BULLETIN DE LA S. M. F.

PIERRE BOUGHON
JACQUELINE NATHAN
PIERRE SAMUEL

Courbes planes en caractéristique 2

Bulletin de la S. M. F., tome 83 (1955), p. 275-278
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1955__83__275_0>

© Bulletin de la S. M. F., 1955, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Bull. Soc. Math. France,
83, 1955, p. 275 à 278.

COURBES PLANES EN CARACTÉRISTIQUE 2;

PAR M. PIERRE BOUGHON, M^lle JACQUELINE NATHAN et M. PIERRE SAMUEL,

Université de Clermont-Ferrand.

Nous nous proposons de mettre en évidence certains points sur lesquels la « Géométrie différentielle » des courbes algébriques planes sur un corps de caractéristique 2 diffère de la Géométrie classique.

1. Soit C une courbe plane (irréductible) définie sur un corps quelconque k, $F(X_0, X_1, X_2) = 0$ son équation homogène, (x_0, x_1, x_2) les coordonnées strictement homogènes d'un point générique de C (1). La tangente à C au point (x_0, x_1, x_2) a pour équation $\sum_i u_i X_i = 0$ où $u_i = F'_{x_i}$. Soit $\varphi(U_0, U_1, U_2) = 0$ l'équation tangentielle homogène de C, c'est-à-dire un générateur de l'idéal homogène formé par les polynomes sur k qui s'annullent en (u_0, u_1, u_2). Supposons, ce qui est loisible après un éventuel changement de coordonnées, que l'on a $x_0 \neq 0$ et $u_0 \neq 0$; et posons

$$u = \frac{u_1}{u_0}, \qquad v = \frac{u_2}{u_0}, \qquad x = \frac{x_1}{x_0}, \qquad y = \frac{x_2}{x_0}.$$

Alors $k(u, v)$ est (sauf si C est une droite) une extension régulière et de degré de transcendance 1 de k [en tant que sous-extension de $k(x, y)$]; elle admet donc, à un facteur près, une et une seule k-dérivation non nulle D. On démontre (2) que, comme dans la théorie classique, le point commun aux deux droites

$$uX + vY + 1 = 0, \tag{1}$$

$$(Du)X + (Dv)Y = 0 \tag{2}$$

est le point caractéristique de la tangente $T(x, y)$ à C au point (x, y), c'est-à-dire, en désignant par (x', y') un point générique de C sur $k(x, y)$, l'unique spécialisation du point $T(x, y).T(x', y')$ sur $k(x, y)$ prolongeant $(x', y') \to (x, y)$. Prolongeons D en une dérivation D' de l'extension transcendante simple $k(u_0, u_1, u_2)$ de $k(u, v)$. En tenant compte de (1), l'équation (2) s'écrit

(1) Pour les définitions des notions de Géométrie algébrique utilisées, nous renvoyons le lecteur à : P. SAMUEL, *Méthodes d'Algèbre abstraite en Géométrie algébrique* (*Erg. der Math.*, Berlin, Springer, 1955).

(2) P. BOUGHON, *Spécialisations et dérivations. Application à la définition du cycle caractéristique d'un diviseur* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 240, 1955, p. 1185-87).

$\sum_i (\mathrm{D}'u_i)\mathrm{X}_i = 0$. Comme on a $\sum_i u_i \varphi'_{u_i} = 0$ d'après l'identité d'Euler, et $\sum_i (\mathrm{D}'u_i)\varphi'_{u_i} = 0$ par application de D′ à la relation $\varphi(u_0, u_1, u_2) = 0$, le point $(\varphi'_{u_0}, \varphi'_{u_1}, \varphi'_{u_2})$ *est le point caractéristique de la tangente* T. Tout ceci a un sens puisque aucun des polynomes F, φ n'a toutes ses dérivées partielles nulles, étant donné que chacun engendre un idéal qui reste premier par toute extension de k. Nous supposerons, ce qui est loisible, que l'on a $\varphi'_{u_0} \neq 0$, et poserons

$$a = \frac{\varphi'_{u_1}}{\varphi'_{u_0}}, \qquad b = \frac{\varphi'_{u_2}}{\varphi'_{u_0}}.$$

Théorème 1. — *Si k est un corps de caractéristique* 2, *les coefficients* (u, v) *de la tangente* T *à* C *en* (x, y) *appartiennent à* $k(x^2, y^2)$, *et les coordonnées* (a, b) *du point caractéristique de* T *appartiennent à* $k(x^4, y^4)$.

Il suffit de montrer que u et v appartiennent à $k(x^2, y^2)$, puisque la seconde assertion en résulte par application à l'équation tangentielle φ. Or on a

$$u = \frac{\mathrm{F}'_{x_1}}{\mathrm{F}'_{x_0}} = \frac{\mathrm{F}'_{x_1}\mathrm{F}'_{x_0}}{(\mathrm{F}'_{x_0})^2}.$$

Par passage à des coordonnées non homogènes notre assertation va donc résulter du lemme suivant :

Lemme 1. — *Soient k un corps de caractéristique* 2, *et* (s, t) *un point générique sur k d'une courbe plane d'équation non homogène* $\mathrm{G}(\mathrm{S}, \mathrm{T}) = 0$. *Alors* $\mathrm{G}'_s \mathrm{G}'_t \in k(s^2, t^2)$.

Écrivons en effet

$$\mathrm{G}(\mathrm{S}, \mathrm{T}) = \mathrm{A}(\mathrm{S}^2, \mathrm{T}^2) + \mathrm{SB}(\mathrm{S}^2, \mathrm{T}^2) + \mathrm{TC}(\mathrm{S}^2, \mathrm{T}^2) + \mathrm{STD}(\mathrm{S}^2, \mathrm{T}^2).$$

Comme $\mathrm{G}'_\mathrm{S} = \mathrm{B} + \mathrm{T}.\mathrm{D}$ et $\mathrm{G}'_\mathrm{T} = \mathrm{C} + \mathrm{S}.\mathrm{D}$, il vient

$$\mathrm{G}'_\mathrm{S}.\mathrm{G}'_\mathrm{T} = \mathrm{B}.\mathrm{C} + \mathrm{D}(\mathrm{S}.\mathrm{B} + \mathrm{T}.\mathrm{C} + \mathrm{ST}.\mathrm{D});$$

d'où

$$\mathrm{G}'_s \mathrm{G}'_t = \mathrm{B}(s^2, t^2)\,\mathrm{C}(s^2, t^2) + \mathrm{D}(s^2, t^2)\,\mathrm{A}(s^2, t^2), \qquad \text{puisque} \quad \mathrm{G}(s, t) = 0.$$

C. Q. F. D.

Il résulte du théorème que le point caractéristique de la tangente T à C n'est *jamais* son point de contact (x, y) avec C.

Remarque. — Soit $u\mathrm{X} + v\mathrm{Y} + 1 = 0$ l'élément générique d'une famille à un paramètre de droites, $k(u, v)$ étant une extension régulière de k. Si la droite $u\mathrm{X} + v\mathrm{Y} + 1 = 0$ contient un point (a, b) tel que $k(u, v)$ soit une extension *algébrique inséparable* de $k(a, b)$, alors (a, b) est point caractéristique de cette droite. En effet il existe une k-dérivation non nulle D de $k(u, v)$ qui est nulle sur $k(a, b)$; et, par application de D à la relation $ua + vb + 1 = 0$, on obtient $(\mathrm{D}u)a + (\mathrm{D}v)b = 0$.

Exemples. — 1° Un calcul direct montre aussitôt que toutes les tangentes à la *conique* $\sum_{i\leq j} a_{ij}x_ix_j = 0$ passent par le point (a_{12}, a_{02}, a_{01}). Le fait que toutes les tangentes à une conique C sont concourantes résulte aussi du théorème de Frégier et du fait que la correspondance identique sur C est une involution (puisque $t = t'$ équivaut à $t + t' = 0$ en caractéristique 2).

2° Une *cubique à point de rebroussement* peut toujours être ramenée à la forme $x^3 + y^3 + y^2 = 0$. Ses tangentes $x^2X + y^2(Y + 1) = 0$ passent toutes par le point $(0, 1)$, qui est l'unique point d'inflexion de la cubique.

3° Une *cubique à point double ordinaire* peut toujours être ramenée à la forme $x^3 + y^3 + xy = 0$. L'équation générale de ses tangentes est $X(x^2 + y) + Y(y^2 + x) + xy = 0$, ou encore $Xy^4 + Yx^4 + x^2y^2 = 0$. Son équation tangentielle est $uv + 1 = 0$. Les points caractéristiques de ses tangentes décrivent donc la droite de l'infini, qui est d'ailleurs la droite joignant les trois points d'inflexion de la cubique.

4° L'équation d'une *cubique sans singularité* peut toujours se ramener à $x^3 + y^3 + qxy + 1 = 0 (q \in k)$. On a

$$u = \frac{x^2 + qy^4}{(1 + qxy)^2} \qquad \text{et} \qquad v = \frac{y^2 + qx^4}{(1 + qxy)^2}.$$

Son équation tangentielle est $u^3 + v^3 + q^2uv + 1 = 0$. Le point caractéristique de la tangente en (x, y) est $\left[\frac{u^2 + q^2v^4}{(1 + q^2uv)^2}, \frac{v^2 + q^2u^4}{(1 + q^2uv)^2}\right] = (x^4, y^4)$, et son lieu est la cubique $X^3 + Y^3 + q^4XY + 1 = 0$. Ce point caractéristique est d'ailleurs le tangentiel de (x, y) dans le cas de la cubique « équianharmonique » obtenue pour $q = 0$; en général ce tangentiel est le point (x^2u, y^2v).

5° La *quartique non singulière* C d'équation $xy^3 + yz^3 + zx^3 = 0$ (coordonnées homogènes) a pour tangente $Xz^4y^2 + Yx^4z^2 + Zy^4x^2 = 0$. Celle-ci passe par les points (z^2, x^2, y^2) et (x^8, y^8, z^8), qui sont des points de C comme on le vérifie par élévation de l'équation de C aux puissances 2 et 8. Passons aux coordonnées non homogènes en faisant $z = 1$; comme $k(u, v) = k\left(\frac{1}{x^2y^2}, \frac{x^2}{y^4}\right) = k(x^2y^2, y^6)$, est une extension 2-radicielle de $k(x^8, y^8)$, le point (x^8, y^8) est, d'après la remarque ci-dessus, le point caractéristique de la tangente en (x, y). L'équation tangentielle de C est $u^5v + v^5w + w^5u + u^2v^2w^2 = 0$.

6° La courbe C d'équation $x^{2^n+1} + y^{2^n+1} + 1 = 0$, qui est non singulière, a pour tangente $Xx^{2^n} + Yy^{2^n} + 1 = 0$, et son équation tangentielle est $u^{2^n+1} + v^{2^n+1} + 1 = 0$. Le point caractéristique de la tangente est $(u^{2^n}, v^{2^n}) = (x^{2^{2n}}, y^{2^{2n}})$, et son lieu est la courbe C. La tangente à C au point (x, y) a un contact d'ordre 2^n avec C en (x, y).

2. Théorème 2. — *Sur un corps k de caractéristique* 2, *la classe d'une courbe plane* C *de degré n est au plus* $\frac{1}{2}n(n-1)$ [et non $n(n-1)$ comme dans le cas classique].

Au moyen d'un choix convenable des coordonnées, il va nous suffire de majorer le nombre des tangentes menées à C par le point à l'infini sur Ox. Si $F(X, Y) = 0$

désigne l'équation de C, nous avons ainsi à majorer le nombre de points communs à C et à la courbe $F'_X(X, Y) = 0$ (certains de ces points pouvant être des points multiples de C). Or, en écrivant $F(X, Y) = A(X^2, Y) + X.B(X^2, Y)$, on a $F'_X(X, Y) = B(X^2, Y)$, et nous sommes ramenés à majorer le nombre des points communs aux courbes $A(X^2, Y) = 0$ et $B(X^2, Y) = 0$. Or, ce sont là des courbes de degrés au plus n et $n-1$, dont toutes les tangentes sont parallèles à Ox. Donc chacun de leurs points d'intersection compte au moins pour deux et il y en a au plus $\frac{1}{2}n(n-1)$ distincts.

Exemples. — 1° le maximum $\frac{1}{2}n(n-1)$ est atteint par les courbes non singulières des exemples 4° et 5° ci-dessus, mais non par la courbe non singulière de l'exemple 6°.

2° Pour étudier directement la classe d'une *cubique*, on peut remarquer qu'une condition nécessaire et suffisante pour que l'équation

$$at^3 + bt^2 + ct + d = 0 \tag{1}$$

ait une racine double est que l'on ait $ad + bc = 0$ [en effet l'équation dérivée est $at^2 + c = 0$, et, en éliminant t^2 entre cette dernière et l'équation (1) élevée au carré, on obtient $a^2d^2 + b^2c^2 = 0$]. Il en résulte que les tangentes menées par O à la cubique C (plus, éventuellement, la droite joignant O au point double de C) d'équation

$$g_3(x, y) + g_2(x, y) + g_1(x, y) + g_0 = 0 \qquad (g_i, \text{ forme de degré } i)$$

sont représentées par

$$g_0 g_3(x, y) + g_1(x, y) g_2(x, y) = 0. \tag{2}$$

Il y en a en général 3. Lorsque O est un point simple de C l'équation (2) se décompose en $g_1(x, y) = 0$ représentant la tangente à C en O, et en $g_2(x, y) = 0$. Dans le cas de la forme réduite $x^3 + y^3 + qxy + 1 = 0$, mettons l'origine au point (x_0, y_0) de C en posant $x = x_0 + X$ et $y = y_0 + Y$; l'équation $g_2(X, Y) = 0$ s'écrit alors $x_0 X^2 + y_0 Y^2 + qXY = 0$; si $q \neq 0$ elle représente deux droites distinctes, et chaque point de C est le tangentiel de deux points de C; dans le cas de la cubique « équianharmonique » $q = 0$ (ce nom ne répond ici à rien, puisqu'il ne peut être question du birapport des quatre tangentes menées à C par un point de C) elle représente une seule droite (comptée deux fois), et chaque point de C est tangentiel d'un seul point de C.

3° On voit de même qu'une cubique à point double ordinaire est de classe 2, et qu'une cubique à point de rebroussement est de classe 1.

146754. — Imp. Gauthier-Villars, 55, Quai des Grands-Augustins, Paris (6e).
Dépôt légal, Imprimeur, 1955, n° 997. — Dépôt légal, Éditeur, 1955, n° 585.