BULLETIN DE LA S. M. F.

G. HALPHEN

Sur une formule d'analyse

Bulletin de la S. M. F., tome 8 (1880), p. 62-64

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1880__8__62_0>

© Bulletin de la S. M. F., 1880, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Sur une formule d'Analyse; par M. HALPHEN.

(Séance du 16 janvier 1880.)

La formule dont il s'agit ici est la suivante :

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned}\frac{d^n}{dx^n}\left[f(x)\,\varphi\left(\frac{1}{x}\right)\right] &= \varphi\left(\frac{1}{x}\right)f^{(n)}(x) - \frac{n}{1}\,\frac{1}{x}\,\varphi'\left(\frac{1}{x}\right)\left[\frac{f(x)}{x}\right]^{(n-1)}\\ &\quad + \frac{n(n-1)}{1.2}\,\frac{1}{x^2}\,\varphi''\left(\frac{1}{x}\right)\left[\frac{f(x)}{x^2}\right]^{(n-2)} + \dots\\ &\quad + (-1)^k\,\frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{1.2\dots k}\,\frac{1}{x^k}\,\varphi^{(k)}\left(\frac{1}{x}\right)\left[\frac{f(x)}{x^k}\right]^{(n-k)} + \dots,\end{aligned}\right.$$

dans laquelle, bien entendu, $\varphi^{(k)}\left(\frac{1}{x}\right)$ désigne une dérivée d'ordre k prise par rapport à $\frac{1}{x}$, et $\left[\frac{f(x)}{x^k}\right]^{(n-k)}$ une dérivée d'ordre $(n-k)$ prise par rapport à x.

Un des moyens les plus simples de vérifier la formule (1) me paraît être le suivant.

On peut, sans nuire à la généralité, supposer

$$f(x) = \sum_m \mathrm{A}\,x^m, \quad \varphi\left(\frac{1}{x}\right) = \sum_\mu \mathrm{B}\left(\frac{1}{x}\right)^\mu.$$

A cause de la forme doublement linéaire du second membre de (1), il suffit alors de vérifier l'identité pour

$$f(x) = x^m, \quad \varphi\left(\frac{1}{x}\right) = \left(\frac{1}{x}\right)^\mu.$$

Pour ce dernier cas, la formule (1) devient

$$\frac{(m-\mu)(m-\mu-1)\dots(m-\mu-n+1)}{m(m-1)\dots(m-n+1)} = 1 - \frac{n}{1}\,\frac{\mu}{m} + \frac{n(n-1)}{1.2}\,\frac{\mu(\mu-1)}{m(m-1)} - \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\,\frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)}{m(m-1)(m-2)} + \dots,$$

et le lecteur trouvera sans peine la démonstration de cette identité.

C'est en étudiant les dérivées successives de la fonction $x^m e^{\frac{1}{x}}$

que j'ai été conduit à la formule (1). Elle fournit effectivement ces dérivées, et l'on a

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned}\frac{d^n}{dx^n}\left(x^m e^{\frac{1}{x}}\right) = (-1)^n e^{\frac{1}{x}}\Big[&x^{m-2n} - \frac{n}{1}(m-n+1)x^{m-2n+1}\\ &+ \frac{n(n-1)}{1.2}(m-n+1)(m-n+2)x^{m-2n+2} - \dots\Big].\end{aligned}\right.$$

Un cas particulier remarquable est celui où, m étant entier positif, le nombre n est égal à $(m+1)$. Pour ce cas, on a

$$(3)\qquad \frac{d^n}{dx^n}\left(x^{n-1}e^{\frac{1}{x}}\right) = (-1)^n \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^{n+1}}.$$

Il est facile de démontrer directement cette formule (3). J'en indique ici deux démonstrations.

La première est fondée sur l'emploi de la série de Lagrange. On trouve effectivement

$$e^{\frac{1-t}{x}} = e^{\frac{1}{x}}\left[1 - \frac{t}{x} + \frac{1}{1.2}\frac{t^2}{x^2} + \dots + (-1)^{n+1}\frac{1}{1.2\dots(n+1)}\frac{t^{n+1}}{x^{n+1}} + \dots\right],$$

développée de cette autre manière :

$$e^{\frac{1-t}{x}} = e^{\frac{1}{x}} - \frac{t}{1}\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x} - \frac{t^2}{1.2}\frac{d}{dx}\left(e^{\frac{1}{x}}\right) - \dots - \frac{t^{n+1}}{1.2\dots(n+1)}\frac{d^n}{dx^n}\left(x^{n-1}e^{\frac{1}{x}}\right)\dots.$$

Si l'on applique la série de Lagrange à la fonction $e^{\frac{1}{z}}$, composée avec la racine z de l'équation

$$z = x + tz,$$

la comparaison des deux développements donne la formule (3).

La seconde démonstration consiste à observer que la dérivée d'ordre n du produit $x^{n-1}e^{\frac{1}{x}}$ est de la forme suivante :

$$\frac{d^n}{dx^n}\left(x^{n-1}e^{\frac{1}{x}}\right) = \frac{e^{\frac{1}{x}}\varphi(x)}{x^{n+1}},$$

$\varphi(x)$ étant un polynôme entier. En développant suivant les puis-

sances décroissantes de x le premier membre, on reconnaît que ce polynôme se réduit à $(-1)^n$.

En intégrant p fois de suite les deux membres de la formule (3), on obtient

$$\int^n \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^{n+1}}\,dx^p = (-1)^n \frac{d^{n-p}}{dx^{n-p}}\left(x^{n-1}e^{\frac{1}{x}}\right).$$

La formule (2) fournit l'expression de la dérivée qui figure au second membre, et l'on a ainsi

$$\int^n \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^m}\,dx^n = (-1)^n e^{\frac{1}{x}}\left[x^{2n-m} - \frac{n}{1}(m-n-1)x^{2n-m+1} + \frac{n(n+1)}{1.2}(m-n-1)(m-n-2)x^{2n-m+2} - \ldots\right],$$

c'est-à-dire, sous forme finie, l'intégrale $n^{\text{ième}}$ de $\frac{1}{x^m}e^{\frac{1}{x}}$, quand m est un nombre entier au moins égal à 2, et n inférieur à m. En d'autres termes, la formule (2) s'applique aux valeurs négatives de n et de m, sous ces dernières réserves.

L'identité (3) conduit aisément à cette conséquence que l'équation

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \frac{1}{x^{2n}}y \tag{4}$$

a pour intégrale générale

$$y = \Sigma A x^{n-1} e^{\frac{\alpha}{x}},$$

les coefficients α étant les racines de l'équation $(-\alpha)^n = 1$.