operatorname{Re}\psi(z)\ll\sum_{l=1}^{L_z}2^l\rho(z,E)\Big(\sum_{2^{-k}<2^l\rho(z,E)}+\sum_{2^{-k}\geqslant 2^l\rho(z,E)}\Big)+O(1),$$

c'est-à-dire

$$\operatorname{Re}\psi(z)\ll\Sigma_1+\Sigma_2+O(1), \tag{10.4}$$

avec

$$\Sigma_1=\sum_{l=1}^{L_z}\frac{1}{2^l\rho(z,E)}\sum_{2^{-k}<2^l\rho(z,E)}2^{-k}\operatorname{card} D_{l,k}.$$

Mais d'après (10.3) et l'hypothèse (10.1), on remarque que, pour tout l, on a

$$\sum_{2^{-k}<2^l\rho(z,E)}2^{-k}\operatorname{card} D_{l,k}\ll 2^l\rho(z,E),$$

et donc

$$\Sigma_1 \ll L_z \ll \log \frac{1}{\rho(z,E)} + O(1). \tag{10.5}$$

$$\Sigma_2 = \sum_{l=1}^{L_z} 2^l \rho(z,E) \sum_{2^{-k} \geq 2^l \rho(z,E)} 2^k \operatorname{card} D_{l,k},$$

mais ici card $D_{l,k}$ est majoré par une constante absolue. En effet, on compte dans la boule de centre z et de rayon $2^l \rho(z,E)$ des points écartés d'une distance supérieure à son rayon [10].

De plus,

$$\sum_{2^{-k} \geq 2^l \rho(z,E)} 2^k \ll (2^l \rho(z,E))^{-1}.$$

On a donc

$$\Sigma_2 \ll L_z \ll \log \frac{1}{\rho(z,E)} + O(1). \tag{10.6}$$

De là, d'après (10.4) et (10.5), on déduit que pour tout z dans $\bar{D} \setminus E$, vérifiant $\rho(z,E) < 1/2$, on a

$$\operatorname{Re} \psi(z) \ll \log \frac{1}{\rho(z,E)} + O(1).$$

Ceci achève la preuve de la proposition 10.

11. LEMME DE DIVISION PAR $C^\infty(\bar{D})$ [13]. — *Soit E un sous-ensemble fermé de ∂D. Soit $(f_i)_{i \in \mathbb{N}}$ une famille de fonctions de C_E^∞. Alors il existe une fonction g de C_E^∞ positive et ne s'annulant que sur E et des fonctions $(h_i)_{i \in \mathbb{N}}$ de C_E^∞ telles que l'on ait $f_i = g h_i$, pour tout i* dans $\mathbb{N}$. *Si, de plus, f est une fonction de C_E^∞ ne s'annulant que sur E telle que l'on ait $g \ll |f|$, alors il existe des fonctions $(k_i)_{i \in \mathbb{N}}$ de C_E^∞ telles que l'on ait $f_i = f k_i$, pour tout i dans* $\mathbb{N}$.

Preuve. — La première assertion n'est autre que le lemme V.2.4 de [12]. La fonction g y est construite en sorte que, pour tout $(p,q,i) \in \mathbb{N}^3$, on ait

$$\lim_{x \to E} g^{-q}(x) \sum_{|\beta| \leq p} |D^\beta f_i(x)| = 0. \tag{11.1}$$

La deuxième assertion du lemme est donc une conséquence de (11.1) et des inégalités suivantes

$$|D^\alpha k_i| \leqslant C(|\alpha|)|f|^{-|\alpha|-1} \sum_{|\beta|\leqslant|\alpha|} |D^\beta f_i|$$
$$\leqslant C(|\alpha|)|g|^{-|\alpha|-1} \sum_{|\beta|\leqslant|\alpha|} |D^\beta f_i|,$$

valables dans $\bar{D} \setminus E$, pour tout entier i et pour tout multi-indice α de longueur $|\alpha|$.

12. THÉORÈME. — *Soit E un sous-ensemble fermé de ∂D vérifiant la condition (9.1) ou la condition (10.1). Alors E vérifie la propriété de division par $A^\infty(D)$, c'est-à-dire, étant donnée une famille de fonctions $(f_i)_{i\in\mathbb{N}}$ de C_E^∞, il existe une fonction F de A_E^∞ ne s'annulant que sur E et des fonctions $(k_i)_{i\in\mathbb{N}}$ de C_E^∞ telles que l'on ait $f_i = F k_i$, pour tout i dans $\mathbb{N}$.*

De plus, pour tout i, k_i appartient à l'adhérence dans $C^\infty(\bar{D})$ de $A^\infty(D).f_i$.

Preuve. — On applique le lemme précédent aux fonctions $(f_i)_{i\in\mathbb{N}}$. Il existe donc une fonction g positive de C_E^∞ ne s'annulant que sur E et des fonctions $(h_i)_{i\in\mathbb{N}}$ de C_E^∞ telles que l'on ait $f_i = g h_i$, pour tout i dans $\mathbb{N}$. La première partie du théorème sera établie si on construit une fonction F de A_E^∞ telle que l'on ait $g \leqslant |F|$ dans $\bar{D} \setminus E$.

On peut supposer $\sup_{x\in\bar{D}} g(x) \leqslant 1/2$ et poser $\theta = \log 1/g$. La fonction θ est positive, de classe C^∞ sur $\bar{D} \setminus E$; de plus, puisque g est plate sur E, il existe une fonction $\omega(t)$ tendant vers $+\infty$ lorsque t tend vers zéro telle que l'on ait

$$\theta(z) \geqslant \omega(\rho(z, E)) \log \frac{1}{\rho(z, E)}, \quad \text{pour tout } z \text{ de } \bar{D} \setminus E.$$

Puisque le sous-ensemble E vérifie (9.1) ou (10.1) on peut lui appliquer les conclusions des propositions 9 et 10 dont on reprend les notations; il existe donc une fonction $\psi(z)$ holomorphe dans D, de classe C^∞ dans $\bar{D} \setminus E$ telle que l'on ait

$$\operatorname{Re}\psi(z) \ll \log \frac{1}{\rho(z, E)} + O(1) \quad \text{pour tout } z \text{ de } \bar{D} \setminus E.$$

On déduit de là que, quel que soit p entier, $p \geqslant 1$, il existe un voisinage de E dans $\bar{D}$ telle que l'on ait dans ce voisinage

$$\operatorname{Re}\psi(z) \leqslant 2^{-p}\theta(z).$$

Puisque la série $\sum_1^\infty 2^{-k} N_k$ converge et que l'on a pour tout z de $\bar{D} \setminus E$ et tout $(j, k) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$

(12.1) $$|2^{-k}+H(\zeta_{j,k},z)|\geqslant\rho(z,E),$$

il existe donc k_p tel que, si on note,

$$\psi_p(z)=\sum_{k\geqslant k_p}\sum_{j=1}^{N_k}\frac{2^{-k}}{2^{-k}+H(\zeta_{j,k},z)},$$

on ait, pour tout z de $\bar{D}\setminus E$ et, pour tout $p\geqslant 1$,

$$\operatorname{Re}\psi_p(z)\leqslant 2^{-p}\theta(z).$$

On peut s'assurer que la suite $(k_p)_{p\geqslant 1}$ tende vers $+\infty$ lorsque p tend vers $+\infty$. De plus, la convergence de la série $\sum_1^\infty 2^{-k}N_k$ implique l'existence d'une suite $(\lambda_k)_{k\geqslant 1}$ tendant vers $+\infty$ telle que la série $\sum_k \lambda_k 2^{-k}N_k$ soit convergente. On note, pour tout $k\geqslant 1$, $\lambda'_k=\inf(\lambda_k,\operatorname{card}\{p;k_p\leqslant k\})$.

On a encore

(12.2) $$\sum_k \lambda'_k 2^{-k}N_k<\infty.$$

On montre alors, comme dans la preuve du théorème 9 [5] que la fonction F définie par,

$$F(z)=\exp-\varphi(z)=\exp-\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{N_k}\frac{\lambda'_k 2^{-k}}{2^{-k}+H(\zeta_{j,k},z)}=\exp-\sum_{k=1}^{\infty}\lambda'_k a_k$$

est dans $A^\infty(D)$, plate sur E et ne s'annule que sur E. On a alors, puisque $\operatorname{Re} a_k$ est positive, $\operatorname{Re}\varphi(z)\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}\operatorname{card}\{p;k_p\leqslant k\}\operatorname{Re}a_k$,

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{\{p;\,k_p\leqslant k\}}\operatorname{Re}a_k=\sum_{p=1}^{\infty}\sum_{\{k;\,k\geqslant k_p\}}\operatorname{Re}a_k,$$

et donc, pour tout z de $\bar{D}\setminus E$,

$$\operatorname{Re}\varphi(z)\leqslant\sum_{p=1}^{\infty}\operatorname{Re}\psi_p(z)\leqslant\theta(z).$$

On déduit de là $g\leqslant|F|$ sur $\bar{D}\setminus E$. Il existe donc d'après le lemme 11 des fonctions $(k_i)_{i\in\mathbb{N}}$ de C^∞_E telles que l'on ait $f_i=Fk_i$, pour tout i dans $\mathbb{N}$. On se propose maintenant de montrer que, pour tout i dans $\mathbb{N}$, k_i appartient à l'adhérence dans $C^\infty(D)$ de $A^\infty(D).f_i$.

On pose, pour tout entier l,

$$\varphi_l(z)=\sum_{k=1}^{l}\lambda'_k\sum_{j=1}^{N_k}\frac{2^{-k}}{2^{-k}+H(\zeta_{j,k},z)}.$$

D'après 6 (*b*), (12.1) et (12.2) on a, pour tout l et tout z de $\bar{D}\setminus E$,

$$0<\operatorname{Re}\varphi_l(z)<\operatorname{Re}\varphi(z),$$
$$|D^\alpha\varphi_l(z)|\leqslant C(|\alpha|)\,\rho(z,E)^{-|\alpha|-1},$$

pour tout multi-indice α de longueur $|\alpha|$. On a aussi, pour tout z de $\bar{D}\setminus E$,

$$\lim_{l\to\infty}\varphi_l(z)=\varphi(z).$$

On note $k_{i,l}=f_i\exp\varphi_l$ pour tout $(i,l)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}$. La fonction $k_{i,l}$ appartient à $A^\infty(D).f_i$ et converge ponctuellement vers k_i lorsque l tend vers $+\infty$.

On a, de plus, pour tout multi-indice α et tout z de $\bar{D}\setminus E$

$$\begin{aligned}|D^\alpha k_{i,l}(z)|&\leqslant C(|\alpha|)\,\rho(z,E)^{-2|\alpha|}\exp(\operatorname{Re}\varphi(z))\textstyle\sum_{|\beta|\leqslant|\alpha|}|D^\beta f_i(z)|\\&\leqslant C(|\alpha|)\,|F(z)|^{-2}\textstyle\sum_{|\beta|\leqslant|\alpha|}|D^\beta f_i(z)|\\&\leqslant C(|\alpha|)\,(g(z))^{-2}\textstyle\sum_{|\beta|\leqslant|\alpha|}|D^\beta f_i(z)|.\end{aligned}$$

On déduit de là, d'après (11.1),

$$\lim_{z\to E}D^\alpha k_{i,l}(z)=0.$$

Pour tout entier p, la suite $(k_{i,l})_{l\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $C^p(\bar{D})$ donc relativement compacte dans $C^{p-1}(\bar{D})$; elle converge donc vers k_i dans $C^\infty(\bar{D})$, ce qui achève la preuve du théorème.

13. THÉORÈME [5]. — *Soit E un sous-ensemble fermé de ∂D vérifiant la condition* (9.1) *ou la condition* (10.1). *Alors E est un ensemble d'interpolation d'ordre infini pour $A^\infty(D)$.*

Preuve. — Il s'agit d'une conséquence de la proposition 2 et du théorème 12.

14. PROPOSITION. — *Lorsque D est le disque unité du plan complexe, un sous-ensemble fermé E de ∂D a la propriété de division par $A^\infty(D)$ si et seulement si c'est un ensemble d'interpolation d'ordre infini pour $A^\infty(D)$.*

Preuve. — D'après la proposition 2 il suffit de montrer qu'un ensemble d'interpolation d'ordre infini pour $A^\infty(D)$ a la propriété de division par

$A^\infty(D)$. Or les sous-ensembles fermés du bord du disque qui sont des ensembles d'interpolation d'ordre infini pour $A^\infty(D)$ ont été caractérisés dans [1] par une condition équivalente [5] à (9.1). Ceci achève la preuve de la proposition puisque, d'après le théorème 12, si E vérifie la condition (9.1) il a la propriété de division.

15. REMARQUE. — Dans le cas $n>1$, lorsque les sous-ensembles E sont situés sur des sous-variétés totalement réelles de ∂D, on ne sait pas si les conclusions de la proposition 14 subsistent.

16. LEMME. — *Soit E un sous ensemble fermé de ∂D vérifiant la propriété de division par $A^\infty(D)$. Alors A_E^∞ est un $A^\infty(D)$-module plat.*

Preuve. — Si (f_i), $i=1,2,\ldots,l$, est une famille finie de fonctions de A_E^∞ il existe alors, par hypothèse, une fonction F de A_E^∞ et une famille finie (k_i), $i=1,2,\ldots,l$, de fonctions de A_E^∞ vérifiant $f_i=Fk_i$, pour $i=1,2,\ldots,l$. De là, comme le remarquent J. BRUNA et J. M. ORTEGA, on déduit que A_E^∞ est un $A^\infty(D)$-module plat (théorème 1.7, [2]).

17. LEMME. — *Soit E un sous ensemble fermé de ∂D vérifiant la propriété de division par $A^\infty(D)$. Alors C_E^∞ est isomorphe, comme $A^\infty(D)$-module, à $A_E^\infty \otimes_{A^\infty(D)} C^\infty(\bar{D})$. De même, l'espace $C_E^{\infty,p,q}$ des (p,q) formes à coefficients dans C_E^∞ est isomorphe, comme $A^\infty(D)$-module, à $A_E^\infty \otimes_{A^\infty(D)} C^{\infty,p,q}(\bar{D})$ où $C^{\infty,p,q}(\bar{D})$ désigne l'espace des (p,q) formes de classe C^∞ jusqu'au bord de D.*

Preuve. — On prouve ici la première assertion du lemme; la deuxième se démontre de façon analogue.

Soit α l'application canonique de $A_E^\infty \otimes_{A^\infty(D)} C^\infty(\bar{D})$ dans C_E^∞ définie par $\alpha(\sum_i a_i \otimes f_i)=\sum_i a_i f_i$.

Cette application est surjective. En effet si f appartient à C_E^∞ il existe F dans A_E^∞ et k dans C_E^∞ vérifiant $f=Fk$, c'est-à-dire, $f=\alpha(F\otimes k)$.

L'application α est injective. Supposons que l'on ait $\sum_i a_i f_i=0$, pour a_i dans A_E^∞ et f_i dans $C^\infty(\bar{D})$. Il existe F dans A_E^∞ et k_i dans A_E^∞ vérifiant $a_i=Fk_i$, pour tout i. Alors, on a

$$\sum_i a_i \otimes f_i=\sum_i (Fk_i)\otimes f_i=F\otimes \sum_i k_i f_i=0,$$

car

$$\sum_i k_i f_i=0$$

puisque

$$\sum_i a_i f_i = F \sum_i k_i f_i = 0$$

et que F ne s'annule que sur E.

18. PROPOSITION. — *Soit E un sous ensemble fermé de ∂D vérifiant la propriété de division par $A^\infty(D)$. La suite de $A^\infty(D)$-modules et de $A^\infty(D)$-homomorphismes*

$$0 \to A_E^\infty \to C_E^{\infty,0,0} \xrightarrow{\bar\partial} C_E^{\infty,0,1} \xrightarrow{\bar\partial} \dots \xrightarrow{\bar\partial} C_E^{\infty,0,n} \to 0$$

est exacte.

Preuve. — On déduit du théorème de J. J. KOHN [12] que la suite de $A^\infty(D)$-modules et de $A^\infty(D)$-isomorphismes

$$0 \to A^\infty(D) \to C^{\infty,0,0}(\bar D) \xrightarrow{\bar\partial} C^{\infty,0,1}(\bar D) \to \dots \xrightarrow{\bar\partial} C^{\infty,0,n}(\bar D) \to 0$$

est exacte. En tensorisant par le $A^\infty(D)$-module plat A_E^∞ on obtient que

$$0 \to A_E^\infty \otimes_{A^\infty(D)} A^\infty(D) \to A_E^\infty \otimes_{A^\infty(D)} C^{\infty,0,0}(\bar D) \xrightarrow{1\otimes\bar\partial} \dots \xrightarrow{1\otimes\bar\partial} A_E^\infty \otimes_{A^\infty(D)} C^{\infty,0,n}(\bar D) \to 0$$

est une suite exacte. Le lemme 17 permet de conclure.

On retrouve alors la proposition 2.

19. COROLLAIRE. — *Soit E un sous ensemble fermé de ∂D vérifiant la propriété de division par $A^\infty(D)$. Alors E est un ensemble d'interpolation d'ordre infini pour $A^\infty(D)$.*

Preuve. — On utilise la méthode du théorème 5.12 de [11]. Si f appartient à $C^\infty(\mathbb{C}^n)$ et $\bar\partial f$ appartient à $C_E^{\infty,0,1}$ il existe g dans C_E^∞ vérifiant $\bar\partial g = \bar\partial f$, car $\bar\partial f$ est $\bar\partial$-fermée dans $C_E^{\infty,0,1}$. Alors $h = f - g$ appartient à $A^\infty(D)$ et $g = f - h$ est plate sur E.

BIBLIOGRAPHIE

[1] ALEXANDER (H.), TAYLOR (B. A.) and WILLIAMS (D. L.). — The interpolating sets for $A^\infty(D)$, *J. Math. Anal. Appl.*, 36, 1971, p. 556-566.

[2] BRUNA (J.) et ORTEGA (J. M.). – Closed finitely generated ideals in algebras of holomorphic functions and smooth to the boundary in strictly pseudoconvex domains, *Math. Ann.*, 268, 1984, p. 137-157.

[3] BRUNA (J.) et ORTEGA (J. M.). – Communication personnelle.

[4] CARLESON (L.). – Sets of uniqueness for functions, regular in the unit circle, *Acta Math.*, 87, 1952, p. 325-345.

[5] CHAUMAT (J.) et CHOLLET (A.-M.). – Ensembles de zéros et d'interpolation à la frontière de domaines strictement pseudo-convexes, *Arkiv för Matematik*, 1986 (à paraître).

[6] CHAUMAT (J.) et CHOLLET (A.-M.). – Propriétés de division par des fonctions de $A^\infty(D)$, *C.R. Acad. Sc.*, Paris, 300, 1985, p. 419-422.

[7] CHAUMAT (J.) et CHOLLET (A.-M.). – *Dimension de Hausdorff des ensembles des zéros et d'interpolation pour* $A^\infty(D)$ (à paraître).

[8] CHOLLET (A.-M.). – *Ensembles de zéros à la frontière de fonctions analytiques*, Ann. Inst. Fourier, 26, 1976, p. 51-80.

[9] CHOLLET (A.-M.). – Zéros à la frontière de fonctions analytiques d'une ou plusieurs variables complexes, *Thèse d'État*, Orsay, 1976.

[10] COIFMAN (R. R.) et WEISS (G.). – *Analyse harmonique non commutative sur certains espaces homogènes*, Springer-Verlag, 1971.

[11] GAY (R.) et SEBBAR (A.). – Division et extension dans l'algèbre $A^\infty(\Omega)$ d'un ouvert pseudo-convexe à bord lisse de $\mathbb{C}^n$, *Math. Z.*, 189, 1985, p. 421-447.

[12] KOHN (J. J.). – Global regularity for $\bar{\partial}$ on weakly pseudoconvex manifolds, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 181, 1973, p. 273-292.

[13] TOUGERON (J. C.). – *Idéaux de fonctions différentiables*, Springer-Verlag, 1972.