BULLETIN DE LA S. M. F.

LAGUERRE

Sur la fonction $\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{\omega}$

Bulletin de la S. M. F., tome 8 (1880), p. 36-52

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1880__8__36_1>

© Bulletin de la S. M. F., 1880, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Sur la fonction $\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{\omega}$; par M. LAGUERRE.

(Séance du 5 décembre 1879.)

I.

1. Soit, en désignant par ω une constante arbitraire,

$$z = \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{\omega};$$

je me propose d'abord de développer z en fractions continues, et, à cet effet, je poserai

$$z = \frac{\varphi_n}{f_n} + \left(\frac{1}{x^{2n+1}}\right) \quad (1),$$

φ_n et f_n désignant deux polynômes entiers en x du degré n, que j'écrirai aussi $\varphi_n(x)$, $f_n(x)$ et $\varphi_n(x, \omega)$, $f_n(x, \omega)$ lorsque je voudrai mettre en évidence la variable x et la constante ω.

Comme z tend vers l'unité quand x croît indéfiniment, on voit que les coefficients de x^n sont égaux dans les deux polynômes; z se changeant d'ailleurs en $\frac{1}{z}$ quand on change le signe de x, on en conclut la relation

$$\varphi_n(x) = (-1)^n f_n(-x);$$

on a aussi évidemment

$$\varphi_n(x, \omega) = f_n(x, -\omega).$$

2. Je rappellerai d'abord les résultats obtenus dans la Note que j'ai présentée récemment à la Société *Sur la réduction en fractions continues d'une fonction qui satisfait à une équation linéaire du premier ordre à coefficients rationnels.*

Soit proposé de réduire en fractions continues une fonction z satisfaisant à l'équation différentielle

$$\mathrm{W}z' = \mathrm{V}z + \mathrm{U},$$

où U, V et W désignent des polynômes entiers en x, et soit $\frac{\varphi_n}{f_n}$ la réduite de rang n.

Représentons par Θ_n un polynôme entier du degré de

$$\mathrm{V}\left(\frac{1}{x}\right) + \mathrm{W}\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

et par A_n une constante dont la valeur ne dépend que du nombre

---

(1) Ici, comme dans tout ce qui suit, je désigne généralement par $\left(\frac{1}{x^p}\right)$ une série ordonnée suivant les puissances décroissantes de x et commençant par un terme de l'ordre de $\frac{1}{x^p}$.

entier n et est actuellement indéterminée; on a

$$f_n^2 \mathrm{U} + f_n \varphi_n \mathrm{V} - (\varphi'_n f_n - f'_n \varphi_n)\mathrm{W} = \mathrm{A}_n \Theta_n,$$

et l'on voit que f_n satisfait à une équation linéaire du second ordre de la forme

$$\mathrm{W}y'' + \mathrm{W}_0 y' + \mathrm{W}_1 y = 0,$$

où

$$\mathrm{W}_0 = \mathrm{V} + \mathrm{W}' - \mathrm{W}\frac{\Theta'_n}{\Theta_n} \quad \text{et} \quad \mathrm{W}_1 = \frac{\mathrm{K}_n}{\Theta_n},$$

K_n désignant un polynôme entier en x.

Une seconde solution de cette équation est donnée par la formule

$$y_1 = e^{-\int \frac{\mathrm{V}}{\mathrm{W}} dx}(\varphi_n - f_n z).$$

En posant de plus, pour abréger,

$$\frac{\mathrm{A}_{n+1}}{\mathrm{A}_n} = \mathrm{P}_n,$$

on a les relations suivantes :

$$(\mathrm{A}) \qquad \begin{cases} \mathrm{W}f'_n = \Omega_n f_n - \Theta_n f_{n+1}, \\ f_{n+1} - \dfrac{\Omega_n + \Omega_{n+1} + \mathrm{V}}{\Theta_{n+1}} f_n + \mathrm{P}_{n-1} f_{n-1} = 0. \end{cases}$$

La première de ces relations détermine le degré et la forme de Ω_n; on déterminera complètement ce polynôme en exprimant que, pour une valeur convenable de P_n, l'expression

$$u = e^{\int \frac{\Omega_n}{\mathrm{W}} dx}$$

satisfait à l'équation différentielle

$$\mathrm{W}u'' + \mathrm{W}_0 u' + \left(\mathrm{W}_1 - \frac{\mathrm{P}_n \Theta_n \Theta_{n+1}}{\mathrm{W}}\right) u = 0.$$

3. La fonction $z = \left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^{\omega}$ satisfait à l'équation différentielle

$$(x^2 - 1)z' + 2\omega z = 0;$$

dans le cas actuel, nous avons donc

$$W = x^2 - 1, \quad V = -2\omega \quad \text{et} \quad U = 0,$$

d'où il résulte d'abord que Θ_n est une constante que nous ferons égale à -1.

L'équation différentielle qui a pour solutions f_n et $\varphi_n\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{\omega}$ est

$$(x^2-1)y'' + 2(x-\omega)y' - n(n+1)y = 0. \tag{1}$$

Nous déterminerons P_n et Ω_n par la condition que $u = e^{\int \frac{\Omega_n}{x^2-1}dx}$ satisfasse à l'équation

$$(x^2-1)u'' + 2(x-\omega)u' - \left[n(n+1) + \frac{P_n}{x^2-1}\right]u = 0.$$

Ω_n étant du premier degré en x, u est de la forme $(x-1)^{\alpha}(x+1)^{\beta}$; en substituant cette expression dans l'équation précédente, on trouve les équations de condition qui suivent :

$$(\alpha+\beta)(\alpha+\beta+1) = n(n+1), \quad \alpha - \beta = \omega$$

et

$$P_n = n(n+1) - (\alpha+\beta) - \omega^2.$$

On peut y satisfaire de deux façons différentes.

En premier lieu, on peut poser

$$\alpha + \beta = n, \quad \text{d'où} \quad P_n = n^2 - \omega^2$$

et

$$\alpha = \frac{n+\omega}{2}, \quad \beta = -\frac{n-\omega}{2}.$$

On en déduit

$$\Omega_n = \frac{x^2-1}{2}\left(\frac{n+\omega}{x-1} + \frac{n-\omega}{x+1}\right) = nx + \omega;$$

mais il est facile de voir que cette solution ne convient pas à la question. En effet, en posant $f_0 = 1$ et faisant $n = 0$, on aurait, en vertu de la première des formules (A),

$$f_1 = -\omega,$$

ce qui est impossible, puisque f_1 est nécessairement du premier degré en x.

Posons donc

$$\alpha+\beta=-(n+1), \quad \text{d'où} \quad P_n=(n+1)^2-\omega^2$$

et

$$\alpha=\frac{\omega-n-1}{2}, \quad \beta=-\frac{\omega+n+1}{2}.$$

On en déduit

$$\Omega_n=\omega-(n+1)x,$$

et les formules (A) deviennent

$$(2) \qquad (x^2-1)f_n'=[\omega-(n+1)x]f_n+f_{n+1},$$

$$(3) \qquad f_{n+1}-(2n+1)xf_n+(n^2-\omega^2)f_{n-1}=0.$$

En changeant ω en $-\omega$, on obtient encore les formules suivantes :

$$(2)' \qquad (x^2-1)\varphi_n'=-[\omega+(n+1)x]\varphi_n+\varphi_{n+1},$$

$$(3)' \qquad \varphi_{n+1}-(2n+1)x\varphi_n+(n^2-\omega^2)\varphi_{n-1}=0.$$

On a d'ailleurs

$$(4) \qquad (x^2-1)(\varphi_n'f_n-f_n'\varphi_n)+2\omega\varphi_nf_n=A_n.$$

Au moyen de ces formules, on trouve ces valeurs des premiers polynômes :

$$f_0=1, \quad f_1=x-\omega, \quad f_2=3x^2-3\omega x+\omega^2-1,$$
$$f_3=15x^3-15\omega x^2+(6\omega^2-9)x-\omega(\omega^2-4).$$

Du reste, l'équation (1) s'intégrant au moyen des séries hypergéométriques, on obtient aisément l'expression suivante :

$$(5) \quad \left\{ \begin{aligned} f_n&=(-1)^n(\omega+1)(\omega+2)\dots(\omega+n) \\ &\times\left[1-\frac{n}{1}\frac{n+1}{\omega+1}\left(\frac{1+x}{2}\right)+\frac{n(n+1)}{1.2}\frac{(n+1)(n+2)}{(\omega+1)(\omega+2)}\left(\frac{1+x}{2}\right)^2+\dots\right. \\ &\left.+(-1)^n\frac{(n+1)(n+2)\dots 2n}{(\omega+1)(\omega+2)\dots(\omega+n)}\left(\frac{1+x}{2}\right)^n\right]. \end{aligned} \right.$$

Des formules (4) et (5) on déduit, en y faisant $x=1$ et en remarquant que $\varphi_n(\omega)=f_n(-\omega)$,

$$(6) \qquad A_n=2\omega(1-\omega^2)(1-4\omega^2)\dots(1-n^2\omega^2),$$

ce qui concorde bien avec la valeur trouvée pour P_n.

4. Si l'on désigne, en général, par S_p la somme des $p^{\text{ièmes}}$ puissances des racines de l'équation $f_n = 0$, on a

$$S_1 = S_3 = S_5 = \ldots = S_{2n-1} = \omega \quad (^1);$$

cette propriété est caractéristique du polynôme f_n.

Je ferai encore les remarques suivantes. Posons, en ordonnant f_n par rapport aux puissances croissantes de ω,

$$f_n = P_0 + \omega P_1 + \omega^2 P_2 + \ldots + \omega^n P_n.$$

De l'équation

$$\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{\omega} = \frac{P_0 - \omega P_1 + \omega^2 P_2 + \ldots}{P_0 + \omega P_1 + \omega^2 P_2 + \ldots} + \left(\frac{1}{x^{2n+1}}\right)$$

on déduit, en développant les deux membres suivant les puissances croissantes de ω et égalant les coefficients de la première puissance,

$$\log\left(\frac{x+1}{x-1}\right) = \frac{2P_1}{P_0} + \frac{1}{x^{2n+1}},$$

d'où il résulte que $\frac{P_1}{P_0}$ est la $n^{\text{ième}}$ réduite de la fonction

$$\frac{1}{2}\log\left(\frac{x+1}{x-1}\right).$$

En désignant, en effet, suivant l'usage ordinaire, par X_n le polynôme de Legendre et par $\Pi(n)$ le produit $1.2\ldots n$, on a

$$P_0 = \Pi(n) X_n.$$

Désignons, dans f_n, par $H(x, \omega)$ l'ensemble des termes homogènes et du degré n par rapport aux deux quantités x et ω; on verra aussi facilement que $H(1, \omega)$ est le dénominateur de la $n^{\text{ième}}$ réduite de $e^{\frac{\omega}{2}}$.

II.

5. La réduction en fractions continues de la fonction $\left(\frac{x+1}{x+1}\right)^{\omega}$

---

(1) *Voir*, à ce sujet, ma Note *Sur un problème d'Algèbre* (*Bulletin*, t. V, p. 30).

est liée intimement avec le développement de la fonction $(x+z)^\omega$ suivant les puissances croissantes de (z^2-1).

Soit, en effet,

$$(7) \qquad (x+z)^\omega = \sum (V_n + zU_n) \frac{(z^2-1)^n}{2^{n+1}\,\Pi(n)}.$$

Pour obtenir ce développement d'après la méthode donnée par Jacobi (¹), nous poserons

$$(z+x)^\omega = b_0 x^\omega + b_1 x^{\omega-1} z + \ldots + b_i x^{\omega-i} z^i + \ldots$$

et

$$\frac{1}{(z^2-1)^{n+1}} = \frac{A_1}{z^{2n+2}} + \frac{A_2}{z^{2n+4}} + \ldots.$$

Si, dans le produit de ces deux séries, nous prenons l'ensemble des termes $\frac{B_1}{z} + \frac{B_2}{z^2}$ qui sont du premier et du second degré en $\frac{1}{z}$, nous voyons aisément que B_1 est de l'ordre de $x^{\omega-2n-1}$ et B_2 de l'ordre de $z^{\omega-2n}$. Or $V_n + zU_n$ est la partie entière de

$$(z^2-1)\left(\frac{B_1}{z} + \frac{B_2}{z^2}\right);$$

on a donc

$$U_n = B_1,$$

et, par suite, U_n est de l'ordre de $x^{\omega-2n-1}$.

6. Ce point essentiel étant établi, en dérivant successivement par rapport à x et par rapport à z l'identité (6), j'obtiens les relations

$$\begin{aligned}
\omega(x+z)^{\omega-1} &= \sum (V'_n + zU'_n) \frac{(z^2-1)^n}{2^{n+1}\,\Pi(n)} \\
&= \sum U_n \frac{(z^2-1)^n}{2^{n+1}\,\Pi(n)} + \sum (V_n z + U_n z^2) \frac{(z^2-1)^{n-1}}{2^n\,\Pi(n-1)} \\
&= \sum (2n+1) U_n \frac{(z^2-1)^n}{2^{n+1}\,\Pi(n)} + \sum (U_n + V_n z) \frac{(z^2-1)^{n-1}}{2^n\,\Pi(n-1)},
\end{aligned}$$

(¹) *Entwickelung nach den Potenzen eines ganzen Polynoms* (*Journal de Borchardt*, t. 53, p. 103).

d'où les identités

$$V'_n = (2n+1)U_n + U_{n+1} \quad \text{et} \quad U'_n = V_{n+1}.$$

On a de même

$$\omega(x+z)^\omega = \omega \sum (V_n + zU_n)\frac{(z^2-1)^n}{2^{n+1}\Pi(n)} = \sum (V'_n + zU'_n)(z+x)\frac{(z^2-1)^n}{2^{n+1}\Pi(n)}$$

$$= \sum 2(n+1)U'_n \frac{(z^2-1)^{n+1}}{2^{n+2}\Pi(n+1)}$$

$$+ \sum [U'_n + xV'_n + (V'_n + xU'_n)]\frac{(z^2-1)^n}{2^{n+1}\Pi(n)},$$

d'où

$$\omega V_n = 2nU'_{n-1} + U'_n + xV'_n$$

et

$$\omega U_n = V'_n + xU'_n.$$

On en déduit aisément les relations suivantes :

$$(B)\quad \begin{cases} V_n = U'_{n-1}, \\ (x^2-1)U''_n + 2x(n+1-\omega)U'_n - \omega(2n+1-\omega)U_n = 0, \\ U_{n+1} + (2n+1-\omega)U_n + xU'_n = 0, \\ (x^2-1)U_{n+1} + [(2n+1)x^2 + 2\omega - 4n - 1]U_n \\ \qquad\qquad - (2n-\omega)(2n-\omega-1)U_{n-1} = 0, \\ U_{n+1} + (2n+1)U_n - U''_{n-1} = 0. \end{cases}$$

7. Un calcul direct donne

$$U_0 = (x+1)^\omega - (x-1)^\omega,$$

$$U_1 = (x+1)^{\omega-1}(\omega - 1 - x) - (x-1)^{\omega-1}(1-\omega-x),$$

et la dernière des formules précédentes permet de calculer facilement de proche en proche les diverses valeurs de U_n.

On voit que U_n est de la forme

$$F_n(x+1)^{\omega-n} - \Phi_n(x-1)^{\omega-n},$$

où F_n et Φ_n désignent des polynômes entiers en x du degré n, et, d'après la remarque que j'ai faite ci-dessus, on a

$$F_n(x+1)^{\omega-n} - \Phi_n(x-1)^{\omega-n} = \left(\frac{x^\omega}{x^{2n+1}}\right),$$

d'où

$$F_n\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{\omega-n} - \Phi_n = \left(\frac{1}{x^{n+1}}\right),$$

ce qui montre que $\frac{\Phi_n}{F_n}$ est la $n^{\text{ième}}$ réduite de $\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{\omega-n}$. Par suite, F_n et Φ_n ne diffèrent que par un nombre constant de $f_n(\omega - n)$ et de $\varphi_n(\omega - n)$; si d'ailleurs on désigne, pour un instant, par M_n le coefficient de x^n dans F_n, on déduit des formules précédentes

$$M_{n+1} = -(2n+1)M_n$$

et

$$M_n = (-1)^n.1.3.5 - (2n-1),$$

d'où l'on voit que

$$F_n = (-1)^n f_n(\omega - n), \quad \Phi_n = (-1)^n \varphi_n(\omega - n)$$

et

$$U_n = (-1)^n[(x+1)^{\omega-n} f_n(\omega - n) - (x-1)^{\omega-n} \varphi_n(\omega - n)].$$

Transformons les relations (B) en posant

$$U_n = (-1)^n (x+1)^{\omega-n} f_n(\omega - n),$$

puis changeons ensuite ω en $\omega + n$.

On trouvera tout d'abord, comme nous y sommes arrivé par une voie différente, que f_n satisfait à l'équation du second ordre (1), puis les relations suivantes :

$$f_{n+1}(\omega - 1) = [(n+1)x + n + 1 - \omega] f_n(\omega) + x(x+1) f_n'(\omega),$$

$$(x-1) f_{n+1}(\omega - 1) + [(2n+1)x^2 + 2\omega - 2n - 1] f_n(\omega) + (2n - \omega)(2n - \omega - 1)(x+1) f_{n-1}(\omega + 1),$$

d'où, en éliminant $f_n'(\omega)$ au moyen de la formule (2),

$$(8) \qquad (x-1) f_{n+1}(\omega - 1) = (\omega - n - 1) f_n(\omega) + x f_{n+1}(\omega).$$

8. De la formule (7) on déduit

$$(x+z)^\omega - (x-z)^\omega = \sum \frac{2z\, U_n (z^2-1)^n}{2^{n+1}\, \Pi(n)},$$

d'où, en intégrant entre les limites 1 et z,

$$(x+z)^{\omega+1}+(x-z)^{\omega+1}=(x+1)^{\omega+1}+(x-1)^{\omega+1}+(\omega+1)\sum\frac{U_n(z^2-1)^{n+1}}{2^{n+1}\Pi(n+1)}.$$

Posons $z=1+\sqrt{t}$; il viendra

$$(x+\sqrt{1+t})^{\omega+1}+(x-\sqrt{1+t})^{\omega+1}=(x+1)^{\omega+1}+(x-1)^{\omega+1}+(\omega+1)\sum\frac{(-1)^n}{2^{n+1}\Pi(n+1)}[(x+1)^{\omega-n}f_n(\omega-n)-(x-1)^{\omega-n}\varphi_n(\omega-n)]t^{n+1}.$$

Cette équation se décompose évidemment en deux autres, dont l'une est

$$(9)\quad\begin{cases}(x+\sqrt{1+t})^{\omega+1}=(x+1)^{\omega+1}\\ \qquad\qquad+(\omega+1)\sum\dfrac{(-1)^n}{2^{n+1}\Pi(n+1)}(x+1)^{\omega-n}f_n(\omega-n)t^{n+1}.\end{cases}$$

Changeons, dans cette formule, t en $\frac{t}{x}$ et x en $\frac{1}{\sqrt{x}}$; il viendra

$$(1+\sqrt{x+t})^{\omega+1}=(1+\sqrt{x})^{\omega+1}+(\omega+1)\sum\frac{(-1)^n}{2^{n+1}\Pi(n+1)}\frac{(1+\sqrt{x})^{\omega-n}}{x^{\frac{n+1}{2}}}f_n\left(\frac{1}{\sqrt{x}},\omega-n\right)t^{n+1},$$

d'où, en vertu de la formule de Taylor,

$$\frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}(1+\sqrt{x})^{\omega+1}=\frac{(-1)^n(\omega+1)}{2^{n+1}\Pi(n+1)}\frac{(1+\sqrt{x})^{\omega-n}}{x^{\frac{n+1}{2}}}f_n\left(\frac{1}{\sqrt{x}},\omega-n\right),$$

et, en changeant ω en $\omega+n$,

$$(10)\quad f_n\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)=\frac{(-1)^n2^{n+1}x^{\frac{n+1}{2}}}{(\omega+n+1)(1+\sqrt{x})^{\omega}}\frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}(1+\sqrt{x})^{\omega+n+1};$$

en particulier, pour les polynômes de Legendre, on a la formule

$$X_n\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)=\frac{(-1)^n2^{n+1}x^{\frac{n+1}{2}}}{\Pi(n+1)}\frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}(1+\sqrt{x})^{n+1}.$$

III.

9. En désignant, pour un instant, par Y_n la série hypergéométrique

$$1 - \frac{n}{1}\frac{n+1}{\omega+1}\left(\frac{x+1}{2}\right) + \frac{n(n-1)}{1.2}\frac{(n+1)(n+2)}{(\omega+1)(\omega+2)} - \cdots,$$

on a

$$f_n = (-1)^n \frac{\Pi(n+\omega)}{\Pi(\omega)} Y_n;$$

en se servant de l'expression remarquable donnée par Jacobi pour les polynômes qui proviennent de la série hypergéométrique (¹), on en déduit

$$(11) \qquad f_n = \frac{1}{2^n}\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{\omega} \frac{d^n}{dx^n}(x+1)^{\omega+n}(x-1)^{n-\omega}.$$

10. La fonction

$$t_n - \varphi_n\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{\omega}$$

satisfaisant à l'équation différentielle

$$(x^2-1)y'' + 2(x-\omega)y' - n(n+1)y = 0,$$

on en déduit aisément que la fonction

$$(x+1)^{\omega} f_n - (x-1)^{\omega}\varphi_n$$

satisfait à l'équation

$$(x^2-1)u'' - 2(\omega-1)xu' + [\omega(\omega-1) - n(n+1)]u = 0.$$

En la différentiant p fois de suite, on obtient la relation suivante :

$$(x^2-1)u^{(p+2)} - 2(\omega-p-1)xu^{(p+1)} + [(\omega-p-1)(\omega-p) - n(n+1)]u = 0.$$

Comme elle ne diffère de l'équation précédente que par le changement de ω en $(\omega-p)$, on en conclut que la $p^{\text{ième}}$ dérivée de

---

(¹) Jacobi, *Untersuchungen über die Differentialgleichung der hypergeometrischen Reihe* (*Journal de Borchardt*, t. 56, p. 149).

$(x+1)^{\omega} f_n$ ne diffère que par un facteur constant de la fonction $(x+1)^{\omega-p} f_n(\omega - p)$. Ce facteur se détermine facilement, et l'on obtient l'identité suivante :

$$(12)\quad \frac{d^p}{dx^p}(x+1)^{\omega} f_n(x,\omega) = \frac{\Pi(\omega+n)}{\Pi(\omega+n-p)}(x+1)^{\omega-p} f_n(x,\omega-p).$$

En particulier, si l'on fait $\omega = p$, il vient

$$(13)\qquad \frac{d^p}{dx^p}(x+1)^p f_n(x,p) = \Pi(n+p)\,X_n.$$

Si, dans cette formule, on fait $p = n$, comme

$$f_n(x,n) = \frac{\Pi(2n)}{2^n \Pi(n)}(x-1)^n,$$

on retrouve la formule connue, due à O. Rodrigues,

$$X_n = \frac{1}{2^n \Pi(n)} \frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n.$$

11. La formule (13) montre que, p étant un nombre entier positif, $(x+1)^p f_n(x,p)$ peut s'obtenir en intégrant plusieurs fois de suite le polynôme X_n.

Considérons, d'une façon plus générale, l'expression

$$I = \int_{-1}^{x} (x-z)^{\omega-1} X_n(z)\,dz,$$

où ω désigne un nombre quelconque positif.

En intégrant par parties, on a

$$I = \frac{(x+1)^{\omega}}{\omega}\left[X_n(-1) + \frac{X_n'(-1)}{\omega+1}(x+1) + \frac{X_n''(-1)}{(\omega+1)(\omega+2)}(x+1)^2 + \dots\right],$$

et, en partant de l'expression

$$X_n = (-1)^n\left[1 - \frac{n}{1}\frac{(n+1)}{1}\left(\frac{x+1}{2}\right) + \frac{n(n-1)}{1.2}\frac{(n+1)(n+2)}{1.2}\left(\frac{x+1}{2}\right)^2 - \dots\right],$$

on trouve aisément

$$X_n(-1)=(-1)^n,\quad X'_n(-1)=-\frac{n}{1}(n+1)\frac{(-1)^n}{2},$$
$$X''(-1)=\frac{n(n-1)}{1.2}(n+1)(n+2)\frac{(-1)^n}{2^2},\quad \cdots;$$

on en déduit

$$I=\frac{(-1)^n(x+1)^\omega}{\omega}\left[1-\frac{n}{1}\frac{n+1}{\omega+1}\left(\frac{x+1}{2}\right)\right.$$
$$\left.+\frac{n(n-1)}{1.2}\frac{(n+1)(n+2)}{(\omega+1)(\omega+2)}\left(\frac{x+1}{2}\right)^2-\cdots\right],$$

où la quantité entre crochets est, à un facteur numérique près, le polynôme f_n, d'où l'identité suivante :

$$(14)\qquad f_n(x,\omega)=\frac{\Pi(\omega+n)}{\Pi(\omega-1)}(x+1)^{-\omega}\int_{-1}^{x}(x-z)^{\omega-1}X_n(z)\,dz.$$

Cette formule suppose essentiellement que ω est positif; comme l'on a

$$f_n(x,-\omega)=(-1)^n f_n(-x,\omega),$$

on a également, ω étant toujours supposé positif,

$$(14)'\quad f_n(x,-\omega)=\frac{\Pi(\omega+n)}{\Pi(\omega-1)}(x-1)^{-\omega}\int_{1}^{x}(x-z)^{\omega-1}X_n(z)\,dz.$$

On en déduit, en remarquant que $f_n(x,-\omega)=\varphi_n(x,\omega)$,

$$\frac{\Pi(\omega-1)}{\Pi(\omega+n)}[f_n(x+1)^\omega-\varphi_n(x-1)^\omega]=\int_{-1}^{+1}(x-z)^{\omega-1}X_n(z)\,dz.$$

Si donc on pose

$$(x-z)^{\omega-1}=\Sigma A_n X_n(z),$$

on a, en vertu d'une formule connue,

$$A_n=\frac{2n+1}{2}\int_{-1}^{+1}(x-z)^{\omega-1}X_n(z)\,dz,$$

d'où

$$A_n=\frac{2n+1}{2\omega(\omega+1)\ldots(\omega+n)}[f_n(x+1)^\omega-\varphi_n(x-1)^\omega]\quad(1).$$

---

(1) Sur ce développement, *voir* le Mémoire de M. Bauer *Von den Coefficienten der Reihen von Kugelfunctionen einer Variabeln* (*Journal de Borchardt*, t. 56, p. 101).

12. Si, dans la formule (12), on fait $\omega = 0$, et si l'on remarque que

$$f_n(x, 0) = \Pi(n) X_n,$$

il vient

$$f_n(x, -p) = \Pi(n-p)(x+1)^p \frac{d^p}{dx^p} X_n;$$

dans cette identité, p désigne zéro ou un nombre entier positif inférieur à $(n+1)$. Nous pouvons en déduire aisément une expression nouvelle de la fonction $\frac{f_n}{\omega(\omega+1)\dots(\omega+n)}$; posons, en effet

$$\frac{f_n(x, \omega)}{\omega(\omega+1)\dots(\omega+n)} = \frac{A_0}{\omega} + \frac{A_1}{\omega+1} + \dots + \frac{A_i}{\omega+i} + \dots + \frac{A_n}{\omega+n}.$$

D'une formule élémentaire bien connue il résulte que l'on a

$$A_i = (-1)^i \frac{1}{\Pi(i)\,\Pi(n-i)} f_n(x, -i),$$

ou, en vertu de l'identité précédente,

$$A_i = \frac{(-1)^i}{\Pi(i)} (x+1)^i \frac{d^i}{dx^i} X_n,$$

et de là

$$(15) \quad \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{f_n(x, \omega)}{\omega(\omega+1)\dots(\omega+n)} \\ \quad = \dfrac{X_n}{\omega} - \dfrac{(x+1)}{1} \dfrac{X'_n}{\omega+1} + \dfrac{(x+1)^2}{1.2} \dfrac{X''_n}{\omega+2} - \dfrac{(x+1)^3}{1.2.3} \dfrac{X'''_n}{\omega+3} + \dots \end{array} \right.$$

Si, dans cette formule, on change x en $-x$ et ω en $-\omega$, et si l'on remarque que $f(-x, -\omega) = (-1)^n f(x, \omega)$, on obtiendra encore la formule suivante :

$$(15)' \quad \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{f_n(x, \omega)}{\omega(\omega-1)\dots(\omega-n)} \\ \quad = (-1)^n \left[\dfrac{X_n}{\omega} - \dfrac{x-1}{1} \dfrac{X'_n}{\omega-1} + \dfrac{(x-1)^2}{1.2} \dfrac{X''_n}{\omega-2} - \dfrac{(x-1)^3}{1.2.3} \dfrac{X'''_n}{\omega-3} + \dots \right]. \end{array} \right.$$

13. On sait que les racines de l'équation $X_n = 0$ sont toutes réelles et comprises entre -1 et $+1$; désignons respectivement,

pour un instant, par α et β la plus petite et la plus grande de ces racines. Si x désigne une quantité quelconque comprise entre -1 et α, on voit que $(x+1)$ est positif, et il suit du théorème de Fourier que la suite des quantités

$$X_n,\ X'_n,\ X''_n,\ \ldots$$

ne présente aucune permanence de signe; l'équation (15) montre que dans ce cas l'équation $f(x, \omega) = 0$ peut se mettre sous la forme

$$\frac{A}{\omega} + \frac{B}{\omega+1} + \frac{C}{\omega+2} + \cdots + \frac{L}{\omega+n} = 0,$$

A, B, C, ..., L désignant des coefficients ayant tous le même signe.

Par un raisonnement bien connu, on en conclut que toutes les racines de l'équation $f(x, \omega) = 0$ (où ω est regardé comme inconnue) sont réelles et séparées par les nombres

$$0,\ +1,\ +2,\ \ldots,\ +(n-1) \text{ et } +n.$$

On déduirait de même de la formule $(15)'$ que, si la valeur de x est comprise entre β et $+1$, l'équation $f_n(x, \omega) = 0$ a n racines réelles séparées par les nombres

$$0,\ -1,\ -2,\ \ldots,\ -(n-1) \text{ et } -n.$$

IV.

14. La fonction f_n satisfaisant à l'équation

$$(1) \qquad (x^2-1)y'' + 2(x-\omega)y' - n(n+1)y = 0,$$

on voit que $\frac{df_n}{d\omega}$ satisfait à l'équation

$$(x^2-1)u'' + 2(x-\omega)u' - n(n+1)u = 2\frac{df_n}{dx}.$$

En désignant par y une solution quelconque de l'équation (1), on

déduit de là

$$(x^2-1)(yu''-uy'')+2(x-\omega)(yu'-uy')=2\frac{df_n}{dx}y,$$

et, en multipliant les deux membres par $\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{\omega}$,

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{\omega}(x^2-1)(yu'-uy')=2\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{\omega}\frac{df_n}{dx}y;$$

puis, en intégrant et en remplaçant u par $\frac{df_n}{d\omega}$,

$$2\int\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{\omega}\frac{df_n}{dx}y\,dx=\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{\omega}(x^2-1)\left(y\frac{d^2f_n}{dx\,d\omega}-\frac{df_n}{d\omega}\frac{dy}{dx}\right).$$

Dans cette relation, faisons d'abord

$$y=f_n;$$

il viendra

$$2\int\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{\omega}f_n\frac{df_n}{dx}dx=\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{\omega}(x^2-1)\left(f_n\frac{d^2f_n}{dx\,d\omega}-\frac{df_n}{d\omega}\frac{df_n}{dx}\right).$$

Faisons, en second lieu,

$$y=\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{\omega}\varphi_n;$$

nous aurons

$$2\int\varphi_n\frac{df_n}{dx}dx=(x^2-1)\left(\varphi_n\frac{d^2f_n}{dx\,d\omega}-\frac{df_n}{d\omega}\frac{d\varphi_n}{dx}\right)-2\omega\varphi_n\frac{df_n}{d\omega}.$$

Remplaçons, dans le second membre de cette égalité, $\frac{d^2f_n}{dx\,d\omega}$ par sa valeur tirée de l'équation (2) et $\frac{d\varphi_n}{dx}$ par sa valeur tirée de l'équation (2)'; il viendra, toutes réductions faites,

$$(16)\qquad 2\int\varphi_n\frac{df_n}{dx}dx=\varphi_nf_n+\varphi_n\frac{df_{n+1}}{d\omega}-\varphi_{n+1}\frac{df_n}{d\omega},$$

d'où encore, en changeant ω en $-\omega$,

$$(16)'\qquad 2\int f_n\frac{d\varphi_n}{dx}dx=\varphi_nf_n-f_n\frac{d\varphi_{n+1}}{d\omega}+f_{n+1}\frac{d\varphi_n}{d\omega}.$$

On déduit de là l'identité suivante, où K désigne une quantité indépendante de x :

$$\varphi_n \frac{df_{n+1}}{d\omega} - \varphi_{n+1} \frac{df_n}{d\omega} + f_{n+1} \frac{d\varphi_n}{d\omega} - f_n \frac{d\varphi_{n+1}}{d\omega} = \mathrm{K}.$$