BULLETIN DE LA S. M. F.

B. BENZAGHOU

Algèbres de Hadamard

Bulletin de la S. M. F., tome 98 (1970), p. 209-252

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1970__98__209_0>

Bull. Soc. math. France,
98, 1970, p. 209 à 252
(*Thèse Sc. math.*, Paris, 1969.)

ALGÈBRES DE HADAMARD

PAR

BENALI BENZAGHOU (*).

Table des matières.

(*) *Thèse Sc. math.* Paris, 1969.

Introduction.

Soit A un anneau commutatif unitaire; si nous munissons le A-module des séries formelles à coefficients dans A du produit (de Hadamard) :

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n . \sum_{n=0}^{\infty} b_n X^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n X^n,$$

nous obtenons une A-algèbre $\mathcal{H}(A)$.

Ce travail a pour objet l'étude de certaines sous-algèbres de $\mathcal{H}(A)$. Plus particulièrement, K étant un corps commutatif, les séries qui représentent des fractions rationnelles de $K(X)$ forment une sous-algèbre de $\mathcal{H}(K)$. Nous notons $\mathcal{R}(K)$ l'algèbre des séries formelles $\sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n$, à coefficients dans K, et telles que la suite (a_n) satisfait à une relation de récurrence linéaire à coefficients constants.

L'étude de $\mathcal{R}(K)$ est celle de la conservation de la rationalité par certaines opérations algébriques sur les coefficients des séries associées.

Dans le chapitre I, nous donnons des exemples de sous-algèbres de $\mathcal{H}(A)$, et des généralités sur ces sous-algèbres.

Dans le chapitre II, nous donnons des propriétés générales des algèbres $\mathcal{R}(K)$ pour un corps commutatif K de caractéristique zéro, et en particulier des propriétés liées à un théorème de Mahler.

Un lemme de Fatou dit qu'une série de $\mathcal{R}(\mathbf{Q})$, à coefficients dans $\mathbf{Z}$, possède une représentation $P(X)/Q(X)$ dans $\mathbf{Z}(X)$ telle que $Q(0) = 1$. Dans le chapitre III, nous étudions systématiquement les anneaux qui possèdent une propriété analogue, et définissons ainsi une classe d'anneaux (anneaux de Fatou). Nous montrons que cette classe est entre celle des anneaux complètement intégralement clos et celle des anneaux intersections d'anneaux de valuation de hauteur 1.

Dans le chapitre IV, nous déterminons le groupe des unités $\mathcal{R}(K)$, pour un corps commutatif K de caractéristique zéro; en d'autres termes, nous caractérisons les séries formelles $\sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n$ qui représentent des fractions rationnelles, ainsi que leurs inverses $\sum_{n=0}^{\infty} X^n/a_n$. Cette caractérisation est une conséquence du théorème suivant :

Si une fraction rationnelle, n'ayant qu'un seul pôle, se factorise, dans $\mathcal{H}(\mathbf{C})$, en un produit de fonctions holomorphes dans le complémentaire d'un ensemble fini de points (l'origine n'étant pas point singulier), alors ces facteurs sont des fractions rationnelles.

Dans le chapitre V, nous donnons des conditions suffisantes pour que le quotient de deux éléments de $\mathcal{R}(K)$ soit dans $\mathcal{R}(K)$. Ces conditions sont de nature arithmétique et généralisent un résultat de G. Pólya.

Dans le chapitre VI, nous déterminons, comme application des résultats des deux chapitres précédents, les suites de S-unités d'un corps de nombres algébriques k vérifiant une relation de récurrence linéaire. En particulier, les suites d'unités algébriques vérifiant une relation de récurrence linéaire sont nécessairement formées de progressions géométriques emboîtées. Nous en déduisons la structure du groupe

$$\mathcal{R}(\mathcal{U}, k) = \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n \in \mathcal{R}(k),\ a_n \in \mathcal{U} \text{ pour tout } n \geq 0 \right\},$$

analogue à celle du groupe des unités $\mathcal{U}$ de k décrite par le théorème de Dirichlet.

Nous signalons, en appendice, certains problèmes ouverts et certaines conjectures.

Note. — Le lecteur qui ne s'intéresse qu'aux fractions rationnelles peut aborder directement le chapitre II; le chapitre III n'intervient dans la suite que par la définition des anneaux de Fatou; les démonstrations du chapitre IV n'utilisent pas de résultat des chapitres antérieurs.

Les principaux résultats ont été exposés au Séminaire Delange-Pisot-Poitou : *Théorie des nombres* ([1]-[3]) et dans trois Notes aux Comptes rendus de l'Académie des Sciences de Paris ([5]-[7]); un résumé est paru au Séminaire Dubreil-Pisot : *Algèbre et théorie des nombres* [4].

Chapitre I.

Propriétés générales des algèbres de Hadamard.

1. Définitions.

1° Soit A un anneau commutatif unitaire; dans le A-module des séries formelles $A[[X]]$, nous définissons le produit

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n . \sum_{n=0}^{\infty} b_n X^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n X^n,$$

$\mathcal{H}(A)$ désigne la A-algèbre ainsi obtenue; c'est une algèbre commutative, unitaire, l'élément unité étant $\delta = \sum_{n=0}^{\infty} X^n$, non intègre. Si A^* est le groupe des unités de A, le groupe des unités de $\mathcal{H}(A)$ est $\left\{ \sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n,\ a_n \in A^* \text{ pour tout } n \right\}$.

2° Soit $\mathbf{A}$ la catégorie des anneaux commutatifs unitaires; la catégorie de Hadamard, $\mathcal{H}(\mathbf{A})$, associée à $\mathbf{A}$, est définie par :

— ses objets sont les anneaux $\mathcal{H}(A)$, où A est un objet de $\mathbf{A}$;

— si φ est un morphisme de $\mathbf{A}$, $\varphi : A \to A'$, $\mathcal{H}(\varphi)$ est le morphisme de $\mathcal{H}(A)$ dans $\mathcal{H}(A')$, défini par

$$\mathcal{H}(\varphi).\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi(a_n) X^n.$$

Notons que A se plonge dans $\mathcal{H}(A)$ par $a \mapsto a\delta$.

$\mathcal{H}$ peut s'interpréter comme un foncteur covariant de la catégorie des anneaux commutatifs unitaires $\mathbf{A}$ dans la catégorie de Hadamard associée $\mathcal{H}(\mathbf{A})$; ce foncteur est exact et représentable.

3° Un foncteur $\mathcal{F}$ de $\mathbf{A}$ dans une sous-catégorie de $\mathcal{H}(\mathbf{A})$ sera dit un foncteur de Hadamard; $\mathcal{F}(A)$ est une sous-A-algèbre de $\mathcal{H}(A)$.

Si E est une partie de A, nous notons :

$$\mathcal{F}(E, A) = \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n \in \mathcal{F}(A),\ a_n \in E \text{ pour tout } n \right\}.$$

2. Exemples.

1° $\Theta(A) = \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} P(n) X^n,\ P(X) \in A[X] \right\}$.

Lorsque A est intègre, $\Theta(A)$ est intègre. Posons

$$\theta = \sum_{n=0}^{\infty} n X^n,$$

alors $\Theta(A) = A[\theta]$.

2° Pour $\alpha \in A$, définissons $h_\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n X^n$. $\mathcal{R}'_1(A)$ est la sous-algèbre de $\mathcal{H}(A)$ engendrée par les h_α, $\alpha \in A$.

3° $\mathcal{R}'(A)$ est la sous-algèbre de $\mathcal{H}(A)$ engendrée par $\Theta(A)$ et $\mathcal{R}'_1(A)$.

4° $\mathcal{S}(A) = \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n,\ a_n \in A,\right.$ et la suite (a_n) ne prend qu'un nombre fini de valeurs distinctes $\left.\right\}$.

5° Soit K un corps commutatif, définissons

$$\mathcal{R}(K) = \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n,\ a_n \in K,\ \exists\, q_1, \ldots, q_h \in K,\ q_h \neq 0, \right.$$
$$\left. \text{et } a_{n+h} = q_1 a_{n+h-1} + \ldots + q_h a_n,\ \forall\, n \geqq 0 \right\}.$$

(*voir* chap. II).

6° Soit K un corps commutatif; considérons l'anneau E des fonctions définies sur $\mathbf{N}$ à valeurs dans K qui soient restrictions de fonctions rationnelles sur K. Définissons

$$\mathcal{J}(K) = \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n,\ a_n \in K,\ \exists\, \varphi_1, \ldots, \varphi_h \in E,\ \varphi_h \neq 0, \right.$$
$$\left. \text{et } a_{n+h} = \varphi_1(n)\, a_{n+h-1} + \ldots + \varphi_h(n)\, a_n,\ \forall\, n \geqq 0 \right\}.$$

$\mathcal{J}(K)$ est une K-algèbre de Hadamard [18], et $\mathcal{J}$ est un foncteur de Hadamard.

Donnons des exemples de sous-algèbres de $\mathcal{H}(K)$, définies de manière non nécessairement fonctorielle.

7° Soit E un anneau de fonctions de $\mathbf{N}$ dans un corps commutatif K, et définissons

$$\mathcal{M}_E(K) = \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n,\ a_n = \sum_{i=1}^{r} \varphi_i(n)\, \alpha_i^n,\ \varphi_i \in E,\ \alpha_i \in K \right\}.$$

8° Soit K un corps commutatif muni d'une valeur absolue; définissons

$$\mathcal{H}'(K) = \left\{ \sum_{n=}^{\infty} a_n X^n,\ a_n \in K,\ \overline{\lim}\, |a_n|^{\frac{1}{n}} < +\infty \right\}.$$

9° Pour $K = \mathbf{C}$, définissons

(*a*) $\mathcal{M}' = \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n,\ f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \right.$ est le germe à l'origine d'une fonction analytique au voisinage de l'origine et n'ayant que des singularités isolées dans $\mathbf{C}\Big\}$.

$\mathcal{M}'$ est une $\mathbf{C}$-algèbre de Hadamard par le théorème de multiplication des singularités de Hadamard [19] (de là vient la terminologie d'algèbre de Hadamard).

(b) $\mathcal{M} = \Big\{ \sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n,\ a_n = \sum_{n=1}^{r} \varphi_i(n)\, \alpha_i^n$, où les $\varphi_i(z)$ sont des fonctions entières de type exponentiel minimal, les α_i dans $\mathbf{C}^* \Big\}$.

(c) $\mathcal{J}g = \Big\{ \sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n,\ f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ est une intégrale de type Fuchs d'une équation différentielle linéaire à coefficients dans $\mathbf{C}(z) \Big\}$ [18].

10° Pour un corps commutatif K, nous avons

$$K \subset \Theta(K) \subset \mathcal{R}'(K) \subset \mathcal{R}(K) \subset \mathcal{J}(K) \subset \mathcal{H}(K).$$

Pour $\mathbf{C}$, nous avons, de plus,

$$\mathbf{C} \subset \mathcal{R}(\mathbf{C}) \subset \mathcal{M} \subset \mathcal{M}' \subset \mathcal{H}'(\mathbf{C}) \subset \mathcal{H}(\mathbf{C}).$$

3. Propriétés générales des foncteurs de Hadamard.

1° Proposition 1. — *Soit A un anneau commutatif unitaire, contenant une racine primitive m-ième de l'unité ζ, et soit $\mathcal{F}(A)$ une sous-algèbre de $\mathcal{H}(A)$ contenant $\mathcal{R}'(A)$.*

Pour $\mu = 0, 1, \ldots, m-1$, posons $\delta_{m,\mu} = \sum_{t=0}^{\infty} X^{\mu+tm}$.

(i) *Les $\delta_{m,\mu}$ sont des idempotents de $\mathcal{R}'(A)$, et $\delta_{m,\mu}.\delta_{m,\mu'} = 0$ pour $\mu \neq \mu'$.*

(ii) *Pour tout $\mathfrak{A} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n \in \mathcal{F}(A)$,*

$$\mathfrak{A}_{m,\mu} = \delta_{m,\mu}.\mathfrak{A} = \sum_{t=0}^{\infty} \mathfrak{A}_{\mu+tm} X^{\mu+tm} \in \mathcal{F}(A) \qquad \textit{et} \qquad \mathfrak{A} = \sum_{\mu=0}^{m-1} \mathfrak{A}_{m,\mu}.$$

(iii) $m\mathfrak{A}_{m,\mu} = \sum_{k=0}^{m-1} \zeta^{-k\mu} h_{\zeta} k.\mathfrak{A}.$

La dernière relation résulte de

$$\sum_{k=0}^{m-1} \zeta^{-k\mu} . \zeta^{kn} = \begin{cases} m & \text{si } n \equiv \mu \bmod m, \\ 0 & \text{si } n \not\equiv \mu \bmod m. \end{cases}$$

2° Soit F une partie de $\mathcal{F}(A)$. Un élément $\mathfrak{A}$ de $\mathcal{F}(A)$ est dit F-scindé s'il existe un entier $m \geqq 1$ tel que, pour $\mu = 0, 1, \ldots, m-1$, $\mathfrak{A}_{m,\mu} \in F$.

Par exemple, soit K un corps commutatif, et $\mathcal{F} = \mathcal{R}.\mathcal{Z}(K)$ désigne l'ensemble des éléments de $\mathcal{R}(K)$ qui sont $\Theta(K)$-scindés; c'est une sous-algèbre de $\mathcal{R}(K)$. Si nous prenons pour partie F, l'ensemble des éléments de $\mathcal{R}(K)$ de la forme $P(\theta)h_\alpha$, où $P(\theta) \in \Theta(K)$ et $\alpha \in K^*$, nous désignons par $\mathcal{L}(K)$ l'ensemble des éléments de $\mathcal{R}(K)$ qui sont F-scindés; $\mathcal{L}(K)$ est une partie multiplicativement stable de $\mathcal{R}(K)$.

3° Proposition 2. — *Soient A un anneau intègre, commutatif unitaire, k son corps des quotients, K une extension galoisienne de degré fini de k, B la fermeture intégrale de A dans K.*

Soit $\mathcal{F}$ un foncteur de Hadamard tel que $\mathcal{F}(k, K) = \mathcal{F}(k)$. Alors :

(a) $\mathcal{F}(K)$ est une $\mathcal{F}(k)$-algèbre entière, libre de type fini;

(b) Si A est principal, $\mathcal{F}(B, K)$ est une $\mathcal{F}(A, k)$-algèbre entière, libre de type fini.

Soient $\{\omega_1, \ldots, \omega_d\}$ une base de K sur k, $G = \{\sigma_1, \ldots, \sigma_d\}$ le groupe de Galois de K sur k.

Soit $\mathfrak{A} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n \in \mathcal{F}(K)$. Posons

$$a_n = \lambda_{n,1}\omega_1 + \ldots + \lambda_{n,d}\omega_d.$$

Pour tout $\sigma \in G$,

$$\sigma\mathfrak{A} = \sum_{n=0}^{\infty} \sigma(a_n) X^n \in \mathcal{F}(K).$$

Posons

$$\Lambda_j = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_{n,j} X^n,$$

$$\mathfrak{A} = \Lambda_1\omega_1 \quad + \ldots + \Lambda_d\omega_d,$$

$$\sigma\mathfrak{A} = \Lambda_1\sigma(\omega_1) + \ldots + \Lambda_d\sigma(\omega_d)$$

et

$$\begin{pmatrix} \sigma_1\mathfrak{A} \\ \sigma_d\mathfrak{A} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_1\omega_1 & \sigma_1\omega_d \\ \sigma_d\omega_1 & \sigma_d\omega_d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Lambda_1 \\ \Lambda_d \end{pmatrix},$$

soit $\Delta = \det(\sigma_i \omega_j)$, alors

$$\Delta . \Lambda_j = \sum_{i=1}^{d} d_{ij} \sigma_i \mathfrak{A} \in \mathcal{F}(k, K).$$

Si A est principal, il suffit de prendre une base d'entiers $\{\omega_1, \ldots, \omega_d\}$ de B, $\left\{\frac{\omega_1}{\Delta}, \ldots, \frac{\omega_d}{\Delta}\right\}$ constitue alors une base du $\mathcal{F}(A, k)$-module $\mathcal{F}(B, K)$.

Pour $a_n \in K$, soit $P_n(Y)$ le polynôme caractéristique de l'endomorphisme $x \mapsto a_n . x$ de K :

$$P_n(Y) = Y^d + \alpha_{n,1} Y^{d-1} + \ldots + \alpha_{n,d} \in k[Y],$$

alors $\mathfrak{A}_j = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_{n,j} X^n \in \mathcal{F}(k, K)$. Considérons

$$P(Y) = Y^d + \mathfrak{A}_1 Y^{d-1} + \ldots + \mathfrak{A}_d \in \mathcal{F}(k)[Y],$$

alors $P(\mathfrak{A}) = 0$.

Si A est principal, donc intégralement clos, $\mathfrak{A}_j \in \mathcal{F}(A, k)$.

Corollaire 1. — *Soit k un corps commutatif de caractéristique zéro, et supposons que $\mathcal{F}$ possède la propriété de finitude suivante :*

(F_k) *Pour tout corps commutatif K contenant k et pour tout $\mathfrak{A} = \sum a_n X^n \in \mathcal{F}(K)$, il existe une k-algèbre de type fini L, contenue dans K, et telle que $\mathfrak{A} \in \mathcal{F}(L)$ (L peut dépendre de $\mathfrak{A}$).*

Soit $\bar{k}$ la clôture algébrique de k, alors $\mathcal{F}(\bar{k})$ est une $\mathcal{F}(k)$-algèbre entière.

Corollaire 2. — *Soit K une extension galoisienne de degré fini de k, $K = k(\theta)$ et $G = \mathrm{Gal}(K/k)$. Considérons :*

$$\bar{G} = \left\{ \bar{\sigma} = (\sigma_n),\ \sigma_n \in G \text{ et } \sum_{n=0}^{\infty} \sigma_n(\theta) X^n \in \mathcal{F}(K) \right\}.$$

Alors $\bar{G}$ est un groupe; soit $\mathfrak{A} = \sum a_n X^n \in \mathcal{F}(K)$, alors $\mathfrak{A}$ et

$$\bar{\sigma}\mathfrak{A} = \sum \sigma_n(a_n) X^n$$

ont même polynôme caractéristique.

En effet, soit $\mathfrak{A} = \Lambda_1 + \Lambda_2 \theta + \ldots + \Lambda_d \theta^{d-1}$, alors

$$\bar{\sigma}\mathfrak{A} = \Lambda_1 + \Lambda_2 \Gamma + \ldots + \Lambda_d \Gamma^{d-1}, \qquad \text{où } \Gamma = \sum_n \sigma_n(\theta) X^n.$$

$\bar{G}$ est un groupe par la proposition 3 ci-dessous, notons que, lorsque $\mathcal{R}(K) \subset \mathcal{F}(K)$,

$$\bar{G}' = \{ \bar{\sigma} = (\sigma_n),\ \sigma_n \in G,\ (\sigma_n) \text{ périodique} \}$$

est un sous-groupe de $\bar{G}$.

4° Tout homomorphisme φ de K dans k induit un homomorphisme $\mathcal{F}(\varphi)$ de $\mathcal{F}(K)$ dans $\mathcal{F}(k)$; en particulier, lorsque K est une extension algébrique de degré fini (séparable) de k, nous notons N et Tr les applications de $\mathcal{F}(K)$ dans $\mathcal{F}(k)$ correspondant aux applications *norme* et *trace* de K dans k.

PROPOSITION 3. — *Soit K une extension algébrique séparable de degré fini de k, et soit $\mathcal{F}$ un foncteur de Hadamard. Alors un élément $\mathcal{A}$ de $\mathcal{F}(K)$ est inversible dans $\mathcal{F}(K)$ si, et seulement si, $\mathrm{N}(\mathcal{A})$ est inversible dans $\mathcal{F}(k, K)$.*

Il suffit de remarquer que, dans $\mathcal{F}(K)$, $\mathrm{N}(\mathcal{A}) = \prod_{\sigma \in G} \sigma\mathcal{A}$.

COROLLAIRE. — *Soit K une extension de degré fini de $\mathbf{Q}$, $\mathfrak{A}$ son anneau d'entiers, $\mathcal{U}$ son groupe d'unités. Alors $\mathcal{F}(\mathcal{U}, K)$ est le groupe des unités de $\mathcal{F}(\mathfrak{A}, K)$.*

Soit $\mathcal{A} \in \mathcal{F}(\mathcal{U}, K)$, alors $\mathcal{B} = \mathrm{N}(\mathcal{A}) \in \mathcal{F}(\mathbf{Q})$ et $\mathcal{B}^2 = \delta$.

CHAPITRE II.

Propriétés générales des algèbres $\mathcal{R}(K)$.

1. Définitions.

1° Soit K un corps commutatif; considérons

$$\mathcal{R}(K) = \left\{ \mathcal{A} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n,\ a_n \in K, \text{ et la suite } (a_n) \text{ satisfait à une relation de récurrence linéaire à coefficients dans } K \text{ pour tout } n \right\}.$$

Soit $\mathcal{A} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n \in \mathcal{R}(K)$,

$$a_{n+h} = q_1 a_{n+h-1} + \ldots + q_h a_n, \quad \forall\, n \geqq 0, \tag{1}$$

$q_j \in K$, $j = 1, \ldots, h$, $q_h \neq 0$.

Soit $Q(X) = 1 - q_1 X - \ldots - q_h X^h$.

Nous pouvons toujours supposer que la relation de récurrence (1) est la plus courte, c'est-à-dire que la représentation $P(X)/Q(X)$ de $\mathcal{A}$ est irréductible; ce qui équivaut à

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_0 & a_{h-1} \\ a_{h-1} & a_{2h-1} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Soit $Q^*(X) = X^h - q_1 X^{h-1} - \ldots - q_h$, et considérons un corps de décomposition K_1 de $Q^*(X)$. Il est classique [23] que, lorsque K est de caractéristique zéro,

$$a_n = \sum_{i=1}^{s} P_i(n)\, \alpha_i^n$$

les α_i étant les zéros de $Q^*(X)$, de multiplicité m_i, les P_i des polynômes de $K_1[X]$ de degré $m_i - 1$.

La forme des coefficients montre immédiatement que $\mathcal{R}(K)$ est une K-algèbre de Hadamard. (C'est encore vrai en caractéristique quelconque).

Si φ est un homomorphisme de corps $K \mapsto K'$, et si

$$\mathcal{A} = \sum_n a_n X^n \in \mathcal{R}(K),$$

alors

$$\mathcal{R}(\varphi) . \sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi(a_n)\, X^n \in \mathcal{R}(K').$$

Si E est une partie de K,

$$\mathcal{R}(E, K) = \left\{ \sum_n a_n X^n \in \mathcal{R}(K),\ a_n \in E \text{ pour tout } n \right\}.$$

Proposition 1. — *Soient L un corps commutatif, et K un sous-corps de L, alors*

$$\mathcal{R}(K, L) = \mathcal{R}(K).$$

En effet, si $\mathcal{A} = \sum a_n X^n \in \mathcal{R}(K, L)$,

$$a_{n+h} = q_1 a_{n+h-1} + \ldots + q_h a_n, \qquad q_i \in L$$

et

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_0 & a_{h-1} \\ a_{h-1} & a_{2h-1} \end{vmatrix} \neq 0$$

le système

$$\begin{cases} a_h = q_1 a_{h-1} + \ldots + q_h a_0, \\ a_{2h} = q_1 a_{2h-1} + \ldots + q_h a_{h-1}, \end{cases}$$

en $(q_1, \ldots, q_h)$, possède une solution dans K.

2° Soit A un anneau commutatif unitaire intègre, et soit K son corps des quotients. Définissons :

$$\mathcal{R}(A) = \left\{ \mathfrak{A} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n,\ a_n \in A,\ \exists\, q_1, \ldots, q_h \in A \right.$$

$$\left. \text{tels que } a_{n+h} = q_1 a_{n+h-1} + \ldots + q_h a_n \text{ pour tout } n \text{ et } \Delta \neq 0 \right\}.$$

$\mathcal{R}(A)$ est contenue dans $\mathcal{R}(A, K)$, mais n'est pas, en général, une algèbre de Hadamard.

Si A est intégralement clos, alors $\mathcal{R}(A)$ est une A-algèbre de Hadamard.

Définition. — Un anneau commutatif unitaire intègre A, de corps des quotients K, est un anneau de Fatou si $\mathcal{R}(A) = \mathcal{R}(A, K)$.

Les anneaux de Fatou seront étudiés au chapitre III.

2. Théorème de Mahler.

1° Théorème de Mahler [20]. — *Soit K un corps commutatif, de caractéristique zéro. Soit $\mathfrak{A} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n \in \mathcal{R}(K)$, et posons $I(\mathfrak{A}) = \{ n,\ a_n = 0 \}$.*

Si $I(\mathfrak{A})$ est infini, alors il existe un entier $m \geq 1$, des entiers distincts $\mu_1, \ldots, \mu_s \in \{0, 1, \ldots, m-1\}$ tels que $I(\mathfrak{A})$ soit la réunion d'une partie finie I_0 et des ensembles $I_{m, \mu_i} = \{ n,\ n = \mu_i \bmod m \}$.

Il est équivalent de dire que $\delta_{m, \mu_i} . \mathfrak{A} = 0$ pour $i = 1, \ldots, s$ et, $I(\delta_{m,\mu}\mathfrak{A})$ est fini pour les autres μ.

Mahler établit le lemme suivant dans sa démonstration [20] :

Lemme. — *Soit K un corps commutatif de caractéristique zéro, algébriquement clos, et soit*

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n \in \mathcal{R}(K), \qquad a_n = \sum_{i=1}^{s} P_i(n)\, \alpha_i^n.$$

Soit $\sum = \{ \alpha_i / \alpha_j,$ racine de l'unité autre que $1 \}$. Si $I(\mathfrak{A})$ est infini, alors

$\sum \neq \emptyset$. Soit M le plus petit entier tel que $\zeta^M = 1$ pour tout $\zeta \in \sum$. Si $I_{m,\mu} = \{n,\ n = \mu \bmod m\} \subset I(\mathcal{A})$, alors $I_{m',\mu} \subset I(\mathcal{A})$, où $m' = (m, M)$.

PROPOSITION 2. — *Soient k un corps de nombres algébriques, A_k l'anneau des adèles de k. Définissons :*

$$\mathcal{R}(A_k, k) = \left\{ \sum_{n=0} a_n X^n,\ a_n \in A_k,\ \exists\, q_1, \ldots, q_h \in k,\ q_h \neq 0, \right.$$
$$\left. \text{et } a_{n+h} = q_1 a_{n+h-1} + \ldots + q_h a_n,\ \forall\, n \geq 0 \right\}.$$

Alors $\mathcal{R}(A_k, k)$ est une A_k-algèbre de Hadamard, et le théorème de Mahler est valable dans $\mathcal{R}(A_k, k)$.

Soit $\mathcal{A} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n \in \mathcal{R}(A_k, k)$ tel que $I(\mathcal{A})$ soit infini. Pour chaque valuation v de k, $a_n = (a_{n,v})$, posons

$$\mathcal{A}_v = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n,v} X^n \in \mathcal{R}(k_v).$$

Soit $Q^*(X) = X^h - q_1 X^{h-1} - \ldots - q_h$ et soit M l'entier déterminé par le lemme et qui ne dépend que de Q^*. Comme $I(\mathcal{A}) \subset I(\mathcal{A}_v)$, il existe un entier m_v, divisant M et tel que $I(\mathcal{A}_v)$ soit réunion d'une partie finie $I_{0,v}$ et d'un nombre fini de I_{m_v, μ_i}. Il suffit de prendre pour m le p. p. c. m. de ces m_v.

PROPOSITION 3. — *Soit K un corps commutatif de caractéristique zéro. Soient*

$$\mathcal{A} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n \in \mathcal{R}(K) \quad \text{et} \quad \mathcal{B} = \sum_{n=0}^{\infty} b_n X^n \in \mathcal{R}(K);$$

supposons $I(\mathcal{B}) \subset I(\mathcal{A})$, et posons $a_n = b_n c_n$ en convenant que $c_n = 1$ pour $n \in I(\mathcal{B})$. Si (c_n) ne prend qu'un nombre fini de valeurs distinctes, alors $\mathcal{C} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n X^n \in \mathcal{R}(K)$.

Soit c une valeur non nulle prise une infinité de fois par la suite c_n, et soit

$$I_c = \{n,\ c_n = c\} = I(\mathcal{A} - c\mathcal{B}).$$

Alors $\sum_{n \in I_c} X^n \in \mathcal{R}(K)$ par le théorème de Mahler.

Corollaire 1. — *Soit $\mathcal{A} \in \mathcal{R}(K)$ tel que la suite (a_n) ne prend qu'un nombre fini de valeurs distinctes. Alors la suite (a_n) est périodique.*

Remarque. — Il en résulte que

$$\mathcal{S}(K) \cap \mathcal{R}(K) = \mathcal{S}_0(K) = \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n, (a_n) \text{ périodique} \right\}.$$

C'est aussi une conséquence d'un théorème de Szegö [26]; comme autre conséquence de ce théorème, nous avons

$$\mathcal{S}(K) \cap \mathcal{J}(K) = \mathcal{S}_0(K)$$

parce que, si $f(X) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n \in \mathcal{J}(\mathbf{C})$, alors $f(z)$ est solution d'une équation différentielle linéaire à coefficients dans $\mathbf{C}(z)$, et n'admet donc qu'un nombre fini de points singuliers.

Corollaire 2. — *Soit K un corps commutatif de caractéristique zéro, algébriquement clos.*

Soient $\mathcal{A} \in \mathcal{R}(K)$, $\mathcal{B} \in \mathcal{R}(K)$ tels que $\mathcal{A}^s = \mathcal{B}^s$, s entier. Alors il existe $\Gamma \in \Lambda_s = \{ T \in \mathcal{R}(K), T^s = \delta \}$ tel que $\mathcal{A} = \mathcal{B}\,\Gamma$.

Remarquons que $\Gamma = \sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n X^n \in \Lambda_s \Longleftrightarrow (\gamma_n)$ est une suite périodique de racines s-ième de l'unité.

Corollaire 3. — *Soit* $\mathcal{A} \in \mathcal{R}(\mathbf{R})$ *et* $\operatorname{sgn}(a_n) \in \{ 0, 1, -1 \}$. *Alors :*

$$\sum_{n=0}^{\infty} | a_n | X^n \in \mathcal{R}(\mathbf{R}) \quad \Longleftrightarrow \quad \operatorname{sgn}(a_n)) \textit{ est périodique.}$$

Proposition 4. — *Soient K un corps commutatif de caractéristique zéro et $E = \{ \sigma_1, \ldots, \sigma_d \}$ un ensemble fini d'endomorphismes de K.*

Soit $\mathcal{A} = \sum_n a_n X^n \in \mathcal{R}(K)$, et considérons $\bar{\sigma}\mathcal{A} = \sum_n \sigma_n(a_n) X^n$, $\bar{\sigma} = (\sigma_n)$, $\sigma_n \in E$ pour tout n.

Alors

$$\mathcal{B} = \bar{\sigma}\mathcal{A} \in \mathcal{R}(K) \quad \Longleftrightarrow \quad \exists\, m \geqq 1 \quad \text{tel que } \sigma_{\mu+rm}(a_{\mu+rm}) = \sigma_{\mu}(a_{\mu+rm})$$
$$\text{pour} \quad \mu = 0, 1, \ldots, m-1, r \in \mathbf{N}.$$

Soit $\sigma \in E$ et $I_\sigma = \{ n, \sigma_n(a_n) = \sigma(a_n) \} = I(\mathcal{B} - \sigma\mathcal{A})$, et le raisonnement est analogue à celui de la proposition 3.

3. Extension du corps de base.

Pour $\mathcal{R}$, la proposition 2 du chapitre I se précise ainsi :

PROPOSITION 5. — *Soit k un corps commutatif de caractéristique zéro, et K une extension algébrique de degré fini d de k.*

Alors $\mathcal{R}(K)$ est une $\mathcal{R}(k)$-algèbre entière, libre, de rang d.

Supposons K galoisienne sur k, et soit $K = k(\theta)$; soit $F(X)$ le polynôme irréductible sur k de θ.

Soit $\Lambda = \{ T, T \in \mathcal{R}(K), F(T) = 0 \}$.

Tout $\mathcal{A} \in \mathcal{R}(K)$ s'écrit

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2 \theta + \ldots + \mathcal{A}_{d-1}\theta^{d-1}, \qquad \mathcal{A}_j \in \mathcal{R}(k),$$

et pour tout $\Gamma \in \Lambda$,

$$\mathcal{B} = \mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2 \Gamma + \ldots + \mathcal{A}_{d-1}\Gamma^{d-1}$$

a même polynôme caractéristique que $\mathcal{A}$ (« conjugué » de $\mathcal{A}$).

Remarquons que $\Gamma = \sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n X^n \in \Lambda \Leftrightarrow \gamma_n = \sigma_n(\theta)$, $\sigma_n \in \mathrm{Gal}(K/k)$ et (σ_n) périodique.

PROPOSITION 6. — *Soit K un corps commutatif, de caractéristique zéro, algébriquement clos. K s'identifie à un sous-corps de $\mathcal{R}(K)$.*

La fermeture intégrale de K dans $\mathcal{R}(K)$ est $\mathcal{S}_0(K)$, et $\mathcal{S}_0(K)$ est intégralement fermée dans $\mathcal{R}(K)$.

Soit $\mathcal{A} = \sum_n a_n X^n \in \mathcal{R}(K)$, entier sur $\mathcal{S}_0(K)$

$$\mathcal{A}^s + \mathcal{B}_1 \mathcal{A}^{s-1} + \ldots + \mathcal{B}_s = 0, \qquad \mathcal{B}_j \in \mathcal{S}_0(K), \qquad \mathcal{B}_j = \sum_{n=0}^{\infty} b_{n,j} X^n$$

soit

$$P_n(Y) = Y^s + b_{n,1} Y^{s-1} + \ldots + b_{n,s},$$

il existe un entier $m \geqq 1$ tel que $P_{n+m}(Y) = P_n(Y)$ pour tout n, d'où $\mathcal{A} \in \mathcal{S}_0(K)$.

CHAPITRE III.

Anneaux de Fatou.

1. Définitions.

1° Soit K un corps commutatif; une fraction rationnelle

$$P(X)/Q(X) \in K(X)$$

est dite normalisée si $\deg P < \deg Q$, $(P, Q) = 1$ et $Q(0) = 1$. Nous lui associons alors sa série de Taylor à l'origine $\sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n \in \mathcal{R}(K)$.

2° PROPOSITION 1. — *Soit A un anneau commutatif unitaire intègre, et soit K son corps des quotients. Les deux propriétés suivantes sont équivalentes :*

(i) $\mathcal{R}(A) = \mathcal{R}(A, K)$;

(ii) *Pour toute fraction rationnelle normalisée*

$$P(X)/Q(X) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n \in \mathcal{R}(K),$$

$a_n \in A$ pour tout n implique $Q(X) \in A[X]$.

REMARQUES.

Il en résulte que $P(X) \in A[X]$, et que les zéros de $Q^*(X)$, polynôme réciproque de $Q(X)$ (qui sont les inverses des pôles de la fraction rationnelle), sont des entiers algébriques sur A.

Si L est un corps commutatif quelconque contenant K, et si A est un anneau de Fatou, $\mathcal{R}(A, L) = \mathcal{R}(A)$.

EXEMPLES : Un corps commutatif, **Z** (lemme de Fatou [16]), un anneau de Dedekind [22] un anneau factoriel [14] sont des anneaux de Fatou.

2. Propriétés.

PROPOSITION 2. — *Soient L un corps commutatif, $(A_\alpha)_{\alpha \in I}$ une famille de sous-anneaux de L, $A = \bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha$. Si chaque A_α est un anneau de Fatou, alors A est un anneau de Fatou.*

Soient K le corps des quotients de A, K_α celui de A_α, $K \subset K_\alpha$. Soit $P(X)/Q(X) \in K(X)$, normalisée, et $P(X)/Q(X) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n$, $a_n \in A$ pour tout n. Alors pour chaque α, $Q(X) \in A_\alpha[X]$.

Corollaire. — *Tout anneau commutatif unitaire intègre possède une enveloppe de Fatou (plus petit anneau de Fatou le contenant).*

En effet, le corps des quotients K de A est un anneau de Fatou, et donc l'ensemble des sous-anneaux de K, contenant A et qui soient de Fatou, n'est pas vide.

Proposition 3. — *Un anneau de Fatou est complètement intégralement clos.*

Soit $\alpha \in K$, corps des quotients de A, tel qu'il existe $d \in A$, $d \neq 0$ et $d\alpha^n \in A$ pour tout n. Alors $\sum_{n=0}^{\infty} d\alpha^n x^n = d/(1 - \alpha X)$ est normalisée dans $K(X)$, d'où $\alpha \in A$.

Proposition 4. — *Soient K un corps commutatif, v une valuation non triviale de K, A l'anneau de la valuation.*

A est un anneau de Fatou si, et seulement si, v est de hauteur 1.

Si A est de Fatou, donc complètement intégralement clos, v est de hauteur 1 ([9], chap. VI, § 4, prop. 9).

Supposons v de hauteur 1, et soit K_1 le complété de K pour v. Soit $\mathfrak{A} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n = P(X)/Q(X) \in K(X)$, normalisée. En nous plaçant dans un corps de décomposition sur K_1 de $Q(X)$ muni d'un prolongement de v :

$$a_n \in A \quad \text{pour tout } n \quad \Rightarrow \quad |a_n| \leqq 1 \quad \text{pour tout } n.$$

Le rayon de convergence de la série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ est supérieur ou égal à 1, les pôles de la fraction rationnelle sont extérieurs au dique unité. Les zéros de $Q^*(X)$ sont de valeur absolue $\leqq 1$, donc $Q^*(X) \in A[X]$.

Remarque. — La démonstration montre que si

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n = P(X)/Q(X) \in K(X),$$

normalisée, est telle que $\overline{\lim} |a_n|^{1/n} \leqq 1$, alors $Q(X) \in A[X]$.

THÉORÈME. — *Soient K un corps commutatif, et A un sous-anneau de K intersection d'anneaux de valuation de K de hauteur* 1. *Alors A est un anneau de Fatou.*

COROLLAIRE 1. — *Un anneau de Krull est un anneau de Fatou.*

Nous retrouvons ainsi les exemples cités dans le paragraphe 1.

COROLLAIRE 2. — *Soit A un anneau noethérien. Alors :*

$$A \text{ est un anneau de Fatou} \iff A \text{ est intégralement clos.}$$

Cela résulte, pour un anneau noethérien, de l'équivalence entre *être intégralement clos* et *être de Krull.*

PROPOSITION 5. — *Soient A un anneau de Fatou, de corps des quotients K, L une extension algébrique de degré fini de K, A' l'anneau des entiers algébriques de L sur A. Alors A' est un anneau de Fatou.*

LEMME [22]. — *Soient A un anneau commutatif unitaire intègre, K son corps des quotients. Soit* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n = P(X)/Q(X) \in \mathcal{R}(A, K)$, *normalisée,*

$$a_{n+h} = q_1 a_{n+h-1} + \ldots + q_h a_n, \quad \forall n \geq 0, \qquad q_i \in K,$$

alors il existe une suite (a'_n) de A vérifiant la même relation de récurrence que les (a_n), et telle que $a'_0 = a'_1 = \ldots = a'_{h-2} = 0$.

Démonstration de la proposition 5. — Soit

$$\mathcal{A} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n = P(X)/Q(X) \in \mathcal{R}(A', L),$$

normalisée.

Par le lemme, nous pouvons toujours supposer $P(X) = aX^{h-1}$, $a \in L$.

(*a*) Supposons L extension purement inséparable de K. p étant la caractéristique de K, il existe un entier e tel que $a_n^{p^e} \in A$ pour tout n,

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n^{p^e} X^{np^e} = \frac{P_1(X)}{Q_1(X)} = \frac{P(X)^{p^e}}{Q(X)^{p^e}}$$

est normalisée dans $K(X)$.

Il en résulte que $Q(X)^{p^e} \in A[X]$, d'où $Q(X) \in A'[X]$ par le lemme de Gauss.

(*b*) Supposons L séparable sur K, et soit L_1 l'extension galoisienne engendrée par L; soit $G = \mathrm{Gal}(L_1/K)$. Considérons

$$\prod_{\sigma \in G} \left(\sum_n \sigma(a_n) X^n \right) = \sum_n b_n X^n \quad \text{(produit au sens usuel)},$$

$b_n \in A$ pour tout n; soit $d = [L_1 : K]$, $[N(a) X^{d(h-1)}] / \left[\prod_{\sigma \in G} Q^\sigma(X) \right]$ est normalisée dans $K(X)$, d'où

$$Q_1(X) = \prod_{\sigma \in G} Q^\sigma(X) \in A[X] \subset A'[X], \quad \text{et} \quad Q(X) \in A'[X].$$

Corollaire. — *Soient A un anneau de Fatou, et $\overline{A}$ l'anneau de tous les entiers algébriques sur A (dans une clôture algébrique de K). Alors $\overline{A}$ est un anneau de Fatou.*

En particulier, l'anneau des entiers algébriques sur $\mathbf{Z}$ est un anneau de Fatou.

Chapitre IV.

Groupes des unités de $\mathcal{R}(K)$.

Tous les corps considérés dans ce chapitre et les chapitres suivants sont commutatifs, de caractéristique zéro.

1. Groupes des unités de $\mathcal{R}(\mathbf{C})$.

1° Nous avons défini

$$\mathcal{M} = \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n, \ \exists\, \varphi_1, \ldots, \varphi_h \text{ fonctions entières de type exponentiel minimum telles que } a_n = \sum_{i=1}^{h} \varphi_i(n) \alpha_i^n, \ \alpha_i \in \mathbf{C}^* \right\}.$$

$\mathcal{M}$ est une $\mathbf{C}$-algèbre de Hadamard, $\mathcal{R}(\mathbf{C})$ est une sous-algèbre de $\mathcal{M}$.

Proposition 1 [15]. — *Pour que $\mathcal{A} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n$ soit dans $\mathcal{M}$, il faut et il suffit que $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ soit le germe à l'origine d'une fonction nulle* *à l'infini, holomorphe dans* $\mathbf{C} - S_f$, *où* S_f *est un ensemble fini de points, ne contenant pas l'origine.*

Si $a_n = \sum_{i=1}^{h} \varphi_i(n)\alpha_i^n$, l'ensemble des points singuliers S_f de f est $\{\alpha_i^{-1}, i = 1, \ldots, h\}$.

THÉORÈME 1. — *Soit* $\mathcal{A} = \sum_{n=0}^{\infty} P(n)X^n$, $P(t) \in \mathbf{C}[t]$. *Si* $\mathcal{A}$ *possède une factorisation* $\mathcal{A} = \mathcal{B}.\ \mathcal{C}$ *dans* $\mathcal{M}$, *alors* $\mathcal{B}$ *et* $\mathcal{C}$ *sont dans* $\mathcal{R}(\mathbf{C})$.

Si $f(z)$ est une fonction entière, considérons

$$h_f(\varphi) = \overline{\lim_{r \to \infty}} \frac{\log|f(re^{i\varphi})|}{r}.$$

Posons

$$K(A, c) = \{f,\ f \text{ entière et } h_f(0) \leq A,\ h_f(\pi) \leq A,\ h_f(\pm \pi/2) \leq c\}.$$

Nous avons besoin des lemmes suivants :

LEMME 1 [10]. — *Soit*

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \qquad a_n \in \mathbf{C}, \qquad \overline{\lim}\, |a_n|^{1/n} < +\infty.$$

Si $F(z)$ *définit une fonction nulle à l'infini, holomorphe en dehors du secteur*

$$\begin{cases} |z| = e^A \quad et \quad |z| = e^{-A}, & avec \quad -c \leq \varphi = \arg z \leq c, \qquad A > 0, \\ \varphi = -c \quad et \quad \varphi = c, & avec \quad e^{-A} \leq |z| \leq e^A, \end{cases}$$

alors il existe $f \in K(A, c)$ *telle que* $f(n) = a_n$ *pour tout* n.

LEMME 2 [10] (*théorème de Carlson*). — *Si* $f \in K(A, c)$ *avec* $c < \pi$ *et* $f(n) = 0$ *pour tout* n, *alors* $f = 0$.

LEMME 3. — *Si* f *est une fonction entière de type exponentiel qui n'a qu'un nombre fini de zéros dans* $\mathbf{C}$, *alors* $f(z) = e^{az} P(z)$, *où* $a \in \mathbf{C}$ *et* $P(z) \in \mathbf{C}[z]$.

LEMME 4 [13] (*approximations diophantiennes simultanées*). — *Soient* $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ *des nombres réels de* $]0, 1[$. *Alors quel que soit* $h > 1$, *il existe des entiers non nuls* $m, m_1, \ldots, m_k$ *tels que* $|\alpha_j - (m_j/m)| < 1/mh$ *pour* $j = 1, \ldots, k$.

Démonstration du théorème 1. — *Soient*

$$\mathcal{B} = \sum_n b_n X^n \in \mathfrak{M}, \qquad \mathcal{C} = \sum_n c_n X^n \in \mathfrak{M},$$

$$\text{tels que } b_n . c_n = P(n) \text{ pour tout } n.$$

Soient $F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$, $G(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$, $z_1, \ldots, z_r$ les points singuliers de F, $z_{r+1}, \ldots, z_k$ ceux de G, et posons $z_j = \rho_j e^{i\alpha_j}$. Il existe des entiers $m, m_1, \ldots, m_k$ tels que

$$\left| \frac{\alpha_j}{2\pi} - \frac{m_j}{m} \right| < \frac{1}{5m}.$$

Sur chaque cercle de centre O et de rayon ρ_j, considérons le polygone régulier de m côtés ayant un sommet sur l'axe réel positif. Appelons $\mathcal{E}$ l'ensemble des arcs de ces cercles de milieux les sommets des polygones et d'angle $2\pi/5\,m$; les points singuliers de F et G sont sur des arcs de $\mathcal{E}$. Considérons

$$F_{m,\mu}(z) = \sum_{r=0}^{\infty} b_{\mu+rm} z^{\mu+rm}, \qquad \varphi_\mu(t) = \sum_{r=0}^{\infty} b_{\mu+rm} t^r,$$

$$G_{m,\mu}(z) = \sum_{r=0}^{\infty} c_{\mu+rm} z^{\mu+rm}, \qquad \psi_\mu(t) = \sum_{r=0}^{\infty} c_{\mu+rm} t^r.$$

De la proposition 1, chap I, qui s'applique ici, nous déduisons que les points singuliers de $\varphi_\mu(t)$ et $\psi_\mu(t)$ sont sur des arcs centrés sur l'axe réel positif et d'angle $2\pi/5$; il existe donc un secteur du type décrit dans le lemme 1 avec $c < \pi/2$, et contenant ces points singuliers. Il existe deux fonctions de $K(A, c)$, f_μ et g_μ telles que

$$b_{\mu+rm} = f_\mu(r), \qquad c_{\mu+rm} = g_\mu(r)$$

et

$$f_\mu(r)\, g_\mu(r) - P(\mu + rm) = 0 \quad \text{pour tout } r \geq 0.$$

Par le lemme 2, $f_\mu(z)\, g_\mu(z) = P(\mu + mz) = P_\mu(z)$, $\forall\, z \in \mathbf{C}$. D'où

$$f_\mu(z) = e^{\beta_\mu z} Q_\mu(z), \qquad g_\mu(z) = e^{\gamma_\mu z} R_\mu(z),$$
$$\beta_\mu, \quad \gamma_\mu \in \mathbf{C}; \qquad Q_\mu, \quad R_\mu \in \mathbf{C}[z].$$

Il en résulte

$$\varphi_\mu(t) = \frac{A_\mu(t)}{(1 - u_\mu t)^{s_\mu}}, \qquad \psi_\mu(t) = \frac{B_\mu(t)}{(1 - v_\mu t)^{l_\mu}},$$

A_μ, B_μ polynômes, $\deg A_\mu < s_\mu$, $\deg B_\mu < l_\mu$; u_μ, $v_\mu \in \mathbf{C}^*$, $u_\mu . v_\mu = 1$, d'où

$$F(X) = \sum_{\mu=0}^{m-1} \frac{X_\mu A_\mu(X^m)}{(1 - u_\mu X^m)^{s_\mu}}, \qquad G(X) = \sum_{\mu=0}^{m-1} \frac{X^\mu B_\mu(X^m)}{(1 - v_\mu X^m)^{l_\mu}}.$$

Corollaire 1. — *Si $\mathcal{A}$ a un pôle simple, alors les pôles de $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ sont simples. En particulier, pour $\mathcal{A} = \delta$,*

$$\mathcal{B} = \sum_{\mu=0}^{m-1} \frac{b_\mu X^\mu}{1 - u_\mu X^m} \qquad \textit{et} \qquad \mathcal{C} = \sum_{\mu=0}^{m-1} \frac{b_\mu^{-1} X^\mu}{1 - u_\mu^{-1} X^m},$$

b_μ, u_μ, $\in \mathbf{C}^*$ pour $\mu = 0, 1, \ldots, m-1$.

Corollaire 2. — *Soit $\mathcal{A} \in \mathcal{R}(\mathbf{C})$, $\mathcal{A}$ n'ayant qu'un seul pôle. Alors toute factorisation de $\mathcal{A}$ dans $\mathcal{M}$ est une factorisation dans $\mathcal{R}(\mathbf{C})$.*

Toute factorisation d'un élément de $\mathcal{P}(\mathbf{C})$ dans $\mathcal{M}$ est une factorisation dans $\mathcal{L}(\mathbf{C})$.

Toute factorisation d'un élément de $\mathcal{L}(\mathbf{C})$ dans $\mathcal{M}$ est une factorisation dans $\mathcal{L}(\mathbf{C})$.

Corollaire 3. — *$\mathcal{M}$ et $\mathcal{R}(\mathbf{C})$ ont même groupe d'unités.*

Le corollaire 1 nous permet de caractériser les éléments inversibles de $\mathcal{R}(\mathbf{C})$.

Théorème 2. — *Pour qu'un élément $\mathcal{A} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n$ de $\mathcal{R}(\mathbf{C})$ soit inversible dans $\mathcal{R}(\mathbf{C})$, il faut et il suffit qu'il existe un entier $m \geq 1$ et des nombres complexes non nuls $\alpha_0, \ldots, \alpha_{m-1}$ tels que, pour $\mu = 0, 1, \ldots$ $m - 1$, $a_\mu \neq 0$ et $a_{\mu+rm} = a_\mu . \alpha_\mu^r$ pour tout $r \geq 0$.*

2. Groupe des unités de $\mathcal{R}$ (K).

Théorème 3. — *Soit K un corps commutatif, de caractéristique zéro. Un élément $\mathcal{A} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n$ de $\mathcal{R}(K)$ est inversible dans $\mathcal{R}(K)$ si et seulement s'il existe un entier $m \geq 1$ et des éléments non nuls de K, $\alpha_0, \ldots, \alpha_{m-1}$ tels que, pour $\mu = 0, 1, \ldots, m-1$, $a_\mu \neq 0$ et $a_{\mu+rm} = a_\mu . \alpha_\mu^r$ pour tout $r \geq 0$.*

Le théorème 3 résulte du théorème 2 et de la proposition suivante :

PROPOSITION 2. — *Soit K un corps commutatif contenant* $\mathbf{Q}$, *et soit*

$$\mathcal{A} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n \in \mathcal{R}(K).$$

Alors :

(*a*) *Il existe une* $\mathbf{Q}$*-algèbre de type fini L, contenant tous les a_n et tous les coefficients de la récurrence (de longueur minimale) entre les a_n.*

(*b*) *Il existe un sous-corps K_1 de K, de degré de transcendance sur* $\mathbf{Q}$ *fini tel que $\mathcal{A} \in \mathcal{R}(K_1)$.*

En effet, soit $a_{n+h} = q_1 a_{n+h-1} + \ldots + q_h a_n$ la récurrence de longueur minimale vérifiée par les a_n. Il suffit de prendre pour L l'algèbre engendrée sur $\mathbf{Q}$ par $a_0, \ldots, a_{h-1}$ et $q_1, \ldots, q_h$, et pour K_1 l'extension de $\mathbf{Q}$ engendrée par ces éléments. Il suffit alors de remarquer que K_1 est isomorphe à un sous-corps de $\mathbf{C}$ pour obtenir le théorème 3.

COROLLAIRE. — *Soit A un anneau de Fatou, de corps des quotients de caractéristique zéro; et soit $\mathcal{G}$ le groupe des unités de $\mathcal{R}(A)$. Alors :*

$$\mathcal{A} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n \in \mathcal{G} \iff \text{il existe } m \geqq 1, \alpha_0, \ldots, \alpha_{m-1} \in A^* \textit{ tels que, pour } \mu = 0, 1, \ldots, m-1,$$
$$a_\mu \in A^* \quad \text{et} \quad a_{\mu+rm} = a_\mu \alpha_\mu^r \textit{ pour tout } r \geqq 0.$$

Nous pouvons prendre par exemple pour A un anneau d'entiers algébriques sur $\mathbf{Z}$, où $A = K[t]$, K corps commutatif de caractéristique zéro.

Énonçons le théorème 3 en termes de récurrence linéaire :

PROPOSITION 3. — *Soit K un corps commutatif, de caractéristique zéro. Soit (a_n) une suite d'éléments non nuls de K. Pour que les suites (a_n) et $(1/a_n)$ vérifient chacune une relation de récurrence linéaire à coefficients constants, il faut et il suffit que la suite (a_n) soit formée d'un nombre fini de progressions géométriques régulièrement emboîtées.*

3. Applications.

PROPOSITION 4. — *Soit*

$$\mathcal{H}'(\mathbf{C}) = \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n,\ a_n \in \mathbf{C},\ \overline{\lim} \mid a_n \mid^{1/n} < +\infty \right\}.$$

Soit $\mathcal{A} \in \mathcal{H}'(\mathbf{C})$; *l'endomorphisme de* $\mathcal{H}'(\mathbf{C})$ *défini par* $T \mapsto \mathcal{A}$. T *est une convolution :*

$$T(z) \mapsto \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma T(u)\, \mathcal{A}\left(\frac{z}{u}\right) \frac{du}{u},$$

où Γ *est une courbe simple entourant l'origine et contenue dans le domaine de convergence de* $\mathcal{A}$ *et* T.

Pour que cet endomorphisme soit un automorphisme de $\mathcal{H}'(\mathbf{C})$ *tels que les noyaux* $\mathcal{A}$ *et* $\mathcal{A}^{-1}$ *soient des fonctions holomorphes dans* $\mathbf{C}$ *privé d'un nombre fini de points, il faut et il suffit que* $\mathcal{A}$ *soit de la forme* $\sum_{\mu=0}^{m-1} \frac{a_\mu X^\mu}{1-\alpha_\mu X^m}$, a_μ, $\alpha_\mu \in \mathbf{C}^*$ *pour* $\mu = 0, 1, \ldots, m-1$.

Proposition 5. — *Si un élément* $\mathcal{A}$ *de* $\mathcal{M}$ *vérifie une relation*

$$\mathcal{B}_0 \mathcal{A}^s + \mathcal{B}_1 \mathcal{A}^{s-1} + \ldots + \mathcal{B}_s = 0,$$

avec $\mathcal{B}_j \in \mathcal{M}$, $j = 0, 1, \ldots, s-1$, *et* $\mathcal{B}_s \in \Theta(\mathbf{C})$, $\mathcal{B}_s \neq 0$, *alors* $\mathcal{A} \in \mathcal{R}(\mathbf{C})$.

Il suffit de remarquer que $-\mathcal{A}(\mathcal{B}_0 \mathcal{A}^{s-1} + \ldots + \mathcal{B}_{s-1}) = \mathcal{B}_s$ est une factorisation de $\mathcal{B}_s$ dans $\mathcal{M}$.

Proposition 6. — *Soit* K *un corps commutatif, de caractéristique zéro, algébriquement clos. L'équation* $T^s = P(\theta)$, *où* $P(\theta) \in \Theta(K)$, *a une solution dans* $\mathcal{R}(K)$ *si, et seulement si, le polygone* $P(X)$ *est la puissance s-ième d'un polygône* $Q(X)$. *Toutes les solutions sont alors de la forme* $Q(\theta).\Gamma$, *où* $\Gamma \in \Lambda_s = \left\{ \sum_n \zeta_n X^n,\ \zeta_n^s = 1 \text{ pour tout } n, \text{ et } (\zeta_n) \text{ périodique} \right\}$.

Si T_0 est une solution dans $\mathcal{R}(K)$, alors elle est dans $\mathcal{L}(K)$ (corollaire 2 du théorème 1); il existe un entier $m \geq 1$ et des polynômes $Q_\mu(X) \in K[X]$ tels que

$$P(\mu + mr) = Q_\mu(r)^s \qquad \text{pour} \quad \mu = 0, 1, \ldots, m-1,$$

d'où $P(X) = Q(X)^s$.

Le corollaire 2 de la proposition 3 (chap. II, § 2) complète la démonstration.

Proposition 7. — *L'équation* $T^s = P(\theta) h_\alpha + Q(\theta)$, *avec* $P \neq 0$, $Q \neq 0$, $\alpha \neq 0$, $\deg Q \leq s-2$, *n'a pas de solution dans* $\mathcal{R}(\mathbf{C})$.

S'il existe une solution $\mathcal{A} = \sum_n a_n X^n$ dans $\mathcal{R}(\mathbf{C})$, $a_n = \sum_{i=1}^{h} P_i(n)\, e^{\alpha_i n}$. Par le même raisonnement que celui de la démonstration du théorème 1, il existe un entier $m \geqq 1$ tel que

$$f_\mu(z) = \sum_{i=1}^{h} P_i(\mu + mz)\, e^{\alpha_i(\mu+mz)}$$

vérifie

$$f_\mu^s(z) = P(\mu + mz)\, e^{s(\mu+mz)} + Q(\mu + mz),$$

soit une relation de la forme :

$$f^s(z) = P(z)\, e^{\gamma z} + Q(z), \ \deg Q \leqq s - 2.$$

En dérivant $(s-1)$ cette relation, nous obtenons $f(z).g(z) = R(z)\, e^{\gamma z}$, d'où $f(z) = S(z)\, e^{\theta z}$, et $\mathcal{A} \in \mathcal{P}(\mathbf{C})$ contrairement à l'hypothèse.

Proposition 8. — *Soit K un corps de nombres algébriques, A_k son anneau d'idèles, $\mathcal{R}(A_k, k)$ l'algèbre de Hadamard associée* (prop. 2, chap. II).

$\mathcal{A} = \sum_n a_n X^n$ *est une unité de $\mathcal{R}(A_k, k)$ si et seulement s'il existe un entier $m \geqq 1$, des idèles $\alpha_0, \ldots, \alpha_{m-1}$ tels que, pour $\mu = 0, 1, \ldots, m-1$, a_μ est un idèle, et $a_{\mu+rm} = a_\mu . \alpha_\mu^r$ pour tout $r \geqq 0$.*

Soit $a_n = (a_{n,v})$, et considérons, pour chaque v, $\mathcal{A}_v = \sum_n a_{n,v} X^n$. $\mathcal{A}$ est une unité de $\mathcal{R}(A_k, k)$ si et seulement si $\mathcal{A}_v$ est une unité de $\mathcal{R}(k_v)$ pour chaque v. Il existe donc m_v tel que

$$a_{\mu+rm_v, v} = a_{\mu,v} . \alpha_{\mu,v}^r, \quad \forall\, r \geqq 0.$$

Par le lemme du théorème de Mahler (chap. II, § 2), m_v divise un entier M qui ne dépend pas de v, et il suffit de prendre pour m le p. p. c. m. des m_v.

Proposition 9. — *Soit K un corps fini, alors $\mathcal{R}(K^*, K)$ est le groupe des unités de $\mathcal{R}(K)$.*

En effet, $\mathcal{R}(K) = S_0(K)$.

CHAPITRE V.

Quotient de deux éléments de $\mathcal{R}(K)$.

K est un corps commutatif, de caractéristique zéro, et nous identifions son sous-corps premier à $\mathbf{Q}$.

1. Problème du quotient.

Soient $\mathcal{A} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n \in \mathcal{R}(K)$, $\mathcal{B} = \sum_{n=0}^{\infty} b_n X^n \in \mathcal{R}(K)$; si

$$I(\mathcal{B}) = \{ n,\ b_n = 0 \} \subset I(\mathcal{A}),$$

l'équation $\mathcal{B}T = \mathcal{A}$ a des solutions dans $\mathcal{H}(K)$, mais en général n'a pas de solution dans $\mathcal{R}(K)$.

Par le théorème de Mahler (§ 2, chap. II), nous pouvons toujours supposer $I(\mathcal{B})$ fini; nous conviendrons alors de poser $a_n = b_n c_n$ avec $c_n = 1$ pour $n \in I(\mathcal{B})$. Cette convention sera sous-entendue dans toute la suite.

Un certain nombre de conditions suffisantes ont été données pour que $\mathcal{B}.T = \mathcal{A}$ admette une solution dans $\mathcal{R}(K)$. C. PISOT conjecture :

(c) $$c_n \in \mathbf{Z} \quad \text{pour tout } n \Rightarrow \sum c_n X^n \in \mathcal{R}(\mathbf{Z}).$$

PROPOSITION 1 (POLYA-CANTOR) [11]. — *Si $\mathcal{B} \in \mathcal{L}(K)$ et c_n entier algébrique pour tout n, alors*

$$C = \sum c_n X^n \in \mathcal{R}(K).$$

G. PÓLYA a établi le résultat pour $b_n = n$ [25], D. G. CANTOR l'a généralisé à $b_n = P(n)$, $P \in \mathbf{C}[X]$ [11]. Par la proposition 2 du chapitre IV, le résultat s'étend à $b_n = P(n)$, $P \in K[X]$; K, corps commutatif de caractéristique zéro et par la proposition 1 du chapitre I, à $\mathcal{B} \in \mathcal{L}(K)$.

PROPOSITION 2 (PISOT [24]). — *Soit* $b_n = \lambda\alpha_0^n + \sum_{i=1}^{r} P_i(n)\alpha_i^n$, $\alpha_i \in \mathbf{C}^*$, $\lambda \in \mathbf{C}^*$, $P_i \in \mathbf{C}[X]$, avec $|\alpha_i| < |\alpha_0|$ *pour $i = 1, \ldots, r$. Alors $c_n \in \mathbf{Z}$ pour tout n implique $C \in \mathcal{R}(\mathbf{Z})$.*

En utilisant le principe de la démonstration de C. Pisot, ce résultat se généralise dans deux directions :

Proposition 3 (M^me Pathiaux [21]). — *Si* $b_n = P_1(n)\alpha_1^n + P_2(n)\alpha_2^n$, $\alpha_1 \in \overline{\mathbf{Q}}$, $\alpha_2 \in \overline{\mathbf{Q}}$, P_1 *et* $P_2 \in \overline{\mathbf{Q}}[X]$, *alors* c_n *entier algébrique pour tout* n *implique* $C \in \mathcal{R}(\overline{\mathbf{Q}})$.

Corollaire. — *Soient* $\mathcal{A} \in \mathcal{R}(\overline{\mathbf{Q}})$, $\mathcal{B} \in \mathcal{R}(\overline{\mathbf{Q}})$, $b_n = P_1(n)\alpha_1^n + P_2(n)\alpha_2^n$. *Si pour un entier* $s \geqq 1$, $a_n = b_n^s c_n$, *avec* c_n *entier algébrique pour tout* n, *alors* $C = \sum_n c_n X^n \in \mathcal{R}(\overline{\mathbf{Q}})$.

Il suffit de faire une récurrence sur s.

Proposition 4. — *Si* $b_n = P_0(n)\alpha_0^n + \sum_{i=1}^{r} P_i(n)\alpha_i^n$, $\alpha_i \in \overline{\mathbf{Q}}$, $P_i \in \overline{\mathbf{Q}}$ *et* $|\alpha_i| < |\alpha_0|$, $i = 1, \ldots, r$, *alors*

$$c_n \in \mathbf{Z}, \quad \forall n \geqq 0 \quad \Rightarrow \quad C \in \mathcal{R}(\mathbf{Z}).$$

Démonstration.

(*a*) Il existe une extension galoisienne k de $\mathbf{Q}$, de degré fini, telle que $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B} \in \mathcal{R}(k)$; soit $\mathfrak{A}$ l'anneau des entiers de k, il existe $q \in \mathfrak{A}$, $q \neq 0$ tel que $q^{n+1} b_n \in \mathfrak{A}$ pour tout $n \geqq 0$, nous pouvons supposer $\mathcal{B} \in \mathcal{R}(\mathfrak{A})$; nous pouvons aussi supposer que les α_i sont dans $\mathfrak{A}$ et que $P_i(X) \in \mathfrak{A}[X]$.

(*b*) Soit $G = \mathrm{Gal}(k/\mathbf{Q})$ et $P'_0 = \prod_{\sigma \in G} P_0^\sigma \in \mathbf{Z}[X]$. Posons $P'_i = P_i \prod_{\sigma \neq e} P_0^\sigma$. Comme

$$\prod_{\sigma \neq e} P_0(n)\, a_n = \left(P'_0(n)\alpha_0^n + \sum_{i=1}^{r} P'_i(n)\alpha_i^n \right) c_n,$$

nous pouvons supposer $P_0(X) \in \mathbf{Z}[X]$.

(*c*) Posons $b_n = P_0(n)\alpha_0^n(1 - u_n)$ et $v_n = P_0(n) u_n$.

Alors, pour $s \in N$,

$$\frac{P_0^{s+1}(n)}{1 - u_n} = P_0^{s+1}(n) + P_0^s(n) v_n + \ldots + P_0^{s-j}(n) v_n^{j+1} + \ldots + P_0(n) v_n^s + \frac{P_0(n) v_n^{s+1}}{P_0(n) - v_n}$$

et

$$\frac{P_0^{s+1}(n)\, a_n}{b_n} = a_n \alpha_0^{-n}(P_0^s(n) + \ldots + P_0^{s-j}(n) v_n^j + \ldots + v_n^s) + \frac{a_n v_n^{s+1}}{b_n},$$

avec $\omega_n = a_n \alpha_0^{-n}(P_0^s(n) + \ldots + P_0^{s-j}(n) v_n^j + \ldots + v_n^s)$,

$$c'_n = \omega_n + v_n^{s+1} \frac{a_n}{b_n},$$

en posant $c'_n = P_0^{s+1}(n) c_n$.

Comme $I(\mathcal{B})$ est fini et $b_n \in \mathfrak{A}$ pour tout n,

$$|N_{k/\mathbf{Q}}(b_n)| \geqq 1 \qquad \text{pour} \quad n \geqq n_1.$$

Par ailleurs, pour tout $\sigma \in G$, $\sum \sigma(b_n) X^n \in \mathcal{R}(k)$, d'où

$$|\sigma b_n| \leqq C_\sigma \rho_\sigma^n \qquad \text{pour} \quad n \geqq n_\sigma.$$

Il en résulte qu'il existe deux constantes positives C' et ρ' telles que

$$|b_n| \geqq C' \rho'^n \qquad \text{pour} \quad n \geqq n'.$$

Comme $|v_n| \leqq \lambda \rho''^n$ avec $\rho'' < 1$ par hypothèse, il existe un entier $s \geqq 1$ tel que

$$\left| \frac{a_n v_n^{s+1}}{b_n} \right| \leqq A \rho^n, \qquad \text{avec} \quad \rho < 1.$$

$\sum_n \omega_n X^n \in \mathcal{R}(\mathbf{C})$, et $\sum_n \frac{a_n v_n^{s+1}}{b_n} X^n$ a un rayon de méromorphie strictement supérieur à 1 ; par le théorème de Polya-Carlson [26], $c'_n \in \mathbf{Z}$ pour tout n implique $\sum_n c'_n X^n \in \mathcal{R}(\mathbf{Z})$. Enfin, par le théorème de Pólya-Cantor, $\sum_n c_n X^n \in \mathcal{R}(\mathbf{Z})$.

Proposition 5. — *Soit $\mathcal{A} \in \mathcal{R}(\overline{\mathbf{Q}})$, $\mathcal{B} \in \mathcal{R}(\overline{\mathbf{Q}})$ tels que*

$$b_n = \sum_{i=1}^{l} P_i(n) \alpha_i^n, \quad l \geqq 2 \qquad \text{et} \qquad |\alpha_1| = |\alpha_2| > |\alpha_i| \quad (i = 3, \ldots, l).$$

Supposons que $u_n = P_1(n)\alpha_1^n + P_2(n)\alpha_2^n \in \mathbf{Z}$ pour tout $n \geqq 0$, et soit $a_n = b_n c_n$. Alors :

$$c_n \in \mathbf{Z}, \quad \forall n \geqq 0 \quad \Rightarrow \quad C \in \mathcal{R}(\mathbf{Z}).$$

Nous pouvons toujours supposer a_n et b_n entiers algébriques pour tout n. Posons $b_n = u_n - v_n$, et considérons

$$c'_n = u_n^{s+1} c_n = \frac{a_n u_n^{s+1}}{b_n} = a_n(u_n^s + u_n^{s-1} v_n + \ldots + v_n^s) + \frac{a_n v_n^{s+1}}{b_n}.$$

Comme pour la proposition 4, nous obtenons $\sum c'_n X^n \in \mathcal{R}(\mathbf{Z})$ et par le corollaire de la proposition 3, $\sum c_n X^n \in \mathcal{R}(\mathbf{Z})$.

2. Suites de Pólya.

DÉFINITION 1. — *Une suite (a_n) de $\mathbf{Q}$ est dite de Pólya si, pour presque tout nombre premier p, la valuation p-adique v_p est triviale sur la suite (a_n).*

$\mathcal{P}((a_n))$ désigne l'ensemble des p pour lesquels v_p n'est pas triviale sur la suite.

Une suite de nombres algébriques (a_n) est de Pólya si la suite $(N(a_n))$, où $N(a)$ est la norme absolue de a, est une suite de Pólya de $\mathbf{Q}$.

L'ensemble des suites de Pólya est multiplicativement stable.

DÉFINITION 2. — *Soit K un corps commutatif; une série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n$ est dite une fonction de Pólya s'il existe un entier $m \geq 1$, des éléments $\alpha_0, \ldots, \alpha_{m-1}$ de K tels que pour $\mu = 0, \ldots, m-1$,*

$$a_{\mu+tm} = a_\mu . \alpha_\mu^t \quad \text{pour tout } t \geq 0.$$

Les fonctions de Pólya forment une partie multiplicativement stable de $\mathcal{R}(K)$.

THÉORÈME 1. — *Soit K un corps commutatif contenant $\mathbf{Q}$; soient*

$$\mathcal{A} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n \in \mathcal{R}(K) \qquad \text{et} \qquad \mathcal{B} = \sum_{n=0}^{\infty} b_n X^n \in \mathcal{R}(K),$$

et $C = \sum_{n=0}^{\infty} c_n X^n$, défini par $a_n = b_n c_n$.

Si (c_n) est une suite de Pólya de $\mathbf{Q}$, alors C est une fonction de Pólya.

Pour $\mathcal{A} \in \mathcal{R}(\mathbf{Z})$ et $\mathcal{B} = \delta$, nous retrouvons un résultat de G. PÓLYA [25]:

PROPOSITION 6. — *Soit $\mathcal{A} = \sum_{n=0} a_n X^n \in \mathcal{R}(\mathbf{Z})$ tel que $\mathcal{P}((a_n))$ soit fini. Alors il existe un entier $m \geq 1$ et des entiers rationnels α_μ, $\mu = 0, 1, \ldots, m-1$, tels que*

$$\mathcal{A} = \sum_{\mu=0}^{m-1} \frac{a_\mu X^\mu}{1 - \alpha_\mu X^m}.$$

REMARQUE. — La proposition 6 permet de donner une autre démonstration du théorème 3 du chapitre IV, lorsque $K = \mathbf{Q}$ [unités de $\mathcal{R}(\mathbf{Q})$].

En effet, soit $\mathcal{A} = \sum_n a_n X^n \in \mathcal{R}(\mathbf{Q})$ tel que $a_n \neq 0$ pour tout n, et $\sum_n X^n/a_n \in \mathcal{R}(\mathbf{Q})$. Il existe q et q', éléments non nuls de $\mathbf{Z}$, tels que

$$u_n = q^{n+1} a_n \in \mathbf{Z}, \quad \forall\, n \geqq 0,$$

$$v_n = \frac{q'^{n+1}}{a_n} \in \mathbf{Z}, \quad \forall\, n \geqq 0,$$

d'où

$$u_n v_n = (qq')^{n+1},$$

(u_n) et (a_n) sont des suites de Pólya de $\mathbf{Q}$.

Comme conséquence du théorème 1, nous pouvons énoncer un résultat de « localisation » :

THÉORÈME 2. — *Soit (a_n) une suite de Pólya de $\mathbf{Q}$. Alors*

$$\mathcal{A} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n \in \mathcal{R}(\mathbf{Q})$$

équivaut à :

(i) *Pour tout nombre premier p, $\mathcal{A}_p = \sum_{n=0}^{\infty} | a_n |_p X^n \in \mathcal{R}(\mathbf{Q})$, et*

(ii) $\mathcal{A}_0 = \sum_{n=0}^{\infty} \operatorname{sgn}(a_n) X^n \in \mathcal{R}(\mathbf{Q})$.

REMARQUE. — Soit (a_n) une suite de $\mathbf{Q}^*$. Alors :

$$(a_n) \text{ est une suite de Pólya} \Longleftrightarrow \text{pour presque tout } p,\ \mathcal{A}_p = \delta,$$

et nous avons une « formule du produit » dans $\mathcal{R}(\mathbf{Q})$:

$$\mathcal{A} . \mathcal{A}_0 \prod_p \mathcal{A}_p = \delta.$$

3. Démonstration du théorème 1.

LEMME 1. — *Soient $\mathcal{A} = \sum_n a_n X^n \in \mathcal{R}(\mathbf{C})$, $\mathcal{B} = \sum_n b_n X^n \in \mathcal{R}(\mathbf{C})$.*

(*a*) *Il existe un entier $m \geqq 1$ tel que, pour chaque $\mu = 0, 1, \ldots, m-1$, les couples*

$$\mathcal{A}_{m,\mu} = \sum_{t=0}^{\infty} a_{\mu+tm} X^t \quad \text{et} \quad \mathcal{B}_{m,\mu} = \sum_{t=0}^{\infty} b_{\mu+tm} X^t$$

satisfont à la propriété (π) :

(π) *Soient* $\{\alpha_i\}$ *les pôles de* $\mathcal{A}_{m,\mu}$, $\{\beta_i\}$ *ceux de* $\mathcal{B}_{m,\mu}$; *aucun des quotients* α_i/α_j, β_i/β_j, α_i/β_j, $\alpha_i\beta_j/\alpha_j\beta_i$ *n'est une racine de l'unité autre que* 1.

(b) *Si* $\mathcal{A}$ *et* $\mathcal{B}$ *satisfont à la propriété* (π), *et s'il existe une relation de la forme* $a_{\mu+tm} = c_\mu \gamma_\mu^t b_{\mu+tm}$ *pour* $t \geqq t_0$, *alors* $a_n = c\gamma^n b_n$ *pour tout* $n \geqq 0$.

Si α est pôle de $\mathcal{A}_{m,\mu}$, il existe α' pôle de $\mathcal{A}$ tel que $\alpha = \alpha'^m$; il suffit de considérer les quotients α'_i/α'_j, ..., relatifs à $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$, et de choisir un entier m tel qu'aucune puissance m-ième de ces quotients ne soit une racine de l'unité autre que 1.

Soient

$$a_n = \sum_{i=1}^{l} P_i(n)\alpha_i^n, \qquad b_n = \sum_{i=1}^{l'} Q_i(n)\beta_i^n,$$

$\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ satisfaisant à (π), et supposons $a_{\mu+tm} = c_\mu \gamma_\mu^t b_{\mu+tm}$ pour $t \geqq t_0$. Les α_i^m sont distincts par (π), de même les β_i^m, d'où $l = l'$, et en arrangeant convenablement les indices :

$$\alpha_i^m = \gamma_\mu \beta_i^m \qquad (i = 1, \ldots, l),$$

d'où $\alpha_i = \gamma\beta_i$ par (π).

Par ailleurs,

$$P_i(\mu + tm) = c_\mu Q_i(\mu + tm) \qquad (i = 1, \ldots, l;\ t \geqq t_0),$$

d'où

$$P_i(X) = c\, Q_i(X) \qquad (i = 1, \ldots, l).$$

Remarque. — Pour (b), il suffit de supposer $a_n = c\gamma^n b_n$ pour une infinité de n, et d'utiliser le théorème de Mahler.

Lemme 2. — *Soit* $\mathcal{A} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n \in \mathcal{R}(\mathbf{Q})$, *et soit* p *un nombre premier. Alors il existe un entier* $m \geqq 1$, *et un entier* m_0, *tels que* $t \mapsto v_p(a_{m_0+tm})$ *soit une fonction affine.*

Démonstration.

(a) *Nous pouvons supposer* $\mathcal{A} \in \mathcal{R}(\mathbf{Z})$ *puisqu'il existe* $q \in \mathbf{Z}$, $q \neq 0$ *tel que* $q^{n+1} a_n \in \mathbf{Z}$ *pour tout* n.

(b) *Soit* E *un anneau commutatif fini, et soit* (a_n) *une suite de* E *vérifiant une relation de récurrence linéaire*

$$a_{n+h} = q_1 a_{n+h-1} + \ldots + q_h a_n, \qquad q_j \in E, \qquad q_h \neq 0.$$

Alors la suite (a_n) *est périodique à partir d'un certain rang* n_0; *et si* q_h *est inversible dans* E, $n_0 = 0$ (*suite strictement périodique*).

Il suffit de considérer la relation :

$$\begin{bmatrix} a_{n+1} \\ \\ \\ a_{n+h} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ & & & & \\ & & & 0 & 1 \\ q_h & \dots\dots & & q_2 & q_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_n \\ \\ \\ a_{n+h-1} \end{bmatrix}$$

$$A_{n+1} = M . A_n.$$

Comme E est fini, il existe $T > 0$, $n_0 \geqq 0$ tels que $A_{n_0+T} = A_{n_0}$, d'où $A_{n_0+T+n} = A_{n_0+n}$ pour tout $n \geqq 0$. Si $q_h \in E^*$, M est inversible, et $A_{n+T} = A_n$ pour tout $n \geqq 0$.

(c) *Soit K un corps commutatif valué, de valuation discrète, de corps résiduel fini; soient A son anneau de valuation, $\mathfrak{U}$ son groupe d'unités. Soit (a_n) une suite de A vérifiant une relation de récurrence linéaire (de longueur minimale)*

$$a_{n+h} = q_1 a_{n+h-1} + \ldots + q_h a_n \left\{ \begin{array}{ll} q_j \in A, & j = 1, \ldots, h-1, \\ q_h \in \mathfrak{U}, & \end{array} \right.$$

alors il existe une sous-suite $(a_{\mu+tm})$ de valuation constante.

En effet, soit a_μ tel que

$$|a_\mu| = \inf(|a_0|, \ldots, |a_{h-1}|),$$

et posons $a_\mu = \pi^\nu a'_\mu$, $a'_\mu \in \mathfrak{U}$.

π étant une uniformisante,

$$a_n = \pi^\nu a'_n \quad \text{pour tout } n \geqq 0.$$

Les a'_n sont dans A, et vérifient la même relation de récurrence que les a_n. Modulo l'idéal maximal de A, la suite $(\bar{a}'_n)$ est strictement périodique et $\bar{a}'_\mu \neq 0$.

(d) *K, A, $\mathfrak{U}$ étant les mêmes que dans (c), soit (a_n) une suite de K, définie par*

$$a_n = \sum_{i=1}^{s} P_i(n) \alpha_i^n, \qquad \alpha_i \in A, \qquad P_i \in K[X],$$

alors il existe une sous-suite $(a_{\mu+tm})$ telle que $t \mapsto v(a_{\mu+tm})$ soit affine pour $t \geqq t_0$.

En multipliant les a_n par $q \in A$, nous pouvons supposer $P_i \in A[X]$. Séparons les α_i en $\alpha_1, \ldots, \alpha_l \in \mathfrak{U}$, et $\alpha_{l+1}, \ldots, \alpha_s \notin \mathfrak{U}$, $0 \leqq l \leqq s$. Si $l = s$, c'est le cas (*c*). Si $l=0$. posons $\alpha_j=\pi^{\nu_j}\alpha''_j$, $\alpha''_j\in\mathcal{U}$, et soit $\nu=\inf\nu_j$. Posons alors

$$\alpha_j=\pi^{\nu}\alpha'_j,\qquad a'_n=\sum_{i=1}^{s}P_i(n)\alpha_i'^n,$$

alors $a_n=\pi^{\nu_n}a'_n$, et nous raisonnons sur la suite (a'_n).

Supposons donc $0<l<s$; et posons

$$u_n=\sum_{i=1}^{l}P_i(n)\alpha_i^n,\qquad v_n=\sum_{i=l+1}^{s}P_i(n)\alpha_i^n,$$

soit $|\pi|^{\lambda}=\inf(|\alpha_{l+1}|,\ldots,|\alpha_s|)$, $\lambda>0$, alors

$$|v_n|\leqq|\pi|^{\lambda n},\quad\forall n\geqq 0.$$

Les (u_n) vérifient une relation de récurrence linéaire :

$$u_{n+h}=q_1u_{n+h-1}+\ldots+q_hu_n\begin{cases}q_j\in A, & j=1,\ldots,h,\\ q_h\in\mathcal{U},\end{cases}$$

puisque $X^h-q_1X^{h-1}-\ldots-q_h=\prod_{j=1}^{l}(X-\alpha_j)^{m_j+1}$, $m_j=\deg P_j$, il existe une sous-suite $(u_{\mu+tn})$ de valuation constante, d'où

$$v(a_{\mu+tm})=v(u_{\mu+tm})+\nu(\mu+tm)\qquad\text{pour}\quad t\geqq t_0.$$

(*e*) *Soit* $\mathcal{A}\in\mathcal{R}(\mathbf{Z})$, $a_{n+h}=q_1a_{n+h-1}+\ldots+q_ha_n$, $q_j\in\mathbf{Z}$.

Considérons le corps de décomposition k *sur* $\mathbf{Q}$ *de* $X^h-q_1X^{h-1}-\ldots-q_h$, A *son anneau d'entiers. Soit* $\mathfrak{P}$ *un idéal premier de* A *au-dessus de* p, *et soit* K *le complété de* k *pour la valuation* $\mathfrak{P}$*-adique.*

Il suffit d'appliquer (*d*).

(*f*) *le lemme* 2 *peut s'énoncer pour un corps de nombres* k :

Soit $\mathcal{A}=\sum_n a_nX^n\in\mathcal{R}(k)$. *Pour toute valuation non archimédienne* v *de* k, *il existe une sous-suite* $(a_{m_0+tm})_{t\geqq 0}$, m_0 *et* m *dépendant de* v, *telle que* $t\to v(a_{m_0+tm})$ *soit une fonction affine.*

Démonstration du théorème 1 :

(*a*) $K=\mathbf{Q}$. — Nous faisons une récurrence sur $l=\operatorname{card}\mathfrak{P}((c_n))$.

$l=0$, alors $c_n\{1,-1,0\}$; il suffit d'appliquer la proposition 3 du chapitre II.

Nous pouvons toujours supposer que $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ satisfont à la propriété (π) du lemme 1, sinon nous raisonnons sur chaque couple $(\mathcal{A}_{m,\mu}, \mathcal{B}_{m,\mu})$. Par le théorème de Mahler, nous pouvons supposer $I(\mathcal{A})$ fini, donc $I(\mathcal{B})$ fini. Pour les c_n non nuls, posons

$$c_n = \varepsilon_n . p_1^{\varphi_1(n)} \dots p_l^{\varphi_l(n)}, \qquad \varepsilon_n \in \{-1, +1\}, \qquad \varphi_j(n) \in \mathbf{Z}.$$

Il existe une sous-suite $(a_{\mu_1+tm_1})$ telle que $t \mapsto v_{p_1}(a_{\mu_1+tm_1})$ soit affine pour $t \geq t_1$; de la suite $(b_{\mu_1+tm_1})$, nous pouvons extraire une sous-suite $(b_{\mu_2+tm_2})$ de valuation v_{p_1} affine pour $t \geq t_2$. Il existe donc une suite $(c_{\mu+tm})$ telle que

$$v_{p_1}(c_{\mu+tm}) = \lambda t + s \qquad \text{pour} \quad t \geq t_0.$$

Posons

$$a_{\mu+tm} = p_1^{\lambda t+s} a'_{\mu+tm},$$

alors

$$a'_{\mu+tm} = c'_{\mu+tm} b_{\mu+tm} \qquad \text{pour} \quad t \geq t_0,$$

avec

$$c'_{\mu+tm} = \varepsilon_{\mu+tm} p_2^{\varphi_2(\mu+tm)} \dots p_l^{\varphi_l(\mu+tm)}.$$

Par l'hypothèse de récurrence, $\sum_{t=0}^{\infty} c'_{\mu+tm} X^t$ est une fonction de Pólya; il existe donc $m' \geq 1$ tel que $c'_{\nu+tm'} = c'_\nu \gamma'^t_\nu$, d'où

$$a_{\nu+tm'} = c_\nu \gamma^t_\nu . b_{\nu+tm'} \quad \text{pour tout } t \geq t_0,$$

et par le lemme 1,

$$a_n = c\gamma^n b_n \quad \text{pour tout } n.$$

(*b*) $K = \overline{\mathbf{Q}}$. — Il existe une extension galoisienne k de $\mathbf{Q}$, de degré fini, contenant tous les a_n, b_n, ainsi que les coefficients des récurrences qu'ils satisfont; soient $G = \mathrm{Gal}(k/\mathbf{Q})$, et N l'application-norme de k dans $\mathbf{Q}$.

$$\sigma(\mathcal{A}) = \sum_n \sigma(a_n) X^n \in \mathcal{R}(k) \quad \text{pour tout } \sigma \in G,$$

et

$$N(\mathcal{A}) = \sum_n N(a_n) X^n \in \mathcal{R}(\mathbf{Q}).$$

Soit $d = [k : \mathbf{Q}]$, $N(a_n) = c_n^d N(b_n)$, d'où, par (*a*),

$$\sum_n c_n^d X^n \quad \text{est une fonction de Pólya.}$$

Il existe $m \geqq 1$, tel que

$$c^d_{\mu+tm} = c^d_\mu . \gamma^t_\mu,$$

soit θ_μ tel que $\theta^d_\mu = \gamma_\mu$, alors $c_{\mu+tm} = c_\mu . \theta^t_\mu . \zeta_t$, avec $\zeta^d_t = 1$, mais alors $a_{\mu+tm} = c_\mu . \theta^t_\mu . b_{\mu+tm} . \zeta_t$,

d'où, par la proposition 3, chap. II,

$\sum_t \zeta_t X^t$ est une fonction de Pólya et $\sum_n c_n X^n$ est une fonction de Pólya.

(*c*) $K = \mathbf{C}$. — Il existe une $\mathbf{Q}$-algèbre L, de type fini, contenant tous les a_n, b_n, et les coefficients des récurrences correspondantes (prop. 2, chap. IV). Il existe un $\mathbf{Q}$-homomorphisme φ de L dans $\overline{\mathbf{Q}}$. Comme $\varphi(\mathcal{A})$ et $\varphi(\mathcal{B}) \in \mathcal{R}(\overline{\mathbf{Q}})$, et $\varphi(a_n) = \varphi(b_n) . c_n$ nous sommes ramenés à (*c*).

(*d*) K corps commutatif de caractéristique zéro. — Par la proposition 2 du chapitre IV, il existe un corps K_1, ayant un degré de transcendance fini sur $\mathbf{Q}$, et tel que $\mathcal{A} \in \mathcal{R}(K_1)$, $\mathcal{B} \in \mathcal{R}(K_1)$. K_1 est isomorphe à un sous-corps de $\mathbf{C}$.

4. Théorème de Pólya pour un corps de nombres.

Théorème 3 — *Soient k un corps de nombres algébriques, et (a_n) une suite de Pólya de k. Alors :*

$$\mathcal{A} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n \in \mathcal{R}(k) \iff \mathcal{A} \text{ est une fonction de Pólya.}$$

Nous pouvons toujours supposer $a_n \neq 0$ pour tout n; soit N l'application-norme de k dans $\mathbf{Q}$. Lorsque $\mathcal{A} \in \mathcal{R}(k)$, $\mathcal{B} = N(\mathcal{A})$ est une fonction de Pólya dans $\mathcal{R}(\mathbf{Q})$, donc inversible dans $\mathcal{R}(\mathbf{Q})$. $\mathcal{A}$ est alors elle-même inversible dans $\mathcal{R}(k)$, et par suite une *fonction de Pólya.*

Corollaire. — *Soit (a_n) une suite de Pólya de nombres algébriques. Alors :*

$$\mathcal{A} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n \in \mathcal{R}(\overline{\mathbf{Q}}) \iff \mathcal{A} \text{ est une fonction de Pólya.}$$

5. Applications.

Soit $a \in \mathbf{Q}^*$, $a \neq \pm 1$; soit $(\varphi(n))$ une suite de $\mathbf{Z}$. Alors :

$$\mathcal{A} = \sum_{n=0}^{\infty} a^{\varphi(n)} X^n \in \mathcal{R}(\mathbf{Q}) \iff \sum_{n=0}^{\infty} a^{-\varphi(n)} X^n \in \mathcal{R}(\mathbf{Q})$$

$$\iff \exists\, m \geqq 1, \text{ tel que, pour } \mu = 0, 1, \ldots, m-1, \; t \mapsto \varphi(\mu + tm) \text{ est une fonction affine.}$$

En effet, $(a^{\varphi(n)})$ est une suite de Pólya de $\mathbf{Q}$.

COROLLAIRE 1. — *Soit* (a_n) *une suite de* $\mathbf{Q}_p$. *Alors :*

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|_p X^n \in \mathcal{R}(\mathbf{Q}) \iff \exists\, m \geq 1, \text{ tel que, pour } \mu = 0, 1, \ldots, m-1,$$

$$t \mapsto v_p(a_{\mu+tm}) \text{ est affine.}$$

COROLLAIRE 2. — *Soit* (a_n) *une suite de* $\mathbf{Q}_p$, *et posons, pour* $a_n \neq 0$, $a_n = p^{-v_p(a_n)} b_n$ *pour* $a_n = 0$, $b_n = 0$. *Si* $\mathfrak{A} = \sum_n a_n X^n \in \mathcal{R}(\mathbf{Q}_p)$, *alors :*

$$\sum_n |a_n|_p X^n \in \mathcal{R}(\mathbf{Q}) \iff \sum_n b_n X^n \in \mathcal{R}(\mathbf{Q}_p).$$

Il suffit d'appliquer le théorème 1 et la proposition 7.

PROPOSITION 8. — *Soit* $\mathfrak{A} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha_n}{\beta_n} X^n \in \mathcal{R}(\mathbf{Q})$, $\alpha_n \in \mathbf{Z} - \{0\}$, $\beta_n \in \mathbf{N} - \{0\}$ $(\alpha_n, \beta_n) = 1$. *Supposons que* $\mathcal{P}((\alpha_n))$ *soit fini et que* $\mathcal{P}((\alpha_n)) \cap \mathcal{P}((\beta_n)) = \emptyset$. *Alors* $\sum_n \alpha_n X^n$ *et* $\sum_n \beta_n X_n$ *sont des fonctions de Pólya.*

Il existe $q \in \mathbf{Z} - \{0\}$, tel que $q^{n+1} \frac{\alpha_n}{\beta_n} = u_n \in \mathbf{Z}$ pour tout n. D'où

$$\mathcal{P}((\alpha_n)) \text{ fini} \Rightarrow \mathcal{P}((\beta_n)) \text{ et } \mathcal{P}((u_n)) \text{ sont finis.}$$

Pour tout $p \in \mathcal{P}((\alpha_n))$, comme $p \notin \mathcal{P}((\beta_n))$, $\sum_n |\alpha_n|_p X^n \in \mathcal{R}(\mathbf{Q})$, et il suffit d'appliquer le théorème 2.

COROLLAIRE 1. — *Soit* (a_n) *une suite de* $\mathbf{Z} - \{0\}$. *Alors :*

$$\sum_{n=0}^{\infty} X^n / a_n \in \mathcal{R}(\mathbf{Q}) \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n \in \mathcal{R}(\mathbf{Z}).$$

COROLLAIRE 2. — *Soit* (a_n) *une suite d'entiers algébriques non nuls. Si* $\sum_n X^n / a_n \in \mathcal{R}(\overline{\mathbf{Q}})$, *alors* $\sum_n a_n X^n$ *est une fonction de Pólya.*

PROPOSITION 9. — *Soit* $f(X) = P(X)/Q(X) \in \mathbf{Q}(X)$. *Si* f *n'est pas une constante, l'ensemble des nombres premiers, qui divisent l'un des termes de la suite* $(f(n))$, *est infini* [*ou qui divisent seulement une sous-suite* $(f(\mu + tm))_{t \in \mathbf{N}}$].

En effet, si $\mathcal{P}((f(n)))$ est fini, par le théorème 1, $\sum_{n=0}^{\infty} f(n)\, X^n$ est une fonction de Pólya, d'où f est un polynôme de degré zéro.

Proposition 10. — *Il n'existe pas de fraction rationnelle*

$$P(X)\,/\,Q(X) \in \mathbf{C}(X),$$

non polynôme, telle que $f(n)$ soit entier algébrique pour tout n (ou seulement pour les n d'une progression arithmétique).

Il suffit d'appliquer le théorème de Pólya-Cantor (propos. 1).

Proposition 11. — *Soient* $\mathcal{A} = \sum_n a_n X^n \in \mathcal{R}(\mathbf{Z})$, $\mathcal{B} = \sum_n b_n X^n \in \mathcal{R}(\mathbf{Z})$, $a_n = b_n c_n$. *Supposons que :*

(i) $c_n \in \mathbf{Z}$ *pour tout* n;

(ii) $\mathcal{P}((c_n)) \cap \mathcal{P}((\beta_n))$ *est fini;*

(iii) $\sup_n \tau(c_n) < +\infty$, *où* $\tau(d)$ *est le nombre de diviseurs positifs de* $d \in \mathbf{Z} - \{0\}$, $\tau(0) = 0$.

Alors (c_n) *est une suite de Pólya, et elle est périodique.*

Pour $\mathcal{B} = \delta$, nous retrouvons un résultat de J. Berstel [8]. Nous pouvons toujours supposer que $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ satisfont à la propriété (π) du lemme 1. Soit

$$a_n = \sum_{i=1}^{s} P_i(n)\, \alpha_i^n, \qquad a_{n+h} = q_1\, a_{n+h-1} + \ldots + q_h a^n,\ q_j \in \mathbf{Z},$$

la récurrence de longueur minimale. Supposons que $\mathcal{P}((c_n))$ ne soit pas fini. Soient $p_1 \in \mathcal{P}((c_n))$, $p_1 \notin \mathcal{P}((b_n))$, et p_1 ne divisant pas q_h. Modulo p_1, la suite $(\bar{c}_n)$ est strictement périodique, il existe une sous-suite $(c_{\mu_1 + tm_1})$ dont tous les termes sont divisibles par p_1. Si $\mathcal{P}((c_{\mu_1 + tm_1}))$ était fini, par la proposition 3 du chapitre II, $(c_{\mu_1 + tm_1})$ serait périodique et, par le lemme 1, (c_n) serait constante. Il existe donc $p_2 \in \mathcal{P}((c_{\mu_1 + tm_1}))$, $p_2 \neq p_1$, $p_2 \notin \mathcal{P}((b_{\mu_1 + tm_1}))$, et p_2 ne divisant pas q_h. Comme

$$a_{\mu + tm} = \sum_{i=1}^{s} P_i(\mu + tm)\, \alpha_i^m . (\alpha_i^m)^t \qquad [\alpha_i^m \text{ distincts par } (\pi)],$$

$$\prod_{i=1}^{s} (X - \alpha_i^m)^{m_i + 1} = X^l + \ldots \pm q_h^m.$$

La suite $(\bar{a}_{\mu_1+tm_1})$ modulo p_2 est strictement périodique, et p_2 divise tous les termes d'une sous-suite $(c_{\mu_2+tm_2})$. Nous construisons ainsi une suite infinie de nombres premiers distincts $p_1, p_2, \ldots$ divisant des termes de la suite (c_n), contrairement à l'hypothèse $\sup_n \tau(c_n) < +\infty$.

PROPOSITION 12. — *Si l'équation $\mathcal{A}.T = \delta$, où $\mathcal{A} \in \mathcal{R}(\overline{\mathbf{Q}})$, admet une solution dans $\mathcal{H}(\overline{\mathfrak{A}})$, où $\overline{\mathfrak{A}}$ est l'anneau d'entiers de $\overline{\mathbf{Q}}$, alors cette solution est dans $\mathcal{R}(\overline{\mathfrak{A}})$.*

C'est un cas particulier de la conjecture de PISOT.

CHAPITRE VI.

Suites de S-unités.

Soient k un corps de nombres algébriques, $\mathfrak{A}$ son anneau d'entiers, $\mathcal{U}$ son groupe d'unités; soit M l'ensemble des valuations de k, $\mathbf{j}$ le groupe des idèles de k. Pour toute partie finie S de M_k, contenant l'ensemble S_∞ des valuations archimédiennes, considérons $\mathbf{j}_S = \prod_{v \in S} k_v^* \prod_{v \notin S} \mathcal{U}_v$. k^* se plonge canoniquement dans $\mathbf{j}$, soit k_s l'image réciproque de $\mathbf{j}_s$; k_s est le groupe des S-unités de k.

Le théorème de Dirichlet-Minkowski-Hasse-Chevalley [28] donne la structure de k_S : il existe l S-unités fondamentales $\varepsilon_1, \ldots \varepsilon_l$ telles que toute S-unité ε s'écrit de manière unique

$$\varepsilon = \zeta \varepsilon_1^{u_1} \ldots \varepsilon_l^{u_l}$$

$u_j \in \mathbf{Z}$, ζ racine de l'unité dans k, et $k_S \simeq G \times \mathbf{Z}^l$, où G est le groupe des racines de l'unité de k. Pour $S = S_\infty$, alors $k_S = \mathcal{U}$, et $l = r$, nombre de Dirichlet de k.

Nous allons montrer que ces propriétés se « fonctorisent » par $\mathcal{R}$.

1. Suites d'unités de k.

THÉORÈME 1. — *Soit (a_n) une suite de $\mathcal{U}$, vérifiant une relation de récurrence linéaire à coefficients constants. Il existe alors un entier $m \geq 1$ des unités $\alpha_0, \ldots, \alpha_{m-1}$, tels que, pour $\mu = 0, 1, \ldots, m-1$, $a_{\mu+tm} = a_\mu \alpha_\mu^t$ pour tout $t \geq 0$.*

Soit $\mathcal{A} = \sum_n a_n X^n \in \mathcal{R}(\mathcal{U}, k)$; par l'application-norme N de k dans $\mathbf{Q}$:

$$\mathcal{B} = N(\mathcal{A}) \in \mathcal{R}(\mathbf{Q}) \qquad \text{et} \qquad \mathcal{B}^2 = \delta.$$

$\mathcal{A}$ est donc inversible dans $\mathcal{R}(k)$, et il suffit d'appliquer le théorème 2 du chapitre IV.

Corollaire. — *Toute suite d'unités algébriques vérifiant une relation de récurrence linéaire à coefficients constants (nécessairement algébriques) est formée d'un nombre fini de progressions géométriques régulièrement emboîtées.*

Théorème 2. — *Soient $\overline{\mathbf{Q}}$ la clôture algébrique de $\mathbf{Q}$, $\overline{\mathfrak{A}}$ son anneau d'entiers, $\overline{\mathcal{U}}$ son groupe d'unités, Γ son groupe de racines de l'unité. Alors $\mathcal{R}(\overline{\mathcal{U}}, \mathbf{Q})$ est le groupe des unités de $\mathcal{R}(\overline{\mathfrak{A}})$ et $\mathcal{R}(\Gamma, \overline{\mathbf{Q}})$ est le groupe de torsion de $\mathcal{R}(\overline{\mathcal{U}}, \overline{\mathbf{Q}})$.*

Si $\mathcal{A} = \sum_n a_n X^n \in \mathcal{R}(\overline{\mathcal{U}}, \overline{\mathbf{Q}})$, il existe un corps de nombres algébriques k tels que $\mathcal{A} \in \mathcal{R}(k)$, et $\mathcal{A}$ est inversible dans $\mathcal{R}(k)$ par le théorème 1.

Si $\mathcal{A}$ est un élément de torsion de $\mathcal{R}(\overline{\mathcal{U}}, \overline{\mathbf{Q}})$, alors $\mathcal{A} \in \mathcal{R}(\Gamma, \overline{\mathbf{Q}})$. Réciproquement, si $\mathcal{A} \in \mathcal{R}(\Gamma, \overline{\mathbf{Q}})$, comme $\Gamma \cap k$ est fini, il existe un entier e tel que $\mathcal{A}^e = \delta$.

Rappelons que $\mathcal{R}(\overline{\mathfrak{A}})$ est une $\mathcal{R}(\mathbf{Z})$-algèbre entière.

Corollaire. — *Toute suite de racines de l'unité vérifiant une relation de récurrence linéaire à coefficients constants est périodique.*

Pour décrire la structure de $\mathcal{R}(\mathcal{U}, k)$, introduisons la définition suivante :

Définition. — *Soit K un corps commutatif (ou un anneau de Fatou),*

$$S_j(K) = \left\{ \sum_{n=0} a_n X^n,\ \exists\, P_0, \ldots, P_{m-1} \in K[X],\ \textit{pour}\ \mu = 0, \ldots, m-1, \right.$$
$$\left. \deg P_\mu \leqq j\ \textit{et}\ a_{\mu+tm} = P_\mu(t)\ \textit{pour tout}\ t \geqq 0 \right\}.$$

$S_j(K)$ est un sous-groupe additif de $\mathcal{R}(K)$ [et de $\mathcal{T}(K)$],
$S_0(K)$ est une sous-algèbre de $\mathcal{R}(K)$.

Théorème 3.

$\mathcal{R}(\mathfrak{A})$ est un $\mathcal{R}(\mathbf{Z})$-module libre de type fini [et une $\mathcal{R}(\mathbf{Z})$-algèbre entière].

$\mathcal{R}(\mathcal{U}, k)$ est le groupe des unités de $\mathcal{R}(\mathfrak{A})$ et $\mathcal{R}(\mathcal{U}, k) \simeq S'_0 \times S_1^r$, où S'_0 est un sous-groupe de $S_0(k)$, dont tous les éléments sont d'ordre $\leqq e$, S_1 le groupe abélien $S_1(\mathbf{Z})$, et r le nombre de Dirichlet de k.

Soit ε une unité fondamentale de k; soit $(\varphi(n))$ une suite de $\mathbf{Z}$. Par le théorème 1,

$$\sum_n \varepsilon^{\varphi(n)} X^n \in \mathcal{R}(k) \quad \Leftrightarrow \quad \sum_n \varphi(n) X^n \in S_1(\mathbf{Z}).$$

L'application $\sum_n \varepsilon^{\varphi(n)} X^n \mapsto \sum_n \varphi(n) X^n$ est un isomorphisme du groupe multiplicatif $\mathcal{R}_\varepsilon = \left\{ \sum_n \varepsilon^{\varphi(n)} X^n \in \mathcal{R}(k) \right\}$ sur le groupe additif $S_1(\mathbf{Z})$.

Soit $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_r$ des unités fondamentales de k; soit $\mathfrak{A} = \sum_n a_n X^n \in \mathcal{R}(\mathfrak{U}, k)$.

Posons

$$a_n = \zeta_n \varepsilon_1^{\varphi_1(n)} \ldots \varepsilon_r^{\varphi_r(n)}, \qquad \zeta_n \in G, \qquad \varphi_j(n) \in \mathbf{Z}.$$

Comme $\mathfrak{A}$ est une fonction de Pólya, il existe un entier $m \geqq 1$ tel que $a_{\mu+tm} = a_\mu \alpha_\mu^t$ pour tout t et $\mu = 0, 1, \ldots, m-1$; par l'unicité de la représentation des unités, nous déduisons

$$\sum_n \varphi_j(n) X^n \in S_1(\mathbf{Z}) \quad \text{pour} \quad j = 1, \ldots, r$$

et

$$\sum_n \zeta_n X^n \in S_0(k).$$

Soit e l'ordre de G, alors $S_0' = \{ \mathfrak{A} \in S_0(k), \mathfrak{A}^e = \delta \}$. Notons le corollaire suivant :

Corollaire. — *Soit ε une unité de k, non racine de l'unité; soit $(\varphi(n))$ une suite de $\mathbf{Z}$. Alors :*

$$\sum_{n=0} \varepsilon^{\varphi(n)} X^n \in \mathcal{R}(k) \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{n=0} \varphi(n) X^n \in S_1(\mathbf{Z}).$$

2. Suites de S-unités.

Soit S une partie finie de M_k, contenant S_∞.

Toute suite de S-unités de k est une suite de Pólya. Toute suite de Pólya, (a_n), de nombres algébriques telle que $\sum_n a_n X^n \in \mathcal{R}(\overline{\mathbf{Q}})$, est une suite de S-unités d'un corps de nombres k pour un certain S.

PROPOSITION 1. — *Soit* (a_n) *une suite de S-unités de k. Alors :*

$$\mathcal{A} = \sum_n a_n X^n \in \mathcal{R}(k) \iff \mathcal{A} \text{ est une fonction de Pólya.}$$

PROPOSITION 2. — *Soit* $\mathcal{G}_S = \mathcal{R}(k_S, k)$; *alors* $\mathcal{G}_S$ *est un sous-groupe du groupe des unités* $\mathcal{G}$ *de* $\mathcal{R}(k)$ *et* $\mathcal{G} = \varinjlim_S \mathcal{G}_S$.

Il suffit d'appliquer le théorème 3 du chapitre V.

THÉORÈME 4. — *Si* $k_S \simeq G \times \mathbf{Z}^l$, *alors* $\mathcal{G}_S \simeq S'_0 \times S_1(\mathbf{Z})^l$.

C'est une généralisation du théorème 3. Il suffit de remarquer que si ε est une S-unité, non unité algébrique, alors

$$\sum_n \varepsilon^{\varphi(n)} X^n \mapsto \sum \varphi(n) X^n$$

est encore un isomorphisme du groupe multiplicatif $\mathcal{R}_\varepsilon$ sur le groupe additif $S_1(\mathbf{Z})$ par la proposition 7 du chapitre V.

COROLLAIRE 1. — *Soit* $\mathcal{A} \in \overline{\mathbf{Q}}^\star$, $\mathcal{A}$ *non racine de l'unité; soit* $(\varphi(n))$ *une suite de* $\mathbf{Z}$. *Alors*

$$\sum_n a^{\varphi(n)} X^n \in \mathcal{R}(\overline{\mathbf{Q}}) \iff \sum_n a^{-\varphi(n)} X^n \in \mathcal{R}(\overline{\mathbf{Q}})$$
$$\iff \sum_n \varphi(n) X^n \in S_1(\mathbf{Z}).$$

COROLLAIRE 2. — *Soit E un sous-groupe (multiplicatif) de type fini de* $\overline{\mathbf{Q}}^\star$. *Alors* $\mathcal{R}(E, \overline{\mathbf{Q}})$ *est un sous-groupe du groupe des unités de* $\mathcal{R}(\overline{\mathbf{Q}})$.

Signalons pour $\mathbf{C}$, le résultat suivant :

PROPOSITION 3. — *Soit* $D = \{z,\ z \in \mathbf{C},\ |z| = 1\}$. *Alors* $\mathcal{R}(D, \mathbf{C})$ *est un sous-groupe du groupe des unités de* $\mathcal{R}(\mathbf{C})$ *et* $\mathcal{R}(\Gamma, \mathbf{C})$ *est son sous-groupe de torsion.*

COROLLAIRE. — *Soit* $\mathcal{A} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n \in \mathcal{R}(\mathbf{C})$. *Alors :*

$$\sum_n \arg(a_n) X^n \in \mathcal{R}(\mathbf{C}) \Rightarrow \sum_n |a_n| X^n \in \mathcal{R}(\mathbf{C}).$$

APPENDICE

Nous signalons dans cet appendice certaines questions ouvertes et certaines conjectures.

CONJECTURES DE PISOT — *Soit K un corps commutatif contenant* $\mathbf{Q}$, *algébriquement clos.*

(P 1) *Soient* $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathcal{R}(K)$. *Si l'équation* $\mathcal{B}.T = \mathcal{A}$ *possède une solution dans* $\mathcal{H}(\mathbf{Z})$, *alors cette solution est dans* $\mathcal{R}(\mathbf{Z})$.

(P 2) *Soit* $\mathcal{A} \in \mathcal{R}(\mathbf{Z})$. *Si l'équation* $T^s = \mathcal{A}$ *possède une solution dans* $\mathcal{H}(\mathbf{Z})$, *alors elle possède une solution dans* $\mathcal{R}(K)$.

Remarquons que (P 1) est conséquence de (P 2) et de (P′ 1) :

(P′ 1) *Soient* $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathcal{R}(\mathbf{Z})$. *Si l'équation* $\mathcal{B}.T = \mathcal{A}$ *a une solution dans* $\mathcal{H}(\mathbf{Z})$, *alors cette solution est dans* $\mathcal{R}(\mathbf{Z})$.

En effet, si $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B} \in \mathcal{R}(\overline{\mathbf{Q}})$, il existe un corps de nombres k tel que $\mathcal{A}$, $\mathcal{B} \in \mathcal{R}(k)$, et par l'application-norme de k dans $\mathbf{Q}$, $d = [k : \mathbf{Q}]$:

$$N(\mathcal{A}) = T^d.N(\mathcal{B}).$$

Par (P′ 1), $T^d \in \mathcal{R}(\mathbf{Z})$ et par (P 2), $T \in \mathcal{R}(\mathbf{Z})$.

Pour un corps commutatif de caractéristique zéro, nous nous ramenons par la proposition 3 du chapitre IV au cas précédent.

C. PISOT a montré (P 2) pour $\mathcal{A}$ de la forme :

$$\mathcal{A} = \lambda h_{\alpha_0} + \sum_{i=1}^{l} P_i(\theta) h_{\alpha_i}, \quad \alpha_i \in \mathbf{C}^*, \qquad P_i(\theta) \in \mathbf{C}[\theta], \qquad \lambda \neq 0,$$

et

$$|\alpha_i| < |\alpha_0| \quad \text{pour } i = 1, \dots l \quad [24].$$

De même, si $\mathcal{A}$ est de la forme $P(\theta)$, $(P2)$ est vérifiée [17].

Dans le chapitre V, le théorème 1 a été établi lorsque (c_n) est une suite de Pólya de $\mathbf{Q}$. Il nous semble raisonnable de le conjecturer pour une suite de Pólya d'un corps de nombres algébriques. Il suffirait de démontrer :

(C) *Soient k un corps de nombres algébriques, $\mathcal{U}$ son groupe d'unités; soient* $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathcal{R}(k)$ *avec* $a_n = b_n c_n$. *Si* $c_n \in \mathcal{U}$ *pour tout n, alors* $C = \sum_n c_n X_n$ *est une fonction de Pólya.*

Ce résultat permettrait de préciser les solutions de l'équation $N(T) = \mathcal{A}$, $\mathcal{A} \in \mathcal{R}(\mathbf{Q})$, N l'application-norme de k dans $\mathbf{Q}$, lorsque cette équation possède une solution.

Notons que $N(T) = P(\theta)$, $P(\theta) \in \Theta(\theta)$, s'étudie avec le théorème 1 du chapitre IV. En particulier, « l'équation de Pell » $N(T) = \delta$ admet un ensemble dénombrable $\mathcal{G}_1$ de solutions, $\mathcal{G}_1$ étant le sous-groupe de $\mathcal{R}(\mathcal{U}, k)$ des $\sum a_n X^n$ tels que $N(a_n) = 1$ pour tout n.

Pour les anneaux de Fatou (chap. III), signalons les problèmes suivants :

(*a*) *La classe des anneaux de Fatou est-elle distincte de celle des anneaux complètement intégralement clos et de celle des anneaux intersections d'anneaux de valuation de hauteur* 1 ?

(*b*) *Les propriétés de transfert de la propriété d'être de Fatou, à un localisé, à un anneau de séries formelles, etc.* J -P CAHEN a montré que si A est de Fatou, $A[X]$ est de Fatou.

Les principales propriétés de $\mathcal{R}(K)$ ont été démontrées lorsque K est de caractéristique zéro. Si K est un corps fini, $\mathcal{R}(K) = S_0(K)$. Par contre, pour un corps non fini de caractéristique p, tous les problèmes restent ouverts.

D'autres sous-algèbres de $\mathcal{R}(K)$ peuvent être étudiées, en particulier, $\mathcal{J}(K)$ généralise $\mathcal{R}(K)$.

Les conjectures signalées sont des cas particuliers d'équations sur $\mathcal{R}(K)$; d'autres équations pourraient être étudiées.

On peut également envisager divers produits de Hadamard à plusieurs variables; certains résultats ont été obtenus dans le cas d'indéterminées non commutatives par des élèves de M.-P. SCHÜTZENBERGER. D'autres produits, que le produit de Hadamard, peuvent être envisagés, par exemple le produit de Hurwitz :

$$\sum_{n=0} a_n X^n \sum_{n=0}^{\infty} b_n X^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n X^n,$$

avec

$$c_n = a_n b_0 + \mathcal{C}_n^1 a_{n-1} b_1 + \ldots + \mathcal{C}_n^k a_{n-k} b_k + \ldots + a_0 b_n.$$

Signalons que, pour un corps de nombres k, le plongement de k dans A, ou $\mathbf{J}_k$ permet des interprétations topologiques sur $\mathcal{R}(k)$.

Pour $\mathcal{A} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n \in \mathcal{R}(\mathbf{R})$, on peut considérer $[\mathcal{A}] = \sum_n [a_n] X^n$, où $[a]$ est la partie entière de a. Des conditions sur la rationalité de $[\mathcal{A}]$ ont été données par C. PISOT [24] et D. G. CANTOR [12].

BIBLIOGRAPHIE.

[1] Benzaghou (Benali). — Sur l'algèbre de Hadamard des fractions rationnelles, *Séminaire Delange-Pisot-Poitou : Théorie des nombres*, 9e année, 1967-1968, n° 15, 16 p.

[2] Benzaghou (Benali). — Sur le quotient de Hadamard de deux fractions rationnelles, *Séminaire Delange-Pisot-Poitou : Théorie des nombres*, 10e année, 1968-1969, n° 1, 14 p.

[3] Benzaghou (Benali). — Anneaux de Fatou, *Séminaire Delange-Pisot-Poitou : Théorie des nombres*, 10e année, 1968-1969, n° 9, 8 p.

[4] Benzaghou (Benali). — Algèbres de Hadamard, *Séminaire Dubreil-Pisot : Algèbre et théorie des nombres*, 22e année, 1968-1969, n° 13, 13 p.

[5] Benzaghou (Benali). — Sur l'algèbre des fractions rationnelles de Hadamard, *C. R. Acad. Sc.*, Série A, t. 166, 1968, p. 652-654.

[6] Benzaghou (Benali). — Sur le quotient de Hadamard de deux fractions rationnelles, *C. R. Acad. Sc.*, Série A, t. 267, 1968, p. 212-214.

[7] Benzaghou (Benali). — Sur les suites d'unités algébriques vérifiant une relation de récurrence linéaire, *C. R. Acad. Sc.*, Série A, t. 267, 1968, p. 913-915.

[8] Berstel (Jean). — Une application d'un théorème de Mahler aux propriétés arithmétiques des coefficients des séries rationnelles, *C. R. Acad. Sc.*, Série A, t. 266, 1968, p. 693-695.

[9] Bourbaki (Nicolas). — *Algèbre commutative*. Chap. 6 : *Valuations*. — Paris, Hermann, 1964 (*Act. scient. et ind.*, 1308; *Bourbaki*, 30).

[10] Buck (R. C.). — A class of entire functions, *Duke math. J.*, t. 13, 1946, p. 541-559.

[11] Cantor (D. G.). — On arithmetic properties of coefficients of rational functions, *Pacific J. of Math.*, t. 15, 1965, p. 55-58.

[12] Cantor (D. G.). — Irrational power series, *Koninkl. Nederl. Akad. van Wet., Proc.*, Séries A, t. 68, 1965, p. 777-786; *Indagationes Math.*, t. 27, 1965.

[13] Cassels (J. W. S.). — *An introduction to diophantine approximation*. — Cambridge, at the University Press, 1957 (*Cambridge Tracts in Mathematics and mathematical Physics*, 45).

[14] Dress (François). — Familles de séries formelles et ensembles de nombres algébriques, *Ann. scient. Éc. Norm. Sup.*, 4e série, t. 1, 1969, p. 1-44 (*Thèse Sc. math. Paris*, 1968).

[15] Faber (Georg). — Ueber die Fortsetzbarkeit gewisser Taylorscher Reihen, *Math. Annalen*, t. 57, 1903, p. 369-388.

[16] Fatou (P.). — Séries trigonométriques et séries de Taylor, *Acta Math.*, Uppsala, t. 30, 1906, p. 335-400 (*Thèse Sc. math. Paris*, 1907).

[17] Fuchs (W. H. J.). — Solution of a problem proposed by P. T. Bateman, *Amer. math. Monthl.*, t. 57, 1950, p. 114-115.

[18] Jungen (R.). — Sur les séries de Taylor n'ayant que des singularités algébrico-logarithmiques sur leur cercle de convergence, *Comment. math. Helvet.*, t. 3 1931, p. 266-306 (*Thèse Sc. math.*).

[19] Hadamard (Jacques). — Théorème sur les séries entières, *Acta Math.*, Uppsala, t. 22, 1899, p. 55-63.

[20] Mahler (K.). — On the Taylor coefficients of rational functions, *Proc. Cambridge phil. Soc.*, t. 52, 1956, p. 39-48.

[21] Pathiaux (Geneviève). — Algèbre de Hadamard de fractions rationnelles, *C. R. Acad. Sc.*, Série A, t. 267, 1968, p. 977-980.

[22] Pisot (Charles). — La répartition modulo 1 et les nombres algébriques, *Ann. Sc. norm. di Pisa*, Série 2, t. 7, 1938, p. 205-248 (*Thèse Sc. math. Paris*, 1938).

[23] Pisot (Charles). — *Quelques aspects de la théorie des entiers algébriques*. — Montréal, Les Presses de l'Université de Montréal, 1963 (*Séminaire de Mathématiques supérieures*. Été 1963, 5).

[24] Pisot (Charles). — *Conférences données à l'Institut Fourier de Grenoble*, 1959 (multigr.).

[25] Pólya (George). — Arithmetische Eigenschaften der Reihenent-Wicklungen rationaler Funktionen, *J. für reine and angev. Math.*, t. 151, 1921, p. 1-31.

[26] Pólya (George). — Ueber gewisse notwendige Determinantenkriterien für die Fortsetstbarkeit einer Potenzreihe, *Math. Annalen*, t. 99, 1928, p. 687-706.

[27] Szego (G.). — Ueber Potenzreihen mit endlich vielen verschiedenen Koeffizienten, *Berlin. Bericht.*, 1922, p. 88-91.

[28] Weyl (Hermann). — *Algebraic theory of numbers*. — Princeton, Princeton University Press, 1940 (*Annals of Mathematics Studies*, 1).

(Texte reçu le 27 octobre 1969.)

Benali Benzaghou,
Faculté des Sciences,
Département de Mathématiques,
Alger (Algérie).