BULLETIN DE LA S. M. F.

JACQUES PEYRIÈRE

Comparaison de deux notions de dimension

Bulletin de la S. M. F., tome 114 (1986), p. 97-103

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1986__114__97_0>

© Bulletin de la S. M. F., 1986, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Bull. Soc. math. France,
114, 1986, p. 97-103.

COMPARAISON DE DEUX NOTIONS DE DIMENSION

PAR

JACQUES PEYRIÈRE (*)

RÉSUMÉ. — On définit un ensemble aléatoire plan à la manière de Cantor, en prenant une intersection dénombrable de réunions de rectangles s'aplatissant au fur à mesure que leur diamètre diminue. On établit une relation liant presque sûrement la dimension de Hausdorff de cet ensemble et sa dimension associée à une pseudo-métrique.

ABSTRACT. — A random planar set is defined à la Cantor by taking the intersection of a countable family of unions of rectangles which are flatter and flatter as their diameter tends to zero. A relation, which holds with probability one, links the Hausdorff dimension of this set and its dimension associated to a pseudo-metric.

I. Introduction

Considérons une famille $\mathcal{E}$ de parties du carré $[0, 1] \times [0, 1]$ telle que tout point x de ce carré appartienne à des éléments de $\mathcal{E}$, non vides et dont le diamètre soit arbitrairement petit (on utilise la métrique euclidienne ou une distance équivalente).

Soit E une partie du carré $[0, 1] \times [0, 1]$. Désignons par α et ε deux nombres strictement positifs et posons

$$H_{\alpha,\varepsilon}(E, \mathcal{E}) = \inf \{\textstyle\sum_j (\text{diamètre}(R_j))^\alpha;$$
$$E \subset \textstyle\bigcup_j R_j,\ R_j \in \mathcal{E} \text{ et diamètre } (R_j) \leqq \varepsilon\},$$
$$H_\alpha(E, \mathcal{E}) = \lim_{\varepsilon \to 0} H_{\alpha,\varepsilon}(E, \mathcal{E})$$

et

$$\dim_{\mathcal{E}} E = \inf \{\alpha > 0;\ H_\alpha(E, \mathcal{E}) = 0\}.$$

(*) Texte reçu le 16 octobre 1984, révisé le 17 septembre 1985.

J. PEYRIÈRE, Université Paris-Sud, U.A. 757, Analyse Harmonique, Mathématiques (Bât. 425), 91405 Orsay Cedex.

BULLETIN DE LA SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE — 0037-9484/1986/01 97 7/$ 2.70

© Gauthier-Villars

Lorsque $\mathscr{E}$ est constitué de toutes les parties du carré, ou simplement de toutes les boules, on obtient la dimension de Hausdorff que dans la suite nous noterons dim.

Dans [8] nous donnons des conditions sur $\mathscr{E}$ assurant l'identité $\dim_{\mathscr{E}} = \dim$. Cependant plusieurs situations amènent à considérer des familles ne donnant pas lieu à cette identité. Il s'agit de cas où $\mathscr{E}$ est constitué des boules associées à une pseudo-métrique. On n'a pas alors de relation simple entre $\dim_{\mathscr{E}}$ et dim. Notre propos est de nous placer dans la situation considérée par S. LOVEJOY et D. SCHERTZER [5] à propos de la turbulence atmosphérique et de montrer qu'il existe une relation affine liant presque sûrement dim E et $\dim_{\mathscr{E}} E$ lorsque E est un ensemble aléatoire convenable. Il existe d'autres situations où apparaissent des dimensions relatives à une pseudo-métrique, notamment celle considérée par A.-M. CHOLLET [3] et A.-M. CHOLLET et J. CHAUMAT [4] dans laquelle obtenir un résultat analogue à celui de cet article semble plus difficile. Dans le cas déterministe, des problèmes analogues ont été étudiés par T. J. Bedford [1], C. McMullen [6] et B. B. Mandelbrot [7].

II. Position du problème et résultats

Si F est un ensemble fini, on note F^* l'ensemble des mots construits avec F comme alphabet. La longueur d'un élément j de F^* est notée $|j|$, le mot de longueur nulle ω. Muni de la concaténation, F^* est un monoïde : si j et k appartiennent à F^*, on note jk le mot obtenu en mettant les mots j et k bout à bout. On identifie $(F \times G)^*$ à une partie de $F^* \times G^*$.

Soit a et ν deux entiers supérieurs ou égaux à 2. On pose

$$\mathbb{N}_a = \{0, 1, \ldots, a-1\},$$

A chaque élément j de $\mathbb{N}_a^*$ on associe l'intervalle

$$I_a(j) = [\textstyle\sum_{1 \leqslant k \leqslant |j|} j_k a^{-k}, \sum_{1 \leqslant k \leqslant |j|} j_k a^{-k} + a^{-|j|}[$$

et à chaque j de $\mathbb{N}_a^{*\nu}$ l'intervalle

$$I_{a,\nu}(j) = [\textstyle\sum_{1 \leqslant k \leqslant |j|} j_k a^{-\nu k}, \sum_{1 \leqslant k \leqslant |j|} j_k a^{-\nu k} + a^{-\nu|j|}[.$$

Si $j = (j^1, j^2)$ appartient à $(\mathbb{N}_a \times \mathbb{N}_{a^\nu})^*$, on note $R(j)$ ou $R(j^1, j^2)$ le rectangle $I_a(j^1) \times I_{a,\nu}(j^2)$.

Si j appartient à $(\mathbb{N}_a \times \mathbb{N}_{a^\nu})^*$ et k à $\mathbb{N}_a^{(\nu-1)|j|}$, on pose

$$Q(j, k) = I_a(j^1 k) \times I_{a,\nu}(j^2).$$

On obtient ainsi un carré de côté $a^{-\nu|j|}$. On a

$$R(j) = \cup \{Q(j, k);\ k \in \mathbb{N}_a^{(\nu-1)|j|}\}$$

et

$$Q(j, k) = \cup \{R(j^1 k, j^2 l);\ l \in \mathbb{N}_a^{(\nu-1)|j|}\}.$$

On considère maintenant un entier b strictement compris entre a^ν et $a^{\nu+1}$ et une suite $\{A(j)\}_{j \in (\mathbb{N}_a \times \mathbb{N}_{a^\nu})^*}$ de variables aléatoires indépendantes, équidistribuées et à valeurs dans l'ensemble des parties à b éléments de $\mathbb{N}_a \times \mathbb{N}_{a^\nu}$, chacune de ces parties étant équiprobable. Si j appartient à $(\mathbb{N}_a \times \mathbb{N}_{a^\nu})^*$ et k à $\mathbb{N}_a \times \mathbb{N}_{a^\nu}$, on pose

$$W(jk) = \frac{1}{b} 1_{A(j)}(k),$$

de sorte que l'on a

$$P\left(W(jk) = \frac{1}{b}\right) = 1 - P(W(jk) = 0) = ba^{-(\nu+1)}.$$

On définit une fonction aléatoire μ sur les rectangles $\{R(j)\}_{j \in (\mathbb{N}_a \times \mathbb{N}_{a^\nu})^*}$ ainsi :

- $\mu(R(\omega)) = 1$;
- $\mu(R(jk)) = W(jk)\,\mu(R(j))$ si $j \in (\mathbb{N}_a \times \mathbb{N}_{a^\nu})^*$ et $k \in \mathbb{N}_a \times \mathbb{N}_{a^\nu}$.

Notons que $\mu(R(j))$ ne peut prendre que les valeurs 0 et $b^{-|j|}$.

Cette fonction se prolonge en une probabilité, encore notée μ, sur la tribu de Borel de $R(\omega) = [0, 1[\times [0, 1[$. Le support de cette mesure est le compact aléatoire

$$F = \cap_{n \geq 0} \cup \{\overline{R(j)};\ |j| = n \text{ et } \mu(R(j)) \neq 0\}.$$

On a le résultat suivant.

THÉORÈME. — *Soit* $\mathcal{E} = \{R(j)_{j \in (\mathbb{N}_a \times \mathbb{N}_{a^\nu})^*}$. *Presque sûrement on a*

$$\dim F = \frac{1}{\nu} \dim_{\mathcal{E}} F + \frac{\nu - 1}{\nu} = \frac{\log b}{\nu \log a} + \frac{\nu - 1}{\nu}.$$

III. Démonstration

Montrons d'abord que l'on a $\dim_{\mathscr{E}} F = \log b/\log a$. On utilise comme diamètre d'un rectangle la longueur de son plus grand côté. L'ensemble F est recouvert par b^n des rectangles $\{R(j)\}_{|j|=n}$, donc

$$H_{a,a^{-n}}(E, \mathscr{E}) \leqslant b^n a^{-\alpha n},$$

d'où l'inégalité $\dim_{\mathscr{E}} F \leqslant \log b/\log a$. D'autre part, si l'on considère un recouvrement de F par des éléments de $\mathscr{E}$, $F \subset \bigcup_l R(j_l)$, on a

$$1 = \mu(F) \leqslant \sum_l \mu(R(j_l)) \leqslant \sum_l [\text{diamètre}(R(j_l))]^{\log b/\log a},$$

d'où l'inégalité inverse.

D'autre part, l'ensemble F, étant recouvert par b^n des rectangles $\{R(j)\}_{|j|=n}$, l'est par $b^n a^{(\nu-1)n}$ des carrés $\{Q(j, k)\}_{|j|=n,\, k \in \mathbb{N}_a^{(\nu-1)n}}$, donc

$$\dim F \leqslant \frac{\log b + (\nu-1)\log a}{\nu \log a}.$$

Reste à montrer l'inégalité opposée.

Les variables $\{A(j)\}_j$ sont définies sur un espace $(\Omega, \mathscr{A}, P)$. Considérons la probabilité $\mathbb{P}$ sur la tribu $\mathscr{F}$, produit de $\mathscr{A}$ par la tribu de Borel de $[0, 1[^2$, telle que l'on ait $\mathbb{P}(A \times R) = E(\mu(R)\, 1_A)$. L'espérance correspondante sera notée $\mathbb{E}$.

Puisque l'on a

$$\mu(Q(j, k)) = \Sigma\{\mu(R(j^1 k, j^2 l));\ l \in \mathbb{N}_a^{(\nu-1)|j|}\}$$

on peut écrire

$$\mu(Q(j, k)) = T(j, k)\, \mu(R(j))$$

où

$$T(j, k) = \sum_{l \in \mathbb{N}_a^{(\nu-1)|j|}} W(j^1 k_1, j^2 l_1)\, W(j^1 k_1 k_2, j^2 l_1 l_2) \ldots W(j^1 k_1 \ldots k_{(\nu-1)|j|}, j^2 l_1 \ldots l_{(\nu-1)|j|}),$$

ce que l'on écrira

$$T(j, k) = \sum_{l \in \mathbb{N}_a^{(\nu-1)|j|}} W_{j,k}(l_1)\, W_{j,k}(l_1 l_2) \ldots W_{j,k}(l_1 l_2 \ldots l_{(\nu-1)}|j|).$$

Posons

$$T_n = \sum_{j \in (\mathbb{N}_a \times \mathbb{N}_{a^\nu})^n} \sum_{k \in \mathbb{N}_a^{(\nu-1)n}} T(j, k)\, 1_{Q(j,k)}$$

et notons $Q_n(x)$ celui des carrés $\{Q(j, k)\}_{j \in (\mathbb{N}_a \times \mathbb{N}_{a^\nu})^n,\ k \in \mathbb{N}_a^{(\nu-1)n}}$ qui contient x.

Nous allons montrer que $1/n^2 \log T_{n^2}$ tend vers $-(\nu-1)\log a$ presque sûrement relativement à $\mathbb{P}$. Admettons le provisoirement. On en déduit que, P-presque sûrement pour μ-presque tout x, $-[\log \mu(Q_{n^2}(x))]/(n^2 \nu \log a)$ tend vers

$$d = \frac{\log b}{\nu \log a} + \frac{\nu-1}{\nu}.$$

Ceci, grâce à un théorème de P. BILLINGSLEY ([2], p. 144) prouve l'inégalité $\dim_{\mathscr{E}_1} F \geqslant d$ où $\mathscr{E}_1$ désigne la famille des carrés

$$\{Q(j, k)\}_{j \in (\mathbb{N}_a \times \mathbb{N}_{a^\nu})^{n^2},\ k \in \mathbb{N}_a^{(\nu-1)n^2}}.$$

Mais, comme le quotient des logarithmes des côtés des carrés correspondant à n^2 et $(n+1)^2$ tend vers 1, on a $\dim_{\mathscr{E}_1} = \dim$. La démonstration sera donc complète après que nous aurons prouvé le lemme suivant.

LEMME. — *On a* $\mathbb{E}(1/n \log T_n + (\nu-1)\log a)^2 = o(1/n)$.

Démonstration. — Calculons $\mathbb{E}(\varphi(T_n))$ où φ est une fonction borélienne de signe constant. On a

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(\varphi(T_n)) &= \sum_{j,k} E[\mu(Q(j, k))\, \varphi(T(j, k))] \\ &= \sum_{j,k} E[T(j, k)\, \varphi(T(j, k))\, \mu(R(j))] \\ &= a^{(\nu-1)n} E[T(j, k)\, \varphi(T(j, k))],\end{aligned}$$

où j et k sont deux éléments quelconques respectivement de $(\mathbb{N}_a \times \mathbb{N}_{a^\nu})^n$ et de $\mathbb{N}_a^{(\nu-1)n}$. On a

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(\varphi(T_n)) = a^{(\nu-1)n} \sum_{l \in \mathbb{N}_a^{(\nu-1)n}} E[&W_{j,k}(l_1)\, W_{j,k}(l_1 l_2) \ldots \\ &W_{j,k}(l_1 \ldots l_{(\nu-1)n})\, \varphi(T(j, k))].\end{aligned}$$

Là encore, tous les termes sont égaux. On obtient

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(\varphi(T_n)) &= a^{(\nu^2-1)n} E[W_{j,k}(0)\, W_{j,k}(00) \ldots W_{j,k}(00\ldots0)\, \varphi(T(j, k))] \\ &= E\left[\varphi(T(j, k)) \,\middle|\, W_{j,k}(0) = W_{j,k}(00) = \ldots = W_{j,k}(0^{(\nu-1)n}) = \frac{1}{b}\right]\end{aligned}$$

(bien sûr, ici $0^{(\nu-1)n}$ désigne le mot composé de $(\nu-1)\,n$ zéros).

Nous allons maintenant donner une autre expression de $\mathbb{E}(\varphi(T_n))$ en définissant un processus ayant même distribution que $\{T_n\}$. Considérons une suite $\{X(l)\}_{l \in \mathbb{N}_a^{*\nu},\, |l| \geq 1}$ telle que

1. La v. a. $X(l)$ est indépendante de l'ensemble des variables $\{X(l')\}_{|l'| < |l|}$.

2. Pour tout $n \geqslant 0$, la loi conjointe des variables $\{X(0^n k)\}_{0 \leqslant k < a^\nu}$ est identique à celle des variables $\{1_{(0,k) \in A(\omega)}\}_{0 \leqslant k < a^\nu}$ sachant que $(0, 0) \in A(\omega)$.

3. Si $|l| \geqslant 1$ et si l n'est pas composé uniquement de zéros, la loi conjointe des v. a. $\{X(lk)\}_{0 \leqslant k < a^\nu}$ est identique à celle des variables $\{1_{\{0^l k \in A(\omega)\}}\}_{1 \leqslant k < a^\nu}$.

On pose

$$Y_0 = 1 \qquad \text{et} \qquad Y_n = \sum_{l \in \mathbb{N}_a^{n\nu}} X(l_1) X(l_1 l_2) \ldots X(l_1 \ldots l_n).$$

Les variables T_n et $b^{-(\nu-1)n} Y_{(\nu-1)n}$ sont alors équidistribuées. La variable Y_n n'est autre que le nombre d'individus à l'instant n pour un processus de Galton-Watson à deux types :

– un individu donne naissance à au moins un individu et à au plus b;

– un individu de type 1 donne naissance à un individu de type 1 et, en moyenne, à $((b-1)(a^\nu - 1))/(a^{\nu+1} - 1)$ individus de type 2;

– un individu de type 2 donne naissance, en moyenne à $ba^\nu/a^{\nu+1}$ individus de type 2 et à aucun de type 1;

– la population à l'instant 0 est composée d'un individu de type 1.

Il résulte des propriétés des processus de Galton-Watson que $Z_N = (a/b)^n Y_n$ tend presque sûrement et en moyenne quadratique vers une variable Z presque sûrement non nulle. Puisque chaque individu donne naissance à au moins un individu, il existe un nombre $h > 0$ tel que $E(Z^{-h})$ soit fini. Les variables

$$\{\log Z_n\}_{n \geqslant 0} \qquad \text{et} \qquad \{(\log Z_n)^2\}_{n \geqslant 0}$$

sont donc uniformément intégrables et l'on a

$$E(\log Z_n) = E(\log Z) + o(1) \qquad \text{et} \qquad E[(\log Z_n)^2] = E[(\log Z)^2] + o(1).$$

Autrement dit, on a

$$E\left(\log \frac{Y_n}{b^n}\right) = -n \log a + E(\log Z) + o(1)$$

et

$$E\left[\left(\log\frac{Y_n}{b^n}\right)^2\right]=n^2(\log a)^2-2n\log a\,E(\log Z)+o(n)$$

d'où

$$E\left(\log\frac{Y_n}{b^n}+n\log a\right)^2=o(n),$$

ce qui achève la démonstration du lemme.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BEDFORD (T. J.). – Crinkly curves, Markov Partitions and Dimension. Ph. D. Thesis (Warwick University, U.K., 1984).

[2] BILLINGSLEY (P.). – *Ergodic theory and information*, J. Wiley, 1965.

[3] CHOLLET (A.-M.). – Ensemble de zéros à la frontière de fonctions analytiques, *Ann. Inst. Fourier*, vol. 26, 1976, p. 51-80.

[4] CHOLLET (A.-M.) et CHAUMAT (J.). – *Ensembles de zéros et d'interpolation à la frontière de domaines strictement pseudo-convexes*, Prépubl. Orsay, 34T14.

[5] LOVEJOY (S.) and SCHERTZER (D.). – The dimension and intermittency of atmospheric dynamics, *Turbulent Shear Flow*, vol. 4, 1984, p. 7-33, Ed. Launder.

[6] MCMULLEN (C.). – *Nagoya Math. J.*, **96** (1984) p. 1.

[7] MANDELBROT (B. B.). – Self affine fractal sets. In Fractals in Physics (Trieste, 1985). Edited by L. Pietronero and E. Tosatti. North Holland Publishing Company 1986.

[8] PEYRIÈRE (J.). – Mesures singulières associées à des découpages aléatoires d'un hypercube, *Le volume de Colloquium Mathematicum en l'honneur de S. Hartman* (à paraître).