BULLETIN DE LA S. M. F.

JEAN-LUC SAUVAGEOT

Une relation de chaîne pour les dérivées de Radon-Nikodym spatiales

Bulletin de la S. M. F., tome 114 (1986), p. 105-117

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1986__114__105_0>

© Bulletin de la S. M. F., 1986, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Bull. Soc. math. France,
114, 1986, p. 105-117.

UNE RELATION DE CHAINE POUR LES DÉRIVÉES DE RADON-NIKODYM SPATIALES

PAR

JEAN-LUC SAUVAGEOT (*)

RÉSUMÉ. — La notion de produit tensoriel relatif d'espaces de Hilbert permet de donner un sens à une relation de chaîne entre dérivées de Radon-Nikodym spatiales de A. Connes, et d'écrire en termes simples d'ampliation relative l'isomorphisme canonique entre deux espaces L^p d'une même algèbre de von Neumann.

ABSTRACT. — The theory of relative tensor product of Hilbert spaces allows us to write a chain rule for A. Connes' spatial Radon-Nikodym derivatives, give meaning to it, and prove it. It provides also, expressed in termes of relative ampliation, the canonical isomorphism between two L^p-spaces associated with the same von Neumann algebra.

Introduction

Le propos de cet article est de lever une difficulté inhérente à la théorie des dérivées spatiales de A. Connes : qu'est-ce qu'une relation de chaîne entre dérivées de Radon-Nikodym? comment écrire un théorème de Radon-Nikodym :

$$\frac{d\varphi}{d\psi_2} = \frac{d\varphi}{d\psi_1} \times \frac{d\psi_1}{d\psi_2},$$

dont la conception même semble problématique, puisque la dérivation $d\varphi/d\psi$ se fait entre deux objets — un poids φ sur une algèbre de von Neumann et un poids ψ sur son commutant — qui sont hétérogènes, et que le signe « $\times$ » dans le membre de droite n'a donc aucun sens *a priori ?*

(*) Texte reçu le 29 janvier 1985, révisé le 15 octobre 1985.

Jean-Luc SAUVAGEOT, Laboratoire de Probabilités, L.A. n° 224, Université Pierre-et-Marie-Curie, Tour 56, 4, place Jussieu, 75230 Paris Cedex 05.

BULLETIN DE LA SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE — 0037-9484/1986/01 105 13/$ 3.30
© Gauthier-Villars

Une autre manière de poser le problème est la suivante : si une algèbre de von Neumann M est représentée dans deux espaces de Hilbert H_1 et H_2, si ψ_1 et ψ_2 sont des poids n. s. f. f. sur les commutants respectifs de M dans $\mathscr{L}(H_1)$ et $\mathscr{L}(H_2)$, comment déduire l'une de l'autre les dérivées spatiales

$$\frac{d\varphi}{d\psi_1} \quad \text{et} \quad \frac{d\varphi}{d\psi_2} \quad (\varphi \text{ poids n. s. f. sur } M),$$

opérateurs agissant dans des espaces de Hilbert différents? comment reconstituer $L^1(\psi_2)$ à partir de $L^1(\psi_1)$, et plus généralement $L^p(\psi_2)$ à partir de $L^p(\psi_1)$?

Le cadre d'une réponse est fourni par la théorie du produit tensoriel relatif d'espaces de Hilbert ([2], [5]). Notons N_1 (resp. N_2) l'algèbre opposée du commutant $\mathscr{L}_M(H_1)$ (resp. $\mathscr{L}_M(H_2)$), et ν_1 le poids n. s. f. f. sur N_1 correspondant à ψ_1 : il existe (*cf.* [5], corollaire 3.4) un $N_1 - N_2$ bimodule K, essentiellement unique, tel que l'on ait l'isomorphisme de $M - N_2$ bimodules

$$H_2 = H_1 \otimes_{\nu_1} K.$$

Notre travail consiste à donner un sens, puis démontrer l'équation

$$\frac{d\varphi}{d\psi_2} = \frac{d\varphi}{d\psi_1} \otimes_{\nu_1} \frac{d\nu_1}{d\psi_2},$$

qui n'est autre (en écrivant $\nu_1 = \psi_1^0$) que la relation de chaîne

$$\frac{d\varphi}{d\psi_2} = \frac{d\varphi}{d\psi_1} \otimes_{\psi_1^0} \frac{d\psi_1^0}{d\psi_2}.$$

(Remarquons que ni $d\varphi/d\psi_1$ ni $d\nu_1/d\psi_2$ ne respectent en général la structure de N_1-module de H_1 ou de K : nous montrons que le second membre de l'équation est néanmoins naturellement défini comme fermeture de l'action produit sur les tenseurs élémentaires.)

L'isomorphisme canonique des espaces $L^1(\psi_1)$ et $L^1(\psi_2)$ s'écrit alors comme une ampliation relative d'opérateurs non bornés :

$$L^1(\psi_1) \ni T \to T \otimes_{\psi_1^0} \frac{d\psi_1^0}{d\psi_2} \in L^1(\psi_2);$$

et notre démonstration fournit de la même manière, pour tout $p>0$, l'isomorphisme canonique des espaces $L^p(\psi_1)$ et $L^p(\psi_2)$ comme une ampliation relative

$$T \to T \otimes_{\psi_1^0} \left(\frac{d\psi_1^0}{d\psi_2}\right)^{1/p}.$$

1. Notations et rappels

1.1. Dans ce paragraphe et le suivant on se donne :

– une algèbre de von Neumann N, dont on note N^0 l'algèbre opposée;

– un poids n. s. f. f. ν sur N, dont on note $\mathcal{N}_\nu$ l'idéal de définition et $\mathcal{U}_0$ l'algèbre de Tomita; $\dot{\nu}$ désigne le poids n. s. f. f. correspondant sur N^0.

Si λ est un nombre complexe, on appelle *domaine de* σ_λ^ν et on note $\mathcal{D}(\sigma_\lambda^\nu)$ l'ensemble des y de N tels que l'application $\mathbb{R} \ni y \to \sigma_t^\nu(y)$ admette un prolongement continu à la bande $0 \leqslant \mathrm{Im}\, z \leqslant \mathrm{Im}\, \lambda$ (ou $\mathrm{Im}\, \lambda \leqslant \mathrm{Im}\, z \leqslant 0$), analytique à l'intérieur. $\sigma_\lambda^\nu(y)$ est alors la valeur de ce prolongement pour $z=\lambda$, et est caractérisé par

$$\sigma_\lambda^\nu(y)\, \Delta_\nu^{i\lambda} \subset \Delta_\nu^{i\lambda}\, y.$$

En particulier on a $\mathcal{U}_0 \subset \mathcal{D}(\sigma_\lambda^\nu)$ pour tout λ.

1.2. On se donne également :

– un N-module à gauche K, c'est-à-dire un espace de Hilbert muni d'une représentation normale non dégénérée de N; classiquement, on note $y\eta$ le résultat de l'action d'un élément y de N sur un vecteur η de K;

– un N-module à droite H (c'est-à-dire un N^0-module à gauche); on note ξy le résultat de l'action d'un élément y^0 de N^0 sur un vecteur ξ de H.

On rappelle [1] qu'un vecteur η de K est ν-borné si il existe un opérateur borné $R^\nu(\eta)$ dans $\mathcal{L}_N(L^2(\nu), K)$ vérifiant

$$R^\nu(\eta)\, \Lambda_\nu(y) = y\eta, \quad \forall y \in \mathcal{N}_\nu;$$

l'espace vectoriel $D(K, \nu)$ des vecteurs ν-bornés est dense dans K.

On identifiera, via l'involution J_ν, les espaces $L^2(\nu)$ et $L^2(\dot{\nu})$, de sorte que si ξ est un vecteur $\dot{\nu}$-borné de H, on aura

$$R^{\dot{\nu}}(\xi)\, J_\nu \Lambda_\nu(y) = \xi y^*, \qquad \forall y \in \mathcal{N}_\nu.$$

1.3. A un couple (η_1, η_2) de vecteurs ν-bornés de K est associé l'opérateur borné

$$\theta^{\nu}(\eta_1, \eta_2) = R^{\nu}(\eta_1) R^{\nu}(\eta_2)^*,$$

qui appartient au commutant $\mathscr{L}_N(K)$ de N dans $\mathscr{L}(K)$.

Si ψ est un poids n. s. f. sur $\mathscr{L}_N(K)$, alors la forme quadratique

$$D(K, \nu) \ni \eta \to \psi(\theta^{\nu}(\eta, \eta)) \in [0, +\infty],$$

se prolonge en une forme quadratique fermée définie sur K (à valeurs dans $[0, +\infty]$); la dérivée spatiale $d\psi/d\nu$ de A. Connes est l'opérateur positif auto-adjoint sur K associé à cette forme (*cf.* [1]).

1.4. On définit sur $D(H, \dot{\nu})$ et $D(K, \nu)$ des produits scalaires à valeurs dans N (N identifiée à son image dans $\mathscr{L}(L^2(\nu))$) en posant :

$$\langle \xi_1, \xi_2 \rangle_{\nu}^{\cdot} = R^{\dot{\nu}}(\xi_2)^* R^{\dot{\nu}}(\xi_1), \qquad \forall \xi_1, \quad \xi_2 \in D(H, \dot{\nu}),$$

$$\langle \eta_1, \eta_2 \rangle_{\nu} = J_{\nu} R^{\nu}(\eta_1)^* R^{\nu}(\eta_2) J_{\nu}, \qquad \forall \eta_1, \quad \eta_2 \in D(K, \nu).$$

Nota. — Pour éviter la confusion entre ces formes sesquilinéaires à valeurs opérateurs et le produit scalaire ordinaire des espaces de Hilbert H ou K, celui-ci sera noté $(.|.)$.

Rappelons les lemmes 1.5 et 1.6 de [5] :

1.5. LEMME. — *Soient ξ_1 et ξ_2 deux vecteurs $\dot{\nu}$-bornés de* H, *η_1 et η_2 deux vecteurs ν-bornés de K. On a alors :*

(*a*) $\langle \xi_1, \xi_2 \rangle_{\nu}^{\cdot} \in \mathscr{N}_{\nu}$ *et* $\Lambda_{\nu}(\langle \xi_1, \xi_2 \rangle_{\nu}^{\cdot}) = R^{\dot{\nu}}(\xi_2)^* \xi_1$.

(*b*) $\langle \eta_1, \eta_2 \rangle_{\nu} \in \mathscr{N}_{\nu}$ *et* $\Lambda_{\nu}(\langle \eta_1, \eta_2 \rangle_{\nu}) = J_{\nu} R^{\nu}(\eta_1)^* \eta_2$.

(*c*) $(\xi_1 \langle \eta_1, \eta_2 \rangle_{\nu} | \xi_2) = (\langle \xi_1, \xi_2 \rangle_{\nu}^{\cdot} \eta_1 | \eta_2)$.

1.6. LEMME. — *Soit ψ un poids n. s. f. f. sur $\mathscr{L}_N(K)$ et λ un nombre complexe.*

(*a*) *Pour $y \in \mathscr{D}(\sigma_{i\lambda}^{\nu})$, on a l'inclusion*

$$\left(\frac{d\psi}{d\nu}\right)^{\lambda} y \supset \sigma_{i\lambda}^{\nu}(y) \left(\frac{d\psi}{d\nu}\right)^{\lambda};$$

(*b*) *si* $\eta \in \mathscr{D}((d\psi/d\nu)^{\lambda})$ *est* ν*-borné et si* $(d\psi/d\nu)^{\lambda}\,\eta$ *est également* ν*-borné, on a l'inclusion*

$$\left(\frac{d\psi}{d\nu}\right)^{\lambda} R^{\nu}(\eta) \supset R^{\nu}\left(\left(\frac{d\psi}{d\nu}\right)^{\lambda}\eta\right)\Delta_{\nu}^{-\lambda};$$

(*c*) *si* η *et* η' *sont comme en* (*b*), *alors* $\langle (d\psi/d\nu)^{\lambda}\eta, \eta'\rangle_{\nu}$ *est dans le domaine de* $\sigma^{\nu}_{-i\lambda}$, *et on a l'égalité :*

$$\sigma^{\nu}_{-i\lambda}\left(\left\langle\left(\frac{d\psi}{d\nu}\right)^{\lambda}\eta, \eta'\right\rangle_{\nu}\right) = \left\langle \eta, \left(\frac{d\psi}{d\nu}\right)^{\bar{\lambda}}\eta'\right\rangle_{\nu}.$$

1.7. Rappelons ([2] et [5]) que le *produit tensoriel relatif* $H \otimes_{\nu} K$ est l'espace de Hilbert séparé complété du produit tensoriel algébrique $D(H, \nu^0) \odot K$ pour le produit scalaire défini par

$$(\xi_1 \otimes_{\nu} \eta_1 \,|\, \xi_2 \otimes_{\nu} \eta_2) = (\langle \xi_1, \xi_2 \rangle_{\nu}^{\cdot} \eta_1 \,|\, \eta_2), \quad \xi_1, \xi_2 \in D(H, \overset{\cdot}{\nu}), \ \eta_1, \eta_2 \in K;$$

ou encore l'espace de Hilbert séparé complété de $H \odot D(K, \nu)$ pour le produit scalaire :

$$(\xi_1 \otimes_{\nu} \eta_1 \,|\, \xi_2 \otimes_{\nu} \eta_2) = (\xi_1 \langle \eta_1, \eta_2 \rangle_{\nu} \,|\, \xi_2), \quad \xi_1, \xi_2 \in H, \ \eta_1, \eta_2 \in D(K, \nu).$$

Cette construction est fonctorielle, et l'on peut représenter dans $H \otimes_{\nu} K$ *le produit tensoriel relatif* $T_1 \otimes_{\nu} T_2$ de deux opérateurs $T_1 \in \mathscr{L}_{N^0}(H)$ et $T_2 \in \mathscr{L}_N(K$ par son action naturelle sur les tenseurs élémentaires; en outre, $\mathbb{C}_H \otimes_{\nu} \mathscr{L}_N(K)$ est exactement le commutant de $\mathscr{L}_{N^0}(H) \otimes_{\nu} \mathbb{C}_K$ ([5], proposition 3.3). De sorte que, si φ est un poids n. s. f. f. sur $\mathscr{L}_{N^0}(H)$ et ψ un poids n. s. f. f. sur $\mathscr{L}_N(K)$, la dérivée spatiale $d\varphi/d\psi$ existe comme opérateur fermé dans $H \otimes_{\nu} K$.

Le but du paragraphe suivant est de reconstituer $d\varphi/d\psi$ à partir des dérivées spatiales $d\varphi/d\overset{\cdot}{\nu}$ et $d\nu/d\psi$.

2. Transitivité de la dérivée spatiale

Les notations sont celles du paraphe précédent. On s'est donné :

– une algèbre de von Neumann N, un N-module à droite H, un N-module à gauche K;

— un poids n. s. f. f. ν sur N; un poids n. s. f. f. φ sur $\mathscr{L}_{N^0}(H)$ et un poids n. s. f. f. ψ sur $\mathscr{L}_N(K)$.

Le but de ce paragraphe est de montrer que l'on peut donner un sens naturel à l'opérateur

$$\frac{d\varphi}{d\nu}\otimes_\nu \frac{d\nu}{d\psi}$$

et que l'on a l'équation, entre opérateurs fermés dans $H\otimes_\nu K$:

$$\frac{d\varphi}{d\nu}\otimes_\nu \frac{d\nu}{d\psi}=\frac{d\varphi}{d\psi}$$

(et plus généralement, pour tout λ complexe,

$$\left(\frac{d\varphi}{d\nu}\right)^\lambda\otimes_\nu\left(\frac{d\nu}{d\psi}\right)^\lambda=\left(\frac{d\varphi}{d\psi}\right)^\lambda).$$

2.1. Notation. — Pour $\lambda\in\mathbb{C}$, on posera

$$\mathscr{D}_\nu\left(\left(\frac{d\nu}{d\psi}\right)^\lambda\right)=\left\{\eta\in D(K,\nu)/\eta\in\mathscr{D}\left(\left(\frac{d\nu}{d\psi}\right)^\lambda\right)\text{ et }\left(\frac{d\nu}{d\psi}\right)^\lambda\eta\in D(K,\nu)\right\}.$$

2.2. Lemme. — *Pour tout* $z\in\mathbb{C}$, $\bigcap_{\lambda\in\mathbb{C}}\mathscr{D}_\nu((d\nu/d\psi)^\lambda)$ *est un cœur pour* $(d\nu/d\psi)^z$.

Démonstration. — Reprenons les résultats et les notations de la proposition 2, chapitre II, de [4], et de sa démonstration :

Tout d'abord, on sait que

$$D=\bigcap_{\lambda\in\mathbb{R}}\mathscr{D}\left(\left(\frac{d\nu}{d\psi}\right)^\lambda\right)\cap D(K,\nu)$$

est un cœur pour $(d\nu/d\psi)^z$.

Pour $\eta\in K$, $\gamma\in\mathbb{R}_+^*$, on pose

$$\eta_\gamma=\sqrt{\gamma\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\gamma t^2}\left(\frac{d\nu}{d\psi}\right)^{it}\eta\,dt,$$

et on note D_0 *l'espace vectoriel engendré par les* η_γ, η parcourant D et γ parcourant $\mathbb{R}_+^*$.

D_0 est un cœur pour $(d\nu/d\psi)^z$, $\forall z \in \mathbb{C}$, et tout vecteur de D_0 est ν-borné. Il suffit donc de vérifier que, pour $\zeta \in D_0$ et $\lambda \in \mathbb{C}$, $(d\nu/d\psi)^\lambda \zeta$ est ν-borné. Pour cela, on fixe η dans D, γ dans $\mathbb{R}_+^*$, y dans $\mathscr{U}_0$ et on calcule :

$$y\left(\frac{d\nu}{d\psi}\right)^\lambda \eta_\gamma = \sqrt{\gamma\pi}\int_{+\infty}^{+\infty} e^{-\gamma t^2} y\left(\frac{d\nu}{d\psi}\right)^{\lambda+it} \eta\, dt$$

$$= \sqrt{\gamma\pi}\int_{+\infty}^{+\infty} e^{-\gamma(t+i\lambda)^2} y\left(\frac{d\nu}{d\psi}\right)^{it} \eta\, dt$$

$$= \sqrt{\gamma\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\gamma(t+i\lambda)^2} R^\nu\left(\left(\frac{d\nu}{d\psi}\right)^{it}\eta\right)\Lambda_\nu(y)\, dt;$$

soit, puisque

$$\left\| R^\nu\left(\left(\frac{d\nu}{d\psi}\right)^{it}\eta\right)\right\| = \left\| R^\nu(\eta)\right\|,$$

$$\left\| y\left(\frac{d\nu}{d\psi}\right)^\lambda \eta_\gamma\right\| \leqslant \left\| R^\nu(\eta)\right\| \quad \left\|\Lambda_\nu(y)\right\| e^{\gamma(\operatorname{Im}\lambda)^2}.$$

C.Q.F.D.

2.3. PROPOSITION. — (*a*). Soit λ un nombre complexe. L'opérateur linéaire T_λ défini sur le produit tensoriel algébrique

$$\mathscr{D}\left(\left(\frac{d\varphi}{d\nu}\right)^\lambda\right) \odot \mathscr{D}_\nu\left(\left(\frac{d\nu}{d\psi}\right)^\lambda\right) \subset H \odot D(K, \nu),$$

par

$$T_\lambda(\xi \odot \eta) = \left(\frac{d\varphi}{d\nu}\right)^\lambda \xi \odot \left(\frac{d\nu}{d\psi}\right)^\lambda \eta,$$

passe au quotient et définit un opérateur fermable $\tilde{T}_\lambda$ *dans* $H \otimes_\nu K$.

(*b*) *Si on note*

$$\left(\frac{d\varphi}{d\nu}\right)^\lambda \otimes_\nu \left(\frac{d\nu}{d\psi}\right)^\lambda$$

la fermeture dans $H \otimes_\nu K$ *de l'opérateur* $\tilde{T}_\lambda$, *on a l'équation entre opérateurs fermés de* $H \otimes_\nu K$:

$$\forall \lambda \in \mathbb{C}, \quad \left(\frac{d\varphi}{d\nu}\right)^\lambda \otimes_\nu \left(\frac{d\nu}{d\psi}\right)^\lambda = \left(\frac{d\varphi}{d\psi}\right)^\lambda.$$

Démonstration. — (*a*) Soient

$$\xi, \xi' \in \mathscr{D}\left(\left(\frac{d\varphi}{d\mathring{\nu}}\right)^{\lambda}\right), \qquad \eta, \eta' \in \mathscr{D}_{\nu}\left(\left(\frac{d\nu}{d\psi}\right)^{\lambda}\right).$$

On calcule, dans $H \otimes_{\nu} K$, en appliquant 1.6*c* et 1.6*a* :

$$\left(\left(\frac{d\varphi}{d\mathring{\nu}}\right)^{\lambda} \xi \otimes_{\nu} \left(\frac{d\nu}{d\psi}\right)^{\lambda} \eta \,\middle|\, \xi' \otimes_{\nu} \eta'\right)$$

$$= \left(\left[\left(\frac{d\varphi}{d\mathring{\nu}}\right)^{\lambda} \xi\right] \left\langle \left(\frac{d\nu}{d\psi}\right)^{\lambda} \eta, \eta' \right\rangle_{\nu} \,\middle|\, \xi'\right)$$

$$= \left(\left(\frac{d\varphi}{d\mathring{\nu}}\right)^{\lambda} \left[\xi \sigma^{\nu}_{i\lambda}\left(\left\langle \left(\frac{d\nu}{d\psi}\right)^{\lambda} \eta, \eta' \right\rangle_{\nu}\right)\right] \,\middle|\, \xi'\right)$$

$$= \left(\xi \left\langle \eta, \left(\frac{d\nu}{d\psi}\right)^{\bar{\lambda}} \eta' \right\rangle_{\nu} \,\middle|\, \left(\frac{d\varphi}{d\mathring{\nu}}\right)^{\bar{\lambda}} \xi'\right)$$

$$= \left(\xi \otimes_{\nu} \eta \,\middle|\, \left(\frac{d\varphi}{d\mathring{\nu}}\right)^{\bar{\lambda}} \xi' \otimes_{\nu} \left(\frac{d\nu}{d\psi}\right)^{\bar{\lambda}} \eta'\right).$$

Le calcul prouve, d'une part que T_{λ} passe au quotient, puisque si on a $\sum_i \xi_i \otimes_{\nu} \eta_i = 0$, on a encore

$$\sum_i \left(\frac{d\varphi}{d\mathring{\nu}}\right)^{\lambda} \xi_i \otimes_{\nu} \left(\frac{d\nu}{d\psi}\right)^{\lambda} \eta_i = 0;$$

d'autre part que l'opérateur $\tilde{T}_{\lambda}$ obtenu par passage au quotient est fermable, puisque son adjoint contient $\tilde{T}_{\bar{\lambda}}$.

(*b*) Le groupe à un paramètre d'unitaire de $H \otimes_{\nu} K$,

$$\left\{\left(\frac{d\varphi}{d\mathring{\nu}}\right)^{it} \otimes_{\nu} \left(\frac{d\nu}{d\psi}\right)^{it} ; t \in \mathbb{R}\right\}$$

implémente les groupes d'automorphismes

$$\{\sigma^{\varphi}_{t}, t \in \mathbb{R}\} \text{ sur } \mathscr{L}_{N^0}(H) \otimes_{\nu} \mathbb{C}_K; \qquad \{\sigma^{\psi}_{-t}, t \in \mathbb{R}\} \text{ sur } \mathbb{C}_H \otimes_{\nu} \mathscr{L}_N(K).$$

On obtient ainsi l'existence d'un opérateur positif non singulier, h, affilié au centre de N (identifié au centre de $\mathscr{L}_{N^0}(H) \otimes_{\nu} \mathbb{C}_K$ et de $\mathbb{C}_H \otimes_{\nu} \mathscr{L}_N(K)$), tel que l'on ait

$$\left(\frac{d\varphi}{d\mathring{\nu}}\right)^{it} \otimes_{\nu} \left(\frac{d\nu}{d\psi}\right)^{it} = h^{it}\left(\frac{d\varphi}{d\psi}\right)^{it}, \qquad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Par prolongement analytique, on obtient :

$$\left(\frac{d\varphi}{d\mathring{\nu}}\right)^{\lambda} \otimes_{\nu} \left(\frac{d\nu}{d\psi}\right)^{\lambda} \subset h^{\lambda} \left(\frac{d\varphi}{d\psi}\right)^{\lambda}, \qquad \forall \lambda \in \mathbb{C}.$$

On va d'abord montrer que l'on a

$$\frac{d\mathring{\nu}}{d\varphi} \otimes_{\nu} \frac{d\psi}{d\nu} \subset \frac{d\psi}{d\varphi},$$

l'inclusion étant prise au sens des formes quadratiques, ce qui impliquera que h est isométrique, donc que $h \equiv 1$.

2.4. LEMME. — *On a*

$$\left(\frac{d\mathring{\nu}}{d\varphi}\right)^{1/2} \otimes_{\nu} \left(\frac{d\psi}{d\nu}\right)^{1/2} \subset \left(\frac{d\psi}{d\varphi}\right)^{1/2}.$$

Démonstration. — On fixe

$$\xi \in \mathscr{D}\left(\frac{d\mathring{\nu}}{d\varphi}\right) \cap D(H, \varphi) \qquad \text{et} \qquad \eta \in \mathscr{D}_{\nu}\left(\left(\frac{d\nu}{d\psi}\right)^{1/2}\right).$$

On va calculer

$$\theta^{\varphi}(\xi \otimes_{\nu} \eta, \xi \otimes_{\nu} \eta) = R^{\varphi}(\xi \otimes_{\nu} \eta) R^{\varphi}(\xi \otimes_{\nu} \eta)^{*} \qquad (cf.\ [1]).$$

On note δ_{η} l'opérateur continu

$$H \ni \xi_1 \to \xi_1 \otimes_{\nu} \eta \in H \otimes_{\nu} K.$$

On a alors, pour $\xi_1 \in H$, $\eta_1 \in D(K, \nu)$

$$\delta_{\eta}^{*}(\xi_1 \otimes_{\nu} \eta_1) = \xi_1 \langle \eta_1, \eta \rangle_{\nu}.$$

Pour $x \in \mathscr{L}_{N^0}(H)$, on a $x\xi \otimes_{\nu} \eta = \delta_{\eta} R^{\varphi}(\xi) \Lambda_{\varphi}(x)$: $\xi \otimes_{\nu} \eta$ est φ-borné et on a

$$\theta^{\varphi}(\xi \otimes_{\nu} \eta, \xi \otimes_{\nu} \eta) = \delta_{\eta} \theta^{\varphi}(\xi, \xi) \delta_{\eta}^{*}.$$

D'après le lemme 1.7 de [5] et 1.6 (c), $\theta^{\varphi}(\xi, \xi)^0$ est dans le domaine de $\sigma^{\nu}_{-i/2}$, et si l'on choisit η_1 dans $\mathscr{D}_{\nu}((d\nu/d\psi)^{1/2})$, $\langle \eta, \eta_1 \rangle_{\nu}$ est également dans le domaine de $\sigma^{\nu}_{-i/2}$. On calcule, pour ξ_1 dans K :

$$\begin{aligned}\theta^{\varphi}(\xi \otimes_{\nu} \eta, \xi \otimes_{\nu} \eta)(\xi_1 \otimes_{\nu} \eta_1) &= \xi_1 \langle \eta_1, \eta \rangle_{\nu} \theta^{\varphi}(\xi, \xi)^0 \otimes_{\nu} \eta \\ &= \xi_1 \otimes_{\nu} \sigma^{\nu}_{-i/2}(\langle \eta_1, \eta \rangle_{\nu} \theta^{\varphi}(\xi, \xi)^0)\eta \\ &= \xi_1 \otimes_{\nu} R^{\nu}(\eta) \Delta_{\nu}^{1/2} \Lambda_{\nu}(\langle \eta_1, \eta \rangle_{\nu} \theta^{\varphi}(\xi, \xi)^0) \\ &= \xi_1 \otimes_{\nu} R^{\nu}(\eta) J_{\nu} \theta^{\varphi}(\xi, \xi)^0 J_{\nu} R^{\nu}(\eta)^* \eta_1,\end{aligned}$$

d'après [5] 1.3 et 1.5; d'où l'égalité, dans $\mathscr{L}_N(K)$:

$$\begin{aligned}\theta^{\varphi}(\xi \otimes_{\nu} \eta, \xi \otimes_{\nu} \eta) &= R^{\nu}(\eta) J_{\nu} \theta^{\varphi}(\xi, \xi)^0 J_{\nu} R^{\nu}(\eta)^* \\ &= \theta^{\nu}(\eta, \sigma^{\nu}_{-i/2}(\theta^{\varphi}(\xi, \xi)^0)\eta).\end{aligned}$$

On calcule alors pour

$$\xi \in \mathscr{D}\left(\frac{d\mathring{\nu}}{d\varphi}\right) \cap D(H, \varphi) \quad \text{et} \quad \eta \in \mathscr{D}_{\nu}\left(\left(\frac{d\nu}{d\psi}\right)^{1/2}\right) \cap \mathscr{D}_{\nu}\left(\left(\frac{d\psi}{d\nu}\right)^{1/2}\right) :$$

$$\begin{aligned}\left\|\left(\frac{d\psi}{d\varphi}\right)^{1/2}(\xi \otimes_{\nu} \eta)\right\|^2 &= \psi(\theta^{\varphi}(\xi \otimes_{\nu} \eta, \xi \otimes_{\nu} \eta)) \\ &= \psi(\theta^{\nu}(\eta, \sigma^{\nu}_{-i/2}(\theta^{\varphi}(\xi, \xi)^0)\eta)) \\ &= \left(\frac{d\psi}{d\nu}\eta \,\middle|\, \sigma^{\nu}_{-i/2}(\theta^{\varphi}(\xi, \xi)^0)\eta\right) \\ &= \left(\left(\frac{d\psi}{d\nu}\right)^{1/2}\eta \,\middle|\, \theta^{\varphi}(\xi, \xi)^0\left(\frac{d\psi}{d\nu}\right)^{1/2}\eta\right) \quad \text{d'après 1.6 } (a) \\ &= \left(\left(\frac{d\psi}{d\nu}\right)^{1/2}\eta \,\middle|\, \left\langle\left(\frac{d\mathring{\nu}}{d\varphi}\right)^{1/2}\xi, \left(\frac{d\mathring{\nu}}{d\varphi}\right)^{1/2}\xi\right\rangle_{\nu}^{\cdot}\left(\frac{d\psi}{d\nu}\right)^{1/2}\eta\right) \\ &= \left\|\left(\left(\frac{d\mathring{\nu}}{d\varphi}\right)^{1/2} \otimes_{\nu}\left(\frac{d\psi}{d\nu}\right)^{1/2}\right)(\xi \otimes_{\nu} \eta)\right\|^2 \quad \text{d'après [5], 1.7.}\end{aligned}$$

D'où l'inclusion cherchée et l'équation $h \equiv 1$.

Fin de la démonstration de la proposition 2.3.

On sait maintenant que l'on a

$$\left(\frac{d\varphi}{d\mathring{\nu}}\right)^{it} \otimes_{\nu}\left(\frac{d\nu}{d\psi}\right)^{it} = \left(\frac{d\varphi}{d\psi}\right)^{it} \quad \text{pour tout } t \text{ de } \mathbb{R},$$

et

$$\left(\frac{d\varphi}{d\check{\nu}}\right)^{\lambda} \otimes_{\nu} \left(\frac{d\nu}{d\psi}\right)^{\lambda} \subset \left(\frac{d\varphi}{d\psi}\right)^{\lambda} \quad \text{pour tous } \lambda \text{ de } \mathbb{C}.$$

Fixons $\lambda \in \mathbb{R}$ et démontrons l'inclusion inverse.

Pour $\zeta \in H \otimes_{\nu} K$, $\gamma \in \mathbb{R}_+^*$, on pose

$$\zeta_\gamma = \sqrt{\gamma\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\gamma t^2} \left(\frac{d\varphi}{d\psi}\right)^{it} \zeta \, dt.$$

On remarquera d'abord que, pour

$$\zeta = \xi \otimes_{\nu} \eta, \qquad \xi \in \mathscr{D}\left(\left(\frac{d\varphi}{d\check{\nu}}\right)^{\lambda}\right), \qquad \eta \in \mathscr{D}_{\nu}\left(\left(\frac{d\nu}{d\psi}\right)^{\lambda}\right),$$

ζ_γ est limite de combinaisons linéaires

$$\sum_j \alpha_j \left(\frac{d\varphi}{d\check{\nu}}\right)^{it_j} \xi \otimes_{\nu} \left(\frac{d\varphi}{d\psi}\right)^{it_j} \eta,$$

de sorte que $(d\varphi/d\psi)(\zeta_\gamma)$, qui est égal à $((d\varphi/d\psi)^{\lambda})\zeta)_\gamma$, soit la limite des

$$\sum \alpha_j \left(\frac{d\varphi}{d\check{\nu}}\right)^{it_j+\lambda} \xi \otimes_{\nu} \left(\frac{d\nu}{d\psi}\right)^{it_j+\lambda} \eta;$$

ce qui signifie que ζ_γ est encore dans le domaine de

$$\left(\frac{d\varphi}{d\check{\nu}}\right)^{\lambda} \otimes_{\nu} \left(\frac{d\nu}{d\psi}\right)^{\lambda}.$$

Si ζ est quelconque dans le domaine de $(d\varphi/d\psi)^{\lambda}$, et si on fixe ε, on aura d'abord, pour γ suffisamment grand :

$$\|\zeta - \zeta_\gamma\| + \left\|\left(\frac{d\varphi}{d\psi}\right)^{\lambda} (\zeta - \zeta_\gamma)\right\| \leqslant \varepsilon.$$

Ensuite, pour

$$\zeta' = \sum_j \xi_j \otimes_{\nu} \eta_j, \qquad \left(\xi_j \in \mathscr{D}\left(\left(\frac{d\varphi}{d\check{\nu}}\right)^{\lambda}\right), \qquad \eta_j \in \mathscr{D}_{\nu}\left(\left(\frac{d\nu}{d\psi}\right)^{\lambda}\right),\right.$$

suffisamment proche de ζ, au aura

$$\|\zeta_\gamma - \zeta'_\gamma\| + \left\| \left(\frac{d\varphi}{d\psi}\right)^\lambda (\zeta'_\gamma - \zeta_\gamma) \right\| \leqslant \varepsilon.$$

D'après ce qui précède, ζ'_γ est dans le domaine de

$$\left(\frac{d\varphi}{d\nu}\right)^\lambda \otimes_\nu \left(\frac{d\nu}{d\psi}\right)^\lambda,$$

d'où le résultat. ■

3. Conclusion

Ce que nous avons obtenu avec la proposition 2.3 est d'abord une relation de chaîne pour les dérivées de Radon-Nikodym spatiales :

3.1. Théorème de Radon-Nikodym spatial

Soient M, N et P trois algèbres de von Neumann, φ, ν et ψ trois poids n. s. f. f. sur M, N et P respectivement.

Soit H un $M-N$ bimodule et K un $N-P$ bimodule tels que l'on ait

$$M = \mathscr{L}_{N^0}(H) \qquad \text{et} \qquad N = \mathscr{L}_{P^0}(K).$$

Alors les dérivées spatiales satisfont l'équation entre opérateurs non bornés de $H \otimes_\nu K$:

$$\frac{d\varphi}{d\psi^0} = \frac{d\varphi}{d\nu} \otimes_\nu \frac{d\nu}{d\psi^0}.$$

On obtient ensuite l'isomorphisme canonique des espaces L^p spatiaux : soient H_1 et H_2 deux M-modules à gauche fidèles, ψ_1 et ψ_2 deux poids n. s. f. f. sur $\mathscr{L}_M(H_1)$ et $\mathscr{L}_M(H_2)$ respectivement. Notons N l'algèbre opposée de $\mathscr{L}_M(H_1)$, et ψ_1^0 le poids sur N correspondant à ψ_1. D'après [5] 3.4, il existe un $N-\mathscr{L}_M(H_2)^0$ bimodule K essentiellement unique, tel que l'on ait $H_2 = H_1 \otimes_{\psi_1^0} K$; on remarquera que $\mathscr{L}_N(K)$ est l'image de $\mathscr{L}_M(H_2)$ dans $\mathscr{L}(K)$, de sorte que $d\psi_1^0/d\psi_2$ existe comme opérateur positif auto-adjoint de K.

On remarquera ensuite que, pour $\lambda > 0$, la proposition 2.3 reste vraie lorsqu'on supprime l'hypothèse de fidélité sur le poids φ, donc en particulier lorsque φ est une forme linéaire positive normale sur M; et que la partie isométrique d'un opérateur de $L^p(\psi_1)$ appartient à M, et respecte donc la structure de N-module à droite de H_2. D'où le corollaire :

3.2. COROLLAIRE (Isomorphisme spatial des espaces L^p). — *Soient M, H_1, H_2, ψ_1, ψ_2, N, ψ_1^0 et K définis comme ci-dessus. Soit p un nombre réel strictement positif.*

(a) Si T est un opérateur dans $L^p(\psi_1)$, l'opérateur $T \otimes (d\psi_1^0/d\psi_2)^{1/p}$ défini sur le produit tensoriel algébrique

$$\mathscr{D}(T) \odot \mathscr{D}_{\psi_1^0}\left(\left(\frac{d\psi_1^0}{d\psi_2}\right)^{1/p}\right)$$

se prolonge, par passage au quotient et fermeture, en un opérateur fermé

$$T \otimes_{\psi_1^0} \left(\frac{d\psi_1^0}{d\psi_2}\right)^{1/p}$$

de $H_2 = H_1 \otimes_{\psi_1^0} K$ qui appartient à $L^p(\psi_2)$.

(b) L'ampliation relative

$$L^p(\psi_1) \ni T \to T \otimes_{\psi_1^0} \left(\frac{d\psi_1^0}{d\psi_2}\right)^{1/p} \in L^p(\psi_2)$$

est l'isomorphisme de $L^p(\psi_1)$ sur $L^p(\psi_2)$ qui, à l'élément générique $u(d\varphi/d\psi_1)^{1/p}$ $(u \in M, \varphi \in M_*^+, u^* u = \text{supp } \varphi)$ de $L^p(\psi_1)$ associe $u(d\varphi/d\psi_2)^{1/p}$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] CONNES (A.), On the spatial theory of von Neumann algebras, *J. F. A.*, vol. 35/2, 1980, p. 153-164.

[2] CONNES (A.). — Notes manuscrites, 1980.

[3] HAAGERUP U. — *L^p-spaces associated with a von Neumann algebra*, Preprint, Odense Universiteit, Denmark.

[4] HILSUM (M.). — Les espaces L^p d'une algèbre de von Neumann, *J.F.A.*, vol. 40/2, 1981, p. 151-169.

[5] SAUVAGEOT (J.-L.). — Sur le produit tensoriel relatif d'espaces de Hilbert, *J.O.T.*, vol. 9, 1983, p. 237-252.