BULLETIN DE LA S. M. F.

ED. LUCAS

Sur l'extension du théorème de Descartes

Bulletin de la S. M. F., tome 8 (1880), p. 187-191

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1880__8__187_1>

© Bulletin de la S. M. F., 1880, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Sur l'extension du théorème de Descartes; par M. Éd. Lucas.

(Séance du 2 avril 1880.)

M. Laguerre a donné, dernièrement, dans les *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences* et dans les *Nouvelles Annales,* quelques considérations nouvelles et fort importantes, au point de vue pratique, pour la séparation des racines des équations algébriques; notre but est de présenter une démonstration élémen-

taire qui permet d'introduire dès maintenant dans l'enseignement le théorème de M. Laguerre.

1. Désignons par $f_m(x)$ un polynôme ordonné par rapport aux puissances décroissantes de x,

$$f_m(x) = A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + A_2 x^{m-2} + \ldots + A_{m-1} x + A_m,$$

et considérons les expressions

$$(1) \quad \begin{cases} f_0(x) = A_0, \\ f_1(x) = A_0 x + A_1, \\ f_2(x) = A_0 x^2 + A_1 x + A_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ f_m(x) = A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + \ldots + A_m. \end{cases}$$

On calcule facilement les valeurs des polynômes $f_0(x), f_1(x), \ldots, f_m(x)$ pour une valeur donnée de x, par voie récurrente, puisque l'on a

$$f_p(x) = x f_{p-1}(x) + A_p.$$

2. Les polynômes en x que nous venons de considérer sont obtenus dans le quotient du polynôme proposé par un binôme $x - a$; on a, en effet, l'identité

$$(2) \quad \frac{f_m(x)}{x-a} = x^{m-1} f_0 + x^{m-2} f_1 + x^{m-3} f_2 + \ldots + f_{m-1} + \frac{f_m}{x-a},$$

dans laquelle $f_0, f_1, \ldots, f_{m-1}, f_m$ désignent les résultats que l'on obtient en remplaçant x par a, dans les polynômes (1).

De même, on calcule facilement le quotient de $f(x)$ par le produit $(x-a)(x-b)$ au moyen de l'identité

$$\frac{f(x)}{x-a} - \frac{f(x)}{x-b} = \frac{(a-b) f(x)}{(x-a)(x-b)},$$

dans laquelle on suppose a et b inégaux.

On calculerait de même le quotient de $f(x)$ par

$$(x-a)(x-b)(x-c)$$

pour des valeurs inégales entre elles de a, b, c au moyen de

l'identité

$$\frac{f(x)}{(x-a)(x-b)} - \frac{f(x)}{(x-a)(x-c)} = \frac{(b-c)f(x)}{(x-a)(x-b)(x-c)},$$

et ainsi de suite.

3. *Lemme de Segner généralisé.* — Le lemme de Segner sert de base à la démonstration du théorème de Descartes; on le généralise de la façon suivante. Si $f(x)$ désigne l'expression

$$Ax^m + Bx^{m-1} + Cx^{m-2} + \ldots + Kx + L + \frac{M}{x-a},$$

dans laquelle M désigne une constante positive ou négative, le nombre des variations contenues dans le produit $(x-b)f(x)$, mis sous la forme

$$Ax^{m+1} + B'x^m + C'x^{m-1} + \ldots + K'x^2 + L'x + M' + \frac{N'}{x-a},$$

surpasse d'une unité au moins et toujours d'un nombre impair le nombre des variations de la suite

$$A,\ B,\ C,\ \ldots,\ K,\ L,\ M$$

si l'on suppose $b > a$ et b positif.

En effet, la suite des coefficients de $f(x)$

$$A,\ B,\ C,\ \ldots,\ K,\ L,\ M$$

devient, après la multiplication,

$$A,\ B - bA,\ C - bB,\ \ldots,\ L - bK,\ M - bL,\ (a-b)M.$$

Le dernier terme a le même signe que $-bM$, puisque l'on suppose $a < b$, de sorte que la démonstration du lemme généralisé est absolument semblable à la démonstration ordinaire donnée dans les Cours.

4. Théorème de M. Laguerre. — *Dans une équation algébrique* $f_m(x) = 0$, *le nombre des racines positives plus grandes que a*

ne peut surpasser le nombre des variations de la suite

$$(3) \qquad f_0(a),\ f_1(a),\ f_2(a),\ \ldots,\ f_m(a),$$

et, quand il est moindre, la différence est un nombre pair.

On démontre ce théorème de la même manière que le théorème de Descartes, en mettant préalablement $f_m(x)$ sous la forme (2). En particulier, pour $a = 0$, on retrouve le théorème de Descartes.

Remarque I. — Si la suite des fonctions (3) ne présente que des permanences, le nombre a est une limite supérieure des racines positives.

Remarque II. — Si dans l'équation $f_m(x) = 0$ on remplace x par $\frac{1}{x}$, on obtiendra une limite supérieure du nombre des racines de l'équation $f_m(x) = 0$ comprises entre 0 et a en appliquant le théorème de M. Laguerre à l'équation $f_m\left(\frac{1}{x}\right) = 0$, pour la valeur $x = \frac{1}{a}$.

Exemple I. — Soit l'équation

$$f_m(x) = x^5 - 5x^4 - 16x^3 + 12x^2 - 9x - 5 = 0,$$

considérée par M. Petersen et par M. Laguerre.

Pour $x = 1$, on a la suite

$$1,\ -4,\ -20,\ -8,\ -17,\ -22;$$

donc l'équation a une seule racine réelle plus grande que l'unité. En appliquant le procédé à la transformée en $\frac{1}{x}$, on n'a que des permanences; ainsi l'équation proposée n'a qu'une seule racine positive.

Exemple II. — Soit l'équation

$$x^6 + x^5 - x^4 - x^3 + x^2 - x + 1 = 0,$$

considérée dans le *Traité d'Algèbre supérieure* de M. Serret (p. 313). La substitution $x = 1$, par le commencement ou par la fin, dans le premier membre, fait voir qu'il n'y a pas de racines

réelles supérieures à l'unité et qu'il y en a deux au plus entre o et 1 ; mais l'équation en $\frac{1}{x}$ s'écrit

$$[x^5 + x(x+1)(x-1)](x-1) + 1 = 0,$$

et ne peut avoir de racine plus grande que 1 ; donc la proposée n'a pas de racines positives. Dans la transformée en $-x$,

$$x^6 - x^5 - x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0,$$

la substitution de $x = 1$ par le commencement ou par la fin montre qu'il n'y a pas de racines plus petites que 1 et qu'il y en a deux au plus plus grandes que 1 ; mais, en l'écrivant sous la forme

$$(x^5 - x^3)(x-1) + x^2 + x + 1 = 0,$$

on voit qu'il n'y a pas de racines plus grandes que 1; donc la proposée a toutes ses racines imaginaires.