

BULLETIN DE LA S. M. F.

JACQUES DIXMIER

**Sur les représentations unitaires des groupes
de Lie nilpotents. V**

Bulletin de la S. M. F., tome 87 (1959), p. 65-79

http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1959__87__65_0

© Bulletin de la S. M. F., 1959, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

SUR LES REPRÉSENTATIONS UNITAIRES DES GROUPES DE LIE NILPOTENTS. V.

PAR

JACQUES DIXMIER.

(Paris).

Soit Γ un groupe de Lie réel nilpotent simplement connexe. Conformément à une conjecture émise dans [3], nous démontrons dans le présent article que les caractères des représentations unitaires irréductibles de Γ sont des *distributions* sur Γ . On sait qu'un résultat analogue a été établi par HARISH-CHANDRA pour les groupes semi-simples [7]. Ce résultat est par contre en défaut pour les groupes résolubles, même s'ils sont de type I.

En fait, nous verrons que les caractères de Γ sont même des distributions *tempérées*, c'est-à-dire transformées de distributions tempérées sur l'algèbre de Lie de Γ par l'application exponentielle.

Le chapitre I est consacré à des lemmes concernant l'espace localement convexe $\mathcal{S}(\Gamma)$; ces lemmes sont analogues à des propriétés connues pour l'espace $\mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$ de L. SCHWARTZ.

NOTATIONS. — On désigne par \mathbf{R} l'ensemble des nombres réels, par \mathbf{C} celui des nombres complexes. Si Γ est un groupe de Lie réel, on désigne par $\omega(\Gamma)$ l'espace des fonctions complexes indéfiniment différentiables à support compact sur Γ , par $L^1_{\mathbf{C}}(\Gamma)$ l'espace des fonctions complexes intégrables sur Γ pour la mesure de Haar $d\gamma$ (on ne considère que des groupes nilpotents, donc unimodulaires), par e l'élément neutre de Γ , par ε_{γ} la mesure ponctuelle de masse 1 en $\gamma \in \Gamma$, par \star le produit de convolution. Si U est une représentation unitaire de Γ et si $F \in L^1_{\mathbf{C}}(\Gamma)$, on note $U(F)$ l'opérateur $\int_{\Gamma} F(\gamma) U(\gamma) d\gamma$.

**CHAPITRE I. — Fonctions à décroissance rapide
sur un groupe de Lie nilpotent simplement connexe.**

Soient Γ un groupe de Lie réel nilpotent simplement connexe de dimension n , et \mathfrak{g} son algèbre de Lie. On sait que l'application exponentielle $a \rightarrow \exp a$ est un isomorphisme de la variété analytique \mathfrak{g} sur la variété analytique Γ . Une fonction F sur Γ sera dite une fonction *polynôme* (resp. une fonction *indéfiniment différentiable à décroissance rapide*) si la fonction transportée de F sur \mathfrak{g} par l'application exponentielle est une fonction polynôme (resp. une fonction indéfiniment différentiable à décroissance rapide). Nous noterons $\mathcal{S}(\Gamma)$ l'espace vectoriel des fonctions indéfiniment différentiables à décroissance rapide sur Γ . L'application exponentielle permet de transporter à $\mathcal{S}(\Gamma)$ la topologie de $\mathcal{S}(\mathfrak{g})$, et $\mathcal{S}(\Gamma)$ devient ainsi un espace de Fréchet. Nous appellerons distribution *tempérée* sur Γ un élément du dual de l'espace vectoriel topologique $\mathcal{S}(\Gamma)$, c'est-à-dire une distribution transformée par l'application exponentielle d'une distribution tempérée sur \mathfrak{g} .

Dans ce chapitre, nous choisirons une base dans \mathfrak{g} , d'où un système de coordonnées dans \mathfrak{g} . En transportant ce système par l'application exponentielle, nous obtenons un système de coordonnées dans Γ que nous noterons x_1, \dots, x_n . Quand cela sera commode nous pourrons alors identifier une fonction F sur Γ à une fonction $(\xi_1, \dots, \xi_n) \rightarrow F(\xi_1, \dots, \xi_n)$ sur \mathbf{R}^n .

LEMME 1. — (a) *Tout champ de vecteurs invariant à droite ou à gauche sur Γ est de la forme $\sum_{i=1}^n P_i(x_1, \dots, x_n) \frac{\partial}{\partial x_i}$, où les P_i sont des polynômes.*

(b) *Réciproquement, soit (X_1, \dots, X_n) une base de l'espace des champs de vecteurs invariants à droite (resp. à gauche) sur Γ ; les champs de vecteurs $\frac{\partial}{\partial x_i}$ sont des combinaisons linéaires des X_i à coefficients polynomiaux.*

(c) *Toute forme différentielle de degré 1 invariante à droite ou à gauche sur Γ est de la forme $\sum_{i=1}^n Q_i(x_1, \dots, x_n) dx_i$, où les Q_i sont des polynômes.*

(d) *La mesure de Haar sur Γ est définie par une forme différentielle $Q(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n$, où Q est un polynôme.*

DÉMONSTRATION. — On sait (par exemple grâce à la formule de Hausdorff) que, si γ et γ' sont deux points de Γ , les coordonnées de $\gamma\gamma'$ sont des fonctions polynômes de celles de γ et γ' . Soit alors γ_0 un point de Γ de

coordonnées (ξ_1, \dots, ξ_n) . La donnée du système de coordonnées (x_1, \dots, x_n) permet d'identifier l'espace tangent en chaque point de Γ à \mathbf{R}^n . La translation à droite R_{γ_0} définie par γ_0 admet pour application tangente en e une application linéaire dont la matrice est fonction polynôme de ξ_1, \dots, ξ_n .

Donc, si $\alpha_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \dots + \alpha_n \frac{\partial}{\partial x_n}$ est un vecteur tangent à Γ en e , son trans-

formé par cette application linéaire est de la forme $\sum_{i=1}^n P_i(\xi_1, \dots, \xi_n) \frac{\partial}{\partial x_i}$,

où les P_i sont des polynômes. Ceci prouve (a) pour les champs de vecteurs invariants à droite, et on raisonne de même pour les champs de vecteurs invariants à gauche. Considérons maintenant l'application tangente en γ_0 à $R_{\gamma_0^{-1}}$; son application transposée transforme l'espace des covecteurs tangents en e à Γ en l'espace des covecteurs tangents en γ_0 à Γ . Comme les coordonnées de γ_0^{-1} sont $(-\xi_1, \dots, -\xi_n)$, (c) se démontre alors par la même méthode que (a). L'assertion (d) résulte de (c). Prouvons (b). Soit $(\omega_1, \dots, \omega_n)$ les formes différentielles invariants à droite (resp. à gauche) sur Γ constituant la base duale de (X_1, \dots, X_n) . Écrivons

$$X_i = \sum_{k=1}^n P_{ki} \frac{\partial}{\partial x_k}, \quad \omega_j = \sum_{k=1}^n Q_{kj} dx_k,$$

où les P_{ki} et les Q_{kj} sont des polynômes. Les matrices (P_{ki}) et (Q_{kj}) sont contragrédientes, donc les $\frac{\partial}{\partial x_k}$ sont des combinaisons linéaires des X_i dont les coefficients sont des polynômes Q_{kj} .

LEMME 2. — Soit (X_1, \dots, X_n) une base de l'espace des champs de vecteurs invariants à gauche (resp. à droite) sur Γ . Pour qu'une fonction F indéfiniment différentiable sur Γ appartienne à $\mathcal{S}(\Gamma)$, il faut et il suffit que, pour tout polynôme P , pour tout système d'indices $i_1, \dots, i_q \in \{1, 2, \dots, n\}$ et pour tout système d'entiers $\alpha_1, \dots, \alpha_q \geq 0$, la fonction $P.X_{i_1}^{\alpha_1} \dots X_{i_q}^{\alpha_q} F$ soit bornée. Si l'on pose

$$p_{P, i_1, \dots, i_q, \alpha_1, \dots, \alpha_q}(F) = \sup |P.X_{i_1}^{\alpha_1} \dots X_{i_q}^{\alpha_q} F|,$$

les semi-normes $p_{P, i_1, \dots, i_q, \alpha_1, \dots, \alpha_q}$ sur $\mathcal{S}(\Gamma)$ définissent la topologie de $\mathcal{S}(\Gamma)$.

DÉMONSTRATION. — D'après le lemme 1(a), si $F \in \mathcal{S}(\Gamma)$, toute fonction $P.X_{i_1}^{\alpha_1} \dots X_{i_q}^{\alpha_q} F$ est bornée, et $p_{P, i_1, \dots, i_q, \alpha_1, \dots, \alpha_q}$ est majorée par une semi-norme définissant la topologie de $\mathcal{S}(\Gamma)$, donc est continue sur $\mathcal{S}(\Gamma)$. D'après le lemme 1(b), si les fonctions $P.X_{i_1}^{\alpha_1} \dots X_{i_q}^{\alpha_q} F$ sont bornées, on a $F \in \mathcal{S}(\Gamma)$, et toute semi-norme définissant la topologie de $\mathcal{S}(\Gamma)$ est majorée par une somme de semi-normes $p_{P, i_1, \dots, i_q, \alpha_1, \dots, \alpha_q}$, de sorte que ces semi-normes suffisent à définir la topologie de $\mathcal{S}(\Gamma)$.

LEMME 3. — On a $\mathfrak{S}(\Gamma) \subset L^1_{\mathfrak{C}}(\Gamma)$, et l'application identique de $\mathfrak{S}(\Gamma)$ dans $L^1_{\mathfrak{C}}(\Gamma)$ est continue.

DÉMONSTRATION. — Soit F un élément de $\mathfrak{S}(\Gamma)$. Soit Q un polynôme tel que la forme différentielle $Q dx_1 \dots dx_n$ définisse une mesure de Haar sur Γ (lemme 1(d)). L'intégrale de $|F|$ par rapport à cette mesure de Haar est

$$\int_{\Gamma} |F| Q dx_1 \dots dx_n \leq [\sup |F| Q(1 + x_1^2 + \dots + x_n^2)^n] \\ \times \int_{\mathbf{R}^n} (1 + x_1^2 + \dots + x_n^2)^{-n} dx_1 \dots dx_n.$$

La dernière intégrale est une constante finie et le crochet est la valeur en F d'une semi-norme définissant la topologie de $\mathfrak{S}(\Gamma)$. D'où les deux assertions du lemme.

LEMME 4. — Pour toute $F \in \mathfrak{S}(\Gamma)$ et tout $\gamma \in \Gamma$, notons $L_{\gamma}F$ et $R_{\gamma}F$ les fonctions $\gamma_1 \rightarrow F(\gamma^{-1}\gamma_1)$, $\gamma_1 \rightarrow F(\gamma_1\gamma)$. Alors L_{γ} et R_{γ} sont des applications linéaires continues de $\mathfrak{S}(\Gamma)$ dans $\mathfrak{S}(\Gamma)$.

DÉMONSTRATION. — Soient $\gamma_0 \in \Gamma$ et $F \in \mathfrak{S}(\Gamma)$. Soient P_1, \dots, P_n les polynômes en n variables réelles tels que

$$x_i(\gamma_0^{-1}\gamma) = P_i(x_1(\gamma), \dots, x_n(\gamma)) \quad (i=1, 2, \dots, n)$$

pour tout $\gamma \in \Gamma$. La transformée de $F = F(\xi_1, \dots, \xi_n)$ par L_{γ_0} est la fonction

$$F(P_1(\xi_1, \dots, \xi_n), \dots, P_n(\xi_1, \dots, \xi_n)).$$

Toute dérivée de cette fonction par rapport à certains des ξ_i est une combinaison linéaire à coefficients polynômiaux indépendants de F de fonctions de la forme $G(P_1(\xi_1, \dots, \xi_n), \dots, P_n(\xi_1, \dots, \xi_n))$, où G est une dérivée de F par rapport à certains des ξ_i . Soit Q un polynôme en n variables réelles. On a

$$\sup |Q(\xi_1, \dots, \xi_n) G(P_1(\xi_1, \dots, \xi_n), \dots, P_n(\xi_1, \dots, \xi_n))| \\ = \sup |Q_1(\xi_1, \dots, \xi_n) G(\xi_1, \dots, \xi_n)|$$

où Q_1 est un nouveau polynôme lié à Q de manière indépendante de F . Une telle expression est de la forme $p(F)$, p étant une semi-norme continue sur $\mathfrak{S}(\Gamma)$; ceci prouve que L_{γ_0} est une application continue de $\mathfrak{S}(\Gamma)$ dans $\mathfrak{S}(\Gamma)$. On raisonne de même pour R_{γ_0} .

LEMME 5. — Soit $F \in \mathfrak{S}(\Gamma)$. Avec les notations du lemme 4, les applications $\gamma \rightarrow L_{\gamma}F$, $\gamma \rightarrow R_{\gamma}F$ de Γ dans $\mathfrak{S}(\Gamma)$ sont indéfiniment différentiables. Soit $a \in \mathfrak{g}$. L'application de \mathbf{R} dans $\mathfrak{S}(\Gamma)$:

$$t \rightarrow L_{\gamma \cdot \exp ta} F \quad (\text{resp. } t \rightarrow R_{(\exp ta) \cdot \gamma} F)$$

a pour dérivée en 0 l'élément $L_{\gamma}(a \star F)$ (resp. $R_{\gamma}(F \star a)$) de $\mathfrak{S}(\Gamma)$.

DÉMONSTRATION. — (a) Soit P un polynôme sur Γ . La fonction $(\gamma, \gamma_1) \rightarrow (L_\gamma P)(\gamma_1)$ est une fonction polynôme des coordonnées de γ et de γ_1 . Donc, quand γ parcourt une partie compacte de Γ , les fonctions $|L_\gamma P|$ sont majorées par un polynôme fixe. Par suite, les nombres $\sup |P(L_\gamma F)| = \sup |(L_{\gamma^{-1}} P)F|$ sont majorés dans \mathbf{R} quand γ parcourt une partie compacte de Γ .

(b) Soient toujours P un polynôme sur Γ , et X un opérateur différentiel invariant à gauche sur Γ . Si K est une partie compacte de Γ , les nombres

$$P(\gamma_1) [1 + x_1^2(\gamma_1) + \dots + x_n^2(\gamma_1)] (L_\gamma (XF))(\gamma_1)$$

où γ parcourt K et γ_1 parcourt Γ , sont majorés dans \mathbf{R} d'après (a). Par suite, étant donné $\varepsilon > 0$, il existe une partie compacte K_1 de Γ telle que $|P(\gamma_1) (L_\gamma (XF))(\gamma_1)| \leq \varepsilon$ quels que soient $\gamma \in K$ et $\gamma_1 \notin K_1$. D'autre part, quand $\gamma \rightarrow e$, $P.(L_\gamma XF)$ tend vers $P.(XF)$ uniformément sur K_1 . Donc, pour γ assez voisin de e , on a

$$\sup |P.(L_\gamma XF) - P.(XF)| \leq 2\varepsilon$$

ou

$$\sup |P.X(L_\gamma F - F)| \leq 2\varepsilon.$$

Vu l'arbitraire de P et X , ceci prouve, compte tenu du lemme 2, que l'application $\gamma \rightarrow L_\gamma F$ est continue en e , donc continue partout à cause de la relation $L_{\gamma\gamma'} = L_\gamma L_{\gamma'}$.

(c) Soit $a \in \mathfrak{g}$. La fonction $(\xi_1, \dots, \xi_n, t) \rightarrow (L_{\gamma.(\exp ta)} F)(\xi_1, \dots, \xi_n)$ a pour dérivée par rapport à t la fonction $(\xi_1, \dots, \xi_n, t) \rightarrow (L_{\gamma.(\exp ta)} (a \star F))(\xi_1, \dots, \xi_n)$. Donc

$$t^{-1} (L_{\gamma.(\exp ta)} F - L_\gamma F)(\xi_1, \dots, \xi_n) = t^{-1} \int_0^t L_{\gamma.(\exp ua)} (a \star F)(\xi_1, \dots, \xi_n) du.$$

Le deuxième membre, en tant que fonction sur Γ , n'est autre que l'intégrale vectorielle $t^{-1} \int_0^t L_{\gamma.(\exp ua)} (a \star F) du$. D'après la partie (b) de la démonstration, cet élément de $\mathcal{S}(\Gamma)$ tend vers $L_\gamma (a \star F)$ quand $t \rightarrow 0$. Donc la fonction $t \rightarrow L_{\gamma.(\exp ta)} F$ à valeurs dans $\mathcal{S}(\Gamma)$ est dérivable et de dérivée $L_\gamma (a \star F)$ pour $t = 0$. Comme $a \star F \in \mathcal{S}(\Gamma)$, on peut recommencer le raisonnement précédent, et, de proche en proche, on voit que l'application $\gamma \rightarrow L_\gamma F$ de Γ dans $\mathcal{S}(\Gamma)$ est indéfiniment différentiable. On raisonne de façon analogue pour R_γ .

LEMME 6. — Soit Γ' un sous-groupe fermé connexe de Γ . Soient $F \in \mathcal{S}(\Gamma)$, et F' la restriction de F à Γ' . Alors, $F' \in \mathcal{S}(\Gamma')$, et $F \rightarrow F'$ est une application linéaire continue de $\mathcal{S}(\Gamma)$ dans $\mathcal{S}(\Gamma')$.

DÉMONSTRATION. — Soit \mathfrak{g}' la sous-algèbre de \mathfrak{g} correspondant à Γ' . L'application exponentielle de \mathfrak{g}' dans Γ' est la restriction à \mathfrak{g}' de l'application exponentielle de \mathfrak{g} dans Γ . Pour prouver le lemme, il suffit de prouver l'assertion correspondante pour $\mathcal{S}(\mathfrak{g})$ et $\mathcal{S}(\mathfrak{g}')$, et cette dernière est immédiate.

LEMME 7. — Soient Γ' un sous-groupe fermé connexe de Γ . Soit $F \in \mathcal{S}(\Gamma)$. Pour $\delta, \delta' \in \Gamma$, soit $F_{\delta, \delta'}$ la fonction $\gamma' \rightarrow F(\delta^{-1}\gamma'\delta')$ sur Γ' . Alors l'application $(\delta, \delta') \rightarrow F_{\delta, \delta'}$ de $\Gamma \times \Gamma$ dans $\mathcal{S}(\Gamma')$ est indéfiniment différentiable.

DÉMONSTRATION. — Ceci résulte des lemmes 5 et 6.

LEMME 8. — Soient \mathfrak{g}' un idéal de \mathfrak{g} , Γ' le sous-groupe correspondant de Γ , et \mathfrak{d} un sous-espace vectoriel de \mathfrak{g} supplémentaire de \mathfrak{g}' dans \mathfrak{g} . Soit $F \in \mathcal{S}(\Gamma)$. Pour tout $a \in \mathfrak{d}$, soit F_a la fonction $\gamma' \rightarrow F(\exp a \cdot \gamma')$ (resp $\gamma' \rightarrow F(\gamma' \cdot \exp a)$) sur Γ' , qui appartient à $\mathcal{S}(\Gamma')$ d'après les lemmes 4 et 6. Alors, $a \rightarrow F_a$ est une application indéfiniment différentiable à décroissance rapide de \mathfrak{d} dans $\mathcal{S}(\Gamma')$, au sens de [8].

DÉMONSTRATION. — Nous étudierons seulement le cas où $F_a(\gamma') = F(\exp a \cdot \gamma')$. L'application $a \rightarrow F_a$ est composée de l'application exponentielle de \mathfrak{d} dans Γ et \mathfrak{d} une application qui est indéfiniment différentiable d'après le lemme 7; elle est donc indéfiniment différentiable. Notons F^\sim l'application $\gamma \rightarrow L_\gamma F$ de Γ dans $\mathcal{S}(\Gamma)$ (avec les notations du lemme 4); elle est indéfiniment différentiable, et, pour tout champ de vecteurs X invariant à gauche, la dérivée XF^\sim est de la forme G^\sim , où $G \in \mathcal{S}(\Gamma)$ (lemme 5). Donc, d'après le lemme 1(b), toute dérivée de F^\sim par rapport à certains des x_i est combinaison linéaire à coefficients polynômiaux de fonctions G^\sim , où $G \in \mathcal{S}(\Gamma)$. Nous pouvons par ailleurs supposer les coordonnées x_1, \dots, x_n choisies de telle sorte que \mathfrak{g}' soit défini par les équations $x_1 = \dots = x_p = 0$, et \mathfrak{d} par les équations $x_{p+1} = \dots = x_n = 0$. Alors, toute dérivée de la fonction $a \rightarrow F_a$ est combinaison linéaire à coefficients polynômiaux (en x_1, \dots, x_p) de fonctions $a \rightarrow G_a$, où $G \in \mathcal{S}(\Gamma)$. Pour établir le lemme, il suffit donc de prouver que, étant donné un polynôme Q sur \mathfrak{d} et une fonction $G \in \mathcal{S}(\Gamma)$, l'application $a \rightarrow Q(a)G_a$ de \mathfrak{d} dans $\mathcal{S}(\Gamma')$ est bornée; autrement dit, il faut montrer que, quels que soient les polynômes $Q(\xi_1, \dots, \xi_p)$ et $Q_1(\xi_{p+1}, \dots, \xi_n)$, les fonctions

$$(\xi_1, \dots, \xi_p) \rightarrow Q(\xi_1, \dots, \xi_p) \times \sup_{\xi_{p+1}, \dots, \xi_n} \left| Q_1(\xi_{p+1}, \dots, \xi_n) \frac{\partial^\alpha}{\partial \xi_{p+1}^{\alpha_1} \dots \partial \xi_n^{\alpha_n}} G_{(\xi_1, \dots, \xi_p)}(\xi_{p+1}, \dots, \xi_n) \right|$$

sont bornées. Or, soient $(P_1(\xi_1, \dots, \xi_n), \dots, P_n(\xi_1, \dots, \xi_n))$ les coordonnées du produit de $\exp((\xi_1, \dots, \xi_p))$ par le point de coordonnées $(0, \dots, 0, \xi_{p+1}, \dots, \xi_n)$. Les P_i sont des polynômes, et

$$G_{(\xi_1, \dots, \xi_p)}(\xi_{p+1}, \dots, \xi_n) = G(P_1(\xi_1, \dots, \xi_n), \dots, P_n(\xi_1, \dots, \xi_n)).$$

Nous sommes en définitive ramenés à montrer qu'une fonction

$$(1) \quad (\xi_1, \dots, \xi_n) \rightarrow Q_2(\xi_1, \dots, \xi_n) H(P_1(\xi_1, \dots, \xi_n), \dots, P_n(\xi_1, \dots, \xi_n))$$

où Q_2 est un polynôme et où $H \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$, est bornée. Comme l'application exponentielle commute aux homomorphismes, l'image d'une classe modulo \mathfrak{g}' dans \mathfrak{g} par l'application exponentielle est une classe modulo Γ' dans Γ . Donc $P_1(\xi_1, \dots, \xi_n) = \xi_1, \dots, P_p(\xi_1, \dots, \xi_n) = \xi_p$, et ξ_{p+1}, \dots, ξ_n s'expriment comme polynômes par rapport à $\xi_1, \dots, \xi_p, P_{p+1}(\xi_1, \dots, \xi_n), \dots, P_n(\xi_1, \dots, \xi_n)$. La fonction (1) a donc même borne supérieure qu'une fonction

$$(\xi_1, \dots, \xi_n) \rightarrow Q_3(\xi_1, \dots, \xi_n) H(\xi_1, \dots, \xi_n)$$

où Q_3 est un nouveau polynôme, de sorte que cette borne supérieure est finie.

LEMME 9. — Soient Γ' un sous groupe fermé distingué connexe de Γ , et $\Gamma^0 = \Gamma/\Gamma'$, qui est nilpotent simplement connexe. Soit $F \in \mathcal{S}(\Gamma)$. Pour tout $\gamma \in \Gamma$, l'intégrale de $L_\gamma F$ sur Γ' (intégrale qui converge d'après les lemmes 3 et 6) ne dépend que de la classe γ^0 de γ dans Γ^0 ; soit $F^0(\gamma^0)$ sa valeur. On a $F^0 \in \mathcal{S}(\Gamma^0)$, et $F \rightarrow F^0$ est une application continue de $\mathcal{S}(\Gamma)$ dans $\mathcal{S}(\Gamma^0)$.

DÉMONSTRATION. — Il est clair que $\int_{\Gamma'} (L_\gamma F)(\gamma') d\gamma'$ ne dépend que de γ^0 .

Soient \mathfrak{g}' l'idéal de \mathfrak{g} correspondant à Γ' , et \mathfrak{d} un sous-espace vectoriel supplémentaire de \mathfrak{g}' dans \mathfrak{g} . Il s'agit de montrer que la fonction

$$a \rightarrow \int_{\Gamma'} (L_{\exp a} F)(\gamma') d\gamma'$$

sur \mathfrak{d} est indéfiniment différentiable à décroissance rapide. Or, l'application qui, à l'élément a , fait correspondre la restriction de $L_{\exp a} F$ à Γ' , est une application indéfiniment différentiable à décroissance rapide de \mathfrak{d} dans $\mathcal{S}(\Gamma')$ (lemme 8). Il suffit alors d'appliquer le lemme 3. La continuité de l'application $F \rightarrow F^0$ résulte du théorème du graphe fermé et du lemme 3.

LEMME 10. — Soit D une dérivation nilpotente de \mathfrak{g} . Pour tout $t \in \mathbf{R}$, soient A_t l'automorphisme de Γ associé à l'automorphisme $\exp tD$ de \mathfrak{g} , et B_t l'automorphisme correspondant de $\mathcal{S}(\Gamma)$. Soit p une semi-norme continue sur $\mathcal{S}(\Gamma)$. Il existe un entier $N \geq 0$ et une semi-norme continue p' sur $\mathcal{S}(\Gamma)$ tels que $p(B_t F) \leq (1 + |t|)^N p'(F)$ pour toute $F \in \mathcal{S}(\Gamma)$ et tout $t \in \mathbf{R}$.

DÉMONSTRATION. — Il suffit d'envisager le cas où

$$p(F) = \sup \left| Q \frac{\partial^\alpha F}{\partial z_1^{\alpha_1} \dots \partial z_n^{\alpha_n}} \right|$$

Q étant un polynôme. Puisque D est nilpotente, l'automorphisme $\exp tD$ est une fonction polynôme de t . D'autre part, A_t est transformé de $\exp tD$ par l'application exponentielle. Donc A_t définit une transformation linéaire sur les coordonnées x_i :

$$x_i \rightarrow \sum_{j=1}^n \lambda_{ij}(t) x_j$$

où les λ_{ij} sont des polynômes en t . Alors,

$$p(B_t F) = \sup \left| Q \frac{\partial^x G}{\partial \xi_1^{\alpha_1} \dots \partial \xi_n^{\alpha_n}} \right|,$$

où

$$G(\xi_1, \dots, \xi_n) = F(\lambda_{11}\xi_1 + \dots + \lambda_{1n}\xi_n, \dots, \lambda_{n1}\xi_1 + \dots + \lambda_{nn}\xi_n).$$

Donc $\frac{\partial^x G}{\partial \xi_1^{\alpha_1} \dots \partial \xi_n^{\alpha_n}}(\xi_1, \dots, \xi_n)$ est une combinaison linéaire de fonctions $\frac{\partial^x F}{\partial \xi_1^{\beta_1} \dots \partial \xi_n^{\beta_n}}(\lambda_{11}\xi_1 + \dots + \lambda_{1n}\xi_n, \dots, \lambda_{n1}\xi_1 + \dots + \lambda_{nn}\xi_n)$, dont les coefficients sont des polynômes en t indépendants de F . Or

$$\begin{aligned} & \sup \left| Q(\xi_1, \dots, \xi_n) \frac{\partial^x F}{\partial \xi_1^{\beta_1} \dots \partial \xi_n^{\beta_n}}(\lambda_{11}\xi_1 + \dots + \lambda_{1n}\xi_n, \dots, \lambda_{n1}\xi_1 + \dots + \lambda_{nn}\xi_n) \right| \\ &= \sup \left| Q(\mu_{11}\xi_1 + \dots + \mu_{1n}\xi_n, \dots, \mu_{n1}\xi_1 + \dots + \mu_{nn}\xi_n) \frac{\partial^x F}{\partial \xi_1^{\beta_1} \dots \partial \xi_n^{\beta_n}}(\xi_1, \dots, \xi_n) \right| \end{aligned}$$

en désignant par (μ_{ij}) la matrice inverse de (λ_{ij}) , laquelle est aussi une fonction polynôme de t . Enfin, $Q(\mu_{11}\xi_1 + \dots + \mu_{1n}\xi_n, \dots, \mu_{n1}\xi_1 + \dots + \mu_{nn}\xi_n)$ est une combinaison linéaire à coefficients indépendants de F de monômes par rapport à t et aux ξ_i . D'où le lemme.

LEMME 11. — Soient \mathfrak{g}' un idéal de \mathfrak{g} de codimension 1, Γ' le sous-groupe correspondant de Γ , \mathfrak{v} un sous-espace vectoriel de \mathfrak{g} supplémentaire de \mathfrak{g}' dans \mathfrak{g} , Δ le sous-groupe correspondant de Γ , et a_0 un élément non nul de \mathfrak{v} . Pour tout $\delta \in \Delta$, définissons $t(\delta) \in \mathbf{R}$ par l'égalité $\delta = \exp(t(\delta)a_0)$. Soit p une semi-norme sur $\mathcal{S}(\Gamma')$. Il existe un entier $N \geq 0$ tel que, pour toute $F \in \mathcal{S}(\Gamma)$, les fonctions

$$\begin{aligned} (\delta, \delta') &\rightarrow (1 + |t(\delta)|)^{-N} p(F_{\delta, \delta'}) \\ (\delta, \delta') &\rightarrow (1 + |t(\delta')|)^{-N} p(F_{\delta, \delta'}) \end{aligned}$$

sur $\Delta \times \Delta$ (où $F_{\delta, \delta'}$ est défini comme au lemme 7) soient bornées.

DÉMONSTRATION. — La restriction à \mathfrak{g}' de $ad_{\mathfrak{g}} a_0$ est une dérivation nilpotente D de \mathfrak{g}' , et l'automorphisme de Γ' associé à $\exp tD$ est la restriction à Γ' de l'automorphisme intérieur de Γ défini par $\exp t a_0$. Soit B_t l'automor-

phisme correspondant de $\mathfrak{S}(\Gamma)$. Il existe (lemme 10) un entier $N \geq 0$ et une semi-norme continue p' sur $\mathfrak{S}(\Gamma)$ tels que $p(B_t F') \leq (1 + |t|)^N p'(F')$ pour toute $F' \in \mathfrak{S}(\Gamma)$ et tout $t \in \mathbf{R}$. Soit $F \in \mathfrak{S}(\Gamma)$. Pour tout $\delta \in \Delta$, notons $S_\delta F$ la restriction à Γ de $R_\delta F$. Si $\delta \in \Delta$, $\delta' \in \Delta$, et $\gamma' \in \Gamma$, on a

$$\begin{aligned} (B_{t(\delta)} S_{\delta^{-1}\delta'} F)(\gamma') &= (S_{\delta^{-1}\delta'} F)(\delta^{-1}\gamma' \delta) \\ &= (R_{\delta^{-1}\delta'} F)(\delta^{-1}\gamma' \delta) = F(\delta^{-1}\gamma' \delta') = F_{\delta, \delta'}(\gamma'), \end{aligned}$$

donc

$$p(F_{\delta, \delta'}) \leq (1 + |t(\delta)|)^N p'(S_{\delta^{-1}\delta'} F)$$

Or, d'après le lemme 8, l'application $\delta \rightarrow S_\delta F$ de Δ dans $\mathfrak{S}(\Gamma)$ est bornée. Donc la fonction $(\delta, \delta') \rightarrow (1 + |t(\delta)|)^{-N} p(F_{\delta, \delta'})$ sur $\Delta \times \Delta$ est bornée. En remplaçant les translations à droite R_δ par les translations à gauche L_δ , on voit de même que la fonction $(\delta, \delta') \rightarrow (1 + |t(\delta')|)^{-N} p(F_{\delta, \delta'})$ est bornée.

CHAPITRE II. — Le théorème principal.

LEMME 12. — *Soient Γ un groupe de Lie réel nilpotent simplement connexe de dimension ≥ 2 , \mathfrak{g} son algèbre de Lie, U une représentation unitaire irréductible de Γ . Deux cas sont possibles :*

Premier cas : le noyau de U est de dimension ≥ 1 .

Deuxième cas : il existe un idéal \mathfrak{g}' de \mathfrak{g} de codimension 1, un élément a de \mathfrak{g} n'appartenant pas à \mathfrak{g}' , un élément b du centre de \mathfrak{g}' , et une représentation unitaire irréductible U' de Γ' (sous-groupe de Γ correspondant à \mathfrak{g}') tels que :

- 1° *U est unitairement équivalente à la représentation de Γ induite par U' ;*
- 2° *pour tout $t \in \mathbf{R}$, l'opérateur différentiel $U'((\exp ad_t a).b)$ est l'opérateur scalaire $it (= \sqrt{-1} t)$.*

DÉMONSTRATION. — Il existe dans \mathfrak{g} un idéal \mathfrak{f} de dimension 2, et \mathfrak{f} est nécessairement abélien. Pour tout $c \in \mathfrak{g}$, soit u_c la restriction de $ad_{\mathfrak{g}} c$ à \mathfrak{f} . Par rapport à une base (e_1, e_2) convenablement choisie de \mathfrak{f} , la matrice de u_c est de la forme

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \lambda(c) & 0 \end{pmatrix},$$

où λ est une forme linéaire sur \mathfrak{g} qui s'annule sur \mathfrak{f} . On voit que $\mathbf{R}e_2$ est un idéal central de \mathfrak{g} . Soient Φ et Φ' les sous-groupes de Γ correspondant à \mathfrak{f} et $\mathbf{R}e_2$. Ce sont des sous-groupes fermés distingués abéliens, et l'application exponentielle de \mathfrak{f} sur Φ est un isomorphisme de groupe de Lie, de sorte qu'on peut identifier Φ à un espace vectoriel de dimension 2 sur \mathbf{R} . Soient $\gamma_1 = \exp e_1$, $\gamma_2 = \exp e_2$; alors (γ_1, γ_2) est une base de Φ . Soit $\hat{\Phi}$ l'espace vectoriel dual

de l'espace vectoriel Φ . Soit (γ_1^*, γ_2^*) la base de $\hat{\Phi}$ duale de (γ_1, γ_2) . Pour $c \in \mathfrak{g}$, l'automorphisme de Φ défini par $\exp c$ admet, par rapport à la base (γ_1, γ_2) , la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \lambda(c) & 1 \end{pmatrix}.$$

L'automorphisme transposé du précédent admet, par rapport à (γ_1^*, γ_2^*) , la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & \lambda(c) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Considérons la restriction de U à Φ . Le théorème de Stone généralisé lui associe une mesure sur $\hat{\Phi}$, qui est concentrée sur une orbite O de Γ dans $\hat{\Phi}$ [5]. Soient $\chi \in O$ et Γ' le stabilisateur de χ dans Γ : c'est un sous-groupe fermé dans Γ . Alors [5] U est unitairement équivalente à la représentation de Γ' induite par une représentation unitaire irréductible U' de Γ' .

Soient (χ_1, χ_2) les coordonnées de χ par rapport à (γ_1^*, γ_2^*) . Le transformé de χ par $\exp c$ a pour coordonnées $(\chi_1 + \lambda(c)\chi_2, \chi_2)$. Donc Γ' est l'ensemble des $\exp c$ ($c \in \mathfrak{g}$) tels que $\lambda(c)\chi_2 = 0$. Si $\chi_2 = 0$, l'orbite O se réduit à $\{\chi\}$, et χ est nul sur Φ' donc U est triviale sur Φ' , et l'on est dans le premier cas du lemme. Si $\lambda = 0$, \mathfrak{f} est contenu dans le centre de \mathfrak{g} , donc Φ est contenu dans le centre de Γ et U est scalaire sur Φ ; comme $\dim \Phi > 1$, on est encore dans le premier cas du lemme. Supposons désormais $\chi_2 \neq 0$ et $\lambda \neq 0$. Soit \mathfrak{g}' le noyau de λ , qui est en même temps le noyau de la représentation $c \rightarrow u_c$ de \mathfrak{g} . C'est un idéal de codimension 1 de \mathfrak{g} , et le centre de \mathfrak{g}' contient \mathfrak{f} . Le sous-groupe Γ' est l'ensemble des $\exp c$, $c \in \mathfrak{g}'$, donc est le sous-groupe de Γ correspondant à \mathfrak{g}' . Puisque U' est irréductible, et que \mathfrak{f} est contenu dans le centre de \mathfrak{g}' , U' est scalaire sur Φ . Supposons d'abord U' triviale sur Φ' . Comme les points de Φ' sont fixes pour les automorphismes intérieurs de Γ , U est triviale sur Φ' , ce qui contredit l'hypothèse $\chi_2 \neq 0$. Donc U' est non triviale sur Φ' , de sorte que l'opérateur différentiel $U'(e_2)$ (qui est un opérateur scalaire) est non nul. En multipliant e_2 par un nombre réel convenable on peut supposer que $U'(e_2) = i$. Posons par ailleurs $U'(e_1) = \beta i$, où $\beta \in \mathbf{R}$. Soit a un élément de \mathfrak{g} tel que $\lambda(a) = 1$. On a $a \notin \mathfrak{g}'$, et

$$[a, e_1] = \lambda(a)e_2 = e_2 \quad [a, e_2] = 0$$

donc

$$\begin{aligned} (\exp ad ta) \cdot e_1 &= e_1 + te_2 \\ (\exp ad ta) \cdot e_2 &= e_2 \end{aligned}$$

donc

$$U((\exp ad ta) \cdot (e_1 - \beta e_2)) = U'(e_1 + te_2 - \beta e_2) = i\beta + it - i\beta = it.$$

Nous sommes dans le deuxième cas du lemme avec $b = e_1 - \beta e_2$.

THÉOREME 1. — Soient Γ un groupe de Lie réel nilpotent simplement connexe, U une représentation unitaire irréductible de Γ dans un espace hilbertien \mathfrak{H} . Il existe un entier $p \geq 0$, un isomorphisme Φ de \mathfrak{H} sur l'espace hilbertien $L^2_{\mathbf{C}}(\mathbf{R}^p)$, et une application linéaire continue K de $\mathcal{S}(\Gamma)$ dans $\mathcal{S}(\mathbf{R}^{2p})$ tels que, pour toute $F \in \mathcal{S}(\Gamma)$, $\Phi U(F) \Phi^{-1}$ soit l'opérateur dans $L^2_{\mathbf{C}}(\mathbf{R}^p)$ défini par le noyau $K(F)$.

DÉMONSTRATION. — Soit n la dimension de Γ . Pour $n = 1$, Γ est abélien. L'espace \mathfrak{H} est de dimension 1 et s'identifie à \mathbf{C} , c'est-à-dire à $L^2_{\mathbf{C}}(\mathbf{R}^p)$ avec $p = 0$. La représentation U s'identifie à une fonction continue χ sur Γ telle que $\chi(\gamma\gamma') = \chi(\gamma)\chi(\gamma')$, $|\chi(\gamma)| = 1$ quels que soient $\gamma, \gamma' \in \Gamma$. Pour $F \in \mathcal{S}(\Gamma)$, $U(F)$ est l'opérateur scalaire $\int_{\Gamma} F(\gamma)\chi(\gamma) d\gamma$; l'application $F \rightarrow \int_{\Gamma} F(\gamma)\chi(\gamma) d\gamma$ est une application linéaire continue de $\mathcal{S}(\Gamma)$ dans $\mathbf{C} = \mathcal{S}(\mathbf{R}^{2p})$, d'après le lemme 3. Le théorème est donc vérifié dans ce cas. Raisonnant par récurrence sur n , nous supposons désormais $n \geq 2$ et le théorème démontré pour les groupes Γ de dimension $< n$.

Supposons qu'on soit dans le premier cas du lemme 12. Alors U est triviale sur un sous-groupe fermé distingué connexe Δ de dimension ≥ 1 de Γ . Le groupe $\Gamma' = \Gamma/\Delta$ est nilpotent simplement connexe. Soit U' la représentation de Γ' déduite de U par passage au quotient. D'après l'hypothèse de récurrence, on peut supposer que U' opère dans un espace $L^2_{\mathbf{C}}(\mathbf{R}^p)$, et qu'il existe une application linéaire continue K' de $\mathcal{S}(\Gamma')$ dans $\mathcal{S}(\mathbf{R}^{2p})$ tels que, pour $F' \in \mathcal{S}(\Gamma')$, $U'(F')$ soit l'opérateur dans $L^2_{\mathbf{C}}(\mathbf{R}^p)$ défini par le noyau $K'(F')$. Pour $F \in \mathcal{S}(\Gamma)$, soit F' la fonction sur Γ' déduite de F par intégration le long des classes modulo Δ . D'après le lemme 9, $F \rightarrow F'$ est une application linéaire continue de $\mathcal{S}(\Gamma)$ dans $\mathcal{S}(\Gamma')$. Si l'on pose $K(F) = K'(F')$, $F \rightarrow K(F)$ est une application linéaire continue de $\mathcal{S}(\Gamma)$ dans $\mathcal{S}(\mathbf{R}^{2p})$. D'autre part, soient $\gamma \in \Gamma$ et γ' sa classe modulo Δ . On a

$$\int_{\Delta} F(\gamma\delta)U(\gamma\delta) d\delta = \int_{\Delta} F(\gamma\delta)U'(\gamma') d\delta = F'(\gamma')U'(\gamma')$$

donc

$$U(F) = \int_{\Gamma} F(\gamma)U(\gamma) d\gamma = \int_{\Gamma'} F'(\gamma')U'(\gamma') d\gamma' = U'(F'),$$

de sorte que $U(F)$ est l'opérateur défini par le noyau $K(F)$. Le théorème est donc établi dans ce cas.

Supposons qu'on soit dans le deuxième cas du lemme 12. Nous introduirons les notations correspondantes $\mathfrak{g}', \Gamma', a, b, U'$. D'après l'hypothèse de récurrence, U' s'identifie à une représentation unitaire de Γ' dans un espace $\mathfrak{H}' = L^2_{\mathbf{C}}(\mathbf{R}^p)$, et, pour toute $F' \in \mathcal{S}(\Gamma')$, $U'(F')$ est l'opérateur défini par un noyau $K'(F') \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^{2p})$, K' étant une application linéaire continue de $\mathcal{S}(\Gamma')$

dans $\mathcal{S}(\mathbf{R}^{2p'})$. Soient $\mathfrak{d} = \mathbf{R}a$, et Δ le sous-groupe correspondant de Γ . Pour $\delta \in \Delta$, définissons $t(\delta) \in \mathbf{R}$ par l'égalité $\delta = \exp t(\delta)a$. Le groupe Γ s'identifie au produit semi-direct de Γ' et Δ . La représentation U , étant induite par U' , opère dans $L_{\mathfrak{H}'}^2(\Delta) = L_{\mathfrak{H}'}^2(\mathbf{R}) = L_{\mathfrak{G}}^2(\mathbf{R}^{p'} \times \mathbf{R}) = L_{\mathfrak{G}}^2(\mathbf{R}^p)$, avec $p = p' + 1$.

Soit $F \in \mathcal{S}(\Gamma)$. Pour $\delta_1 \in \Delta$, $\delta_2 \in \Delta$, $\gamma' \in \Gamma'$, nous poserons

$$F_{\delta_1, \delta_2}(\gamma') = F(\delta_1^{-1} \gamma' \delta_2).$$

On a $F_{\delta_1, \delta_2} \in \mathcal{S}(\Gamma')$ (lemmes 4 et 6). Nous allons d'abord établir l'assertion suivante :

(★) L'application $(\delta_1, \delta_2) \rightarrow K'(F_{\delta_1, \delta_2})$ de $\Delta \times \Delta$ dans $\mathcal{S}(\mathbf{R}^{2p'})$ est une application indéfiniment différentiable à décroissance rapide.

L'application $(\delta_1, \delta_2) \rightarrow F_{\delta_1, \delta_2}$ est la restriction à $\Delta \times \Delta$ d'une application indéfiniment différentiable de $\Gamma \times \Gamma$ dans $\mathcal{S}(\Gamma')$ (lemme 7). Donc elle est indéfiniment différentiable. Comme K' est linéaire et continue, l'application $(\delta_1, \delta_2) \rightarrow K'(F_{\delta_1, \delta_2})$ est indéfiniment différentiable. D'autre part, les dérivées des applications $\delta \rightarrow L_{\delta} F$, $\delta \rightarrow R_{\delta} F$ de Δ dans $\mathcal{S}(\Gamma)$ (avec les notations du lemme 4) sont de la forme $\delta \rightarrow L_{\delta} G$, $\delta \rightarrow R_{\delta} G$, où $G \in \mathcal{S}(\Gamma)$ (lemme 5). Donc les dérivées des applications $(\delta_1, \delta_2) \rightarrow F_{\delta_1, \delta_2}$ de $\Delta \times \Delta$ dans $\mathcal{S}(\Gamma')$ sont de la forme $(\delta_1, \delta_2) \rightarrow G_{\delta_1, \delta_2}$, où $G \in \mathcal{S}(\Gamma)$. Pour achever de prouver l'assertion (★), il suffit donc de prouver que, pour tout polynôme $(\delta_1, \delta_2) \rightarrow P(\delta_1, \delta_2)$, l'application $(\delta_1, \delta_2) \rightarrow P(\delta_1, \delta_2)K'(F_{\delta_1, \delta_2})$ est bornée.

Soit h une semi-norme continue sur $\mathcal{S}(\mathbf{R}^{2p'})$. Il existe une semi-norme continue h' sur $\mathcal{S}(\Gamma')$ telle que $h(K'(F')) \leq h'(F')$ pour toute $F' \in \mathcal{S}(\Gamma')$. D'autre part, il existe un entier $N \geq 0$ tel que, pour tout entier $q \geq 0$, les fonctions

$$\begin{aligned} (\delta, \delta') &\rightarrow (1 + |t(\delta)|)^{-N} h'((b^q \star F)_{\delta, \delta'}) \\ (\delta, \delta') &\rightarrow (1 + |t(\delta')|)^{-N} h'((F \star b^q)_{\delta, \delta'}) \end{aligned}$$

sur $\Delta \times \Delta$ soient bornées (lemme 11). Donc les fonctions

$$\begin{aligned} (\delta, \delta') &\rightarrow (1 + |t(\delta)|)^{-N} h(K'((b^q \star F)_{\delta, \delta'})) \\ (\delta, \delta') &\rightarrow (1 + |t(\delta')|)^{-N} h(K'((F \star b^q)_{\delta, \delta'})) \end{aligned}$$

sont bornées. Or, sur Γ , on a :

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\delta^{-1}} \star b^q \star F \star \varepsilon_{\delta'} &= (\varepsilon_{\delta^{-1}} \star b^q \star \varepsilon_{\delta}) \star (\varepsilon_{\delta^{-1}} \star F \star \varepsilon_{\delta'}) \\ &= (\exp \operatorname{ad} t(\delta)a.b)^q \star (\varepsilon_{\delta^{-1}} \star F \star \varepsilon_{\delta'}) \end{aligned}$$

donc, sur Γ' :

$$(b^q \star F)_{\delta, \delta'} = (\exp \operatorname{ad} t(\delta)a.b)^q \star F_{\delta, \delta'}.$$

On en déduit

$$U'((b^q \star F)_{\delta, \delta'}) = (U'(\exp \operatorname{ad} t(\delta)a.b))^q U'(F_{\delta, \delta'}) = i^q t(\delta)^q U'(F_{\delta, \delta'}),$$

donc

$$K'((b^q \star F)_{\delta, \delta'}) = i^q t(\delta)^q K'(F_{\delta, \delta'}).$$

Ainsi, la fonction

$$(\delta, \delta') \rightarrow (\mathbf{1} + |t(\delta)|)^{-N} (\mathbf{1} + |t(\delta)|^q) h(K'(F_{\delta, \delta'}))$$

est bornée, et ceci quel que soit l'entier $q \geq 0$. On en conclut aussitôt que, quel que soit l'entier $q \geq 0$, la fonction

$$(\delta, \delta') \rightarrow |t(\delta)|^q h(K'(F_{\delta, \delta'}))$$

est bornée. On voit de façon analogue que la fonction $(\delta, \delta') \rightarrow |t(\delta')|^q h(K'(F_{\delta, \delta'}))$ est bornée, et nous avons donc bien établi l'assertion (\star) .

Définissons une fonction $K(F)$ sur $\mathbf{R}^{2p} = \mathbf{R} \times \mathbf{R}^{p'} \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}^{p'}$ en posant

$$K(F)(t_1, \omega, t_2, \omega_2) = K'(F_{\exp t_1 a, \exp t_2 a})(\omega_1, \omega_2) \quad (t_1, t_2 \in \mathbf{R}, \omega_1, \omega_2 \in \mathbf{R}^{p'}).$$

Il résulte de (\star) et de [8], p. 115, que $K(F) \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^{2p})$. Identifions comme plus haut $L_{\mathfrak{H}'}^2(\Delta)$ à $L_{\mathfrak{C}}^2(\mathbf{R}^p)$ en posant, pour $f \in L_{\mathfrak{H}'}^2(\Delta)$,

$$(f(\exp ta))(\omega) = f(t, \omega) \quad (t \in \mathbf{R}, \omega \in \mathbf{R}^{p'}).$$

Soient $f \in L_{\mathfrak{H}'}^2(\Delta)$ et $f' \in L_{\mathfrak{H}'}^2(\Delta)$. La fonction $(\delta, \delta') \rightarrow (U(F_{\delta, \delta'})f(\delta') | f'(\delta))$ sur $\Delta \times \Delta$ est intégrable pour la mesure $d\delta d\delta'$ et d'intégrale $(U(F)f | f')$. (Ceci résulte de la démonstration de [2], lemme 37, dans laquelle l'hypothèse que F est continue à support compact peut être remplacée par l'hypothèse que $F \in \mathcal{S}(\Gamma)$). Donc

$$(U(F)f | f')$$

$$\begin{aligned} &= \iiint (K'(F_{\delta, \delta'}))(\omega_1, \omega_2) f(\delta')(\omega_1) \overline{f'(\delta)(\omega_2)} d\omega_1 d\omega_2 d\delta d\delta' \\ &= \iiint K(F)(t_1, \omega_1, t_2, \omega_2) f(\exp t_1 a)(\omega_1) \overline{f'(\exp t_2 a)(\omega_2)} d\omega_1 d\omega_2 dt_1 dt_2 \\ &= \iiint K(F)(t_1, \omega_1, t_2, \omega_2) f(t_1, \omega_1) \overline{f'(t_2, \omega_2)} d\omega_1 d\omega_2 dt_1 dt_2. \end{aligned}$$

Donc $U(F)$ est l'opérateur dans $L_{\mathfrak{C}}^2(\mathbf{R}^p)$ défini par le noyau $K(F)$.

Soient $F_1, F_2 \in \mathcal{S}(\Gamma)$. L'opérateur $U(F_1 + F_2) = U(F_1) + U(F_2)$ est défini par le noyau $K(F_1) + K(F_2)$, donc les fonctions $K(F_1 + F_2)$ et $K(F_1) + K(F_2)$ sont égales presque partout et par suite partout. De même, $K(\lambda F) = \lambda K(F)$ pour $\lambda \in \mathbf{C}$. L'application K est donc linéaire. Soit enfin (F_n) une suite d'éléments de $\mathcal{S}(\Gamma)$ tendant vers F dans $\mathcal{S}(\Gamma)$, et supposons que les $K(F_n)$ aient une limite K dans $\mathcal{S}(\mathbf{R}^{2p})$. Les F_n tendent vers F dans $L_{\mathfrak{C}}^1(\Gamma)$ (lemme 3), donc $\|U(F_n) - U(F)\| \rightarrow 0$. D'autre part, $K(F_n)$ tend vers K dans $L_{\mathfrak{C}}^2(\mathbf{R}^{2p})$, donc $U(F_n)$ tend au sens d'Hilbert-Schmidt vers l'opérateur U défini par le noyau K . Donc $U = U(F)$, et par suite $K = K(F)$. Appliquant le théorème du graphe fermé aux espaces de Fréchet $\mathcal{S}(\Gamma)$ et

$\mathfrak{S}(\mathbf{R}^{2p})$, on voit que l'application linéaire K est continue. Ceci achève la démonstration du théorème 1.

COROLLAIRE 1. — Soient Γ un groupe de Lie réel nilpotent simplement connexe, U une représentation unitaire irréductible de Γ . Pour toute $F \in \mathfrak{S}(\Gamma)$, $U(F)$ est un opérateur à trace, et l'application $F \rightarrow \text{tr}(U(F))$ est une distribution tempérée sur Γ .

DÉMONSTRATION. — Utilisons le théorème 1 et ses notations. Puisque $U(F)$ est défini par le noyau $K(F) \in \mathfrak{S}(\mathbf{R}^{2p})$, $U(F)$ est un opérateur à trace, et $\text{tr}(U(F)) = \int_{\mathbf{R}^p} K(F)(x, x) dx$ (cf. par exemple [3]). Or, l'application $F \rightarrow K(F)$ de $\mathfrak{S}(\Gamma)$ dans $\mathfrak{S}(\mathbf{R}^{2p})$ est continue. Donc l'application $F \rightarrow \int_{\mathbf{R}^p} K(F)(x, x) dx$ de $\mathfrak{S}(\Gamma)$ dans \mathbf{C} est continue. D'où le corollaire.

REMARQUE. — Rappelons que d'après [3], il peut arriver que la distribution $F \rightarrow \text{tr}(U(F))$ ne soit pas une mesure. D'autre part, utilisant la démonstration du théorème 1, il est facile de voir que cette distribution est l'extension à Γ d'une distribution sur un sous-groupe connexe invariant de codimension ≥ 1 (sauf si $\dim U = 1$).

COROLLAIRE 2. — Soient Γ un groupe de Lie réel nilpotent connexe, U une représentation unitaire irréductible de Γ . Pour toute $F \in \mathcal{O}(\Gamma)$, $U(F)$ est un opérateur à trace, et l'application $F \rightarrow \text{tr}(U(F))$ est une distribution sur Γ .

DÉMONSTRATION. — Le groupe Γ peut être considéré comme quotient d'un groupe de Lie nilpotent simplement connexe Γ' par un sous-groupe fermé Δ . Pour toute fonction $F' \in \mathcal{O}(\Gamma')$, soit $\pi(F') \in \mathcal{O}(\Gamma)$ la fonction obtenue en intégrant sur les classes modulo Δ . On sait ([1], p. 131) qu'il existe une application linéaire continue π' de $\mathcal{O}(\Gamma)$ dans $\mathcal{O}(\Gamma')$ telle que $\pi(\pi'(F)) = F$ pour toute $F \in \mathcal{O}(\Gamma)$. Ceci posé, U définit une représentation unitaire U' de Γ' triviale sur Δ . Si $F' \in \mathcal{O}(\Gamma')$, on voit comme dans la démonstration du théorème 1 que $U'(F') = U(\pi(F'))$. Donc, si $F \in \mathcal{O}(\Gamma)$, on a

$$U(F) = U(\pi(\pi'(F))) = U'(\pi'(F)).$$

D'après le corollaire 1, $U(F)$ est un opérateur à trace, et

$$\text{tr}(U(F)) = \text{tr}(U'(\pi'(F))) = T(\pi'(F)),$$

où T est une distribution sur Γ' . Comme π' est linéaire continue, $F \rightarrow \text{tr}(U(F))$ est une distribution sur Γ .

COROLLAIRE 3. — Soient Γ un groupe de Lie réel nilpotent connexe,

U une représentation unitaire irréductible de Γ . Pour toute $F \in L^1_{\mathbb{C}}(\Gamma)$, $U(F)$ est un opérateur complètement continu.

DÉMONSTRATION. — Il existe une suite de fonctions $F_n \in \mathcal{O}(\Gamma)$ telles que $\int_{\Gamma} |F(\gamma) - F_n(\gamma)| d\gamma \rightarrow 0$. Alors, $\|U(F) - U(F_n)\| \rightarrow 0$, et les $U(F_n)$ sont des opérateurs à trace, donc complètement continus. Donc $U(F)$ est complètement continu.

COROLLAIRE 4. — *Tout groupe de Lie réel nilpotent connexe a un dual lisse (« smooth dual » au sens de [6]).*

DÉMONSTRATION. — Ceci résulte du corollaire 3 et de [4], corollaire du théorème 4. I.

BIBLIOGRAPHIE.

- [1] BRUHAT (François). — Sur les représentations induites des groupes de Lie, *Bull. Soc. math. France*, t. 84, 1956, p. 97-205.
- [2] DIXMIER (Jacques). — Sur les représentations unitaires des groupes de Lie nilpotents, II., *Bull. Soc. math. France*, 85, 1957, p. 325-388.
- [3] DIXMIER (Jacques). — Sur les représentations unitaires des groupes de Lie nilpotents, IV, *Canadian J. of Math.* (à paraître).
- [4] FELL (J. M. G.). — *C*-algebras with smooth dual* (à paraître).
- [5] MACKEY (George W.). — Imprimitivity for representations of locally compact groups, *Proc. nat. Acad. Sc. U. S. A.*, t. 35, 1949, p. 537-545.
- [6] MACKEY (George W.). — Borel structure in groups and [their duals, *Trans. Amer. math. Soc.*, t. 85, 1957, p. 134-165.
- [7] HARISH-CHANDRA. — Representations of semi-simple Lie groups, III., *Trans. Amer. math. Soc.*, t. 76, 1954, p. 234-253.
- [8] SCHWARTZ (Laurent). — Espaces de fonctions différentiables à valeurs vectorielles *Journal d'Analyse mathématique*, t. 4, 1954-1955, p. 88-148.

(Manuscrit reçu le 24 avril 1959.)

Jacques DIXMIER,
 Professeur à la Faculté des Sciences de Paris,
 64, rue Gay-Lussac, Paris (5^e).

