

BULLETIN DE LA S. M. F.

VICTOR THÉBAULT

Sur une nouvelle sphère du tétraèdre orthocentrique

Bulletin de la S. M. F., tome 74 (1946), p. 26-30

[<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1946__74__26_0>](http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1946__74__26_0)

© Bulletin de la S. M. F., 1946, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SUR UNE NOUVELLE SPHÈRE DU TÉTRAÈDRE ORTHOCENTRIQUE;

PAR M. V. THÉBAULT.

Tennie (Sarthe).

1. **Généralités.** — Dans un tétraèdre quelconque $T = ABCD$, on désigne suivant l'usage par a, a', b, b', c, c' , les arêtes BC, DA, CA, DB, AB, DC et les dièdres correspondants, par A, B, C, D les aires des faces opposées aux sommets A, B, C, D et par V le volume.

A. Les plans menés par chacune des arêtes et qui partagent l'arête opposée en deux segments proportionnels aux carrés des aires des faces passant par la première, concourent en un point K dont la somme des carrés des distances aux faces du tétraèdre T est minimum. (Premier point de LEMOINE.) Les coordonnées barycentriques de ce point sont (A^2, B^2, C^2, D^2) et ses distances aux faces BCD, CDA, DAB, ABC sont égales à

$$d_a = \frac{3 AV}{A^2 + B^2 + C^2 + D^2}, \quad \dots, \quad d_d = \frac{3 DV}{A^2 + B^2 + C^2 + D^2}.$$

B. Si l'on projette orthogonalement un point A_1 de la face BCD du tétraèdre T en B_1 sur la face CDA , puis que l'on projette B_1 en D_1 sur la face CBA et D_1 en C_1 sur la face BDA , ⁽¹⁾ la condition nécessaire et suffisante pour que le vecteur $\overrightarrow{C_1 A_1}$ soit perpendiculaire à la face BCD est que les vecteurs $\overrightarrow{A_1 B_1}, \overrightarrow{B_1 D_1}, \overrightarrow{D_1 C_1}, \overrightarrow{C_1 A_1}$ soient proportionnels aux aires B, D, C, A des faces vers lesquelles ils sont dirigés.

Si un quadrangle gauche $Q_1 \equiv A_1 B_1 D_1 C_1$ est orthogonalement inscrit à un tétraèdre quelconque T , les plans perpendiculaires aux côtés $A_1 B_1, B_1 D_1, D_1 C_1, C_1 A_1$ en leurs milieux concourent donc au centre de la sphère circonscrite au tétraèdre $T_1 \equiv A_1 B_1 D_1 C_1$ qui coïncide avec le premier point de LEMOINE K du tétraèdre T

⁽¹⁾ Pour fixer les idées, on suit le sens positif BDC sur le périmètre du triangle BDC dans la succession des faces CDA, BAC, DAB du tétraèdre T .

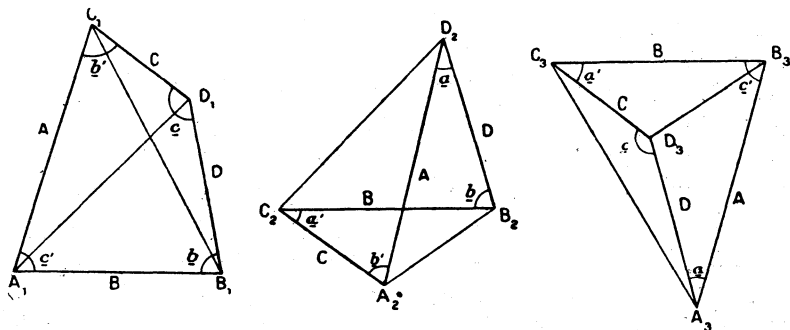
dont les coordonnées normales sont proportionnelles à $C_1 A_1$, $A_1 B_1$, $B_1 D_1$, $D_1 C_1$; de sorte que

$$C_1 A_1 = 2 d_a, \quad A_1 B_1 = 2 d_b, \quad D_1 C_1 = 2 d_c, \quad B_1 D_1 = 2 d_d.$$

Le tétraèdre T étant donné, on construit donc aisément le quadrangle Q_1 . Il y a trois quadrangles gauches

$$Q_1 \equiv A_1 B_1 D_1 C_1, \quad Q_2 \equiv A_2 C_2 B_2 D_2, \quad Q_3 \equiv A_3 D_3 C_3 B_3,$$

orthogonalement inscrits au tétraèdre T, et si l'on parcourt le périmètre du triangle BDC dans le sens opposé, on en détermine trois autres Q'_1 , Q'_2 , Q'_3 .



Les angles A_1 , B_1 , D_1 , C_1 du quadrangle gauche Q_1 sont égaux à c' , b , c , b' ; les diagonales $B_1 C_1$, $A_1 D_1$ sont parallèles aux plus courtes distances des arêtes AB et DC, AC et DB, leurs longueurs sont inversement proportionnelles à celles-ci, et l'on a des conclusions analogues pour les angles et les diagonales des quadrangles gauches Q_2 et Q_3 . Donc,

$$A_1 C_1 = A_2 B_2 = A_3 B_3 = 2 d_a, \quad B_1 A_1 = B_2 C_2 = B_3 C_3 = 2 d_b, \\ C_1 D_1 = C_2 A_2 = C_3 D_3 = 2 d_c, \quad D_1 B_1 = D_2 B_2 = D_3 A_3 = 2 d_d,$$

$$(1) \quad A_1 D_1 = C_2 D_2 = k(A^2 + C^2 - 2 AC \cos b')^{\frac{1}{2}} \\ = k(B^2 + D^2 - 2 BD \cos b)^{\frac{1}{2}} = \frac{k}{2} b b' \sin \theta^{(1)},$$

$$B_1 C_1 = A_3 C_3 = \frac{k}{2} c c' \sin \theta', \quad A_2 B_2 = B_3 D_3 = \frac{k}{2} a a' \sin \theta'',$$

(¹) En vertu d'une relation de G. DOSTOR (*Le trièdre et le tétraèdre, avec application des déterminants*, p. 143).

$\theta, \theta', \theta''$ étant les angles des arêtes CA et DB, AB et DC, BC et DA, en posant

$$(2) \quad k = \frac{6V}{A^2 + B^2 + C^2 + D^2}.$$

2. THÉORÈME. — *Dans un tétraèdre orthocentrique $T \equiv ABCD$, les sommets des quadrangles gauches Q_1 et Q'_1 , Q_2 et Q'_2 , Q_3 et Q'_3 , orthogonalement inscrits, sont vingt-quatre points situés sur une même sphère dont le centre coïncide avec le premier point de LEMOINE K.*

En effet, dans les tétraèdres $T_1 \equiv A_1 B_1 D_1 C_1$, $T_2 \equiv A_2 C_2 B_2 D_2$, $T_3 \equiv A_3 D_3 C_3 B_3$, les dièdres suivant les arêtes $B_1 C_1$ et $A_1 D_1$, $A_2 B_2$ et $C_2 D_2$, $A_3 C_3$ et $B_3 D_3$, sont droits. Or, si l'on transporte le tétraèdre T_2 de façon que la face $C_2 B_2 D_2$ coïncide avec la face $A_1 B_1 D_1$ du tétraèdre T_1 qui lui est égale, le plan de la face $C_2 A_2 D_2$ coïncide avec celui de la face $C_1 A_1 D_1$ et le point A_2 avec le symétrique du point C_1 , par rapport à la médiatrice du côté $A_1 D_1$, c'est-à-dire en un point de la circonférence circonscrite au triangle $C_1 A_1 D_1$ situé aussi sur la sphère circonscrite au tétraèdre T_1 . Les sphères circonscrites aux tétraèdres T_1 et T_2 sont donc égales, de même que les sphères circonscrites aux tétraèdres T_2 et T_3 pour la même raison. Ces trois sphères coïncident puisqu'elles ont pour centre commun le premier point de LEMOINE K du tétraèdre fondamental, (1, B). Les sommets des quadrangles gauches Q'_1, Q'_2, Q'_3 étant visiblement symétriques de ceux des quadrangles Q_1, Q_2, Q_3 , par rapport au point K, le théorème est donc démontré.

Calcul du rayon σ de la sphère (K, σ). — Soient M le milieu du côté $A_1 D_1$, ω_1 et ω_2 les centres des cercles circonscrits aux triangles $A_1 B_1 D_1$ et $A_1 C_1 D_1$, de rayons ρ_1 et ρ_2 . On a successivement

$$\begin{aligned} \rho_1 &= A_1 D_1 : 2 \sin b, & \rho_2 &= A_1 D_1 : 2 \sin b' \\ K \omega_1 &= \omega_2 M = \rho_2 \cos b' = A_1 D_1 : 2 \cot b', \end{aligned}$$

et, en vertu des égalités (1),

$$\begin{aligned} \sigma &= K A_1 = \left(K \omega_1^2 + \omega_1 A_1^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} A_1 D_1 \cdot \left(\frac{1}{\cot^2 b'} + \frac{1}{\sin^2 b} \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{k b b'}{4 \sin b \sin b'} (1 - \cos b \cos b')^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Or,

$$\sin b = \frac{3bV}{2BD}, \quad \sin b' = \frac{3b'V}{2CA};$$

en définitive, eu égard à (2),

$$\sigma = \frac{2ABCD}{3(A^2 + B^2 + C^2 + D^2)V} (1 - \cos b \cos b')^{\frac{1}{2}}.$$

Le rayon σ de la sphère circonscrite au tétraèdre T_1 est bien égal à ceux des sphères circonscrites aux tétraèdres T_2 et T_3 , car, dans le tétraèdre orthocentrique T ,

$$\cos a \cos a' = \cos b \cos b' = \cos c \cos c'.$$

Cette sphère (K, σ) peut être appelée *seconde sphère de LEMOINE* du tétraèdre orthocentrique T , par analogie avec le cercle du même nom dans le triangle:

N. B. — *Les tétraèdres T_1, T_2, T_3 ont chacun deux dièdres opposés droits et leurs volumes sont équivalents. Les perpendiculaires communes aux deux couples d'arêtes opposées n'appartenant pas aux dièdres droits sont rectangulaires.*

En vertu des relations (1),

$$A_1^2 + C_1^2 = B_1^2 + D_1^2, \quad A_2^2 + B_2^2 = C_2^2 + D_2^2, \quad A_3^2 + C_3^2 = B_3^2 + D_3^2.$$

3. Nous avons montré que dans un tétraèdre quelconque T , les sphères circonscrites aux tétraèdres T_1, T_2, T_3 dont les sommets coïncident avec ceux des quadrangles gauches Q_1, Q_2, Q_3 , ont pour centre commun le premier point de LEMOINE K , mais qu'elles ne coïncident pas ⁽¹⁾ (*secondes sphères de LEMOINE*).

Ajoutons que les volumes des tétraèdres T_1, T_2, T_3 sont encore équivalents et qu'ils ont pour expression commune

$$v = \frac{162V^3}{(A^2 + B^2 + C^2 + D^2)^3}.$$

(1) *C. R. Acad. Sc.*, 1944, t. 218, pp. 25-27.

Enfin, de cette expression des volumes des tétraèdres T_1, T_2, T_3 et des formules (1), il résulte que *les plus courtes distances des côtés opposés des quadrangles gauches Q_1, Q_2, Q_3 sont inversement proportionnelles à deux arêtes opposées du tétraèdre T et celles des diagonales aux produits d'une des plus courtes distances des arêtes opposées du tétraèdre T par le sinus de l'angle des deux autres.*

(Manuscrit reçu le 9 juin 1945.)
