BULLETIN DE LA S. M. F.

MARCEL EVRARD

Fibrations de petites catégories

Bulletin de la S. M. F., tome 103 (1975), p. 241-265

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1975__103__241_0>

© Bulletin de la S. M. F., 1975, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Bull. Soc. math. France,
103, 1975, p. 241-265.

FIBRATIONS DE PETITES CATÉGORIES

PAR

MARCEL EVRARD
[Université de Paris VII]

RÉSUMÉ. — On donne une démonstration nouvelle et entièrement algébrique des théorèmes A et B de QUILLEN.

I. — Les groupes $\pi_n(\mathbf{I})$

Dans ce paragraphe, et dans les deux suivants, on donne la construction des groupes d'homotopie $\pi_n(\mathbf{I})$ ($n \geqslant 1$) d'une petite catégorie pointée $\mathbf{I}$ ainsi que quelques propriétés de ces groupes. Les démonstrations parfois longues de ces propriétés, qui ont été omises ici, se trouvent dans [1].

1° $\mathbf{C}$ ($\mathbf{C}^*$) désigne la catégorie dont les objets sont les petites catégories (pointées) et dont les morphismes sont les foncteurs covariants (conservant les points).

Si $\mathbf{I}$ est une petite catégorie, un *chemin de* $\mathbf{I}$ *de longueur* m (m entier) est un diagramme de $\mathbf{I}$ de la forme :

$$\bar{I} = \bar{I}_0 \to I_1 \leftarrow \bar{I}_1 \to \ldots \to I_m \leftarrow \bar{I}_m.$$

On désigne par $\mathrm{K}\Lambda(\mathbf{I})_m$ la petite catégorie dont les objets sont les chemins de $\mathbf{I}$ de longueur m et dont les morphismes de $\bar{I}$ dans $\bar{J}$ sont les suites

$$\bar{u} = (u_1, \ldots, u_m ; \bar{u}_0 ; \bar{u}_1, \ldots, \bar{u}_m),$$

rendant le diagramme suivant commutatif

$$\begin{array}{ccccccccccc}
\bar{I} = & \bar{I}_0 & \to & I_1 & \leftarrow & \bar{I}_1 & \to \ldots \to & I_m & \leftarrow & \bar{I}_m \\
& \downarrow{\scriptstyle \bar{u}_0} & & \downarrow{\scriptstyle u_1} & & \downarrow{\scriptstyle \bar{u}_1} & & \downarrow{\scriptstyle u_n} & & \downarrow{\scriptstyle \bar{u}_m} \\
\bar{J} = & \bar{J}_0 & \to & J_1 & \leftarrow & \bar{J}_1 & \to \ldots \to & J_m & \leftarrow & \bar{J}_m
\end{array}$$

Cette construction définit évidemment un foncteur

$$\mathbf{C} \xrightarrow{K\Lambda_m} \mathbf{C}.$$

De plus, si Δ_m est la catégorie dont les objets sont les entiers de l'intervalle $(0, 2m)$ et dont les morphismes sont de la forme $2p \to 2p-1$, $2p \to 2p+1$:

$$K\Lambda(\mathbf{I})_m = \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathbf{C}}(\Delta_m, \mathbf{I}).$$

$K\Lambda_m$ commute donc en particulier aux produits fibrés.

On pose

$$K\Lambda(\mathbf{I}) = \oplus_{m \in \mathbf{N}} K\Lambda(\mathbf{I})_m.$$

Si $\bar{I}$ est un chemin de $\mathbf{I}$ de longueur m, comme ci-dessus, et si

$$(1, m) \xrightarrow{\varphi} (1, p)$$

est une application strictement croissante, on pose

$$\varphi(\bar{I}) = \underset{\substack{o\text{-ième} \\ \text{place}}}{\bar{I}_0} \to \bar{I}_0 \leftarrow \ldots \leftarrow \bar{I}_0 \to I_1 \leftarrow \underset{\substack{\varphi(1)\text{-ième} \\ \text{place}}}{\bar{I}_1} \to \bar{I}_1 \leftarrow \ldots$$

$$\ldots \leftarrow \bar{I}_{m-1} \to I_m \leftarrow \underset{\substack{\varphi(1)\text{-ième} \\ \text{place}}}{\bar{I}_m} \to \ldots \to \bar{I}_m \leftarrow \underset{\substack{p\text{-ième} \\ \text{place}}}{\bar{I}_p}$$

et on désigne par $\Lambda(\mathbf{I})$ la petite catégorie dont les objets sont les chemins de $\mathbf{I}$ et dont les morphismes d'un chemin $\bar{I}$ de longueur m dans un chemin $\bar{J}$ de longueur p sont les couples $(\varphi, \bar{u})$, où $\bar{u}$ est un morphisme de $K\Lambda(\mathbf{I})_p$, de $\varphi(\bar{I})$ dans $\bar{J}$. $\Lambda(\mathbf{I})$ est la *catégorie des chemins de* $\mathbf{I}$. Cette construction définit un foncteur

$$\mathbf{C} \xrightarrow{\Lambda} \mathbf{C}$$

qui cette fois ne commute plus aux produits.

Si $\mathbf{J}$ et $\mathbf{K}$ sont des sous-catégories de $\mathbf{I}$, on définit de manière analogue la catégorie $\Lambda(\mathbf{I}; \mathbf{J}, \mathbf{K})$ des chemins de $\mathbf{I}$, d'origine dans $\mathbf{J}$ et d'extrémité dans $\mathbf{K}$.

En particulier, si $\mathbf{I}$ est pointée en I_0, on note $\Omega(\mathbf{I})$ la *catégorie des lacets de* $\mathbf{I}$. Cette catégorie est pointée en I_0. Cette construction définit de nouveau un foncteur

$$\mathbf{C}^* \xrightarrow{\Omega} \mathbf{C}^*$$

qui ne commute pas non plus aux produits.

2° Pour tout entier $n > 0$, on définit par induction des foncteurs

$$\mathbf{C} \xrightarrow{\Lambda^n} \mathbf{C} \qquad \text{et} \qquad \mathbf{C}^* \xrightarrow{\Omega^n} \mathbf{C}^*,$$

où

$$\Lambda^n(\mathbf{I}) = \Lambda(\Lambda^{n-1}(\mathbf{I})) \qquad \text{et} \qquad \Omega^n(\mathbf{I}) = \Omega(\Omega^{n-1}(\mathbf{I})).$$

Si $\mathbf{p}_0^{\mathbf{I}}$ ($\mathbf{p}_1^{\mathbf{I}}$) désigne le foncteur qui associe à tout chemin de $\mathbf{I}$ son origine (son extrémité), l'ensemble $\pi_0(\mathbf{I})$ des composantes connexes de $\mathbf{I}$ est le quotient de $\mathrm{Ob}(\mathbf{I})$ par la relation :

$(I \sim J) \Leftrightarrow$ (il existe $\bar{I}$ appartenant à $\Lambda(\mathbf{I})$ tel que $\mathbf{p}_0^{\mathbf{I}}(\bar{I}) = I$ et $\mathbf{p}_1^{\mathbf{I}}(\bar{I}) = J$).

On pose, pour tout $\mathbf{I}$ de $\mathbf{C}^*$ et tout $n > 0$,

$$\pi_n(\mathbf{I}) = \pi_0(\Omega^n(\mathbf{I})).$$

$\pi_1(\mathbf{I})$, donc aussi $\pi_n(\mathbf{I})$, est un groupe pour la composition naturelle des lacets; de plus, $\pi_n(\mathbf{I})$ est abélien pour $n > 1$ ([1], A, corollaire III.6).

On déduit immédiatement de cette définition les propriétés suivantes :

(*a*) Si $\mathbf{J} = \mathbf{I}(\mathrm{Fl}(\mathbf{I})^{-1})$ désigne la catégorie des fractions de $\mathbf{I}$ ([2], I, § 1.1), l'application naturelle

$$\mathrm{Ob}(\Omega(\mathbf{I})) \to \mathrm{Aut}_{\mathbf{J}}(I_0),$$

où $\mathbf{I}$ est pointée en I_0, induit un isomorphisme de groupes

$$\pi_1(\mathbf{I}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Aut}_{\mathbf{J}}(I_0).$$

(*b*) Si $\mathbf{I} \xrightarrow{\mathbf{u}} \mathbf{I}'$ et $\mathbf{I} \xrightarrow{\mathbf{v}} \mathbf{I}'$ sont deux morphismes de $\mathbf{C}^*$, et si U est une transformation naturelle de $\mathbf{u}$ dans $\mathbf{v}$ telle que $U(I_0) = \mathrm{id}$, $\Omega^n(U)$ est une transformation naturelle de $\Omega^n(\mathbf{u})$ dans $\Omega^n(\mathbf{v})$ pour tout $n \geqslant 1$; comme $\pi_0(\mathbf{u}) = \pi_0(\mathbf{v})$, on en déduit le résultat suivant.

PROPOSITION I.1. — *Pour tout couple* $\mathbf{I} \xrightarrow{\mathbf{u}} \mathbf{I}'$ *et* $\mathbf{I} \xrightarrow{\mathbf{v}} \mathbf{I}'$ *de morphismes de* $\mathbf{C}^*$ *tel qu'il existe une transformation naturelle* U *de* $\mathbf{u}$ *dans* $\mathbf{v}$ *vérifiant* $U(I_0) = \mathrm{id}$, *et pour tout entier* $n \geqslant 0$, $\pi_n(\mathbf{u}) = \pi_n(\mathbf{v})$.

En particulier, si un morphisme $\mathbf{I} \xrightarrow{\mathbf{u}} \mathbf{I}'$ *de* $\mathbf{C}^*$ *possède un adjoint à gauche ou à droite,* $\pi_n(\mathbf{u})$ *est un isomorphisme pour tout* $n \geqslant 0$.

(*c*) Deux morphismes $\mathbf{I} \xrightarrow{\mathbf{u}} \mathbf{I}'$ et $\mathbf{I} \xrightarrow{\mathbf{v}} \mathbf{I}'$ de $\mathbf{C}^*$ sont dits *homotopes* s'il existe un morphisme de $\mathbf{C}^*$: $\mathbf{I} \xrightarrow{\mathbf{r}} \Lambda(\mathbf{I}')$ tel que $\mathbf{p}_0^{\mathbf{I}'} \circ \mathbf{r} = \mathbf{u}$ et $\mathbf{p}_1^{\mathbf{I}'} \circ \mathbf{r} = \mathbf{v}$. Une catégorie $\mathbf{I}$ de $\mathbf{C}^*$ pointée en I_0 est alors dite *contractile* si $\mathbf{I} \xrightarrow{\mathbf{id}} \mathbf{I}$ est homotope au morphisme $\mathbf{I} \xrightarrow{\mathbf{k}_{I_0}} \mathbf{I}$ de valeur constante I_0. La proposition I.1 se généralise alors comme ci-dessous :

PROPOSITION I.2. — *Pour tout couple* $\mathbf{I} \xrightarrow{\mathbf{u}} \mathbf{I}'$ *et* $\mathbf{I} \xrightarrow{\mathbf{v}} \mathbf{I}'$ *de morphismes homotopes de* $\mathbf{C}^*$ *et pour tout entier* $n \geqslant 0$, $\pi_n(\mathbf{u}) = \pi_n(\mathbf{v})$, *En particulier, toute catégorie contractile est homotopiquement triviale.*

3° Le nerf $\mathrm{N}_*(\mathbf{I})$ d'une petite catégorie $\mathbf{I}$ est le complexe semi-simplicial défini par :

(*a*) $N_n(\mathbf{I}) = \{ I_0 \xrightarrow{u_0} I_1 \xrightarrow{u_1} \ldots \xrightarrow{u_{n-1}} I_n ;\ u_0, u_1, \ldots, u_{n-1} \in \mathrm{Fl}(\mathbf{I}) \}$.

(*b*) $d_i(I_0 \xrightarrow{u_0} I_1 \to \ldots \to I_{n+1}) = I_0 \to I_1 \to \ldots \to \hat{I}_i \to \ldots \to I_{n+1}$, où $\hat{}$ désigne l'omission.

(*c*) $s_i(I_0 \to I_1 \to \ldots \to I_n) = I_0 \to I_1 \to \ldots \to I_i \xrightarrow{\mathrm{id}} I_i \to \ldots \to I_n$.

La réalisation géométrique de $N_*(\mathbf{I})$ s'appelle *l'espace classifiant* de $\mathbf{I}$, et se note $B(\mathbf{I})$; dans le cas d'un groupe G, si $\mathbf{G}$ désigne la catégorie associée à G ($\mathrm{Ob}(\mathbf{G}) = \star$, $\mathrm{Fl}(\mathbf{G}) = G$), $B(\mathbf{G})$ est l'espace classifiant habituel $B(G)$ du groupe G. ([4], p. 107 par exemple).

Lorsque $\mathbf{I}$ est pointée, on sait définir les groupes d'homotopie de $N_*(\mathbf{I})$ (ou plutôt du complexe de Kan associé), et ceux-ci sont isomorphes aux groupes d'homotopie de $B(\mathbf{I})$.

On démontre dans [1] que $\pi_n(\mathbf{I}) \simeq \pi_n(N_*(\mathbf{I}))$ pour tout n.

II. — Fibrations de petites catégories

1° Pour toute petite catégorie $\mathbf{I}$ et tout entier n, on construit par induction une sous-catégorie $(J\Lambda)^n(\mathbf{I})$ de $\Lambda^n(\mathbf{I})$, ayant mêmes objets que $\Lambda^n(\mathbf{I})$, de la façon suivante :

(*a*) Les morphismes de $(J\Lambda)(\mathbf{I})$ sont de la forme (φ, id).

(*b*) Les morphismes de $(J\Lambda)^n(\mathbf{I})$ sont de la forme $(\varphi, \bar{u})$ où $u = (u_1, \ldots, u_m; \bar{u}_0, \ldots, \bar{u}_m)$ est une suite de morphismes de $(J\Lambda)^{n-1}(\mathbf{I})$.

Ces catégories possèdent les deux propriétés suivantes :

(*a*) Pour tout couple $I \xrightarrow{u_1} I_1$, $I \xrightarrow{u_2} I_2$ de morphismes de $(J\Lambda)^n(\mathbf{I})$, on peut construire des morphismes $I_1 \xrightarrow{v_1} J$, $I_2 \xrightarrow{v_2} J$ de $(J\Lambda)^n(\mathbf{I})$ tels que $v_1 \circ u_1 = v_2 \circ u_2$ ([1], A, proposition II.3).

(*b*) Pour tout I de $\Lambda^n(\mathbf{I})$, on peut construire un morphisme $I \xrightarrow{u} J$ de $(J\Lambda)^n(\mathbf{I})$ tel que J appartient à $(K\Lambda)^n(\mathbf{I})$ ([1], A, proposition II.4).

On définit alors dans $\mathrm{Ob}(\Lambda^n(\mathbf{I}))$ la relation d'équivalence suivante :

$$(I_1 \equiv I_2) \Leftrightarrow (\text{il existe } I_1 \xrightarrow{v_1} J \text{ et } I_2 \xrightarrow{v_2} J \text{ appartenant à } (J\Lambda)^n(\mathbf{I})).$$

DÉFINITION II.1. — *Un morphisme* $\mathbf{I} \xrightarrow{\mathbf{u}} \mathbf{I}'$ *de* $\mathbf{C}$ *est fibré s'il possède la propriété suivante pour tout* $n \geqslant 0$:

(F_n) : *Pour tout couple d'objets* (I, J') *de* $\Lambda^n(\mathbf{I}) \times \Lambda^{n+1}(\mathbf{I}')$ *tels que*

$$\Lambda^n(\mathbf{u})(I) \equiv \mathbf{p}_0^{\Lambda^n(\mathbf{I}')}(J'),$$

il existe un objet J *de* $\Lambda^{n+1}(\mathbf{I})$ *tel que*

$$\Lambda^{n+1}(\mathbf{u})(J) \equiv J' \qquad et \qquad \mathbf{p}_0^{\Lambda^n(\mathbf{I})}(J) \equiv I,$$

$$\begin{array}{ccc} \Lambda^{n+1}(\mathbf{I}) & \xrightarrow{\Lambda^{n+1}(\mathbf{u})} & \Lambda^{n+1}(\mathbf{I}') \\ \downarrow{\scriptstyle \mathbf{p}_0^{\Lambda^n(\mathbf{I})}} & & \downarrow{\scriptstyle \mathbf{p}_0^{\Lambda^n(\mathbf{I}')}} \\ \Lambda^n(\mathbf{I}) & \xrightarrow{\Lambda^n(\mathbf{u})} & \Lambda^n(\mathbf{I}') \end{array}$$

Compte tenu de la propriété (*b*) ci-dessus, on peut dans la condition (F_n) remplacer partout Λ par $K\Lambda$. En pratique, les seuls morphismes dont on aura à vérifier qu'ils sont fibrés sont ceux vérifiant une propriété (P) telle que :

(*a*) $(P) \Rightarrow (F_0)$;

(*b*) $K\Lambda(\mathbf{u})$ vérifie (P).

Nous donnerons aux 5° et 6° des exemples de morphismes fibrés.

2° Si $\mathbf{I} \xrightarrow{\mathbf{u}} \mathbf{I}'$ est un morphisme de $\mathbf{C}$, pour tout objet I' de $\mathbf{I}'$, on pose :

(*a*) $\mathbf{u}^{-1}(I')$ = sous-catégorie de $\mathbf{I}$ formée des objets I tels que $\mathbf{u}(I) = I'$ et des morphismes f tels que $\mathbf{u}(f) = \mathrm{id}$:

$\mathbf{u}^{-1}(I')$ est *la fibre de* $\mathbf{u}$ *au-dessus de* I'.

(*b*) $\mathbf{u}_g^{-1}(I') =$ catégorie des couples $(I, \mathbf{u}(I) \xrightarrow{f'} I')$ et dont les morphismes de (I, f') dans (J, g') sont les flèches $I \xrightarrow{v} J$ telles que $g' \circ \mathbf{u}(v) = f'$:

$\mathbf{u}_g^{-1}(I')$ sera dite la *fibre à gauche de* $\mathbf{u}$ *au-dessus de* I'.

On définit de même, en inversant les flèches, $\mathbf{u}_d^{-1}(I')$.

(*c*) $\mathbf{u}_h^{-1}(I') = \mathbf{I} \times_{\mathbf{I}'} \Lambda(\mathbf{I}'; \mathbf{I}', I')$:

$\mathbf{u}_h^{-1}(I')$ est la *fibre homotopique de* $\mathbf{u}$ *au-dessus de* I'.

Ces fibres s'insèrent naturellement dans un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccc} & & \mathbf{u}_g^{-1}(I') & & \\ & \nearrow & & \searrow & \\ \mathbf{u}^{-1}(I') & & & & \mathbf{u}_h^{-1}(I') \\ & \searrow & & \nearrow & \\ & & \mathbf{u}_d^{-1}(I') & & \end{array}$$

3° Un morphisme $\mathbf{I} \xrightarrow{\mathbf{u}} \mathbf{I}'$ de $\mathbf{C}^*$ est fibré s'il ext fibré comme morphisme de $\mathbf{C}$. Si $\mathbf{I}$ et $\mathbf{I}'$ sont pointées en I_0 et I_0, on désigne par $\mathbf{i}$ l'inclusion de $\mathbf{u}^{-1}(I_0')$ dans $\mathbf{I}$ et par ∂_n l'homomorphisme défini par le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \pi_{n+1}(\mathbf{I}') & \xrightarrow{\partial_n} & \pi_n(\mathbf{u}^{-1}(I_0')) \\ & \nwarrow \quad \nearrow & \\ & \pi_n(\Lambda(\mathbf{I}; \mathbf{u}^{-1}(I_0'), I_0)) & \end{array}$$

On montre alors, comme dans le cas classique ([1], A, théorème IV.14) le résultat suivant.

PROPOSITION II.2. — *Pour tout morphisme fibré* $\mathbf{I} \xrightarrow{\mathbf{u}} \mathbf{I}'$ *de* $\mathbf{C}^*$, *la suite suivante est exacte*

$$\ldots \to \pi_n(\mathbf{u}^{-1}(I_0')) \xrightarrow{\pi_n(\mathbf{i})} \pi_n(\mathbf{I}) \xrightarrow{\pi_n(\mathbf{u})} \pi_n(\mathbf{I}') \xrightarrow{\partial_{n-1}} \pi_{n-1}(\mathbf{u}^{-1}(I_0')) \to \ldots$$

$$\ldots \to \pi_0(\mathbf{I}) \xrightarrow{\pi_0(\mathbf{u})} \pi_0(\mathbf{I}').$$

Le système d'homotopie $(\pi_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est caractérisé par les trois propriétés suivantes :

(*a*) $\pi_0(\mathbf{I}) =$ ensemble des composantes connexes de $\mathbf{I}$.

(*b*) $\pi_n(\mathbf{I}) = \star$ si $\mathbf{I}$ est contractile.

(*c*) La suite d'homotopie d'un morphisme fibré est exacte.

En effet, on peut alors construire les groupes $\pi_n(\mathbf{I})$ par décalage à l'aide de la formule

$$\pi_n(\mathbf{I}) = \pi_{n-1}(\Omega(\mathbf{I})),$$

en utilisant la fibration $\Lambda(\mathbf{I}; \mathbf{I}, I_0) \xrightarrow{\mathbf{p}_0^{\mathbf{I}}} \mathbf{I}$ de fibre $\Omega(\mathbf{I})$ et en remarquant que $\Lambda(\mathbf{I}; \mathbf{I}, I_0)$ est contractile.

Il résulte de ceci que, pour tout $\mathbf{I}$ de $\mathbf{C}^*$ et pour tout $n \geqslant 0$,

$$\pi_n(\mathbf{I}) \simeq \pi_n(\mathbf{I}^0).$$

Ainsi, à toute propriété faisant intervenir la fibre $\mathbf{u}_g^{-1}(I')$, correspondra une propriété duale faisant intervenir $\mathbf{u}_d^{-1}(I')$.

En outre, on a le résultat suivant.

PROPOSITION II.3. — *Toute petite catégorie filtrante à gauche ou à droite est homotopiquement triviale.*

En effet, si $\mathbf{I}$ est filtrante à droite, $\Omega(\mathbf{I})$, donc aussi $\Omega^n(\mathbf{I})$ $(n > 1)$, est filtrante à droite; comme $\mathbf{I}$ est connexe, $\pi_n(\mathbf{I}) = \star$ pour tout n. Si $\mathbf{I}$ est filtrante à gauche, $\mathbf{I}$ est filtrante à droite...

4° Pour tout morphisme $\mathbf{I} \xrightarrow{\mathbf{u}} \mathbf{I}'$ de $\mathbf{C}^*$, où $\mathbf{I}'$ est pointée en I'_0, construisons le diagramme cartésien

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{I} & \xrightarrow{\mathbf{u}} & \mathbf{I}' \\ \uparrow{\scriptstyle \mathbf{p}'} & & \uparrow{\scriptstyle \mathbf{p}_0^{\mathbf{I}'}}, \\ \mathbf{I}_h = \mathbf{I} \times_{\mathbf{I}'} \Lambda(\mathbf{I}') & \xrightarrow{\mathbf{u}'} & \Lambda(\mathbf{I}') \end{array}$$

Le morphisme $\mathbf{p}_0^{\mathbf{I}'}$ est fibré de fibre contractile; il en est donc de même de $\mathbf{p}'$. De plus, si on pose $\mathbf{u}_n = \mathbf{p}_0^{\mathbf{I}'} \circ \mathbf{u}'$, ce morphisme $\mathbf{I}_h \xrightarrow{\mathbf{u}_h} \mathbf{I}'$ est fibré de fibre $\mathbf{u}_h^{-1}(I'_0)$. On déduit donc de la proposition II.2 une nouvelle proposition.

PROPOSITION II.4. — *Pour tout morphisme* $\mathbf{I} \xrightarrow{\mathbf{u}} \mathbf{I}'$ *de* $\mathbf{C}^*$, *il existe une suite exacte :*

$$\to \pi_n(\mathbf{u}_h^{-1}(I'_0)) \to \pi_n(\mathbf{I}) \xrightarrow{\pi_n(\mathbf{u})} \pi_n(\mathbf{I}') \to \pi_{n-1}(\mathbf{u}_h^{-1}(I'_0)) \to \ldots \to \pi_0(\mathbf{I}) \xrightarrow{\pi_0(\mathbf{u})} \pi_0(\mathbf{I}').$$

Bien entendu, si $\mathbf{u}$ est fibré, $\pi_n(\mathbf{u}^{-1}(I'_0)) \xrightarrow{\sim} \pi_n(\mathbf{u}_h^{-1}(I'_0))$ pour tout $n \geqslant 0$.

PROPOSITION II.5. — *Pour tout morphisme fibré* $\mathbf{I} \xrightarrow{\mathbf{u}} \mathbf{I}'$ *de* $\mathbf{C}$ *et tout entier* n :

(*a*) *Pour tout* I' *de* $\mathbf{I}'$, $\pi_n(\mathbf{u}^{-1}(I')) \xrightarrow{\sim} \pi_n(\mathbf{u}_g^{-1}(I'))$.

(*b*) *Pour tout* $I' \xrightarrow{f'} J'$ *de* $\mathbf{I}'$, $\pi_n(\mathbf{u}_g^{-1}(I')) \xrightarrow{\sim} \pi_n(\mathbf{u}_g^{-1}(J'))$.

Preuve. — Construisons le diagramme cartésien

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{I} & \xrightarrow{\mathbf{u}} & \mathbf{I}' \\ \uparrow & & \uparrow \\ \mathbf{I} \times_{\mathbf{I}'} \mathbf{id}_g^{-1}(I') & \to & \mathbf{id}_g^{-1}(I') \end{array}$$

Comme $\mathbf{I} \times_{\mathbf{I}'} \mathbf{id}_g^{-1}(I') = \mathbf{u}_g^{-1}(I')$, le morphisme $\mathbf{u}_g^{-1}(I') \to \mathbf{id}_g^{-1}(I')$ est fibré de fibre $\mathbf{u}^{-1}(I')$. La catégorie $\mathbf{id}_g^{-1}(I')$ étant contractile,

$$\pi_n(\mathbf{u}^{-1}(I')) \xrightarrow{\sim} \pi_n(\mathbf{u}_g^{-1}(I')) \quad \text{pour tout } n \geqslant 0.$$

Notons $\pi_n(\mathbf{I}; I)$ le n-ième groupe d'homotopie de $\mathbf{I}$ pointé en I, et choisissons dans $\mathbf{u}^{-1}(I')$ et $\mathbf{u}^{-1}(J')$ des points I et J. On peut construire un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccccc} \pi_{n+1}(\mathbf{I}; I) & \to & \pi_{n+1}(\mathbf{I}'; I') & \to & \pi_n(\mathbf{u}_g^{-1}(I')) & \to & \pi_n(\mathbf{I}; I) & \to & \pi_n(\mathbf{I}'; I') \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \pi_{n+1}(\mathbf{I}; J) & \to & \pi_{n+1}(\mathbf{I}'; J') & \to & \pi_n(\mathbf{u}_g^{-1}(J')) & \to & \pi_n(\mathbf{I}; J) & \to & \pi_n(\mathbf{I}'; J') \end{array}$$

où les lignes horizontales sont exactes et où les flèches verticales, sauf *a priori* celle du milieu, sont des isomorphismes. Il suffit alors d'appliquer le lemme des 5.

5° Venons-en aux exemples de morphismes fibrés. D'après [5], (S. G. A., exposé VI.6), un morphisme $\mathbf{I} \xrightarrow{\mathbf{u}} \mathbf{I}'$ de $\mathbf{C}$ est un *morphisme précofibré* (*de Grothendieck*) si, pour tout I' de $\mathbf{I}'$, le foncteur

$$\mathbf{u}^{-1}(I') \to \mathbf{u}_g^{-1}(I')$$

possède un adjoint à gauche.

Pour tout morphisme $J' \xrightarrow{f'} I'$ de $\mathbf{I}'$, on définit alors

$$\mathbf{u}^{-1}(J') \xrightarrow{f'^*} \mathbf{u}^{-1}(I')$$

comme le composé

$$\mathbf{u}^{-1}(J') \to \mathbf{u}_g^{-1}(J') \to \mathbf{u}_g^{-1}(I') \to \mathbf{u}^{-1}(I').$$

Le morphisme $\mathbf{I} \xrightarrow{\mathbf{u}} \mathbf{I}'$ de $\mathbf{C}$ est un *morphisme cofibré de Grothendieck* si :

(*a*) $\mathbf{u}$ est précofibré.

(*b*) Pour tout $K' \xrightarrow{g'} J' \xrightarrow{f'} I'$ de $\mathbf{I}'$, $(\mathbf{f}' \circ \mathbf{g}')^* \xrightarrow{\sim} \mathbf{f}'^* \circ \mathbf{g}'^*$.

On a une notion duale évidente de morphisme fibré de Grothendieck.

On vérifie aisément (car ($\mathbf{u}$ fibré de Grothendieck) $\Rightarrow$ ($K \Lambda (\mathbf{u})$ fibré de Grothendieck)...) la proposition suivante.

PROPOSITION II.6. — *Un morphisme fibré et cofibré de Grothendieck est un morphisme fibré.*

6° Soient $\mathbf{I}$ et $\mathbf{F}$ deux petites catégories. On dit que $\mathbf{I}$ *opère sur* $\mathbf{F}$ *par automorphismes* s'il existe un homomorphisme de monoïdes

$$\mathrm{Fl}(\mathbf{I}) \xrightarrow{h} \mathrm{Aut}(\mathbf{F}).$$

On définit alors le *produit semi-direct* $\mathbf{I} \triangleright \mathbf{F}$ de $\mathbf{I}$ par $\mathbf{F}$ de la façon suivante : les objets de $\mathbf{I} \triangleright \mathbf{F}$ sont ceux de $\mathbf{I} \times \mathbf{F}$, les morphismes de (I, F) dans (J, G) sont les couples $(I \xrightarrow{u} J,\ F \xrightarrow{g} h(u)^{-1}(G))$ de morphismes de $\mathbf{I} \triangleright \mathbf{F}$ qui se composent par la formule

$$(v, h) \circ (u, g) = (v \circ u,\ h(u)^{-1}(k) \circ g).$$

La projection naturelle $\mathbf{I} \triangleright \mathbf{F} \xrightarrow{\mathbf{p}} \mathbf{I}$ de fibre $\mathbf{F}$ est un morphisme fibré et cofibré de Grothendieck, donc un morphisme fibré.

III. — Le groupe $\pi_1(\mathbf{I})$

1° Pour tout ensemble E, on désigne par $\mathbf{E}^d$ la catégorie discrète associée à E ($\mathrm{Ob}(\mathbf{E}^d) = E$, $\mathrm{Fl}(\mathbf{E}^d) = \{$ identités $\}$).

Si $\mathbf{I}$ est une petite catégorie, un *revêtement* de $\mathbf{I}$ est la donnée d'un ensemble E et d'un homomorphisme de monoïdes

$$\mathrm{Fl}(\mathbf{I}) \xrightarrow{h} \mathrm{Bij}(E) = \mathrm{Aut}(\mathbf{E}^d).$$

Cette donnée, notée (E, h), définit un fibré $\mathbf{I} \triangleright \mathbf{E}^d \xrightarrow{\mathbf{p}} \mathbf{I}$ de fibre $\mathbf{E}^d$.

Un morphisme d'un revêtement (E, h) dans un autre (E', h') est un morphisme de $\mathbf{C} : \mathbf{I} \triangleright \mathbf{E}^d \xrightarrow{\mathbf{u}} \mathbf{I} \triangleright \mathbf{E}'^d$ tel que

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{I} \triangleright \mathbf{E}^d & \xrightarrow{u} & \mathbf{I} \triangleright \mathbf{E}'^d \\ & {\scriptstyle \mathbf{p}} \searrow \quad \swarrow {\scriptstyle \mathbf{p}'} & \\ & \mathbf{I} & \end{array}$$

soit commutatif.

Un *système de coefficient locaux sur* $\mathbf{I}$ est un foncteur covariant :

$$\mathbf{I} \xrightarrow{h} \mathbf{Ens}$$

tel que $\mathbf{h}(u)$ soit une bijection pour tout u de Fl $(\mathbf{I})$.

On note $\mathbf{R}_\mathbf{I}$ et $\mathbf{L}_\mathbf{I}$ les catégories des revêtements de $\mathbf{I}$ et des systèmes de coefficients locaux sur $\mathbf{I}$.

PROPOSITION III.1. — *Les catégories* $\mathbf{R}_\mathbf{I}$ *et* $\mathbf{L}_\mathbf{I}$ *sont équivalentes pour toute petite catégorie connexe* $\mathbf{I}$.

Preuve. — Tout revêtement (E, h) de $\mathbf{I}$ définit un système de coefficients locaux sur $\mathbf{I}$ par $\mathbf{h}(\mathbf{I}) = E$ et $\mathbf{h}(u) = h(u)$; d'où un foncteur

$$\mathbf{R}_\mathbf{I} \xrightarrow{\mathbf{u}} \mathbf{L}_\mathbf{I}.$$

Inversement, on choisit un point I_0 de $\mathbf{I}$ et, pour tout objet I de $\mathbf{I}$, un chemin e_I de I_0 à I; tout système $\mathbf{h}$ de coefficients locaux sur $\mathbf{I}$ se prolonge à un système $\mathbf{h}'$ de coefficients locaux sur $\mathbf{I}$ (Fl $(\mathbf{I})^{-1}$), et définit un revêtement $\mathbf{v}(\mathbf{h})$ de $\mathbf{I}$ par $\mathbf{v}(\mathbf{h}) = (\mathbf{h}(I_0), h)$, où $h(I \xrightarrow{u} J) = \mathbf{h}'(e_I\, I \xrightarrow{u} J \xleftarrow{\mathrm{id}} J\, e_J^{-1})$; d'où un second foncteur

$$\mathbf{L}_\mathbf{I} \xrightarrow{\mathbf{v}} \mathbf{R}_\mathbf{I}.$$

Les vérifications habituelles se font sans difficultés.

2° On considère une petite catégorie connexe $\mathbf{I}$ pointée en I_0.

Un *revêtement galoisien* de $\mathbf{I}$ est la donnée d'un groupe G et d'un homomorphisme de monoïdes

$$\mathrm{Fl}(\mathbf{I}) \xrightarrow{h} G,$$

tel que $\mathbf{I} \triangleright \mathbf{G}^d$ soit connexe (on fait opérer $\mathbf{I}$ sur $\mathbf{G}^d$ par translations à droite à l'aide de h).

On pointe $\mathbf{I} \triangleright \mathbf{G}^d$ en (I_0, id_G).

A ce revêtement galoisien correspond, par la suite exacte d'un morphisme fibré, une suite exacte de groupes

$$1 \to \pi_1(\mathbf{I} \triangleright \mathbf{G}^d) \to \pi_1(\mathbf{I}) \xrightarrow{\partial_0} G \to 1,$$

où

$$\partial_0[I_0 \xrightarrow{i_0} I_1 \xrightarrow{j_1} \bar{I}_1 \to \ldots \to I_m \xleftarrow{j_m} I_0] = h(i_0)h(j_1)^{-1} \ldots h(j_m)^{-1}$$

(on note $[\bar{I}]$ la classe dans $\pi_1(\mathbf{I})$ du lacet $\bar{I}$).

PROPOSITION III.2. — *Soit* $\mathbf{I}$ *une petite catégorie connexe :*

(*a*) *Pour tout revêtement galoisien* (G, h) *de* $\mathbf{I}$, *et tout couple de points* (I_0, x_1), (I_0, x_2) *de* $\mathbf{I} \triangleright \mathbf{G}^d$, *il existe un unique endomorphisme* $\mathbf{v}$ *de* (G, h) *tel que* $\mathbf{v}(I_0, x_1) = (I_0, x_2)$.

(*b*) *Pour tout couple* (G, h), (G', h') *de revêtements galoisiens de* $\mathbf{I}$ *et tout couple* $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)$ *de morphismes de* (G, h) *dans* (G', h'), *il existe un unique endomorphisme* $\mathbf{v}$ *de* (G', h') *tel que* $\mathbf{v} \circ \mathbf{u}_1 = \mathbf{u}_2$,

Preuve. — Si $\mathbf{u}$ est un endomorphisme de (G, h), pour tout morphisme $(I, x) \xrightarrow{u} (J, y = xh(u))$ de $\mathbf{I} \triangleright \mathbf{G}^d$,

$$(\mathbf{u}(I, x) = (I, x)) \quad \Leftrightarrow \quad (\mathbf{u}(J, y) = (J, y)).$$

Il en résulte que, si $\mathbf{u}(I_0, x_0) = (I_0, x_0)$ pour un certain point (I_0, x_0) de $\mathbf{I} \triangleright \mathbf{G}^d$, alors $\mathbf{u} = \mathbf{id}$ ($\mathbf{I} \triangleright \mathbf{G}^d$ étant connexe). Sous l'hypothèse du (*a*), on construit l'endomorphisme $\mathbf{v}$ par

$$\mathbf{v}(I, y) = (I, x_2 x_1^{-1} y)).$$

La remarque faite ci-dessus montre que $\mathbf{v}$ est unique. Sous l'hypothèse (*b*), on pose

$$\mathbf{u}_1(I_0, \mathrm{id}) = (I_0, x_1), \qquad \mathbf{u}_2(I_0, \mathrm{id}) = (I_0, x_2),$$

et le morphisme $\mathbf{v}$ qu'on vient de définir convient.

Nous dirons que deux revêtements galoisiens (G, h) et (G, h') son *équivalents* s'il existe une application

$$\mathrm{Ob}(\mathbf{I}) \xrightarrow{s} G$$

telle que, pour tout $I \xrightarrow{u} J$ de $\mathbf{I}$,

$$h(u)\, s(J) = s(I)\, h'(u).$$

Les définitions qui précédent se justifient par la proposition suivante.

PROPOSITION III.3. — *Si* $\mathbf{I}$ *est une petite catégorie connexe pointée, les sous-groupes normaux de* $\pi_1(\mathbf{I})$ *sont en correspondance biunivoque avec les classes d'équivalence des revêtements galoisiens de* $\mathbf{I}$.

Preuve. — $\mathbf{I}$ étant pointée en I_0, on choisit, pour tout I de $\mathbf{I}$, un chemin e_I de I_0 à I. A tout sous-groupe normal G' de $\pi_1(\mathbf{I})$ on fait correspondre un revêtement galoisien (G, h) de $\mathbf{I}$ de la façon suivante : G est le quotient de $\pi_1(\mathbf{I})$ par G', h est défini par

$$h(I \xrightarrow{u} J) = \text{image de } \left[e_I\, I \xrightarrow{u} J \xleftarrow{\mathrm{id}} J\, e_J^{-1}\right] \text{ dans } G.$$

Il en résulte une application

$$G' \mapsto v(G') = (G, h).$$

On a une seconde application évidente

$$(G, h) \mapsto v'(G, h) = \pi_1(\mathbf{I} \triangleright \mathbf{G}^a).$$

Il est clair que $v' \circ v(G') = G'$. D'autre part, $v \circ v'(\mathrm{G}, h) = (G, h')$, où $h'(I \xrightarrow{u} J) = h(e_I)\, h(\mathrm{u})\, h(e_J)^{-1}$, donc (G, h) et (G, h') sont équivalents.

Au sous-groupe $\{1\}$ de $\pi_1(\mathbf{I})$ correspond le revêtement galoisien $(\pi_1(\mathbf{I}), \tilde{h})$, où

$$\mathrm{Fl}(\mathbf{I}) \xrightarrow{\tilde{h}} \pi_1(\mathbf{I})$$

est défini par

$$\tilde{h}(I \xrightarrow{u} J) = \left[e_I\, I \xrightarrow{u} J \xleftarrow{\mathrm{id}} J\, e_J^{-1}\right].$$

$(\pi_1(\mathbf{I}), \tilde{h})$ est le *revêtement universel de* $\mathbf{I}$ *en* I_0 relativement à la famille de chemins (e_I).

On pose :

$$\tilde{\mathbf{I}} = \mathbf{I} \triangleright \overline{\pi_1(\mathbf{I})^d}.$$

$\tilde{\mathbf{I}}$ est connexe et simplement connexe, et $\pi_n(\mathbf{I}) \xrightarrow{\sim} \pi_n(\mathbf{I})$ pour $n > 1$.

PROPOSITION III.4. — *Si* $\mathbf{I}$ *est une petite catégorie connexe pointée en* I_0, *pour tout revêtement galoisien* (G, h) *de* $\mathbf{I}$ *et tout couple* $(\tilde{x}, x)$ *d'éléments de* $\pi_1(\mathbf{I}) \times G$, *il existe un unique morphisme* $\mathbf{u}$ *de* $(\pi_1(\mathbf{I}), \tilde{h})$ *dans* (G, h) *tel que* $\mathbf{u}(I_0, \tilde{x}) = (I_0, x)$.

Il suffit en effet de poser

$$\cdot\ \mathbf{u}(I, y) = (I, x\,\partial_0(\tilde{x}^{-1} y)\, h(e_I))$$

pour tout (I, y) de $\tilde{\mathbf{I}}$, et d'utiliser la proposition III.2.

3° Soit $\mathbf{I} \xrightarrow{\mathbf{u}} \mathbf{I}'$ un morphisme dans $\mathbf{C}$ de catégories connexes. Si (G, h) et (G', h') sont des revêtements galoisiens de $\mathbf{I}$ et $\mathbf{I}'$, un morphisme de (G, h) dans (G', h') est un morphisme de $\mathbf{C}$:

$$\mathbf{I} \triangleright \mathbf{G}^d \xrightarrow{\mathbf{v}} \mathbf{I}' \triangleright \mathbf{G}'^d$$

tel que le diagramme suivant soit commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{I} \triangleright \mathbf{G}^d & \xrightarrow{\mathbf{v}} & \mathbf{I}' \triangleright \mathbf{G}'^d \\ \downarrow{\scriptstyle \mathbf{p}} & & \downarrow{\scriptstyle \mathbf{p}'} \\ \mathbf{I} & \xrightarrow{\mathbf{u}} & \mathbf{I}' \end{array}$$

PROPOSITION III.5. — *Soit* $\mathbf{I} \xrightarrow{\mathbf{u}} \mathbf{I}'$ *un morphisme dans* $\mathbf{C}^*$ *de petites catégories connexes pointées en* I_0 *et* I_0'.

(*a*) *Pour tout couple* (G, h), (G', h') *de revêtements galoisiens de* $\mathbf{I}$ *et* $\mathbf{I}'$ *et tout couple* $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ *de morphismes de* (G, h) *dans* (G', h') *tel que* $\mathbf{v}_1(I_0, x_0) = \mathbf{v}_2(I_0, x_0)$ *pour un élément* x_0 *quelconque de* G, *alors* $\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_2$.

(*b*) *Pour tout couple* $(\pi_1(\mathbf{I}), \tilde{h})$, $(\pi_1(\mathbf{I}'), \tilde{h}')$ *de revêtements universels de* $\mathbf{I}$ *et* $\mathbf{I}'$, *il existe un unique morphisme* $\tilde{\mathbf{u}}$ *de* $(\pi_1(\mathbf{I}), \tilde{h})$ *dans* $(\pi_1(\mathbf{I}'), \tilde{h}')$ *tel que* $\tilde{\mathbf{u}}(I_0, \mathrm{id}) = (I_0', \mathrm{id})$.

Preuve. — Pour tout morphisme $(I, x) \xrightarrow{u} (J, y = xh(u))$ de $\mathbf{I} \triangleright \mathbf{G}^d$,

$$(\mathbf{v}_1(I, x) = \mathbf{v}_2(I, x)) \Leftrightarrow (\mathbf{v}_1(J, y) = \mathbf{v}_2(J, y)).$$

Puisque $\mathbf{I} \triangleright \mathbf{G}^d$ est connexe, l'assertion (*a*) résulte de cette remarque. Pour démontrer (*b*), il suffit de poser, pour tout (I, x) de $\mathbf{I} \triangleright \mathbf{G}^d$:

$$\tilde{\mathbf{u}}(I, x) = (\mathbf{u}(I), \pi_1(\mathbf{u})(x)[\mathbf{u}(e_I) f_{\mathbf{u}(I)}^{-1}]),$$

où (e_I) et $(f_{I'})$ déterminent h et h', et d'utiliser (*a*).

On obtient ainsi un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \tilde{\mathbf{I}} & \xrightarrow{\tilde{\mathbf{u}}} & \tilde{\mathbf{I}}' \\ \downarrow{\scriptstyle \tilde{\mathbf{p}}} & & \downarrow{\scriptstyle \tilde{\mathbf{p}}'} \\ \mathbf{I} & \xrightarrow{\mathbf{u}} & \mathbf{I}' \end{array}$$

et on va calculer, du moins lorsque $\pi_1(\mathbf{u})$ est surjectif, la fibre à gauche $\tilde{\mathbf{u}}_g^{-1}(I', x')$ pour tout (I', x') de $\tilde{\mathbf{I}}'$ lorsque $\mathbf{u}_g^{-1}(I')$ est non vide.

Pour tout objet $(I, \mathbf{u}(I) \xrightarrow{s'} I')$ de $\mathbf{u}_g^{-1}(I')$, on choisit un élément $x_{(I, s')}$ de $\pi_1(\mathbf{I})$ tel que

$$\pi_1(\mathbf{u})(x_{(I,s')}) = x'\left[f_I, I' \xrightarrow{\mathrm{id}} I' \xleftarrow{s'} \mathbf{u}(I)\,\mathbf{u}(e_I^{-1})\right],$$

et on définit un homomorphisme de monoïdes

$$Fl(\mathbf{u}_g^{-1}(I')) \xrightarrow{h_{I'}} \ker \pi_1(\mathbf{u})$$

par

$$h_{I'}((I, s') \xrightarrow{f} (J, t')) = x_{(I,s')}\left[e_I\, I \xrightarrow{f} J \xleftarrow{\mathrm{id}} J\, e_J^{-1}\right] x_{(J,t')}^{-1}.$$

PROPOSITION III.6. — *Pour tout morphisme* $\mathbf{I} \xrightarrow{\mathbf{u}} \mathbf{I}'$ *dans* $\mathbf{C}^*$ *de catégories connexes tel que* $\pi_1(\mathbf{u})$ *soit surjectif, et pour tout objet* (I', x') *de* $\tilde{\mathbf{I}}'$ *tel que* $\mathbf{u}_g^{-1}(I')$ *soit non vide*

$$\tilde{\mathbf{u}}_g^{-1}(I', x') \tilde{\to} \mathbf{u}_g^{-1}(I') \rhd \overline{\ker \pi_1(\mathbf{u})}^d.$$

Preuve. — Un objet de $\tilde{\mathbf{u}}_g^{-1}(I', x')$ est un triplet (I, x, s') où I appartient à $\mathbf{I}$, x appartient à $\pi_1(\mathbf{I})$, et $\mathbf{u}(I) \xrightarrow{s'} I'$ est un morphisme de I' tels que

$$x' = \pi_1(\mathbf{u})(x)\left[\mathbf{u}(e_I)\,\mathbf{u}(I \xrightarrow{s'} I' \xleftarrow{\mathrm{id}} I' f_{I'}^{-1}\right].$$

On définit un morphisme

$$\tilde{\mathbf{u}}_g^{-1}(I', x') \xrightarrow{\mathbf{u}_{(I',x')}} \mathbf{u}_g^{-1}(I') \rhd \overline{\ker \pi_1(\mathbf{u})}^d$$

par

$$\mathbf{u}_{(I',x')}(I, x, s') = ((I, s'), x x_{(I,s')}^{-1}),$$

dont il est immédiat qu'il possède un inverse.

COROLLAIRE III.7. — *Pour tout morphisme* $\mathbf{I} \xrightarrow{\mathbf{u}} \mathbf{I}'$ *dans* $\mathbf{C}^*$ *de petites catégories connexes tel que* $\pi_1(\mathbf{u})$ *soit un isomorphisme, et pour tout* (I', x') *de* $\tilde{\mathbf{I}}'$ *tel que* $\mathbf{u}_g^{-1}(I')$ *soit non vide,*

$$\tilde{\mathbf{u}}_g^{-1}(I', x') \xrightarrow{\sim} \mathbf{u}_g^{-1}(I').$$

IV. — La cohomologie d'une petite catégorie

Pour tout objet $\mathbf{I}$ de $\mathbf{C}$, on désigne par $\hat{\mathbf{I}}$ la catégorie des foncteurs contravariants, ou préfaisceaux, de $\mathbf{I}$ dans **Ens** (ou **Gr**, ou **Ab**).

A tout morphisme $\mathbf{I} \xrightarrow{\mathbf{u}} \mathbf{I}'$ de $\mathbf{C}$, on associe des foncteurs

$$\hat{\mathbf{I}}' \xrightarrow{\mathbf{u}^*} \hat{\mathbf{I}},$$

$$\hat{\mathbf{I}} \xrightarrow{\mathbf{u}_*} \hat{\mathbf{I}}',$$

définis par

$$\mathbf{u}^*(F') = F' \circ \mathbf{u},$$

$$\mathbf{u}_*(F)(I') = \varprojlim F \,|\, \mathbf{u}_g^{-1}(I').$$

Pour tout couple (F, F') de préfaisceaux sur $\mathbf{I}$ et $\mathbf{I}'$:

$$\mathrm{Hom}_{\hat{\mathbf{I}}'}(F', \mathbf{u}_*(F)) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\hat{\mathbf{I}}}(\mathbf{u}^*(F'), F),$$

autrement dit, $\mathbf{u}^*$ est adjoint à gauche de $\mathbf{u}_*$.

1° Pour tout $\mathbf{I}$ de $\mathbf{C}$ et tout préfaisceau d'ensembles F sur $\mathbf{I}$, on pose

$$H^0(\mathbf{I}; F) = \varprojlim F.$$

Donc $H^0(\mathbf{I}; F) = \mathrm{Hom}_{\hat{\mathbf{I}}}(\star, F)$, où $\star$ désigne le préfaisceau ponctuel sur $\mathbf{I}$.

Tout morphisme $\mathbf{I} \xrightarrow{\mathbf{u}} \mathbf{I}'$ de $\mathbf{C}$ détermine donc une bijection

$$\mathrm{H}^0(\mathbf{I}'; \mathbf{u}_*(F)) \to \mathrm{H}^0(\mathbf{I}; F)$$

pour tout préfaisceau F sur $\mathbf{I}$.

Comme $H^0(\mathbf{I}; E) \simeq \mathrm{Hom}(\pi_0(\mathbf{I}), E)$ pour tout ensemble E, les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

(*a*) $H^0(\mathbf{I}'; E) \to H^0(\mathbf{I}; E)$ est une bijection pour tout ensemble E;

(*b*) $\pi_0(\mathbf{I}) \to \pi_0(\mathbf{I}')$ est bijectif.

2° Lorsque F est un préfaisceau de groupes sur I, $H^0(\mathbf{I}; F)$ est un groupe, et on peut définir l'ensemble pointé $H^1(\mathbf{I}; F)$ de la façon suivante.

On pose

$$C^0(\mathbf{I}; F) = \prod_{I \in \mathrm{Ob}(\mathbf{I})} F(I),$$
$$C^1(\mathbf{I}; F) = \prod_{I \xrightarrow{u} J \in \mathrm{Fl}(\mathbf{I})} F(I).$$

$Z^1(\mathbf{I}; F)$ désigne le sous-ensemble de $C^1(\mathbf{I}; F)$ formé des éléments (x_u) tels que $x_{v \circ u} = x_u F(u)(x_v)$. pour tout $I \xrightarrow{u} J \xrightarrow{v} K$ de $\mathbf{I}$.

$H^1(\mathbf{I}; F)$ est le quotient de $Z^1(\mathbf{I}; F)$ par la relation d'équivalence suivante :

$$((x_u) \sim (y_u)) \Leftrightarrow (\text{Il existe } (s_I) \text{ appartenant à } C^0(\mathbf{I}; F) \text{ tel que } x_u = s_I^{-1} y_u F(u)(s_J) \text{ pour tout } I \xrightarrow{u} J \text{ de } \mathrm{Fl}(\mathbf{I})).$$

Interprétons $H^1(\mathbf{I}; G)$ lorsque $\mathbf{I}$ est une petite catégorie connexe pointée et G est un groupe. Pour cela, on choisit pour tout I de $\mathbf{I}$ un chemin e_I de I_0 à I, et on définit une application

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{Gr}}(\pi_1(\mathbf{I}), G) \xrightarrow{\varphi} Z^1(\mathbf{I}; G),$$

par

$$[\varphi(f)]_{I \xrightarrow{u} J} = f[e_I\, I \xrightarrow{u} J \xleftarrow{\mathrm{id}} J\, e_J^{-1}].$$

G opère sur $\mathrm{Hom}(\pi_1(\mathbf{I}), G)$ par $(gf)(x) = g^{-1} f(x)\, g$, et on désigne par $\mathrm{Hom}(\pi_1(\mathbf{I}), G)_G$ le quotient de $\mathrm{Hom}(\pi_1(\mathbf{I}), G)$ par G.

L'application φ détermine par passage aux quotients une application

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{Gr}}(\pi_1(\mathbf{I}), G)_G \xrightarrow{\theta} H^1(\mathbf{I}; G).$$

D'autre part, l'application

$$Z^1(\mathbf{I}; G) \xrightarrow{\varphi'} \mathrm{Hom}_{\mathbf{Gr}}(\pi_1(\mathbf{I}), G).$$

définie par

$$\varphi'((x_u))[I_0 \xrightarrow{i_0} I_1 \xleftarrow{j_1} \bar{I}_1 \to \ldots \to I_m \xleftarrow{j_m} I_0] = x_{i_0} x_{j_1}^{-1} \ldots x_{j_m}^{-1}$$

passe également aux quotients, et détermine une application

$$H^1(\mathbf{I}; G) \xrightarrow{\theta'} \mathrm{Hom}_{\mathbf{Gr}}(\pi_1(\mathbf{I}), G)_G$$

inverse de θ. On a donc montré le résultat suivant.

PROPOSITION IV.1. — *Pour toute petite catégorie connexe pointée et pour tout groupe G,*

$$H^1(\mathbf{I};\ G) \tilde{\to} \mathrm{Hom}_{\mathbf{Gr}}(\pi_1(\mathbf{I}),\ G)_G.$$

On en déduit une proposition nouvelle.

PROPOSITION IV.2. — *Pour tout morphisme* $\mathbf{I} \xrightarrow{\mathbf{u}} \mathbf{I}'$ *de petites catégories connexes pointées, les deux propriétés suivantes sont équivalentes :*

(*a*) $H^1(\mathbf{I}',\ G) \to H^1(\mathbf{I};\ G)$ *est une bijection pour tout groupe G.*

(*b*) $\pi_1(\mathbf{I}) \to \pi_1(\mathbf{I}')$ *est un isomorphisme.*

Preuve. — Il suffit de montrer que tout homomorphisme de groupes $H \xrightarrow{f} K$, tel que

$$\mathrm{Hom}(K,\ G)_G \to \mathrm{Hom}(H,\ G)_G$$

soit une bijection pour tout groupe G, est un isomorphisme.

Or, $\mathrm{Hom}(K,\ G) \to \mathrm{Hom}(H,\ G)$ est surjectif car, si $H \xrightarrow{u} G$ est un homomorphisme, il existe un homomorphisme $K \xrightarrow{v} G$ et un élément g de G tel que $v \circ f(x) = g^{-1}\, u(x)\, g$ pour tout x de H. L'application $K \xrightarrow{w} G$, définie par $w(x) = g\, v(x)\, g^{-1}$, est un homomorphisme dont l'image est u.

Faisant $G = H$, on peut donc trouver un homomorphisme $K \xrightarrow{h} H$ tel que $h \circ f = \mathrm{id}$. En particulier, f est injectif, et le composé

$$\mathrm{Hom}(H,\ G)_G \to \mathrm{Hom}(K,\ G)_G \to \mathrm{Hom}(H,\ G)_G$$

est l'identité; $\mathrm{Hom}(H,\ G)_G \to \mathrm{Hom}(K,\ G)_G$ est donc une bijection, et par suite h est injectif. Il en résulte que f est un isomorphisme.

Pour tout morphisme $\mathbf{I} \xrightarrow{\mathbf{u}} \mathbf{I}'$ de $\mathbf{C}$ et tout préfaisceau de groupes F sur $\mathbf{I}$, l'application

$$Z^1(\mathbf{I}';\ \mathbf{u}_*(F)) \xrightarrow{i'} Z^1(\mathbf{I};\ F),$$
$$\left[i'\left[(x'_{u'})\right]\right]_{I \xrightarrow{u} J} = \left[x'_{\mathbf{u}(u)}\right]_{(I,\ \mathbf{u}(I) \xrightarrow{\mathrm{id}} \mathbf{u}(I))}$$

définit une application

$$H^1(\mathbf{I}';\ \mathbf{u}_*(F)) \xrightarrow{i} H^1(\mathbf{I};\ F).$$

On construit, d'autre part, une application

$$Z^1(\mathbf{I};\ F) \xrightarrow{j'} \prod_{I' \in \mathbf{I}'} Z^1(\mathbf{u}_g^{-1}(I');\ F))$$

par

$$[j'[(x_u)]]_{I'} = (x_u)_{(I,s')\xrightarrow{u}(J,t')}$$

et par suite une application

$$H^1(\mathbf{I}; F) \xrightarrow{j} H^0(\mathbf{I}'; H^1(\mathbf{u}_g^{-1}(I'); F)).$$

PROPOSITION IV.3. — *Pour tout morphisme* $\mathbf{I} \xrightarrow{\mathbf{u}} \mathbf{I}'$ *de* $\mathbf{C}$ *et tout préfaisceau de groupes* F *sur* $\mathbf{I}$, *la suite d'ensembles pointés*

$$\star \to H^1(\mathbf{I}'; \mathbf{u}_*(F)) \xrightarrow{i} H^1(\mathbf{I}; F) \xrightarrow{j} H^0(\mathbf{I}'; H^1(\mathbf{u}_g^{-1}(I'); F))$$

est exacte.

La démonstration consiste en des vérifications assez longues, mais faciles.

Lorsque A est un groupe, tout groupe G sur lequel A opère à gauche définit un préfaisceau de groupes sur la catégorie $\mathbf{A}$ associée à A. Si on note G_A ce préfaisceau

$$H^i(\mathbf{A}; G_A) = H^i(A; G) \qquad \text{pour} \quad i = 0,1.$$

3° Lorsque F est un préfaisceau de groupes abéliens sur une petite catégorie $\mathbf{I}$, on désigne par $H^*(\mathbf{I}; F)$ les foncteurs dérivés à droite du foncteur $F \mapsto \varprojlim F$.

Pour calculer ces groupes, on procède comme ceci : on construit canoniquement une résolution de F :

$$0 \to F \xrightarrow{i} F^0 \xrightarrow{d^0} F^1 \xrightarrow{d^1} F^2 \to \ldots,$$

où

(*a*) F^p est le préfaisceau sur $\mathbf{I}$ défini par

$$F^p(I) = \prod_{I_0 \to I_1 \to \ldots \to I_p \to I \in N_{p+1}(\mathbf{I})} F(I_0);$$

(*b*) $[[d^p(I)](x)]_{u \in N_{p+2}(\mathbf{I})} = \sum_{i=0}^{p+2} (-1)^i x_{d_i(u)}$.

Il est clair que

$$\varinjlim F^p = \prod_{I_0 \to I_1 \to \ldots \to I_p} F(I_0).$$

On en déduit donc :

(*a*) Pour tout préfaisceau F de groupes abéliens sur $\mathbf{I}$ et pour tout entier $n \geqslant 0$,

$$H^n(\mathbf{I}; F) = H^n(N_*(\mathbf{I}); F).$$

(*b*) Pour tout groupe A, tout A-module à gauche M, et tout entier $n \geqslant 0$,

$$H^n(\mathbf{A}; M_A) = H^n(A; M),$$

où M_A désigne le préfaisceau sur $\mathbf{A}$ défini par M.

Le résultat suivant se démontre par une méthode classique.

PROPOSITION IV.4. — *Soient* $\mathbf{I}$ *une petite catégorie et* F *un préfaisceau de groupes abéliens sur* $\mathbf{I}$:

(*a*) *Pour tout morphisme* $\mathbf{I} \xrightarrow{\mathbf{u}} \mathbf{I}'$, *il existe une suite spectrale*

$$(E_2^{p,q} = H^p(\mathbf{I}'; H^q(\mathbf{u}_g^{-1}(\ \ ); F)) \Rightarrow (H^*(\mathbf{I}; F)).$$

(*b*) *Si* $\mathbf{I}$ *est connexe et pointée, il existe une suite spectrale*

$$(E_2^{p,q} = H^p(\pi_1(\mathbf{I}); H^q(\tilde{\mathbf{I}}; \tilde{\mathbf{p}}^*(F)))) \Rightarrow (H^*(\mathbf{I}; F)).$$

Lorsque $\mathbf{I}$ est connexe et pointée, pour tout préfaisceau F de groupes abéliens sur $\tilde{\mathbf{I}}$ et tout entier n,

$$H^n(\mathbf{I}; \tilde{\mathbf{p}}_*(F)) \tilde{\to} H^n(\tilde{\mathbf{I}}; F).$$

Un calcul facile montre que

$$[\tilde{\mathbf{p}}_*(F)](I) = \mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}}(\mathbf{Z}(\pi_1(\mathbf{I})); F(I))$$

pour tout I de $\mathbf{I}$.

PROPOSITION IV.5. — *Soit* $\mathbf{I} \xrightarrow{\mathbf{u}} \mathbf{I}'$ *un morphisme de petites catégories connexes pointées tel que* $\pi_1(\mathbf{u})$ *soit un isomorphisme. Les deux propriétés suivantes sont équivalentes :*

(*a*) *Pour tout système local de groupes abéliens* F' *sur* $\mathbf{I}'$ *et tout* $n \geqslant 0$,

$$H^n(\mathbf{I}'; F') \to H^n(\mathbf{I}; \mathbf{u}^*(F'))$$

est un isomorphisme.

(*b*) *Pour tout* $n \geqslant 0$,

$$\pi_n(\mathbf{I}) \to \pi_n(\mathbf{I}')$$

est un isomorphisme.

Preuve. — Avec les notations du paragraphe III, pour tout I de $\mathbf{I}$, le morphisme

$$\tilde{\mathbf{p}}_g^{-1}(I) \to \tilde{\mathbf{p}}_g'^{-1}(\mathbf{u}(I))$$

induit, pour tout préfaisceau F' sur $\tilde{\mathbf{I}}'$, un isomorphisme de groupes

$$\varinjlim F' \,|\, \tilde{\mathbf{p}}_g'^{-1}(\mathbf{u}(I)) \xrightarrow{\sim} \varinjlim \tilde{\mathbf{u}}^*(F') \,|\, \tilde{\mathbf{p}}_g^{-1}(I),$$

d'où un isomorphisme

$$\mathbf{u}^* \circ \tilde{\mathbf{p}}'_* \xrightarrow{\sim} \tilde{\mathbf{p}}_* \circ \tilde{\mathbf{u}}^*.$$

On en déduit, pour tout $n \geqslant 0$, un diagramme commutatif dont les flèches horizontales sont des isomorphismes

$$\begin{array}{ccc} H^n(\mathbf{I};\, \mathbf{u}^* \circ \tilde{\mathbf{p}}'_*(F')) & \to & H^n(\tilde{\mathbf{I}};\, \tilde{\mathbf{u}}^*(F')) \\ \uparrow & & \uparrow \\ H^n(\mathbf{I}';\, \tilde{\mathbf{p}}'_*(F')) & \longrightarrow & H^n(\tilde{\mathbf{I}}';\, F') \end{array}$$

Si la propriété (*a*) est vérifiée,

$$H^n(\tilde{\mathbf{I}}';\, \mathbf{Z}) \to H^n(\tilde{\mathbf{I}};\, \mathbf{Z})$$

est un isomorphisme pour tout $n \geqslant 0$, donc

$$\pi_n(\mathbf{I}) \to \pi_n(\mathbf{I}')$$

est un isomorphisme.

Réciproquement, si (*b*) est vrai, pour tout système local F' sur $\mathbf{I}'$,

$$H^n(\tilde{\mathbf{I}}';\, \tilde{\mathbf{p}}'^*(F')) \to H^n(\tilde{\mathbf{I}};\, \tilde{\mathbf{u}}^* \circ \tilde{\mathbf{p}}'^*(F'))$$

est un isomorphisme pour tout $n \geqslant 0$.

La proposition IV.4 (*b*) entraîne que

$$H^n(\mathbf{I}';\, F') \to H^n(\mathbf{I};\, \mathbf{u}^*(F'))$$

est un isomorphisme pour tout $n \geqslant 0$.

En joignant la proposition IV.2 à celle-ci, on obtient ainsi une autre formulation commode et plus générale du théorème de Whitehead.

V. — Les théorèmes A et B de Quillen

Dans ce paragraphe, nous dirons qu'un morphisme $\mathbf{I} \xrightarrow{\mathbf{u}} \mathbf{I}'$ de $\mathbf{C}^*$ est une *équivalence d'homotopie* si $\pi_n(\mathbf{u})$ est un isomorphisme pour tout $n \geqslant 0$.

1° *Le théorème* A *de* QUILLEN.

THÉORÈME A. — *Soit* $\mathbf{I} \xrightarrow{\mathbf{u}} \mathbf{I}'$ *un morphisme de petites catégories pointées tel que* $\mathbf{u}_g^{-1}(I')$ *soit non vide et homotopiquement trivial pour tout* I' *de* $\mathbf{I}'$. *Alors,* $\mathbf{u}$ *est une équivalence d'homotopie.*

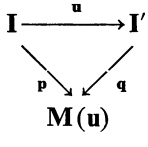
Preuve. — On sait, d'après IV.1, que $\pi_0(\mathbf{u})$ est une bijection. On peut donc supposer $\mathbf{I}$ et $\mathbf{I}'$ connexes. Les propositions IV.3 et IV.2 entraînent que $\pi_1(\mathbf{u})$ est un isomorphisme. Il en résulte (corollaire III.7) que $\tilde{\mathbf{u}}$ vérifie les mêmes hypothèses que $\mathbf{u}$. Mais la suite spectrale de Leray (proposition IV.4 (*a*)) montre que $H^n(\tilde{\mathbf{u}})$ est un isomorphisme pour tout n. Il en est de même de $\pi_n(\tilde{\mathbf{u}})$, et par suite de $\pi_n(\mathbf{u})$.

Application. — Soit $\mathbf{I} \xrightarrow{\mathbf{u}} \mathbf{I}'$ un morphisme de $\mathbf{C}$. On désigne par $\mathbf{I}_0$ et $\mathbf{I}'_0$ les catégories obtenues à partir de $\mathbf{I}$ et $\mathbf{I}'$ en adjoignant des objets initiaux I_0 et I'_0, et par $\mathbf{I}_0 \xrightarrow{\mathbf{u}_0} \mathbf{I}'_0$ le morphisme correspondant. On construit une petite catégorie $\mathbf{M}(\mathbf{u})$ de la façon suivante : ses objets sont les triples $(I, I', \mathbf{u}_0(I) \xrightarrow{s'} I')$ de $\mathbf{I}_0 \times \mathbf{I}' \times \mathrm{Fl}(\mathbf{I}'_0)$; les morphismes de (I, I', S') dans (J, J', t') sont les couples $I \xrightarrow{f} J$, $I' \xrightarrow{f'} J'$ de morphismes de $\mathbf{I}_0$ et $\mathbf{I}'$ tels que $t' \circ \mathbf{u}_0(f) = f' \circ s'$.

On définit des morphismes $\mathbf{I} \xrightarrow{\mathbf{p}} \mathbf{M}(\mathbf{u})$ et $\mathbf{I}' \xrightarrow{\mathbf{q}} \mathbf{M}(\mathbf{u})$ par $\mathbf{p}(I) = (I, \mathbf{u}(I), \mathrm{id})$ $\mathbf{q}(I') = (I_0, I', I'_0 \to I')$. Le théorème A montre que $\mathbf{q}$ est une équivalence d'homotopie. Il est clair que $\mathbf{I}$ est une sous-catégorie pleine de $\mathbf{M}(\mathbf{u})$ et que $\mathbf{q} \circ \mathbf{u}$ est homotope à $\mathbf{p}$.

On a donc montré le résultat suivant.

PROPOSITION V.1. — *Pour tout morphisme* $\mathbf{I} \xrightarrow{\mathbf{u}} \mathbf{I}'$ *de* $\mathbf{C}$, *on peut construire un diagramme :*



tel que $\mathbf{q} \circ \mathbf{u}$ *soit homotope à* $\mathbf{p}$, $\mathbf{q}$ *soit une équivalence d'homotopie et* $\mathbf{p}$ *fasse de* $\mathbf{I}$ *une sous-catégorie pleine de* $\mathbf{M}(\mathbf{u})$.

2° On va construire dans ce paragraphe, le début de la factorisation de Postnikov d'un morphisme $\mathbf{I} \xrightarrow{\mathbf{u}} \mathbf{I}'$ de $\mathbf{C}^*$ formé de catégories connexes et simplement connexes.

(*a*) A tout foncteur contravariant

$$\mathbf{I}' \xrightarrow{F} \mathbf{C},$$

on associe la catégorie $\mathbf{I}'(F)$ formée des couples (I', U) avec $I' \in \mathbf{I}'$ et $U \in F(I')$, et dont les morphismes de (I', U) dans (J', V) sont les couples $I' \xrightarrow{f'} J'$, $U \xrightarrow{u} F(f')(V)$ de morphismes de $\mathbf{I}'$ et $F(I')$.

Ce foncteur définit un morphisme de $\mathbf{C}$:

$$\mathbf{I}'(F) \xrightarrow{\mathbf{f}} \mathbf{I}'$$

par $\mathbf{f}(I', U) = I'$, $\mathbf{f}(f', u) = f'$.

(*b*) Le morphisme $\mathbf{u}$ ci-dessus définit un foncteur contravariant

$$\mathbf{I}' \xrightarrow{K} \mathbf{C}$$

par $K(I') = \overline{H_1(\mathbf{u}_h^{-1}(I'))}$, donc un morphisme de $\mathbf{C}$:

$$\mathbf{I}'(K) \xrightarrow{\mathbf{k}} \mathbf{I}'$$

pour lequel

$$\mathbf{k}_h^{-1}(I') \simeq \overline{H_1(\mathbf{u}_h^{-1}(I'))} \times \Lambda(\mathbf{I}'; \mathbf{I}', I').$$

Il en résulte donc que $\mathbf{I}'(K)$ est connexe et simplement connexe, que $\pi_n(\mathbf{k})$ est injectif pour $n = 2$, et bijectif pour $n > 2$.

(*c*) On va construire un morphisme $\mathbf{I} \xrightarrow{\mathbf{v}} \mathbf{I}'(K)$ rendant le diagramme suivant commutatif

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{I} & \xrightarrow{\mathbf{u}} & \mathbf{I}' \\ & \searrow^{\mathbf{v}} \quad \nearrow_{\mathbf{k}} & \\ & \mathbf{I}'(K) & \end{array}$$

Pour tout I de $\mathbf{I}$, on désigne par I_k l'objet $(I, \mathbf{u}(I))$ de $\mathbf{u}_h^{-1}(\mathbf{u}(I))$, et par $\mathbf{p}_I$ la projection de $\mathbf{u}_h^{-1}(\mathbf{u}(I))$ sur I. On choisit, de plus, un chemin e_I, dans $\mathbf{I}$, de I_0 à I et pour tout objet K' de $\mathbf{u}_h^{-1}(\mathbf{u}(I))$ un chemin $g_{K'}$, dans $\mathbf{u}_h^{-1}(\mathbf{u}(I))$, de I_k à K' tel que $\Lambda(\mathbf{p}_I)(g_{K'}) \equiv e_I^{-1} e_{\mathbf{p}_I(K')}$.

Pour tout $I \xrightarrow{u} J$ de $\mathbf{I}$, on désigne par I_u le point $(J, \mathbf{u}(J) \to \mathbf{u}(J) \leftarrow \mathbf{u}(I))$ de $\mathbf{u}_h^{-1}(\mathbf{u}(I))$ et par q_u la classe dans $H_1(\mathbf{u}_h^{-1}(\mathbf{u}(I)))$ du lacet

$$(g_{I_u} I_u \to I_u \leftarrow I_k).$$

On définit alors le morphisme $\mathbf{v}$ par

$$\mathbf{v}(I) = (\mathbf{u}(I), \star),$$

$$\mathbf{v}(I \xrightarrow{u} J) = (\mathbf{u}(u), q_u).$$

L'égalité $\mathbf{k} \circ \mathbf{v} = \mathbf{u}$ est immédiate. De plus, ce morphisme possède les propriétés suivantes :

(i) Pour tout I' de $\mathbf{I}'$, $\mathbf{v}_h^{-1}(I')$ est homotopiquement équivalent à $\mathbf{u}_h^{-1}(I')$.

(ii) Pour tout I' de $\mathbf{I}'$, on fait opérer $\mathbf{u}_g^{-1}(I')$ sur $\overline{H_1(\mathbf{u}_h^{-1}(I'))^d}$ à l'aide de l'homomorphisme de monoïdes

$$\mathrm{Fl}(\mathbf{u}_g^{-1}(I')) \xrightarrow{h_{I'}} H_1(\mathbf{u}_h^{-1}(I'))$$

défini par

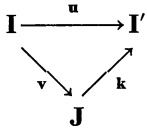
$$h_{I'}((I, s') \xrightarrow{u} (J, t')) = \text{image inverse par } s' \text{ de } q_u \text{ dans } H_1(\mathbf{u}_h^{-1}(I')).$$

Dans ces conditions,

$$\mathbf{v}_g^{-1}(I', \star) \xrightarrow{\sim} \mathbf{u}_g^{-1}(I') \triangleright \overline{H_1(\mathbf{u}_h^{-1}(I'))^d}.$$

On a ainsi montré la proposition suivante.

PROPOSITION V.2. — *Tout morphisme* $\mathbf{I} \xrightarrow{\mathbf{u}} \mathbf{I}'$ *dans* $\mathbf{C}^*$ *de catégories connexes et simplement connexes de factorise suivant :*



où :

(*a*) $\mathbf{J}$ *est connexe et simplement connexe.*

(*b*) $\pi_n(\mathbf{k})$ *est injectif pour* $n = 2$ *et bijectif pour* $n > 2$.

(*c*) $\pi_2(\mathbf{v})$ *est surjectif.*

(*d*) *Pour tout* J *de* $\mathbf{J}$, $\mathbf{v}_h^{-1}(J)$ *est homotopiquement équivalent à* $\widetilde{\mathbf{u}_h^{-1}(\mathbf{k}(J))}$ *et* $\mathbf{v}_g^{-1}(J)$ *est isomorphe à* $\mathbf{u}_g^{-1}(\mathbf{k}(J)) \triangleright \overline{H_1(\mathbf{u}_h^{-1}(\mathbf{k}(J)))^d}$

3° *Le théorème* B *de* QUILLEN.

THÉORÈME B. — *Soit un morphisme* $\mathbf{I} \xrightarrow{\mathbf{u}} \mathbf{I}'$ *de catégories connexes de* $\mathbf{C}^*$ *tel que :*

(*a*) *Pour tout* I' *de* $\mathbf{I}'$, $\mathbf{u}_g^{-1}(I')$ *est non vide et connexe.*

(*b*) *Pour tout* $I' \xrightarrow{u'} J'$ *de* $\mathbf{I}'$, $\mathbf{u}_g^{-1}(I') \to \mathbf{u}_g^{-1}(J')$ *est une équivalence d'homotopie.*

Alors, pour tout I' *de* $\mathbf{I}'$ $\mathbf{u}_g^{-1}(I') \to \mathbf{u}_h^{-1}(\mathbf{I}')$ *est une équivalence d'homotopie.*

En particulier, il existe une suite exacte

$$\to \pi_n(\mathbf{u}_g^{-1}(I'_0)) \to \pi_n(\mathbf{I}) \xrightarrow{\pi_n(\mathbf{u})} \pi_n(\mathbf{I}') \to \pi_{n-1}(\mathbf{u}_g^{-1}(I'_0)) \to \ldots \to \pi_0(\mathbf{I}) \xrightarrow{\pi_0(\mathbf{u})} \pi_0(\mathbf{I}').$$

Preuve. — Pour tout $\mathbf{I} \xrightarrow{\mathbf{u}} \mathbf{I}'$ de $\mathbf{C}$, on peut construire le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{I} & \xrightarrow{\mathbf{u}} & \mathbf{I}' \\ \downarrow{\scriptstyle \mathbf{t}} & & \downarrow{\scriptstyle \mathbf{id}} \\ \mathbf{I}_h & \xrightarrow{\mathbf{u}_h} & \mathbf{I}' \end{array}$$

où $\mathbf{t}$ est défini par

$$\mathbf{t}(I) = (I, \mathbf{u}(I)),$$

$$\mathbf{t}(I \xrightarrow{f} J) = (f, \mathbf{u}(f)).$$

Comme $\mathbf{p}' \circ \mathbf{t} = \mathbf{id}$ (notations de II.4), $\mathbf{t}$ est une équivalence d'homotopie.

(*a*) Pour tout ensemble E, $\mathbf{t}$ induit une bijection

$$H^0(\mathbf{I}'; \mathbf{u}_{h*}(E)) \to H^0(\mathbf{I}'; \mathbf{u}_*(E)).$$

Il en résulte (IV.2) que, pour tout I' de $\mathbf{I}'$,

$$\pi_0(\mathbf{u}_g^{-1}(I')) \to \pi_0(\mathbf{u}_h^{-1}(I'))$$

est bijectif.

En particulier, $\mathbf{u}_h^{-1}(I'_0)$ est connexe, et $\pi_1(\mathbf{u})$ est surjectif. On peut donc supposer (proposition III.6) que $\mathbf{I}$ et $\mathbf{I}'$ sont simplement connexes.

De plus, compte tenu de la proposition V.2, il suffit de démontrer ce théorème lorsque $\mathbf{u}_h^{-1}(I'_0)$ est simplement connexe.

(*b*) Pour tout groupe G, on vérifie que

$$H^1(\mathbf{u}_h^{-1}(I'_0); G) \xrightarrow{\sim} H^0(\mathbf{I}'; H^1(\mathbf{u}_g^{-1}(I'_0); G)).$$

On en déduit (proposition IV.2) que

$$\pi_1(\mathbf{u}_g^{-1}(I'_0)) \to \pi_1(\mathbf{u}_h^{-1}(I'_0))$$

est bijectif, et par suite que $\mathbf{u}_g^{-1}(I'_0)$ est simplement connexe.

(*c*) Le théorème de comparaison de Zeeman, appliqué au diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} E_2^{p,q} = H^p(\mathbf{I}'; H^q(\mathbf{u}_g^{-1}(I'); \mathbf{Z})) & \to & H^*(\mathbf{I}; \mathbf{Z}) \\ \uparrow & & \uparrow \\ E_2^{p,q} = H^p(\mathbf{I}'; H^q(\mathbf{u}_h^{-1}(I'); \mathbf{Z})) & \to & H^*(\mathbf{I}_h; \mathbf{Z}) \end{array}$$

entraîne que

$$H^q(\mathbf{u}_h^{-1}(I'); \mathbf{Z}) \to H^q(\mathbf{u}_g^{-1}(I'); \mathbf{Z})$$

est un isomorphisme pour tout q et tout I' de $\mathbf{I}'$.

Donc,

$$\pi_n(\mathbf{u}_g^{-1}(I')) \to \pi_n(\mathbf{u}_h^{-1}(I'))$$

est un isomorphisme pour tout n.

Le reste du théorème est une conséquence de la proposition II.4.

BIBLIOGRAPHIE

[1] EVRARD (M.). — *Homotopie d'un espace topologique relativement à un recouvrement. Applications à l'homotopie des préschémas*, Thèse Sc. math. Paris VII, 1973.

[2] GABRIEL (P.) and ZISMAN (M.). — *Calculus of fractions and homotopy theory*. — Berlin, Springer-Verlag, 1967 (*Ergebnisse der Mathematik*, 35).

[3] QUILLEN (D.). — Higher algebraic *K*-theory, I., « *Algebraic K-theory*. Proceedings of the conference held at Seattle, 1972 », p. 85-147. — Berlin, Springer-Verlag, 1973 (*Lecture Notes in Mathematics*, 341).

[4] SEGAL (G.). — *Classifying spaces and spectral sequences*. — Paris, Presses universitaires de France, 1968 (*Institut des Hautes Études Scientifiques. Publications mathématiques*, 34, p. 105-112).

[5] *Séminaire de géométrie algébrique*, 1960-1961, SGA 1 : *Revêtements étales et groupe fondamental*. Dirigé par A. Grothendieck. — Berlin, Springer-Verlag, 1971 (*Lecture Notes in Mathematics*, 224).

(Texte reçu le 1er juillet 1974.)

Marcel EVRARD,
Mathématiques,
Tour 55,
Université de Paris VII,
2, place Jussieu,
75221 Paris Cedex 05.