BULLETIN DE LA S. M. F.

E. LUCAS

Sur les suites de Farey

Bulletin de la S. M. F., tome 6 (1878), p. 118-119

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1878__6__118_0>

© Bulletin de la S. M. F., 1878, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Sur les suites de Farey; par M. Édouard Lucas (¹).

(Séance du 21 novembre 1877.)

Considérons les suites

$$1,\ 1,$$
$$1,\ 2,\ 1,$$
$$1,\ 3,\ 2,\ 3,\ 1,$$
$$1,\ 4,\ 3,\ 5,\ 2,\ 5,\ 3,\ 4,\ 1,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

telles que chacune d'elles s'obtient en intercalant dans la précédente la somme de deux termes consécutifs, dans leur intervalle. On a les propriétés suivantes :

1° Le nombre des termes de la $n^{\text{ième}}$ suite est égal à $2^{n-1}+1$;

2° La somme des termes de la $n^{\text{ième}}$ suite est égale à $3^{n-1}+1$;

3° La somme des termes pris avec les signes alternés est $1-3^{n-2}$ pour $n \geq 2$;

4° Les deux plus grands termes de la $n^{\text{ième}}$ suite ont pour rang

$$2^{n-2}+1 \pm 2^{n-1}$$

et pour valeur

$$\frac{(1+\sqrt{5})^{n+1}-(1-\sqrt{5})^{n+1}}{2^{n+1}\sqrt{5}}.$$

5° Le terme de la $n^{\text{ième}}$ suite, dont le rang est

$$2^{n-2}+1 \pm [2^{n-3}-2^{n-4}+2^{n-5}\ldots-(-1)^p 2^{n-p}],$$

est égal, en supposant $p \geq 2$, à

$$\frac{(1+\sqrt{5})^{p+1}-(1-\sqrt{5})^{p+1}}{2^{p+1}\sqrt{5}}.$$

6° Le terme de la $n^{\text{ième}}$ suite dont le rang est

$$2^{n-2}+1 \pm [2^{n-2}-2^{n-3}+2^{n-4}-\ldots+(-1)^p 2^{n-p}]$$

est égal, en supposant $p \geq 3$, à

$$\frac{(1+\sqrt{5})^{p-1}+(1-\sqrt{5})^{p-1}}{2^{p-1}}.$$

(¹) *Voir* le Mémoire de M. Halphen dans le précédent volume, p. 170.

7° Enfin nous rappellerons cette intéressante propriété signalée par M. Halphen : la $n^{ième}$ suite et chacune des suivantes contiennent le nombre n autant de fois qu'il y a d'entiers inférieurs et premiers à n.

On généralise les résultats précédents, en remplaçant la première suite 1, 1 par deux nombres quelconques a et b, et en faisant l'intercalation convenue.