BULLETIN DE LA S. M. F.

ED. LUCAS

Sur les nouvelles formules de MM. Seidel et Stern, concernant les nombres de Bernoulli

Bulletin de la S. M. F., tome 8 (1880), p. 169-172

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1880__8__169_0>

© Bulletin de la S. M. F., 1880, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Sur les nouvelles formules de MM. Seidel et Stern, concernant les nombres de Bernoulli; par M. Édouard Lucas.

(Séance du 16 avril 1880.)

M. Seidel a donné, le premier, des nouvelles formules fort remarquables sur les nombres de Bernoulli (¹). Ces relations se distinguent de celles que l'on connaissait jusqu'à présent en ce qu'elles ne contiennent qu'un certain nombre de coefficients au lieu de les contenir tous. M. Stern a généralisé les résultats de M. Seidel en donnant des relations qui ne renferment que les nombres B_{2r}, B_{2r-2}, ... jusqu'à B_{r-s} ou B_{r-s+1}, s étant un nombre positif ou nul, inférieur à r; on retrouve les formules de M. Seidel pour $s = 0$.

En s'appuyant sur le calcul symbolique et sur les formules que j'en ai déduites, M. Radicke, professeur à Bromberg, a trouvé une démonstration très simple, qu'il vient de m'adresser, des formules de M. Stern. Considérons la série des quantités

$$u_0,\ u_1,\ u_2,\ u_3,\ \ldots,\ u_n,\ \ldots;$$

formons une seconde série de quantités

$$S^1 u_0,\ S^1 u_1,\ S^1 u_2,\ S^1 u_3,\ \ldots,\ S^1 u_n,\ \ldots$$

au moyen de la relation

$$S^1 u_n = u_n + u_{n+1};$$

formons ensuite la série

$$S^2 u_0,\ S^2 u_1,\ S^2 u_2,\ S^2 u_3,\ \ldots,\ S^2 u_n,\ \ldots$$

au moyen de la relation

$$S^2 u_n = S^1 u_n + S^1 u_{n+1} = u_{n+2} + 2u_{n+1} + u_n,$$

et ainsi de suite, de telle sorte que l'on a, en général,

$$S^p u_n = S^{p-1} u_n + S^{p-1} u_{n+1},$$

(¹) *Sitzungsberichte der math.-phys. Classe der königl. böhm. Academie der Wissenschaften.* Prag, 1877.

et aussi la relation

$$S^p u_n = u_{n+p} + p_1 u_{n+p-1} + p_2 u_{n+p-2} + \ldots + p_p u_n,$$

dans laquelle $p_1, p_2, \ldots, p_p$ désignent les coefficients de la puissance p du binôme. On peut donc écrire la formule précédente sous la forme symbolique

$$S^p u_n = u^n (u+1)^p, \tag{1}$$

dans laquelle on remplacera les exposants de u par des indices.

D'autre part, on tire successivement

$$\begin{aligned}
&S^p u_n = S^{p+1} u_{n-1} - S^p u_{n-1},\\
&S^p u_n = S^{p+2} u_{n-2} - 2S^{p+1} u_{n-2} + S^p u_{n-2},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
&S^p u_n = S^{p+n} u_0 - n_1 S^{p+n+1} u_0 + \ldots + (-1)^n n_n S^p u_0
\end{aligned}$$

ou, symboliquement,

$$S^p u_n = S^p (S+1)^n u_0, \tag{2}$$

dans laquelle on remplacera les exposants de p par des indices. Mais on tire de la formule (1)

$$S^p u_0 = (u+1)^p,$$

et, en transportant dans l'équation (2),

$$S^p u_n = (u+1)^p (\sqrt{u+1} - 1)^n; \tag{3}$$

on tire encore de la formule (1)

$$S^n u_p = u^p (u+1)^n. \tag{4}$$

Les formules (3) et (4) subsistent pour des valeurs quelconques des quantités $u_0, u_1, u_2, \ldots$. Posons, en général, $u_n = B_n$, en désignant par B_n le nombre de Bernoulli défini par la relation

$$\frac{z}{e^z - 1} = e^{Bz} = B_0 + B_1 \frac{z}{1} + B_2 \frac{z^2}{1.2} + \cdots + B_n \frac{z^n}{1.2\ldots n} + \cdots;$$

on sait que l'on a, symboliquement,

$$B_{2p+1} = 0, \quad (B+1)^{2p+1} = 0,$$

et, pour $p \geqq 2$,

$$(B+1)^p - B^p = 0.$$

Cela posé, nous distinguerons deux cas suivant que $p+n$ sera pair ou impair; dans le premier cas, on tire de (3) et (4)

$$S^p B_n - S^n B_p = 0,$$

et dans le second cas

$$S^p B_n + S^n B_p = 0.$$

Par conséquent, en se servant de la formule (1), on obtient

$$B^p(B+1)^n = (-1)^{p+n} B^n (B+1)^p. \tag{5}$$

Cette relation importante contient toute la première classe des formules données par M. Stern; en supposant, plus particulièrement, $p = n+1$, on a

$$B^{n+1}(B+1)^n + B^n(B+1)^{n+1} = 0; \tag{6}$$

on retrouve, pour les diverses valeurs de n, les formules de M. Seidel. Ainsi, pour $n = 6$ et pour $n = 7$, on a

$$13B_{12} + 55B_{10} + 27B_8 + B_6 = 0,$$
$$15B_{14} + 91B_{12} + 77B_{10} + 9B_8 = 0.$$

Posons maintenant

$$u_p = (2^p - 1)B_p;$$

on a, symboliquement,

$$S^p u_0 = (2B+1)^p - (B+1)^p;$$

l'équation (3) devient alors

$$S^p u_n = (2B+1)^p\left(\overline{2B+1} - 1\right)^n - (B+1)^p\left(\overline{B+1} - 1\right)^n.$$

D'autre part, on tire de l'équation (4)

$$S^n u_p = 2^p B^p (2B+1)^n - B^p(B+1)^n,$$

et l'on a la relation

$$(2B+1)^p + (2^p - 2)B^p = 0.$$

On a donc, pour $p+n$ pair, la formule

$$S^p u_n + S^n u_p = 0,$$

et, pour $p + n$ impair,

$$S^p u_n - S^n u_p = 0;$$

par conséquent, il en résulte

$$(7) \quad \begin{cases} 2^p B^p (2B+1)^n - B^p (B+1)^n \\ \quad + (-1)^{p+n} \left[2^n B^n (2B+1)^p - B^n (B+1)^p \right] = 0. \end{cases}$$

Cette relation correspond au second groupe de formules données par M. Stern, et, pour $p = n+1$, on retrouve les formules de M. Seidel. Au moyen de l'identité

$$(n+1)_q - n_q = n_{q-1},$$

on déduit la formule

$$(8) \quad (2^{2n} - 1) B_{2n} + n_2 (2^{2n-2} - 1) B_{2n-2} + n_4 (2^{2n-4} - 1) B_{2n-4} + \ldots = 0,$$

et, pour $n = 6$ et $n = 7$,

$$455 B_{12} + 1705 B_{10} + 425 B_8 + 7 B_6 = 0,$$
$$54611 B_{14} + 28665 B_{12} + 11935 B_{10} + 595 B_8 = 0.$$

Posons encore

$$P_n = 2(2^n - 1) B_n;$$

la formule (7) peut s'écrire

$$(9) \quad P^p (P+1)^n + (-1)^{p+n} P^n (P+1)^p = 0,$$

et, pour $p = n+1$, la formule devient, pour $n > 1$,

$$(10) \quad P^n (P+1)^n = 0.$$

Les nombres P sont donnés, comme on sait, par le développement

$$\frac{-2z}{1+e^z} = P_0 + P_1 \frac{z}{1} + P_2 \frac{z^2}{1.2} + \ldots + P_n \frac{z^n}{1.2\ldots n} + \ldots;$$

il résulte immédiatement de la formule (10) que ces nombres sont entiers et impairs. Ce résultat important est dû à M. Genocchi (1).

---

(1) *Annales de Tortolini*, t. III, p. 395-405. Rome, 1852.