BULLETIN DE LA S. M. F.

HENRI CABANNES

Étude de quelques propriétés caractéristiques des solutions des équations de Navier

Bulletin de la S. M. F., tome 80 (1952), p. 37-46

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1952__80__37_0>

ÉTUDE DE QUELQUES PROPRIÉTÉS CARACTÉRISTIQUES DES SOLUTIONS DES ÉQUATIONS DE NAVIER;

PAR HENRI CABANNES.

Le mouvement permanent d'un fluide visqueux incompressible est déterminé par la connaissance en chaque point de la pression p et des composantes cartésiennes de la vitesse $u_i (i = 1, 2, 3)$. Ces quatre fonctions doivent vérifier un système de quatre équations aux dérivées partielles : les équations de Navier. Les équations de Navier contiennent des termes non linéaires et des dérivées du second ordre; leur étude est, à ce titre, fort difficile. Les plus beaux résultats concernant le cas général furent établis par Odqvist. Cet auteur a prouvé l'existence d'une solution des équations de Navier à l'intérieur d'un domaine borné Q sur la frontière duquel les fonctions u_i prennent des valeurs données à l'avance; les formules sont malheureusement fort compliquées et n'ont pas permis de construire de solution explicite simple. La solution explicite la plus intéressante concerne l'écoulement autour de la sphère, mais, pour l'obtenir, Boussinesq a dû au préalable négliger certains termes dans les équations du mouvement. En dehors des solutions tout à fait élémentaires, on connaît cependant quelques solutions exactes; dans l'une d'elles, due à Hamel, les lignes de courant sont des spirales logarithmiques.

L'étude des mouvements des fluides visqueux est donc assez peu avancée. A défaut de résultats complets, il nous a été possible d'établir quelques propriétés que doivent vérifier les solutions éventuelles des équations de Navier. Dans le cas des écoulements à trois dimensions, nous avons prouvé qu'il ne peut pas exister d'écoulement permanent autour d'un obstacle fixe donnant à l'infini un champ de vitesses régulier et uniforme; lorsque l'écoulement présente la symétrie axiale ou bien lorsque l'écoulement est un écoulement plan, la même conclusion peut être obtenue sans qu'il soit nécessaire de supposer la vitesse uniforme à l'infini. Dans le cas des écoulements plans, la recherche de polynômes de deux variables vérifiant les équations de Navier nous a permis de démontrer deux théorèmes. Ces propriétés ont surtout un caractère négatif, que l'on peut rapprocher des paradoxes de Stockes et de Whitehead. Malgré ce caractère négatif, elles nous ont semblé pouvoir présenter quelque intérêt pour les recherches futures, puisqu'elles éliminent des voies dans lesquelles on pourrait être tenté de s'engager et que, d'autre part, elles pourront peut-être suggérer et orienter des développements nouveaux.

I. — Recherche de solutions régulières à l'infini.

1. Étude des écoulements à trois dimensions. — Nous écrirons les équations du mouvement sous forme vectorielle. En un point du fluide, nous désignons par p la pression et par $\vec{V}$ le vecteur vitesse. Les équations de Navier s'écrivent sous la forme suivante :

$$(1_1) \qquad \frac{\mu}{\rho}\overrightarrow{\operatorname{rot}\operatorname{rot}V} + \overrightarrow{\operatorname{rot}V \wedge V} = -\frac{1}{\rho}\overrightarrow{\operatorname{grad}p} - \overrightarrow{\operatorname{grad}\frac{V^2}{2}},$$

$$(1_2) \qquad \operatorname{div}V = 0.$$

Les paramètres μ et ρ sont deux constantes positives, représentant respectivement le coefficient de viscosité et la densité. On peut éliminer la pression en prenant le rotationnel de chacun des deux membres de l'équation (1_1); on obtient ainsi l'équation suivante :

$$(1_3) \qquad \nu\,\overrightarrow{\operatorname{rot}\operatorname{rot}\operatorname{rot}V} + \overrightarrow{\operatorname{rot}\{\operatorname{rot}V \wedge V\}} = 0,$$

où l'on a posé $\nu = \frac{\mu}{\rho}$. Nous nous proposons de chercher un champ vectoriel satisfaisant les conditions (1_2) et (1_3) et doué d'un développement en série entière uniformément convergent suivant les puissances de $\frac{1}{r}$, où r désigne la distance à l'origine des coordonnées. Nous introduisons les coordonnées sphériques r, θ, φ liées à des coordonnées cartésiennes rectangulaires x, y, z par les relations

$$x = r\sin\theta\cos\varphi, \qquad y = r\sin\theta\sin\varphi, \qquad z = r\cos\theta,$$

d'où l'on déduit

$$\begin{aligned} dr &= \sin\theta\cos\varphi\,dx + \sin\theta\sin\varphi\,dy + \cos\theta\,dz,\\ r\,d\theta &= \cos\theta\cos\varphi\,dx + \cos\theta\sin\varphi\,dy - \sin\theta\,dz,\\ r\,d\varphi &= -\sin\theta\sin\varphi\,dx + \sin\theta\cos\varphi\,dy. \end{aligned}$$

Le développement en série de la fonction vectorielle $\vec{V}$ possède la forme suivante :

$$(2) \qquad \overrightarrow{V(r,\theta,\varphi)} = \sum_{n=0}^{\infty}\overrightarrow{\frac{\alpha_n(\theta,\varphi)}{r^n}}.$$

La somme du second membre doit être étendue aux valeurs entières de n; dans la suite, nous adopterons la convention de l'indice muet suivant laquelle on doit effectuer la sommation par rapport à tout indice qui figure deux fois dans un même monôme. En portant le développement (2) dans les équations (1_3) et (1_2), nous obtenons une suite infinie d'équations aux dérivées partielles vérifiées par les fonctions de deux variables $\overrightarrow{\alpha_n(\theta,\varphi)}$. Ces équations sont les suivantes :

$$(3) \qquad \left\{\begin{aligned} &\nu\,\overrightarrow{\operatorname{rot}\operatorname{rot}\operatorname{rot}\frac{\alpha_n}{r^n}} + \overrightarrow{\operatorname{rot}\sum_{i=0}^{n}\left(\operatorname{rot}\frac{\alpha_{n+1-i}}{r^{n+1-i}}\right)\wedge\frac{\alpha_i}{r^i}} = 0,\\ &\operatorname{div}\frac{\alpha_{n+1}}{r^{n+1}} = 0. \end{aligned}\right.$$

Les équations (3) doivent être écrites pour toutes les valeurs entières de n, de zéro jusqu'à l'infini. Nous supposerons que le champ vectoriel $\vec{V}$ est uniforme à l'infini. La fonction $\overrightarrow{\alpha_0(\theta, \varphi)}$ possède alors une valeur constante $\vec{V}_0$ et les équations (3), pour $n = 0$ prennent la forme simple suivante :

$$\text{(3')} \qquad \left\{ \begin{aligned} &\overrightarrow{\operatorname{rot}\left\{\operatorname{rot}\frac{\alpha_1}{r} \wedge V_0\right\}} = 0, \\ &\operatorname{div}\frac{\alpha_1}{r} = 0. \end{aligned} \right.$$

La première équation (3') prouve que le rotationnel du vecteur $\frac{\vec{\alpha}_1}{r}$ est invariant dans tout déplacement parallèle à $\vec{V}_0$; la seconde équation (3') permet alors de montrer que ce rotationnel est nul dans tout l'espace. En effet, si nous choisissons l'axe Oz parallèle à $\vec{V}_0$ et si nous désignons par $\vec{k}$ un vecteur de divergence nulle, on établit, par l'intermédiaire des coordonnées cartésiennes, la relation suivante :

$$\overrightarrow{\operatorname{rot}(k \wedge V)} = \frac{\partial \vec{k}}{\partial z} \cdot \vec{V}_0.$$

Comme la divergence d'un rotationnel est nulle, la première équation (3') peut s'écrire

$$\text{(4)} \qquad \frac{\partial}{\partial z} \overrightarrow{\operatorname{rot}\frac{\alpha_1}{r}} = 0.$$

Le rotationnel de $\frac{\vec{\alpha}_1}{r}$ étant indépendant de z, ce vecteur est donc la somme d'un vecteur indépendant de z et du gradient d'une fonction arbitraire. Revenant aux coordonnées sphériques, on peut écrire

$$\frac{\overrightarrow{\alpha_1(\theta, \varphi)}}{r} = \frac{\overrightarrow{\alpha_1^{(0)}(\theta, \varphi)}}{r} + \overrightarrow{\operatorname{grad} U_1(\theta, \varphi)}$$

A cause de l'homogénéité, la fonction U_1 est indépendante de r. La condition pour que le terme $\frac{\vec{\alpha}_1^{(0)}}{r}$ soit indépendant de z s'écrit

$$\frac{\partial}{\partial z} \frac{\vec{\alpha}_1^{(0)}}{r} = -\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \overrightarrow{(\alpha_1^{(0)} \sin\theta)} = 0, \qquad \overrightarrow{\alpha_1^{(0)}(\theta, \varphi)} = \frac{\overrightarrow{\alpha_1^{*}(\varphi)}}{\sin\theta}.$$

La solution générale de la première équation (3') est donc la suivante :

$$\text{(5)} \qquad \frac{\overrightarrow{\alpha_1(\theta, \varphi)}}{r} = \frac{\overrightarrow{\alpha_1^{*}(\varphi)}}{r \sin\theta} + \overrightarrow{\operatorname{grad} U_1(\theta, \varphi)}.$$

Nous allons prouver que tout vecteur borné $\frac{\overrightarrow{\alpha_1(\theta, \varphi)}}{r}$ satisfaisant à la formule (5) possède un rotationnel identiquement nul. Dans ce but, nous désignons par $k(\varphi)$,

$l(\varphi)$ et $m(\varphi)$ les composantes cartésiennes du vecteur $\overrightarrow{\alpha_1^*(\varphi)}$ et par v_1, v_2 et v_3 les composantes du vecteur $\frac{\vec{\alpha}_1}{r}$ sur le trièdre fondamental associé aux coordonnées sphériques. Les expressions de ces dernières composantes sont les suivantes :

$$(6) \qquad \begin{cases} v_1 = \dfrac{k \sin\theta \cos\varphi + l \sin\theta \sin\varphi + m \cos\theta}{r \sin\theta}, \\ v_2 = \dfrac{k \cos\theta \cos\varphi + l \cos\theta \sin\varphi - m \sin\theta}{r \sin\theta} + \dfrac{1}{r} \dfrac{\partial U_1}{\partial\theta}, \\ v_3 = \dfrac{-k \sin\varphi + l \cos\varphi}{r \sin\theta} + \dfrac{1}{r \sin\theta} \dfrac{\partial U_1}{\partial\varphi}. \end{cases}$$

En un point situé sur le demi-axe Oz, la variable θ est nulle; pour que la composante v_1 soit bornée, il est nécessaire que la fonction $m(\varphi)$ soit identique à zéro; le vecteur $\frac{\overrightarrow{\alpha_1^*(\varphi)}}{r \sin\theta}$ est perpendiculaire à Oz. D'une façon analogue, pour que les composantes v_2 et v_3 demeurent bornées lorsque θ est nul, il est nécessaire que les deux relations suivantes soient vérifiées :

$$(7) \qquad \begin{cases} \lim\limits_{\theta=0} \sin\theta \dfrac{\partial U_1}{\partial\theta} = -k(\varphi)\cos\varphi - l(\varphi)\sin\varphi, \\ \lim\limits_{\theta=0} \qquad \dfrac{\partial U_1}{\partial\varphi} = \quad k(\varphi)\sin\varphi - l(\varphi)\cos\varphi. \end{cases}$$

La première relation indique que, lorsque θ tend vers zéro, U_1 devient infini, comme $-(k\cos\varphi + l \sin\varphi)L\theta$; pour que la seconde relation puisse être vérifiée, il est alors nécessaire que l'on ait

$$(8) \qquad \frac{d}{d\varphi}\{k(\varphi)\cos\varphi + l(\varphi)\sin\varphi\} = 0.$$

Les vecteurs $\frac{\overrightarrow{\alpha_1(\theta, \varphi)}}{r}$ et $\frac{\overrightarrow{\alpha_1^*(\varphi)}}{r \sin\theta}$ ont même rotationnel; puisque le second de ces vecteurs est perpendiculaire à Oz et indépendant de z, son rotationnel est parallèle à Oz et a pour valeur

$$\frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{l(\varphi)}{r \sin\theta}\right\} - \frac{\partial}{\partial y}\left\{\frac{k(\varphi)}{r \sin\theta}\right\}.$$

Cette valeur est nulle en vertu de la condition (8). Il en résulte que, pour toute solution bornée $\frac{\vec{\alpha}_1}{r}$ des équations (3′), on peut écrire

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\, \frac{\alpha_1}{r} = 0.$$

Nous allons déduire de cette première propriété un résultat plus général relatif à toute solution bornée des équations (1_2) et (1_3), à condition que l'on puisse représenter une telle solution par un développement en série de la forme indiquée dans la formule (2).

Nous supposons que la propriété établie pour le vecteur $\overrightarrow{\frac{\alpha_1(\theta, \varphi)}{r}}$ soit vraie pour tous les vecteurs $\overrightarrow{\frac{\alpha_i(\theta, \varphi)}{r^i}}$ pour lesquels i est inférieur à n; nous faisons donc l'hypothèse suivante :

$$\text{(9)} \qquad \overrightarrow{\operatorname{rot} \frac{\alpha_i(\theta, \varphi)}{r^i}} = 0 \qquad (i \leqq n-1).$$

Dans ces conditions, les équations (3) relatives au vecteur $\frac{\vec{\alpha}_n}{r^n}$ prennent la forme suivante :

$$\text{(3'')} \qquad \left\{ \begin{aligned} &\overrightarrow{\operatorname{rot} \left\{ \operatorname{rot} \frac{\alpha_n}{r^n} \wedge V_0 \right\}} = 0, \\ &\operatorname{div} \frac{\alpha_n}{r^n} = 0. \end{aligned} \right.$$

Par un raisonnement analogue à celui que nous venons de faire, on en déduit que la relation (9) est encore vraie pour $i = n$. En effet, le vecteur $\frac{\vec{\alpha}_n}{r^n}$ est encore égal à la somme d'un gradient et d'un vecteur indépendant de z. On peut écrire

$$\text{(5')} \qquad \overrightarrow{\frac{\alpha_n(\theta, \varphi)}{r^n}} = \overrightarrow{\frac{\alpha_n^*(\varphi)}{(r \sin\theta)^n}} + \overrightarrow{\operatorname{grad} \frac{U_n(\theta, \varphi)}{r^{n-1}}}.$$

En désignant par $k(\varphi)$, $l(\varphi)$ et $m(\varphi)$ les composantes cartésiennes du vecteur $\overrightarrow{\alpha_n^*(\varphi)}$ et par v_1, v_2, v_3 les composantes sphériques du vecteur $\overrightarrow{\frac{\alpha_n^*(\varphi)}{(r \sin\theta)^n}}$, on peut écrire les formules suivantes analogues aux formules (6) :

$$\text{(6')} \qquad \left\{ \begin{aligned} v_1 &= \frac{k \sin\theta \cos\varphi + l \sin\theta \sin\varphi + m \cos\theta}{(r \sin\theta)^n} - \frac{(n-1) U_n}{r^n}, \\ v_2 &= \frac{k \cos\theta \cos\varphi + l \cos\theta \sin\varphi - m \sin\theta}{(r \sin\theta)^n} + \frac{1}{r^n} \frac{\partial U_n}{\partial\theta}, \\ v_3 &= \frac{-k \sin\varphi + l \cos\varphi}{(r \sin\theta)^n} - \frac{1}{r^n \sin\theta} \frac{\partial U_n}{\partial\varphi}. \end{aligned} \right.$$

Les conditions pour que ces composantes demeurent finies sur le demi-axe Oz s'écrivent de la façon suivante :

$$\text{(7')} \qquad \left\{ \begin{aligned} &\lim_{\theta=0} \quad (n-1)(\sin\theta)^n U_n = m, \\ &\lim_{\theta=0} (\sin\theta)^n \frac{\partial U_n}{\partial\theta} = -k \cos\varphi - l \sin\varphi, \\ &\lim_{\theta=0} (\sin\theta)^{n-1} \frac{\partial U_n}{\partial\varphi} = -k \sin\varphi + l \cos\varphi. \end{aligned} \right.$$

En composant les deux premières conditions, on obtient $m(\varphi) = 0$; en composant les deux dernières, on obtient

$$\text{(8')} \qquad k' \cos\varphi + l' \sin\varphi = n(k \sin\varphi - l \cos\varphi).$$

Il en résulte que le rotationnel du vecteur $\overrightarrow{\frac{\alpha_n(\theta, \varphi)}{r^n}}$ est identiquement nul.

La relation (9), vraie pour $i = 1$, est donc vraie pour toutes les valeurs de i. Le champ de vecteurs $\overrightarrow{V(r, \theta, \varphi)}$ défini par la formule (2) est donc irrotationnel. On peut énoncer le théorème suivant :

Théorème. — *Toute solution des équations de Navier dans lesquelles les composantes de la vitesse peuvent être développées en séries suivant les puissances entières et positives de $\frac{1}{r}$ représente un écoulement irrotationnel.*

Les conséquences de ce théorème pour les problèmes hydrodynamiques sont importantes. Les équations (1_1) et (1_2) se réduisent aux équations suivantes, dans lesquelles la viscosité n'intervient plus :

$$(10) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{\rho} \overrightarrow{\operatorname{grad} p} + \overrightarrow{\operatorname{grad} \frac{V^2}{2}} = 0, \\ \operatorname{div} V = 0. \end{array} \right.$$

Ces dernières équations sont celles de l'écoulement potentiel d'un fluide parfait incompressible; la condition d'adhérence du fluide visqueux à la surface d'un obstacle exige que la dérivée normale du potentiel soit nulle sur l'obstacle; cette condition entraîne que le potentiel, qui est une fonction harmonique, soit constant dans tout l'espace. Le seul mouvement possible est donc le repos. Un champ de vitesses défini par la formule (2) ne peut donc jamais représenter l'écoulement d'un fluide visqueux autour d'un obstacle.

2. Cas des écoulements de révolution et des écoulements plans. — Le théorème énoncé au paragraphe précédent a été obtenu en supposant que la fonction vectorielle $\vec{V}$ possédait à l'infini une valeur constante. Nous allons prouver que, dans le cas particulier des écoulements à symétrie axiale ou dans le cas particulier des écoulements plans, une telle hypothèse devient superflue. Les équations (1_2) et (1_3) entraînent nécessairement que le mouvement soit uniforme à l'infini.

Si nous n'imposons pas à la fonction $\overrightarrow{\alpha_0(\theta, \varphi)}$ de se réduire à une constante, les premières équations du système (3) s'écriront de la façon suivante :

$$(11) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{\operatorname{rot} \{ \operatorname{rot} \alpha_0 \wedge \alpha_0 \}} = 0, \\ \operatorname{div} \alpha_0 = 0. \end{array} \right.$$

Nous supposons que le champ des vecteurs $\vec{\alpha}_0$ admette l'axe des z comme axe de révolution. Nous prenons comme coordonnées r et $\sigma = \cos\theta$; nous désignons par v_1 et v_2 les composantes du vecteur $\vec{\alpha}_0$ sur le trièdre associé à ces coordonnées; en calculant la divergence et le rotationnel dans le système de coordonnées curvilignes r et σ, on obtient

$$\operatorname{div} \alpha_0 = \frac{1}{r^2} \left\{ \frac{\partial}{\partial r}(r^2 v_1) + \frac{\partial}{\partial \sigma}\left(r\sqrt{1-\sigma^2}\, v_2\right) \right\},$$

$$\operatorname{rot} \alpha_0 = -\frac{\vec{i}_3}{r} \sqrt{1-\sigma^2} \left\{ \frac{\partial v_1}{\partial \sigma} - \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{r}{\sqrt{1-\sigma^2}} v_2 \right) \right\},$$

où $\vec{i_3}$ désigne le vecteur unitaire directement perpendiculaire au demi-plan méridien contenant le point de coordonnées r et σ. La seconde relation (11) assure l'existence d'une fonction $\psi(r, \sigma)$ telle que

$$v_1 = \frac{1}{r^2}\frac{\partial\psi}{\partial\sigma}, \qquad v_2 = -\frac{1}{r\sqrt{1-\sigma^2}}\frac{\partial\psi}{\partial r}.$$

On en déduit

$$\overrightarrow{\text{rot}\,\alpha_0} = -\frac{\vec{i_3}}{r\sqrt{1-\sigma^2}}\,D_2\psi,$$

avec

$$D_2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1-\sigma^2}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\sigma^2}.$$

La première relation (11) exprime alors que le déterminant fonctionnel des fonctions $\frac{D_2\psi}{r^2(1-\sigma^2)}$ et ψ par rapport aux variables r et σ est nul. On en déduit que la fonction ψ vérifie une équation de la forme suivante :

$$\frac{D_2\psi}{r^2(1-\sigma^2)} = \text{fonction de } \psi. \tag{12}$$

Comme le vecteur $\vec{\alpha_0}$ est indépendant de r, la fonction ψ a pour valeur $r^2\beta(\sigma)$; en portant cette valeur dans l'équation (12), on obtient

$$\beta\{(1-\sigma^2)\beta'' + 2\beta\} = k(1-\sigma^2), \tag{13}$$

où k désigne une constante. La fonction $\beta(\sigma)$ doit s'annuler pour $1-\sigma^2=0$ au moins comme $\sqrt{1-\sigma^2}$ afin que la vitesse ne soit pas infinie sur l'axe de révolution. On peut donc poser

$$\beta(\sigma) = (1-\sigma^2)^r f(\sigma),$$

avec

$$r \geqq \frac{1}{2}, \qquad f(\pm 1) \neq 0.$$

Si r est différent de l'unité, le premier membre de l'équation (13) s'annule comme $(1-\sigma^2)^{2r-1}$; l'égalité exige que la constante k soit nulle. On obtient la même conclusion lorsque $r=1$. L'équation (13) se réduit à l'équation suivante :

$$(1-\sigma^2)\beta'' + 2\beta = 0,$$

dont la solution générale a pour expression

$$A(1-\sigma^2) + B\left\{(1-\sigma^2)\,\text{Log}\,\frac{1+\sigma}{1-\sigma} + 2\sigma\right\}.$$

Cette fonction devant s'annuler pour $1-\sigma^2=0$, il est nécessaire que B soit nul. Il en résulte que le vecteur $\overrightarrow{\alpha_0(\sigma)}$ est constant.

On obtient une conclusion analogue dans le cas où le mouvement est supposé plan. Dans le cas général des écoulements à trois dimensions, je n'ai pas réussi à résoudre le système (11). C'est pourquoi nous avons dû prendre comme point de départ l'hypothèse $\overrightarrow{\alpha_0(\theta, \varphi)} = \vec{V_0}$.

Le résultat que nous venons d'établir peut s'énoncer de la façon suivante : *parmi toutes les fonctions de courant qui vérifient les équations de Navier, les seules qui soient régulières à l'infini sont les fonctions harmoniques.*

II. — Étude des solutions polynômes dans le cas des écoulements plans.

La tentative que nous venons de faire dans le cas général des écoulements à trois dimensions nous a permis d'obtenir un premier résultat relatif aux solutions éventuelles des équations de Navier. Nous nous proposons de le compléter en cherchant, dans le cas des écoulements plans, quels sont les polynômes qui vérifient ces équations.

Nous utiliserons les coordonnées cartésiennes x et y. L'écoulement étant à deux dimensions, il existe une fonction de courant $\psi(x, y)$ telle que ses dérivées partielles ψ_y et $-\psi_x$ soient égales aux composantes cartésiennes de la vitesse. En introduisant cette fonction et en désignant par Δ l'opérateur de Laplace relatif aux variables x et y, l'équation (1) peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\nu\,\Delta\Delta\psi = \frac{\partial\Delta\psi}{\partial x}\frac{\partial\psi}{\partial y} - \frac{\partial\Delta\psi}{\partial y}\frac{\partial\psi}{\partial x}. \tag{14}$$

Nous introduisons les deux variables imaginaires conjuguées

$$u = x + iy \qquad \text{et} \qquad v = x - iy$$

et nous cherchons à satisfaire l'équation (14) à l'aide d'un polynôme en x et y que nous écrivons sous la forme suivante :

$$\psi(x, y) = \sum_{r=1}^{n} \psi(u, v),$$

le polynome $\psi_r(u, v)$ étant homogène et de degré r. En identifiant les termes de même degré dans les deux membres de l'équation (14), nous obtenons, entre les polynômes ψ_r, les $2n - 3$ relations suivantes :

$$(15)\quad \left\{\begin{aligned} &2i\nu\frac{\partial^4\psi_4}{\partial u^2\,\partial v^2} = \frac{\partial^3\psi_3}{\partial u^2\,\partial v}\frac{\partial\psi_1}{\partial v} - \frac{\partial^3\psi_3}{\partial u\,\partial v^2}\frac{\partial\psi_1}{\partial u},\\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ &2i\nu\frac{\partial^4\psi_n}{\partial u^2\,\partial v^2} = \sum_{l=1}^{n-3}\left\{\frac{\partial^3\psi_{n-l}}{\partial u^2\,\partial v}\frac{\partial\psi_l}{\partial v} - \frac{\partial^3\psi_{n-l}}{\partial u\,\partial v^2}\frac{\partial\psi_l}{\partial u}\right\};\end{aligned}\right.$$

$$(16)\quad \left\{\begin{aligned} &0 = \sum_{l=1}^{n-2}\left\{\frac{\partial^3\psi_{n+1-l}}{\partial u^2\,\partial v}\frac{\partial\psi_l}{\partial v} - \frac{\partial^3\psi_{n+1-l}}{\partial u\,\partial v^2}\frac{\partial\psi_l}{\partial u}\right\},\\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ &0 = \frac{\partial^3\psi_n}{\partial u^2\,\partial v}\frac{\partial\psi_n}{\partial v} - \frac{\partial^3\psi_n}{\partial u\,\partial v^2}\frac{\partial\psi_n}{\partial u}.\end{aligned}\right.$$

Les relations (16) sont au nombre de n; elles permettent de déterminer tous les polynômes $\psi_r(u, v)$. En désignant par λ et μ deux constantes arbitraires, la dernière des équations (16) admet la solution particulière suivante :

$$\psi_n = k_n(\lambda u + \mu v)^n.$$

Elle n'admet pas d'autre solution représentée par un polynôme homogène de degré n. En effet, si nous posons

$$\psi_n = k_n(\lambda u + \mu v)^n + B_1 u^{n-1} v + \ldots + B_n v^n,$$

on établit par identification que toutes les constantes $B_1, B_2, \ldots, B_n$ sont nulles; il convient de remarquer que, s'il existait un terme en $B_0 u^n$ dans le second membre de la dernière formule écrite, on modifierait la valeur de la constante k_n de façon à pouvoir prendre $B_0 = 0$.

Nous supposons que tous les polynômes $\psi_i(u, v)$ dont l'indice est supérieur à r se présentent sous la forme suivante :

$$(17) \qquad \psi_i = k_i(\lambda u + \mu v)^i \qquad (i \geqq r + 1).$$

Dans ces conditions, l'équation de rang r du système (16) se réduit à l'équation aux dérivées partielles linéaire suivante :

$$(18) \qquad (n-1)(n-2)\lambda\mu \left\{ \lambda \frac{\partial \psi_r}{\partial v} - \mu \frac{\partial \psi_r}{\partial u} \right\} + (u - v)^2 \left\{ \mu \frac{\partial^3 \psi_r}{\partial u^2 \partial v} - \lambda \frac{\partial^3 \psi_r}{\partial u \partial v^2} \right\} = 0.$$

Nous posons encore

$$\psi_r(u, v) = k_r(\lambda u + \mu v)^r + B_1 u^{r-1} v + \ldots + B_r v^r$$

et l'identification prouve une nouvelle fois que toutes les constantes $B_1, B_2, \ldots, B_r$ sont nulles. Il en résulte que la formule (17) est vraie pour toutes les valeurs de i. En portant les valeurs des polynômes ψ_r dans le système (15), celui-ci s'écrit de la façon suivante :

$$k_n \lambda^2 \mu^2 (\lambda u + \mu v)^{r-4} = 0 \qquad (r = 4, 5, \ldots, n).$$

Si λ et μ sont différents de zéro, c'est-à-dire si le polynôme ψ dépend effectivement des deux variables u et v, tous les coefficients $k_r (r > 3)$ doivent être nuls. On peut donc énoncer les deux résultats suivants :

1° Si un polynôme $\psi(x, y)$ de degré supérieur à 3 satisfait à l'équation (14), il ne dépend que d'une seule des deux quantités $x + iy$ ou $x - iy$;

2° Les seuls polynômes de degré inférieur ou égal à 3 qui satisfont à l'équation (14) sont de la forme suivante :

$$\psi(x, y) = \sum_{j=1}^{3} k_j \{ (\lambda + \mu)x + i(\lambda - \mu)y \}^j.$$

On peut encore dire que tout polynôme $\psi(x, y)$ qui satisfait l'équation aux dérivées partielles initiale de degré supérieur ou égal à 4 est une fonction harmonique. On en déduit, pour le problème de l'écoulement plan permanent d'un fluide visqueux incompressible, les résultats suivants. Il n'existe aucun écoulement du type précédent à l'intérieur d'une courbe fermée pour lequel la fonction de courant soit un polynôme de degré supérieur à 3. En effet, un tel polynôme doit être une fonction harmonique et ses dérivées partielles du premier ordre doivent s'annuler sur le contour. Or une fonction harmonique dans un domaine et constante sur la frontière de ce domaine est constante à l'intérieur. Le mouvement correspondant est donc le repos.

Cherchons enfin si l'on peut prendre pour fonction de courant un polynôme du troisième degré. Les coefficients devant être réels, on doit avoir $\lambda = \mu$; $\frac{\partial \psi}{\partial x}$ et $\frac{\partial \psi}{\partial y}$ sont alors simultanément nuls sur deux droites parallèles à l'axe des x. La fonction de courant ainsi obtenue représente l'écoulement d'un fluide visqueux entre deux droites parallèles. On retrouve une solution élémentaire bien connue.

BIBLIOGRAPHIE.

Les équations dont nous sommes partis sont établies dans les leçons sur les fluides visqueux de H. Villat. La première partie de notre étude a été résumée dans une Note parue dans les *Comptes rendus des Séances de l'Académie des Sciences*, t. 224, 1947, p. 711-713.