BULLETIN DE LA S. M. F.

G. HUMBERT

Sur la réduction en fractions continues d'une classe de fonctions

Bulletin de la S. M. F., tome 8 (1880), p. 182-187

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1880__8__182_1>

© Bulletin de la S. M. F., 1880, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Sur la réduction en fractions continues d'une classe de fonctions;

par M. G. HUMBERT.

(Séance du 16 avril 1880.)

Soit l'équation différentielle

$$(1)\qquad (x^2-1)y''+2\left[x\left(1+\frac{\alpha}{2}\right)-\omega\right]y'-n(n+\alpha+1)y=0,$$

où n et α sont deux nombres entiers tels que $n>0$ et $n+\alpha+1>0$.

En posant

$$\frac{K'(x)}{K(x)}=\frac{x(2+\alpha)-2\omega}{x^2-1}$$

ou

$$\frac{K'(x)}{K(x)}=\frac{1+\frac{\alpha}{2}-\omega}{x-1}+\frac{1+\frac{\alpha}{2}+\omega}{x+1},$$

ce qui donne

$$K(x)=(x^2-1)^{1+\frac{\alpha}{2}}\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{\omega},$$

on sait qu'une solution de l'équation (1) est le polynôme de degré n

$$\Theta(x)=\frac{x^2-1}{K(x)}D^n(x^2-1)^{n-1}K(x)$$

ou

$$\Theta(x)=(x^2-1)^{-\frac{\alpha}{2}}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{\omega}D^n(x^2-1)^{n+\frac{\alpha}{2}}\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{\omega}.$$

Transformons maintenant l'équation (1) par la substitution

$$y = \frac{x^2 - 1}{K(x)} u;$$

nous trouvons

$$(2) \quad (x^2 - 1)u'' + 2\left[x\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) + \omega\right]u' - (n + \alpha)(n + 1)u = 0.$$

Cette équation admet comme solution le polynôme de degré $n + \alpha$

$$P(x) = \frac{K(x)}{x^2 - 1} D^{n+\alpha} \frac{(x^2 - 1)^{n+\alpha+1}}{K(x)}$$

ou

$$P(x) = (x^2 - 1)^{\alpha}\left(\frac{x + 1}{x - 1}\right)^{\omega} D^{n+\alpha}(x^2 - 1)^{n+\frac{\alpha}{2}}\left(\frac{x - 1}{x + 1}\right)^{\omega}.$$

Par conséquent, $P(x)$ et $\frac{K(x)}{x^2 - 1}\Theta(x)$ sont deux solutions de l'équation (2).

Sans chercher les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'elles soient distinctes, je remarque qu'elles le seront nécessairement si $\frac{K(x)}{x^2 - 1}$ n'est pas une fonction rationnelle, car $P(x)$ est un polynôme entier et $\frac{K(x)}{x^2 - 1}\Theta(x)$ n'est pas un polynôme, dans le cas supposé.

Or

$$\frac{K(x)}{x^2 - 1} = (x^2 - 1)^{\frac{\alpha}{2}}\left(\frac{x + 1}{x - 1}\right)^{\omega}.$$

Cherchons les conditions pour que cette fonction soit irrationnelle. Deux cas sont à distinguer :

1° α pair; il faut et il suffit que ω ne soit pas entier.

2° α impair; il faut et il suffit que ω ne soit pas de la forme $\frac{2p + 1}{2}$.

Supposons l'une de ces conditions remplie.

Une solution quelconque de l'équation (2) sera de la forme

$$y_1 = \lambda P(x) + \lambda' \frac{K(x)}{x^2 - 1}\Theta(x).$$

Mais cette équation admet comme solution la fonction

$$P(x)\int\frac{K(x)}{(x^2-1)^2P^2(x)},$$

qui est de degré $-(n+1)$, c'est-à-dire qui, ordonnée par rapport aux puissances décroissantes de x, commence par un terme en $\frac{1}{x^{n+1}}$.

On a donc

$$\lambda P(x)-\lambda'\frac{K(x)}{x^2-1}\Theta(x)=\frac{1}{x^{n+1}}+\ldots,$$

d'où

$$\frac{K(x)}{x^2-1}=\mu\frac{P(x)}{\Theta(x)}+\frac{1}{x^{2n+1}}+\ldots,$$

équation qui montre que les polynômes $\Theta(x)$ sont les dénominateurs, les polynômes $P(x)$ les numérateurs des réduites de la fonction

$$\frac{K(x)}{x^2-1}=(x^2-1)^{\alpha}\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{\omega},$$

dans le cas où cette fonction est irrationnelle.

En posant $\frac{K(x)}{x^2-1}=F(x)$, on aura pour les réduites successives

$$\frac{F^2(x)D^{n+\alpha}\dfrac{(x^2-1)^{n+\alpha}}{F(x)}}{D^n(x^2-1)^n F(x)}.$$

Ce résultat comprend comme cas particulier le cas de $\alpha=0$; on a alors les réduites de la fonction $\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{\omega}$, étudiées par M. Laguerre par une méthode toute différente.

Laissant de côté l'étude des polynômes $\Theta(x)$ et $P(x)$, je fais la remarque suivante, qui va conduire à un théorème intéressant.

On sait que, si l'on pose

$$y=\int_{\gamma}^{\delta}\frac{K(z)(z^2-1)^{n-1}}{(x-z)^{n+1}}dz,$$

on a

$$(x^2-1)y''+2\left[x\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)+\omega\right]y'-(n+1)(n+\alpha)y$$
$$=-(n+1)[\mathrm{K}(z)(z^2-1)^n(x-z)^{-n-2}]_\gamma^\delta.$$

Le second membre devient, en remplaçant K par sa valeur,

$$-(n+1)\left[(z^2-1)^{n+1+\frac{\alpha}{2}}\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^\omega(x-z)^{-n-2}\right]_\gamma^\delta.$$

La quantité entre parenthèses s'annule pour -1 et $+1$ si l'on a

$$n+1+\frac{\alpha}{2}+\omega>0,\quad n+1+\frac{\alpha}{2}-\omega>0.$$

Dans ce cas, la fonction

$$y=\int_{-1}^{+1}\frac{\mathrm{K}(z)(z^2-1)^{n-1}}{(x-z)^{n+1}}\,dz$$

est une solution de l'équation (2), et elle commence par un terme en $\frac{1}{x^{n+1}}$.

Si $\mathrm{K}(z)$ s'annule pour -1 et pour $+1$, c'est-à-dire si

$$1+\frac{\alpha}{2}+\omega>0,\quad 1+\frac{\alpha}{2}-\omega>0,$$

conditions qui comprennent les précédentes, on aura évidemment

$$y=\int_{-1}^{+1}\frac{\mathrm{D}^n\mathrm{K}(z)(z^2-1)^{n-1}}{x-z}\,dz,$$

ou

$$y=\int_{-1}^{+1}\frac{\mathrm{K}(z)\Theta(z)\,dz}{(z^2-1)(x-z)}=\Theta(x)\int_{-1}^{+1}\frac{\mathrm{K}(z)}{(z^2-1)(x-z)}\,dz$$
$$+\int_{-1}^{+1}\frac{\mathrm{K}(z)}{z^2-1}\left[\frac{\Theta(z)-\Theta(x)}{x-z}\right]dz,$$

ou

$$y=\Theta(x)\int_{-1}^{+1}\frac{\mathrm{K}(z)}{(z^2-1)(x-z)}\,dz+\Pi(x),$$

$\Pi(x)$ étant un polynôme au plus de degré $n-1$.

On a donc

$$\Theta(x)\int_{-1}^{+1}\frac{K(z)}{(z^2-1)(x-z)}\,dz+\Pi(x)=\lambda P(x)+\mu\frac{K(x)}{x^2-1}\Theta(x)$$

ou

$$\int_{-1}^{+1}\frac{K(z)}{(z^2-1)(x-z)}\,dz-\mu\frac{K(x)}{x^2-1}=\frac{P(x)}{\Theta(x)};$$

$P(x)$ est un polynôme de degré $n+\alpha$.

Si, sans changer α et ω, on change n en $n+p$, on aura deux autres polynômes $P_1(x)$ et $\Theta_1(x)$, et

$$(3)\qquad \int_{-1}^{+1}\frac{K(z)}{(z^2-1)(x-z)}\,dz-\mu_1\frac{K(x)}{x^2-1}=\frac{P_1(x)}{\Theta_1(x)}.$$

Retranchant ces deux relations membre à membre, on aura

$$(\mu_1-\mu)\frac{K(x)}{x^2-1}=\frac{P(x)}{\Theta(x)}-\frac{P_1(x)}{\Theta_1(x)},$$

et $\dfrac{K(x)}{x^2-1}$ serait une fonction rationnelle, ce qui est contraire à l'hypothèse; on a donc

$$\mu=\mu_1\quad\text{et}\quad\frac{P(x)}{\Theta(x)}=\frac{P_1(x)}{\Theta_1(x)}.$$

Prenant $n=0$ (on peut le faire si $\alpha>0$), le polynôme Θ correspondant est une constante; par suite, on a

$$(4)\qquad \int_{-1}^{+1}\frac{K(z)}{(z^2-1)(x-z)}\,dz-\mu\frac{K(x)}{x^2-1}=P_\alpha,$$

P_α étant un polynôme de degré α.

Si α est négatif, comme on doit avoir

$$\omega>-\left(1+\frac{\alpha}{2}\right),\quad \omega<\left(1+\frac{\alpha}{2}\right),$$

il faut que

$$1+\frac{\alpha}{2}>0.$$

Par suite, α ne peut prendre que la valeur -1; la valeur $\alpha=-2$ donnerait $\omega=0$, et $\dfrac{K}{x^2-1}$ serait rationnel.

Dans ce cas, pour que $\frac{P(x)}{\Theta(x)} = \frac{P_1(x)}{\Theta_1(x)}$, il faudrait que Θ et Θ_1 eussent au moins une racine commune, puisque les numérateurs sont d'un degré inférieur d'une unité au degré des dénominateurs; alors tous les polynômes $\Theta(x)$ auraient au moins une racine commune, ce qu'on sait être impossible. Donc

$$P(x) = P_1(x) = 0,$$

et l'on a, pour $\alpha = -1$,

$$\int_{-1}^{+1} \frac{K(z)}{(z^2-1)(x-z)}\,dz - \mu\,\frac{K(x)}{x^2-1} = 0.$$

En résumé : 1° α étant entier et plus grand que 0, si la fonction

$$F(z) = (z^2-1)^{\frac{\alpha}{2}}\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^{\omega}$$

est irrationnelle et si, pour -1 et $+1$, elle ne devient pas infinie d'un ordre supérieur ou égal à 1, on a

$$\int_{-1}^{+1} \frac{F(z)}{x-z}\,dz = \mu F(x) + (Ax^{\alpha} + Bx^{\alpha-1} + \ldots + L);$$

2° α étant égal à -1, et les mêmes conditions étant réalisées, on a

$$\int_{-1}^{+1} \left(\frac{z+1}{z-1}\right)^{\omega} \frac{1}{\sqrt{z^2-1}}\,\frac{dz}{x-z} = \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{\omega} \frac{\mu}{\sqrt{x^2-1}}.$$