BULLETIN DE LA S. M. F.

G. HUMBERT

Sur le développement d'une fonction suivant les puissances croissantes d'un polynôme

Bulletin de la S. M. F., tome 8 (1880), p. 124-128

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1880__8__124_1>

© Bulletin de la S. M. F., 1880, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Sur le développement d'une fonction suivant les puissances croissantes d'un polynôme; par M. HUMBERT.

(Séance du 19 mars 1880.)

I. M. Laguerre a montré, en développant $\log(x-z)$, la liaison étroite de cette question avec la théorie des fractions continues algébriques; il est facile de généraliser les résultats qu'il a obtenus; au lieu du logarithme, nous considérerons les fonctions ainsi définies.

Soient

$$\Delta(x) = Ax^2 + Bx + C = A(x-x_0)(x-x_1)$$

et une fonction $K(x)$ satisfaisant à la relation

$$\frac{K'(x)}{K(x)} = \frac{Dx+E}{Ax^2+Bx+C} = \frac{\mu_0}{x-x_0} + \frac{\mu_1}{x-x_1},$$

$$K = (x-x_0)^{\mu_0}(x-x_1)^{\mu_1}.$$

Proposons-nous de développer la fonction

$$\int \frac{\Delta(x)\,dx}{K(x)(x-z)}$$

suivant les puissances croissantes de $\Delta(z)$.

Cette intégrale indéfinie est une fonction de x et de z; elle se développera de la manière suivante :

$$\int \frac{\Delta(x)\,dx}{K(x)(x-z)} = \Sigma(U_m + V_m z)\Delta^m(z).$$

Prenons les dérivées des deux membres par rapport à x :

$$\frac{\Delta(x)}{K(x)(x-z)} = \Sigma(U'_m + V'_m z)\Delta^m(z),$$

$$\frac{\Delta(x)}{K(x)}\,\frac{\Delta(x)-\Delta(z)}{x-z}\,\frac{1}{\Delta(x)-\Delta(z)} = \Sigma(U'_m + V'_m z)\,\Delta^m(z),$$

ou

$$V'_m = \frac{A}{K(x)\Delta^m(x)},$$

$$U'_m = \frac{Ax+B}{K(x)\Delta^m(x)}.$$

Ces expressions sont susceptibles d'une interprétation remarquable.

Considérons, en effet, l'équation différentielle

$$(E)\quad (Ax^2+Bx+C)y''+(Dx+E)y' = [Am(m-1)+Dm]y.$$

Une des solutions est un polynôme entier de degré m que j'appellerai P_m; une seconde solution, y_1, sera

$$y_1 = P_m(x)\int \frac{dx}{K(x)P_m^2(x)} = P_m(x)\int \frac{dx}{(x-x_0)^{\mu_0}(x-x_1)^{\mu_1}P_m^2(x)};$$

elle commence par un terme en $\frac{1}{x^{\mu_0+\mu_1+m-1}}$.

Si nous prenons les dérivées d'ordre m des deux membres de l'équation (E), on a

$$(Ax^2+Bx+C)y^{(m+2)}+[m(2Ax+B)+Dx+E]y^{(m+1)} = 0,$$

ce qui donne

$$y_1^{(m+1)} = \frac{1}{K\Delta^m}.$$

On a donc

$$V'_m = y_1^{(m+1)},$$

$$V_m = y_1^{(m)} + \text{const.}$$

Or, en appliquant la formule de Jacobi à l'intégrale

$$\int \frac{\Delta(x)\,dx}{K(x)(x-z)},$$

on voit aisément que V_m et la dérivée d'ordre m de y_1 commencent tous deux par des termes en $\frac{1}{x^{\mu_0+\mu_1+2m-1}}$.

Donc

$$V_m = y_1^{(m)};$$

de même

$$U'_m = (Ax+B)y_1^{(m+1)},$$
$$U_m = (Ax+B)y_1^{(m)} - Ay_1^{(m-1)}.$$

Ces expressions sont générales; mais, dans le cas où μ_0 et μ_1 sont positifs, y_1 a une forme remarquable.

On a, en effet, d'après une formule de Jacobi modifiée quant à la notation,

$$\frac{K(x)}{\Delta(x)} y_1 = \int_{x_0}^{x_1} \frac{K(z)}{\Delta(z)} \frac{P_m(z)}{x-z} dz$$

ou

$$y_1 = \frac{\Delta(x)}{K(x)} \left[P_m(x) \int_{x_0}^{x_1} \frac{K(z)dz}{\Delta(z)(x-z)} + \prod_{m-1}(x) \right].$$

On peut donc énoncer le théorème suivant :

THÉORÈME. — *Dans le développement*

$$\int \frac{\Delta(x)}{K(x)} \frac{dx}{x-z} = \Sigma (U_m + V_m z) \Delta^m(z),$$

V_m *est égal à la dérivée d'ordre m de l'expression*

$$\frac{\Delta(x)}{K(x)} \left[P_m(x) \int_{x_0}^{x_1} \frac{K(z)}{\Delta(z)} \frac{dz}{x-z} + \prod_{m-1} \right],$$

P_m *et* Π_{m-1} *étant les polynômes de degrés m et* $m-1$ *qui rendent cette expression du plus haut degré possible en* $\left(\frac{1}{x}\right)$, *pourvu toutefois que l'intégrale prise entre* x_0 *et* x_1 *ait un sens.*

Cette dernière hypothèse revient, en effet, à $\mu_0 > 0$, $\mu_1 > 0$.

Remarque. — Les polynômes $P_m(x)$ sont, dans ce cas, les dénominateurs des réduites de $\int_{x_0}^{x_1} \frac{K(z)}{\Delta(z)} \frac{dz}{x-z}$.

Les formules précédentes comprennent, comme cas particulier, le logarithme; il suffit de prendre $K = \Delta$.

II. — Les résultats qui viennent d'être exposés s'appliquent évidemment au cas où Δ est du premier degré.

Par exemple, prenons $\Delta = x$:

$$\frac{K'}{K} = \frac{x+1}{x} \quad \text{ou} \quad K = xe^x.$$

L'équation

$$xy'' + (x+1)y' = my$$

est celle que nous avons appelée E.

Soit y_1 celle de ses solutions qui ne renferme pas de termes entiers en x et dont M. Laguerre a donné plusieurs expressions (*Bulletin de la Société mathématique*, t. VII, p. 74-75).

On aura

$$\int_{\infty}^{x} \frac{e^{-x}}{x-z}\,dx = \Sigma V_m(x)\,z^m$$

et

$$V_m(x) = D_x^{(m)} y_1.$$

La fonction de z, $\int_{\infty}^{x} \frac{e^{-x}}{x-z}\,dx$, est évidemment uniforme, et l'intégrale a un sens si z n'est pas compris entre x et ∞. Pour qu'elle soit développable en série convergente suivant les puissances croissantes de z, il faut et il suffit qu'elle soit holomorphe dans un cercle décrit de l'origine; on pourra toujours trouver un pareil cercle si x est plus grand que zéro.

Supposons donc

$$x > 0 \quad \text{et} \quad z < x.$$

Posons dans l'intégrale

$$x - z = u;$$

on aura

$$\int^{x-z} \frac{e^{-z-u}}{u}\,du = \Sigma V_m(x)\,z^m.$$

Faisons $x - z = y$:

$$e^{+y-x} \int_{\infty}^{y} \frac{e^{-u}}{u}\,du = \Sigma V_m(x)\,(x-y)^m$$

ou enfin

$$e^{y}\int_{\infty}^{y}\frac{e^{-y}}{y}\,dy=\Sigma e^{x}V_{m}(x)\,(x-y)^{m}.$$

Avec les conditions $x>0$, $y>0$, la série du second membre est convergente.

Nous avons ainsi le développement de l'intégrale *rectiligne*

$$e^{y}\int_{\infty}^{y}\frac{e^{-y}}{y}\,dy,$$

qu'a étudiée M. Laguerre, suivant les puissances de $(y-x)$, et ce théorème :

THÉORÈME. — *Le coefficient de* $(x-y)^{m}$ *est égal à* e^{x} *multiplie par la dérivée d'ordre m de l'expression*

$$\varphi_{m}(x)e^{-x}-f_{m}(x)\int_{x}^{\infty}\frac{e^{-x}}{x}\,dx,$$

$\varphi_{m}(x)$ *et* $f_{m}(x)$ *étant les polynômes de degrés* $m-1$ *et m qui rendent cette expression de l'ordre le plus élevé possible en* $\frac{1}{x}$.

Je me propose, dans une prochaine Communication, de généraliser ces résultats en prenant pour Δ un polynôme de degré quelconque.