BULLETIN DE LA S. M. F.

LEBON

Sur l'arête de rebroussement d'une développable

Bulletin de la S. M. F., tome 8 (1880), p. 27-30

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1880__8__27_1>

© Bulletin de la S. M. F., 1880, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Sur l'arête de rebroussement d'une développable;

par M. Ernest Lebon.

(Séance du 21 novembre 1879.)

Nous nous proposons de trouver les équations de l'arête de rebroussement de la développable circonscrite à deux coniques

à centre, ayant leurs plans parallèles, leurs axes parallèles et leurs centres situés sur une même perpendiculaire à leurs plans (¹).

Soient O et O_1 les centres des coniques; prenons pour axe des x la droite OO_1, pour axes des y et des z les deux axes de la conique O. Les coordonnées d'un point étant α, β, γ pour la conique O et $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ pour la conique O_1, leurs axes étant respectivement b et c, b' et c', les équations des coniques directrices sont

$$(1) \qquad \alpha = 0, \quad \frac{\beta^2}{b^2} + \frac{\gamma^2}{c^2} = 1,$$

$$(2) \qquad \alpha_1 = a, \quad \frac{\beta_1^2}{b'^2} + \frac{\gamma_1^2}{c'^2} = 1.$$

Soit MM_1 une génératrice de la développable; ses équations sont

$$(3) \qquad \frac{x}{a} = \frac{y-\beta}{\beta_1-\beta} = \frac{z-\gamma}{\gamma_1-\gamma}.$$

Les tangentes en M et en M_1 aux coniques étant parallèles, leurs coefficients angulaires sont égaux, et l'on a

$$(4) \qquad \frac{c^2\beta}{b^2\gamma} = \frac{c'^2\beta_1}{b'^2\gamma_1}.$$

On sait que, si les équations (²)

$$x = Az + P, \quad y = Bz + Q$$

sont celles d'une génératrice d'une développable, A, P, B, Q étant des fonctions d'une même variable, A′ et P′ les dérivées de A et P, la coordonnée z_0 d'un point x_0, y_0, z_0 de l'arête de rebroussement est donnée par la formule

$$(5) \qquad z_0 = -\frac{P'}{A'}.$$

Or, des équations (3) on tire

$$(6) \qquad x = \frac{a}{\gamma_1-\gamma}z - \frac{a\gamma}{\gamma_1-\gamma}.$$

(¹) Cette question est exposée dans le *Traité de Géométrie descriptive* de M. J. de la Gournerie, par une marche différente de celle que nous indiquons.

(²) *Voir* la *Géométrie analytique* de MM. Briot et Bouquet, n° 479.

On a

$$A' = -\frac{a(\gamma_1' - 1)}{(\gamma_1 - \gamma)^2}, \quad P' = -\frac{a(\gamma_1 - \gamma\gamma_1')}{(\gamma_1 - \gamma)^2}, \tag{7}$$

γ_1' désignant la dérivée de γ_1 fonction de γ.

Si de (1) et (2) on tire β et β_1, et que l'on porte leurs valeurs dans (4), on trouve

$$\frac{\gamma_1^2}{c'^2} = \frac{\lambda \frac{\gamma^2}{c^2}}{\mu},$$

en posant

$$\mu = 1 + (\lambda - 1)\frac{\gamma^2}{c^2} \quad \text{et} \quad \lambda = \frac{b^2 c'^2}{b'^2 c^2},$$

d'où

$$\gamma_1' = \frac{\lambda \frac{\gamma}{c^2}}{\mu^2 \frac{\gamma_1}{c'^2}}. \tag{8}$$

Les valeurs (7) et (8), portées dans (5), donnent

$$z_0 = \frac{\lambda \frac{\gamma^2}{c^2} - \mu^2 \frac{\gamma_1^2}{c'^2}}{\lambda \frac{\gamma}{c^2} - \mu^2 \frac{\gamma_1}{c'^2}}$$

ou

$$z_0 = -\frac{\lambda(\lambda - 1)\frac{\gamma^2}{c^2}}{\lambda \frac{\gamma}{c^2} - \mu^2 \frac{\gamma_1}{c'^2}}. \tag{9}$$

Pour trouver x_0 et y_0, on porte la première valeur de z_0 dans l'équation (6) et dans une équation tirée de (3) donnant y en fonction de z. Les formules obtenues sont

$$x_0 = -\frac{a\mu^2 \frac{\gamma_1}{c'^2}}{\lambda \frac{\gamma}{c^2} - \mu^2 \frac{\gamma_1}{c'^2}}, \tag{10}$$

$$y_0 = \frac{\lambda \frac{\beta\gamma}{c^2} - \mu^2 \frac{\beta_1 \gamma_1}{c'^2}}{\lambda \frac{\gamma}{c^2} - \mu^2 \frac{\gamma_1}{c'^2}}. \tag{11}$$

Appelons O un cône ayant son sommet en O et pour directrice l'arête de rebroussement. Les équations d'une génératrice du cône O sont, d'après (9), (10) et (11),

$$\frac{-a\mu^2\frac{\gamma_1}{c'^2}}{x} = \frac{\lambda\frac{\beta\gamma}{c^2} - \mu^2\frac{\beta_1\gamma_1}{c'^2}}{y} = \frac{-\lambda(\lambda-1)\frac{\gamma^2}{c^2}}{z}.$$

Élevons au carré cette suite de rapports égaux; remplaçons-y β, β_1, γ_1 par leurs valeurs tirées de (1), (2), (4); et, posant

$$u = \frac{c^2}{\gamma^2} - 1,$$

nous trouvons

$$\frac{a^2(u+\lambda)^3}{(\lambda-1)^2x^2} = \frac{b'^2u^3}{y^2} = \frac{\lambda c'^2}{z^2}.$$

L'élimination de u entre ces deux équations conduit à l'équation du cône O :

$$\left[(\lambda-1)\frac{x}{a}\right]^{\frac{2}{3}} - \left(\frac{y}{b'}\right)^{\frac{2}{3}} - \left(\lambda\frac{z}{c'}\right)^{\frac{2}{3}} = 0. \tag{12}$$

Maintenant, appelons O_1 un cône ayant son sommet en O_1 et pour directrice l'arête de rebroussement. Les équations d'une génératrice du cône O_1 sont

$$\frac{x-a}{x_0-a} = \frac{y}{y_0} = \frac{z}{z_0}.$$

Opérant comme précédemment, posant

$$t = \frac{\gamma^2}{c^2}$$

et éliminant t, nous trouvons pour l'équation du cône O_1

$$\left[(\lambda-1)\frac{x-a}{a}\right]^{\frac{2}{3}} - \left(\lambda\frac{y}{b}\right)^{\frac{2}{3}} - \left(\frac{z}{c}\right)^{\frac{2}{3}} = 0. \tag{13}$$

Les équations (12) et (13) représentent l'arête de rebroussement. A l'aide de ces équations on trouve aisément les projections sur les plans coordonnés de l'arête de rebroussement.