BULLETIN DE LA S. M. F.

HAAG

Note sur une classe d'équations différentielles

Bulletin de la S. M. F., tome 8 (1880), p. 80-81

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1880__8__80_1>

© Bulletin de la S. M. F., 1880, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Note sur une classe d'équations différentielles; par M. Haag.

(Séance du 20 février 1880.)

Soit l'équation différentielle

$$(1)\quad \left(\frac{d^m y}{dx^m}\right)^2 + A\left(\frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}}\right)^2 + \ldots + L\left(\frac{d^2 y}{dx^2}\right)^2 + M\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + Ny^2 + P = 0,$$

où A, B, ..., L, M, N, P sont des constantes.

Posons

$$y = \lambda \sin(\alpha x + C),$$

λ, α, C étant trois constantes; nous en déduirons

$$\left(\frac{dy}{dx}\right) = \lambda\alpha \cos(\alpha x + C),$$

$$\left(\frac{d^2 y}{dx^2}\right) = -\lambda\alpha^2 \sin(\alpha x + C).$$

et, par conséquent,

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \lambda^2\alpha^2[1 - \sin^2(\alpha x + C)] = \alpha^2(\lambda^2 - y^2)$$

et

$$\left(\frac{d^2 y}{dx^2}\right)^2 = \alpha^4 y^2.$$

On voit aisément qu'on trouvera, en général,

$$\left(\frac{d^{2p} y}{dx^{2p}}\right)^2 = \alpha^{4p} y^2$$

et

$$\left(\frac{d^{2p+1}y}{dx^{2p+1}}\right)^2 = \alpha^{(4p+2)}(\lambda^2 - y^2).$$

Substituant dans l'équation proposée, et groupant ensemble les termes qui renferment y^2 et ceux qui en sont indépendants, on trouve (supposons, par exemple, m pair)

$$(2)\qquad \begin{cases} [\alpha^{2m} - A\alpha^{2(m-1)} + \ldots + L\alpha^4 - M\alpha^2 + N]y^2 \\ \qquad + [A\alpha^{2(m-1)}\lambda^2 + \ldots + M\alpha^2\lambda^2 + P] = 0, \end{cases}$$

et l'équation sera satisfaite si l'on a simultanément

$$(3)\qquad \alpha^{2m} - A\alpha^{2m-1} + \ldots + L\alpha^4 - M\alpha^2 + N = 0,$$

$$(4)\qquad A\alpha^{2(m-1)}\lambda^2 + \ldots + M\alpha^2\lambda^2 + P = 0.$$

L'équation (3), qui est du degré m en α^2, donnera m valeurs de α^2. L'équation (4), où l'on portera l'une quelconque de ces valeurs de α^2, donnera alors

$$(5)\qquad \lambda^2 = \frac{-P}{A\alpha^{2(m-1)} + \ldots + M\alpha^2},$$

et, si l'on adopte pour α et λ des valeurs satisfaisant aux relations (3) et (4),

$$y = \lambda \sin(\alpha x + C)$$

sera une solution de l'équation différentielle proposée et renfermera une constante arbitraire C.

On trouvera ainsi $2m$ solutions de l'équation (1) (car les combinaisons obtenues en changeant simultanément les signes de α et de λ ne donnent pas de solutions distinctes) (¹).

(¹) Il est facile de reconnaître d'ailleurs que l'analyse précédente s'applique à toute équation de la forme

$$\sum A\left(\frac{d^m y}{dx^m}\right)\left(\frac{d^n y}{dx^n}\right) + P = 0,$$

où m et n peuvent être égaux, pourvu que dans chaque terme la somme $m+n$ soit paire.