

# BULLETIN DE LA S. M. F.

MARCEL DECUYPER

## **Composition des similitudes planes. Application aux quadrilatères complets**

*Bulletin de la S. M. F.*, tome 76 (1948), p. 49-58

[http://www.numdam.org/item?id=BSMF\\_1948\\_\\_76\\_\\_49\\_0](http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1948__76__49_0)

© Bulletin de la S. M. F., 1948, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

**COMPOSITION DES SIMILITUDES PLANES.  
APPLICATION AUX QUADRILATÈRES COMPLETS;**

PAR M. MARCEL DECUYPER

(Lille).

1. M. Hadamard a récemment publié dans l'*Intermédiaire des Recherches Mathématiques* (Supplément du fascicule 9, janvier 1947, p. 69-71) un article intitulé « Composition des similitudes planes », où il reprenait un problème qu'il avait traité de façon plus détaillée quelque temps auparavant [*A known problem of geometry and its cases of indetermination* (*Bulletin of the American Mathematical Society*, Vol. 50, n° 8, p. 520-528, 1944)]. La discussion du problème P suivant : « construire un quadrilatère Q directement semblable à un quadrilatère q donné,  $xyzt$ , tel que les côtés TX, XY, YZ, ZT (ou leurs prolongements) passent respectivement par des points donnés K, L, M, N » l'avait amené à étudier la composition des similitudes planes.

Nous reprenons ici cette question par une méthode un peu plus simple et nous complétons la discussion du problème P en nous inspirant des remarques et des souhaits exprimés par l'illustre géomètre à la fin des deux articles cités.

2. Dans le plan euclidien, une *similitude directe* S est parfaitement déterminée par le symbole  $S(\alpha, z)$  qui représente la donnée de  $\alpha$ , le centre et de  $z$ , que nous appellerons le « rapport » de la transformation et qui est l'imaginaire  $\rho e^{i\theta}$ ,  $\rho$  désignant le rapport d'amplification (que nous pouvons prendre positif), et  $\theta$  l'angle de rotation;  $M_0$  étant un nombre quelconque, M son transformé, on a  $\alpha M : \alpha M_0 = \rho$ ,  $(\overrightarrow{\alpha M_0}, \overrightarrow{\alpha M}) = \theta$ ;  $N_0, N$  étant un autre couple de points homologues, on a  $MN : M_0 N_0 = \rho$ ,  $(\overrightarrow{M_0 N_0}, \overrightarrow{MN}) = \theta$ . Nous appelons *triangle directeur* de S tout triangle  $Oa_0a$  tel que  $Oa : Oa_0 = \rho$ ,  $(\overrightarrow{Oa_0}, \overrightarrow{Oa}) = \theta$ ; ainsi le triangle  $(o, 1, z)$  où chaque sommet est figuré par son affixe est un triangle directeur de S  $(\alpha, z)$ ; il est commode d'appeler  $Oa_0$  côté initial,  $Oa$  côté extrémité. Une similitude est parfaitement définie par un couple  $M_0, M$  de points homologues et son rapport  $z$ ; le triangle  $\alpha M_0 M$  est en effet directement semblable au triangle directeur  $Oa_0 a$  et cette propriété détermine le centre  $\alpha$ .

$M_0$  étant transformé en M par  $S(\alpha, z)$ , effectuons sur M la similitude  $S'(\beta, z')$  de façon à obtenir  $M'$ ; le produit de la transformation S par  $S'$  que nous représenterons suivant l'habitude par  $S'S$  est une similitude dont nous nous proposons de

trouver le centre. Prenons comme triangles directeurs de  $S$ , puis  $S'$ ,  $(0, 1, z)$  et  $(0, z', zz')$  de façon que le côté extrémité du premier soit le côté initial du second (fig. 1); le triangle  $(0, 1, z')$  est manifestement un triangle directeur de  $S'S$ ;

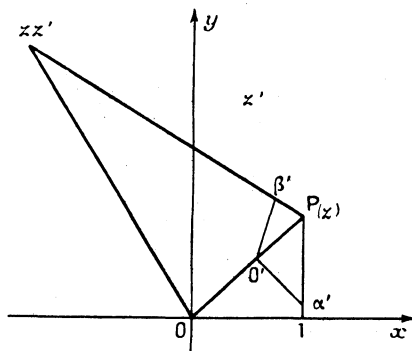


Fig. 1.

le centre inconnu  $c$  de  $S'S$  est tel que, son transformé par  $S$  étant  $c'$ , le transformé de  $c'$  par  $S'$  soit  $c$ ; on a ainsi la figure 2 où le triangle  $\alpha c'c$  est directement semblable à  $(0, 1, z)$  tandis que  $\beta c'c$  est directement semblable à  $(0, z, zz')$ . Si donc, nous prenons deux points arbitraires  $C, C'$  et si nous construisons les triangles  $ACC', BC'C$  directement semblables à  $(0, 1, z)$  et  $(0, z, zz')$ , nous obtenons une figure  $ACBC'$  directement semblable à la figure  $\alpha c\beta c'$  où  $\alpha$  et  $\beta$  sont connus et corres-

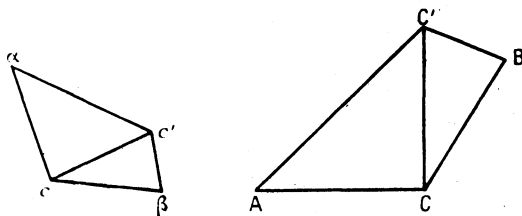


Fig. 2.

pondent à  $A, B$  tandis que  $c, c'$  encore inconnus correspondent à  $C$  et  $C'$ ;  $c$  et  $c'$  s'obtiennent donc, d'une façon unique, sans indétermination possible, par de simples reports d'angles orientés; comme on a  $\alpha c : AC = \alpha\beta : AB$  on voit que  $c$  est à distance finie si  $B$  ne coïncide pas avec  $A$ , c'est-à-dire si  $zz' \neq 1$ ; nous ferons cette hypothèse; nous reviendrons plus loin au cas où  $zz' = 1$ .

En examinant cette construction, il est facile de voir que *le triangle  $\alpha c\beta$  est directement semblable au triangle  $(zz', z, 1)$  et que le triangle  $\beta c\alpha$  est directement semblable au triangle  $(z', z', 1)$* . En effet, les quadrilatères  $(0, 1, z, zz')$  et  $\alpha c\beta c'$  des figures 1 et 2 sont composés de triangles semblables chacun à chacun, mais autrement assemblés. Soumettons la figure 1 à une inversion ayant son pôle au point  $P$  d'affixe  $z$  et désignons par  $\alpha', o', \beta'$  les inverses des points  $(1)$ ,

( $o$ ), ( $z\bar{z}'$ ). Le triangle  $Po'o'$  étant inversement semblable à ( $z, o, 1$ ) (donc à  $c'c\alpha$ ), puisque  $o'o'$  est antiparallèle de ( $o, 1$ ) par rapport à l'angle en  $P$ , et de même  $Po'o'\beta'$  étant inversement semblable à ( $z, z\bar{z}', o$ ) (donc à  $c'c\beta$ ) le quadrilatère  $Pz'o'\beta'$  est inversement semblable à  $c'\alpha c\beta$ . Le triangle  $\alpha c'\beta$  est inversement semblable à  $\alpha'P\beta'$  lui-même inversement semblable à ( $z\bar{z}', z, 1$ ); donc les triangles  $\alpha c'\beta$  et ( $z\bar{z}', z, 1$ ) sont directement semblables; on peut remplacer le second par ( $1, \frac{1}{z}, \frac{1}{z\bar{z}'}$ ) qui s'en déduit par la similitude directe ( $O, \frac{1}{z\bar{z}'}$ ). Le triangle  $\alpha c'\beta$  est lié à l'opération  $SS'$  où les similitudes sont effectuées dans l'ordre inverse de  $S'S$ ; en effet,  $S'$  transforme  $c'$  en  $c$  et  $S$  transforme  $c$  en  $c'$ ; le point invariant de  $SS'$ , centre de cette similitude, est donc  $c'$ . Les résultats obtenus pour  $c'$  montrent donc, en permutant  $\alpha$  avec  $\beta$ ,  $c$  avec  $c'$ ,  $z$  avec  $z'$  que le triangle  $\beta c\alpha$  est directement semblable au triangle ( $z\bar{z}', z', 1$ ) ou au triangle ( $1, \frac{1}{z}, \frac{1}{z\bar{z}'}$ ).

Appelons *inversion complexe* l'opération qui remplace le point  $z$  par le point  $\frac{k}{z}$  où  $k$  est une constante quelconque (réelle ou complexe); l'origine est le pôle de cette inversion; nous voyons que si nous avons construit deux triangles directeurs  $\omega AP$  de  $S$ ,  $\omega PB$  de  $S'$  tels que  $\omega P$  côté extrémité du premier soit le côté initial du second, le triangle  $\beta c\alpha$  est directement semblable au triangle  $A_1P_1B_1$  formé par les inverses complexes de  $A, P, B$  relatifs à  $\omega$ ; si, au lieu d'une inversion complexe, nous opérons une *inversion géométrique* habituelle de pôle  $\omega$ , le triangle  $A_1P_1B_1$  est inversement semblable au triangle  $\beta c\alpha$ . Cette remarque sera utile plus loin.

$S'S$  faisant passer de  $M_0$  à  $M$  puis à  $M'$ , l'opération inverse fait revenir de  $M'$  à  $M$  par  $(S')^{-1}$  et de  $M$  à  $M_0$  par  $(S)^{-1}$ ; de sorte que  $(S'S)^{-1} = (S)^{-1}(S')^{-1}$ : le point  $c$  est centre encore de  $(S'S)^{-1}$ ; les triangles directeurs qui interviennent ici sont ( $o, 1, \frac{1}{z}$ ) pour  $(S')^{-1}$ , puis ( $o, \frac{1}{z}, \frac{1}{z\bar{z}'}$ ) pour  $(S)^{-1}$ : en appliquant la règle trouvée plus haut, on voit donc que le triangle  $\alpha c\beta$  est directement semblable au triangle ( $1, z', z\bar{z}'$ ), de sorte que  $\beta c\alpha$  est directement semblable au triangle ( $z\bar{z}', z', 1$ ), nous retrouvons comme vérification le résultat déjà obtenu.

Faisons encore la remarque suivante: dans la similitude directe des triangles  $\beta c\alpha$  et ( $z\bar{z}', z', 1$ ),  $\beta$  correspond à  $z\bar{z}'$  et  $\alpha$  à  $1$ ; dans la similitude de  $\alpha c'\beta$  et ( $z\bar{z}', z, 1$ ), c'est  $\alpha$  qui correspond à  $z\bar{z}'$  et  $\beta$  à  $1$ ; si donc nous faisons tourner le triangle  $\beta c\alpha$  de  $180^\circ$  autour du milieu de  $\alpha\beta$ , le point  $c$  viendra occuper une position  $\bar{c}$  telle que les quadrilatères ( $1, z, z\bar{z}', z'$ ) et  $\beta c'\alpha\bar{c}$  soient directement semblables.

3. Les raisonnements purement géométriques que nous avons faits peuvent être remplacés par un calcul simple effectué sur des imaginaires, nous désignons par  $(\alpha c)$  l'imaginaire qui représente le vecteur libre  $\overrightarrow{\alpha c}$ ; on peut écrire

$$(\alpha c') = (\alpha c)z, \quad (\beta c) = (\beta c')z'.$$

Transformons la seconde égalité

$$(\beta\alpha) + (\alpha c) = [(\beta\alpha) + (\alpha c')]z' = (\beta\alpha)z' + (\alpha c)z\bar{z}'.$$

On a donc, en supposant  $zz' \neq 1$ ,

$$(\alpha c) = (\alpha\beta) \frac{z'-1}{zz'-1}, \quad (\alpha c') = (\alpha\beta) \frac{zz'-z}{zz'-1},$$

et cela signifie que les deux triangles  $\beta c \alpha$  et  $(z', z', 1)$  sont directement semblables, de même que  $\alpha c' \beta$  et  $(z', z, 1)$ .

Il est opportun d'étudier le cas où  $zz' = 1$ , c'est-à-dire celui où  $S'S$  se réduit à une translation, comme il résulte de  $\overrightarrow{M'N'} = \overrightarrow{MNz'} = \overrightarrow{M_0N_0} z z' = \overrightarrow{M_0N_0}$ . Pour obtenir le vecteur libre constant  $\overrightarrow{M_0M} = \overrightarrow{T}$  qui définit la translation  $S'S = T$ , il suffit d'opérer sur le centre  $\alpha$  qui reste invariant par  $S$  et ne subit que l'opération  $S'$ ; donc  $\overrightarrow{T} = \overrightarrow{\beta\alpha}(z'-1)$ . En écrivant la relation  $T = S'S$  sous les formes équivalentes  $(S')^{-1}T = S$  ou  $TS^{-1} = S'$ , on déduit de là le moyen de composer une translation  $T$  effectuée en premier lieu avec une similitude  $(S')^{-1}$  de centre  $\beta$  et de rapport  $1:z' = z$ ; l'opération  $S$  résultante a même rapport  $z$  que  $(S')^{-1}$  et pour centre le point  $\alpha$  défini par  $\overrightarrow{\beta\alpha} = \frac{\overrightarrow{T}}{z'-1} = \frac{\overrightarrow{T}z}{1-z}$ ; en composant une similitude  $S^{-1}$ , de centre  $\alpha$  et de rapport  $z'$  effectuée en premier lieu, avec une translation  $T$ , on a pour l'opération résultante, le rapport  $z'$  de  $S^{-1}$  et le centre  $\beta$  tel que

$$\overrightarrow{\alpha\beta} = \frac{\overrightarrow{T}}{1-z'}$$

4. Songeons maintenant au problème P. Le quadrilatère cherché  $Q$  dont les côtés, prolongés au besoin,  $TX, XY, YZ, ZT$  passent respectivement par les points donnés  $K, L, M, N$  est directement semblable à un quadrilatère donné  $q$ ; de sommets  $x, y, z, t$ . Pour définir la forme de  $q$ , il suffit de mener la diagonale  $xz$  par exemple et de donner les angles orientés de droites indéfinies (autrement dit, non orientées)  $\varphi_1 = (xt, xz)$ ,  $\varphi_2 = (xz, xy)$ ,  $\psi_1 = (xy, zx)$ ,  $\psi_2 = (zx, zt)$ ; chacun de ces angles est défini à  $k\pi$  près; quand ils sont connus, si nous nous donnons arbitrairement  $x_1$  et  $z_1$ , le point  $t_1$  s'obtient au croisement de deux droites indéfinies, et de même  $y_1$ . Si nous faisons un décompte d'inconnues et d'équations pour le problème P, nous avons 8 inconnues: les coordonnées des sommets  $X, Y, Z, T$  liées par 4 équations exprimant que les angles  $(XT, XZ)$ ,  $(XZ, XY)$ ,  $(ZY, ZX)$ ,  $(ZX, ZT)$  ont des valeurs données et 4 autres exprimant que les côtés passent par 4 points donnés. *A priori*, bien qu'un tel décompte ne puisse conduire à une certitude, on peut donc espérer trouver un nombre fini de solutions si  $K, L, M, N$  ont des positions choisies au hasard.

Le problème étant supposé résolu (*fig. 3*), le cercle  $\xi$ , issu de  $K, L$  et contenant  $X$ , est connu, c'est le lieu des points  $X$  tels que  $(XK, XL) = \varphi_1 + \varphi_2$ ; ce cercle recoupe la diagonale  $NZ$  en un point  $\alpha$  connu car

$$(K\alpha, KL) = (N\alpha, NL) = \varphi_2, \quad (LK, L\alpha) = (XK, X\alpha) = \varphi_1;$$

le point  $\alpha$  s'obtient donc par des opérations linéaires, à l'intersection de deux droites indéfinies issues de  $K$  et  $L$  respectivement; ces deux droites ne sont pas

parallèles car  $\varphi_1 + \varphi_2$  n'est pas congru à  $\pi$  (ou ce qui revient au même, à zéro) : tout cela revient à dire que le triangle  $KL\alpha$  est connu *a priori*, par sa base  $KL$  et les angles à la base; de même pour le triangle  $MN\gamma$ ,  $\gamma$  étant le point, autre que  $Z$ , où la diagonale  $XZ$  est recoupée par le cercle  $\zeta$ ,  $NMZ$ , connu *a priori*, au même titre que  $\xi$ ;  $\gamma$  s'obtient lui aussi par des opérations linéaires. Si  $\alpha$  et  $\gamma$  sont distincts, la diagonale  $XZ$  est connue et recoupe les cercles  $\xi$ ,  $\zeta$  respectivement en  $X$ ,  $Z$  de sorte que  $Q$  est complètement connu. Le problème a une solution unique qui n'est jamais dégénérée. Remarquons que le tracé effectif des cercles  $\xi$ ,  $\zeta$  est inutile :  $\alpha$  étant obtenu, l'égalité  $(KL, KX) = (\alpha L, \alpha\gamma)$  donne par simple report d'angle, la droite  $KXT$  et de même  $(LK, LX) = (\alpha K, \alpha\gamma)$  donne la droite  $LXY$ ; on a de même les droites  $ZMY$ ,  $ZNT$ . Si  $\alpha$  et  $\gamma$  coïncident, il y a  $\infty^1$  solutions puisque

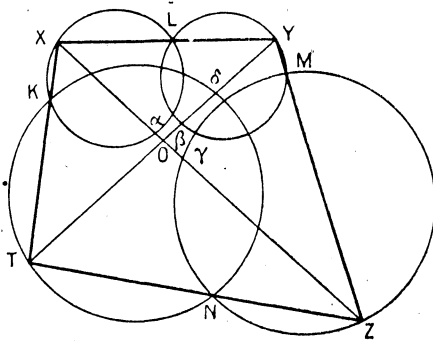


Fig. 3.

toute droite issue de ce point unique  $\alpha\gamma$  donnera un couple  $\Sigma$ ,  $Z$  satisfaisant aux conditions de l'énoncé.

Pour que le problème admette  $\infty^1$  solutions, les points  $\alpha$ ,  $\gamma$  doivent coïncider et ceci, quelle que soit la méthode employée, conduit à deux équations de condition.  $K$ ,  $L$ ,  $M$  étant donnés, nous pouvons aisément construire la position critique  $N_0$  du point  $N$  telle que, si  $N$  est distinct de  $N_0$ , le problème ait une solution et une seule tandis que si  $N$  vient en  $N_0$ , on trouve  $\infty^1$  solutions.

Pour cela, ainsi que pour la suite, il est utile de remarquer que le rapport (ou un triangle directeur) de la similitude de centre  $\alpha$  qui transforme  $K$  en  $L$  est parfaitement connu quand  $q$  est donné et ne dépend pas de la configuration des 4 points  $K$ ,  $L$ ,  $M$ ,  $N$  : en effet, l'égalité  $(\alpha K, KX) = (\alpha L, LX)$  entraîne que la droite indéfinie  $XT$  se transforme en la droite indéfinie  $XY$  et que le pied de la perpendiculaire abaissée de  $\alpha$  sur  $XT$  se transforme en le pied de la perpendiculaire abaissée de  $\alpha$  sur  $XY$ ; ces deux perpendiculaires donnent donc un triangle directeur de la similitude; on peut remplacer ce triangle par le triangle de sommet  $O$ , point commun aux diagonales  $XZ$  et  $YT$  et ayant pour côtés les perpendiculaires issues de  $O$  sur  $XT$  et  $XY$ ; en appelant  $o$  le point de rencontre des diagonales  $xz$  et  $yt$  de  $q$  et  $k$ ,  $l$ ,  $m$ ,  $n$  les projections de  $o$  sur  $tx$ ,  $xy$ ,  $yz$ ,  $zt$ , nous pouvons prendre comme triangle directeur  $okl$ ; de même la similitude de centre  $\gamma$  qui remplace  $M$  par  $N$ , donc  $YZ$  par  $ZT$  a pour triangle directeur  $omn$ ; il est alors

clair que si  $K, L, M$  sont donnés, ce qui entraîne la connaissance de  $\alpha$  au moyen des reports d'angles indiqués plus haut, le point  $N_0$  sera celui qui est défini par

$$\frac{\vec{\alpha N_0}}{\vec{\alpha M}} = \frac{\vec{o n}}{\vec{o m}},$$

et notre discussion est terminée.

Indiquons brièvement une autre construction du point  $N_0$ ; elle résulte de la propriété suivante : « Si trois droites d'une figure semblablement variable passent chacune par un point fixe, il existe un centre permanent de similitude; toute droite de la figure passe par un point fixe ». Les trois droites considérées forment un triangle  $MNP$  dont les côtés  $MN, NP, PM$  contiennent les points fixes  $\pi, \mu, \nu$ ; deux positions distinctes de la figure sont caractérisées par les deux triangles semblables  $MNP, M'N'P'$ ; le centre  $\omega$  de la similitude faisant se correspondre les deux triangles est à l'intersection des cercles circonscrits aux triangles  $M\nu\pi, \mu N\pi$  (et  $\mu\nu P$ ); il est indépendant de  $M'N'P'$ , c'est un centre permanent de similitude. Une droite  $\Delta$  de la figure variable se déduit de  $MN$  par exemple par une similitude  $S$  de centre  $\omega$  et comme  $MN$  passe par le point fixe  $\pi$ ,  $\Delta$  passe par le point fixe déduit de  $\pi$  par  $S$ .

Appliquons ceci au problème  $P$ ; si nous avons cherché à construire un quadrilatère  $Q$  directement semblable à  $q$  et tel que trois côtés seulement  $TX, XY, YZ$  passent par trois points donnés  $K, L, M$ , le problème ainsi posé aurait admis une infinité de solutions, la figure semblablement variable constituée par  $Q$  admettant un centre permanent de similitude  $\omega$  (le point de rencontre autre que  $L$ , des cercles circonscrits aux triangles  $KXL$  et  $LYM$ ); la droite  $ZT$  pourrait être déduite de  $YZ$  par une similitude de centre  $\omega$  et passerait donc par le point fixe déduit de  $M$  par cette similitude. Pour obtenir le quadrilatère  $Q$  solution du problème  $P$ , on joindra ce point fixe à  $N$  et l'on aura la droite  $ZT$  d'où l'on déduira aisément les autres éléments; le cas d'indétermination est celui où  $N$  se confond avec ce point fixe,  $N_0$ .

Nous devons souligner ici un fait curieux : soit un problème  $P$  dont la discussion peut se ramener à celle d'un certain nombre d'équations algébriques telles qu'en général,  $P$  n'admette qu'un nombre fini de solutions; en général encore il faudra que les données satisfassent à un certain nombre de conditions (souvent une) pour que  $P$  devienne impossible, et il faudra ajouter certaines conditions nouvelles (souvent une) pour que  $P$  redevienne possible et admette alors  $\infty^1$  solutions. Avec le problème étudié ici, le cas d'impossibilité ne se présente pas; en général,  $P$  a une solution et une seule; moyennant deux conditions,  $P$  a  $\infty^1$  solutions.

5. Dans notre exposé, les côtés du quadrilatère  $q$  ou  $Q$  interviennent à titre de droites indéfinies; autrement dit, c'est un quadrilatère complet que nous devons considérer; il y a trois couples de sommets opposés, trois diagonales  $XZ, YT, UV$ ;  $XZ$  porte les points  $\alpha, \gamma$  centres des similitudes déjà étudiées; de même  $YT$  porte les points  $\beta$  et  $\delta$  (*fig. 3*) à l'intersection avec les cercles  $LYM$  et  $NTK$ , et  $UV$  porte les points  $\varepsilon, \varphi$  (*fig. 4*) à l'intersection avec les cercles  $KUM$  et  $NVL$ .

Pour la même raison que  $\alpha$  et  $\gamma$  sur  $XZ$ , les points  $\beta$  et  $\gamma$  sur  $YT$  et les points  $\varepsilon$  et  $\varphi$  sur  $UV$  sont connus et pour que le problème P admette  $\infty^1$  solutions, il faut et il suffit que  $\beta$  et  $\delta$  soient confondus, ou si l'on préfère, que  $\varepsilon$  et  $\varphi$  soient confondus. Il doit donc exister entre les points  $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \varphi$  des relations particulières, que nous allons préciser.

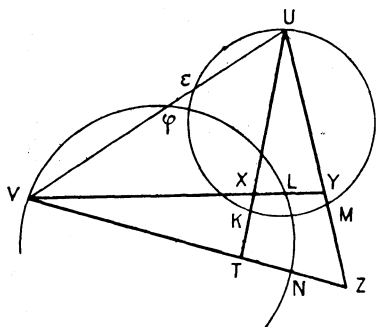


Fig. 4.

$\alpha$  est le centre de la similitude de triangle directeur  $okl$  qui transforme K en L;  $\beta$  est le centre de la similitude de triangle directeur  $olm$  qui transforme L en M; la similitude résultante S a pour triangle directeur  $okm$  et transforme K en M. Remarquons d'ailleurs que la droite indéfinie XT se trouve remplacée par XY puis par YZ. Or  $\varepsilon$  est le centre d'une similitude qui transforme aussi K en M et la droite XT en YZ; comparons-la à S. Nous utiliserons  $o_1$ , point de rencontre des diagonales  $xz$  et  $uv$  et ses projections sur les côtés du quadrilatère complet. Un triangle directeur de la similitude ( $\varepsilon KM$ ) est  $o_1 k_1 m_1$  que nous comparons à  $okm$ .

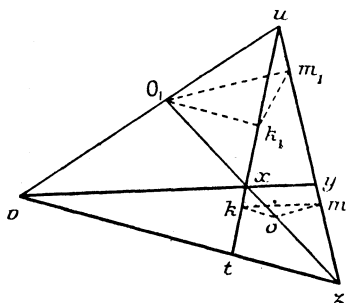


Fig. 5.

Les points  $o$  et  $o_1$  sont conjugués harmoniques par rapport à  $xz$  et il en résulte que les rapports d'amplification sont les mêmes  $\frac{o_1 m_1}{o_1 k_1} = \frac{om}{ok}$ ; les points  $o$  et  $o_1$  sont d'un même côté de  $yz$ , de part et d'autre de  $xt$  (ou bien d'un même côté de  $xt$ , de part et d'autre de  $yz$ ), donc les vecteurs  $\overrightarrow{om}$  et  $\overrightarrow{o_1 m_1}$  sont de même sens tandis



que  $\vec{ok}$  et  $\vec{o_1k_1}$  sont de sens contraires (ou bien  $\vec{om}$  et  $\vec{o_1m_1}$  sont de sens contraires, et  $\vec{ok}$  et  $\vec{o_1k_1}$  de même sens) et il en résulte

$$(\vec{ok}, \vec{om}) = \pi + (\vec{o_1k_1}, \vec{o_1m_1}).$$

On en conclut que  $\varepsilon$  et le centre  $E$  de la similitude  $\hat{S}$  forment avec  $K$  et  $M$  un quadrangle harmonique; disons pour traduire cette propriété que  $E$  est *conjugué harmonique de  $\varepsilon$  par rapport aux points  $K$  et  $M$* . Les deux points  $E$  et  $\varepsilon$  sont sur les arcs  $KM$  différents sur le cercle circonscrit à  $UKM$  et nous pouvons ainsi noter que si les deux similitudes  $E$  et  $\varepsilon$  transforment toutes deux la droite indéfinie  $XT$  en la droite indéfinie  $YZ$ , les deux transformations de la droite  $XT$  diffèrent en ce qui concerne l'orientation. Pour avoir  $E$ , il suffira de prendre l'intersection du cercle  $KM\varepsilon$  (ou  $KMU$ ) avec la droite qui joint  $\varepsilon$  au pôle de  $KM$  par rapport à ce cercle.

Si nous appelons  $k', l', m', n'$  les inverses de  $k, l, m, n$  dans une inversion de centre  $o$ , il résulte de l'étude faite aux paragraphes 2, 3 que le triangle  $\beta E\alpha$  est inversement semblable au triangle  $k'l'm'$ . Mais la similitude  $S$  de triangle directeur  $okm$  qui transforme  $K$  en  $M$  peut être obtenue comme produit de la similitude de centre  $\delta$  qui transforme  $K$  en  $N$  par la similitude de centre  $\gamma$  qui transforme  $N$  en  $M$ , donc le triangle  $\delta E\gamma$  est inversement semblable au triangle  $k'n'm'$ . Étudions donc la figure  $k'l'm'n'$  (fig. 6); appelons  $x', y', z', t'$  les inverses de  $x,$

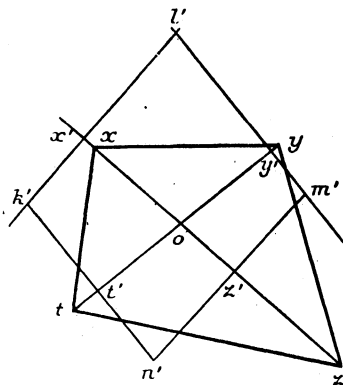


Fig. 6.

$y, z, t, k$  et  $l$  étant sur le cercle de diamètre  $ox$ , les trois points  $x', k', l'$  sont sur la même perpendiculaire à  $ox$ ; de même pour  $z', m', n'$ ; les trois points  $y', l', m'$  sont sur une perpendiculaire à  $oy$ , de même que  $t', n', k'$ ; en définitive,  $k'l'm'n'$  est un parallélogramme dont  $x'z'$  et  $y't'$  sont les hauteurs; les triangles  $k'l'm'$  et  $m'n'k'$  sont donc égaux et par suite  $\beta E\alpha$  et  $\delta E\gamma$  sont deux triangles directement semblables.

Il y a donc une similitude de centre  $E$  qui transforme  $\beta$  en  $\delta$  et  $\alpha$  en  $\gamma$  de sorte que l'on peut écrire

$$\frac{\delta\beta}{\gamma\alpha} = \frac{E\delta}{E\gamma} = \frac{E\beta}{E\alpha} = \frac{n'm'}{n'k'} = \frac{y't'}{x'z'}.$$

On a utilisé la similitude de  $\gamma E \delta$  et  $k'n'm'$  et deux expressions de l'aire du parallélogramme  $k'l'm'n'$ , dont les hauteurs sont  $x'z'$  et  $y't'$ .

*Le rapport des segments  $\delta\beta$ ,  $\gamma\alpha$  portés par les diagonales YT et XL est donc indépendant de la configuration des points K, L, M, N et ne dépend que du quadrilatère  $q$ .*

On reconnaît bien que si  $\gamma$  et  $\alpha$  se confondent,  $\beta$  et  $\delta$  se confondent aussi, ainsi d'ailleurs que  $\varepsilon$  et  $\varphi$ .

Comme les trois diagonales jouent le même rôle, nous pourrons faire apparaître d'autres couples de triangles semblables tels que  $\alpha\beta E$  et  $\gamma\delta E$  à partir des six points  $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \varphi$  et des points A, B, C, D, E, F respectivement conjugués harmoniques de  $\alpha$  par rapport à KL, de  $\beta$  par rapport à LM, etc. Pour obtenir un tel couple, par exemple  $\alpha\beta E$  et  $\gamma\delta E$ , nous pouvons partir d'un point E correspondant à un point  $\varepsilon$  d'une diagonale UV. Les triangles qui en découlent ont un sommet commun en E, les autres sommets sont les points  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  portés par les deux autres diagonales, deux sommets homologues étant portés par la même diagonale. Nous trouvons ainsi les six couples

$$\begin{array}{cccccc} \alpha\beta E & \alpha\delta F & \beta\varepsilon A & \beta\varphi C & \alpha\varepsilon B & \alpha\varphi D \\ \gamma\delta E & \delta\beta F & \delta\varphi A & \delta\varepsilon C & \gamma\varphi B & \gamma\varepsilon D, \end{array}$$

que l'on groupera eux-mêmes par deux en associant les points E et F, A et C, B et D suivant les diagonales qui leur correspondent. En effet, les triangles  $\alpha\beta E$  et  $\gamma\delta E$  sont inversement semblables au triangle  $m'k'l'$  et ceux du couple  $\alpha\delta F, \beta\varphi C$  sont inversement semblables au triangle  $n'l'k'$  et le fait que  $k'l'm'n'$  est un parallélogramme entraîne des conséquences établies par M. Hadamard dans son article du *Bulletin de la Société américaine de Mathématiques* et que nous citerons rapidement : On observe d'abord que le produit de la similitude de centre E qui change  $\alpha$  en  $\beta$  par la similitude de centre F qui change  $\beta$  en  $\gamma$  est un demi-tour dont le centre est donc le milieu G de  $\alpha\beta$ . Le produit des mêmes similitudes dans l'ordre inverse est le demi-tour qui change  $\delta$  en  $\beta$ , son centre est donc le milieu H de B $\delta$ . Les relations de ces centres avec E, F sont données par notre règle de composition ; on trouve ainsi que G et H sont conjugués harmoniques (au sens que nous avons précisé plus haut), par rapport à E et F.

Dans les articles cités, M. Hadamard n'a pas signalé la relation entre les points  $\varepsilon$  et E, mais il a montré que le rapport  $\frac{\alpha\gamma}{\beta\delta}$  est égal à la quantité  $\frac{x'z'}{y't'}$  qui ne dépend que de la forme du quadrilatère  $q$  et il a ajouté cette remarque : « le quadrilatère  $q$ , que l'on peut et doit considérer comme un quadrilatère complet, admet en réalité trois diagonales et non deux. Les résultats devraient revêtir une forme telle que l'on puisse les écrire à l'aide de deux quelconques des trois diagonales et que les valeurs ainsi inscrites des trois rapports soient concordantes ».

Cette concordance est facile à vérifier ; on aurait pu, *a priori*, supposer qu'elle donnerait une propriété projective nouvelle de la figure ; il n'en est rien ; on est simplement ramené au théorème de Ménélaus. Sur la figure 7 nous avons marqué les côtés du quadrilatère complet et ses diagonales  $oo_1, o_1o_2, o_2o$ . En introduisant

des segments orientés, on a

$$\frac{\alpha\gamma}{\beta\delta} = \left| \frac{\frac{1}{ox} - \frac{1}{oz}}{\frac{1}{oy} - \frac{1}{ot}} \right| = \frac{xz}{yt} \frac{oy}{ox oz}$$

Le produit  $\frac{\alpha\gamma}{\beta\delta} \frac{\beta\delta}{\varepsilon\varphi} \frac{\varepsilon\varphi}{\alpha\gamma}$  doit être égal à l'unité ; cela entraîne

$$\left( \frac{xz}{yt} \frac{oy}{ox oz} \right) \left( \frac{yt}{uv} \frac{o_2 u}{o_2 y o_2 t} \right) \left( \frac{uv}{xz} \frac{o_1 x}{o_1 u o_1 v} \right) = 1.$$

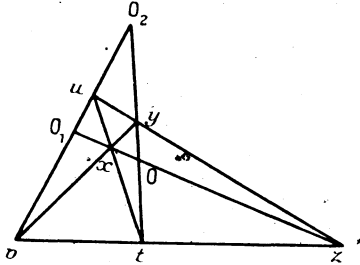


Fig. 7 .

Les termes  $xz$ ,  $yt$ ,  $uv$  disparaissent, il reste

$$\frac{o_1 x}{ox} \frac{o_1 z}{oz} \frac{oy}{o_2 y} \frac{ot}{o_2 t} \frac{o_2 u}{o_1 u} \frac{o_2 v}{o_1 v} = 1.$$

Mais

$$\frac{o_1 x}{ox} = \frac{o_1 z}{oz}, \quad \frac{oy}{o_2 y} = \frac{ot}{o_2 t}, \quad \frac{o_2 u}{o_1 u} = \frac{o_2 v}{o_1 v}.$$

On doit donc avoir

$$\left( \frac{o_1 x}{ox} \frac{ot}{o_2 t} \frac{o_2 u}{o_1 u} \right)^2 = 1,$$

C'est le théorème de Ménélaus appliqué au triangle  $oo_1 o_2$  et à la transversale  $uxt$ .

(Manuscrit remis le 1<sup>er</sup> octobre 1947.)