BULLETIN DE LA S. M. F.

A. LABROUSSE

Problème de Castillon dans l'espace

Bulletin de la S. M. F., tome 69 (1941), p. 145-172
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1941__69__145_0>

© Bulletin de la S. M. F., 1941, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

PROBLÈME DE CASTILLON DANS L'ESPACE;

PAR M. A. LABROUSSE.

1. On sait qu'on désigne sous le nom de *problème de Castillon* (*voir* Rouché et Comberousse, *Géométrie plane*, p. 310) le problème suivant : *Inscrire dans un cercle un polygone de p côtés dont les côtés consécutifs passent par p points donnés dans un certain ordre.*

Pour la commodité du langage, nous conserverons la même dénomination au problème plus général où le cercle est remplacé par une conique ou une quadrique. La solution, dans le cas d'une conique, est classique (*voir*, par exemple, Darboux, *Géométrie analytique*, p. 125). On considère une ligne brisée ouverte inscrite dans la conique Γ et dont les côtés passent par les p points fixes donnés. La correspondance entre les extrémités M, M′ de cette ligne est une homographie (H). On est ramené à chercher les points doubles de (H). La conique Γ étant supposée définie par cinq points, on peut construire, avec la règle seule, trois couples (M_1, M'_1), (M_2, M'_2), (M_3, M'_3) de points homologues ainsi que l'axe de l'homographie (H). On détermine ensuite les points où cette droite coupe Γ, ce qui exige la règle et le compas. Le problème a donc, en général, 2 solutions réelles ou imaginaires pouvant être confondues. Si (H) devient l'homographie identique, le problème est indéterminé : par exemple, dans le cas de trois points fixes O_1, O_2, O_3, on démontre que, pour que le problème soit indéterminé, il faut et il suffit que le triangle $O_1O_2O_3$ soit conjugué par rapport à Γ. Si l'on ne tient plus compte de l'ordre, le problème a $[(p-1)!]2$ solutions.

Nous ignorons si le problème de Castillon a été résolu dans le cas d'une quadrique. Nous nous proposons d'en donner une solution au moyen de la règle et du compas. On verra qu'il y a une

différence profonde entre le cas du plan et celui de l'espace : dans le cas du plan la parité de p n'intervient pas; dans celui de l'espace le problème admet 4 ou 2 solutions selon que p est pair ou impair.

I. — Solution analytique.

2. Pour le moment nous ne distinguons pas le réel de l'imaginaire. Le problème étant projectif, nous pouvons d'abord par une homographie de l'espace ramener la quadrique (Q) à être $xy - z = 0$. Soient $O_1, O_2, \ldots, O_p$ les p points fixes donnés; désignons par (a_i, b_i, c_i) les coordonnées de O_i. Tout d'abord, $M_1 M_2$ étant une corde de (Q) qui passe par O_1, étudions la correspondance entre M_1 et M_2.

Formules de correspondance. — Soient (x_1, y_1, z_1) et (x_2, y_2, z_2) les coordonnées de M_1 et M_2. On a

$$\frac{x_2 - a_1}{x_1 - a_1} = \frac{y_2 - b_1}{y_1 - b_1} = \frac{z_2 - c_1}{z_1 - c_1} = \rho.$$

D'où

$$\begin{aligned} x_2 &= a_1 + \rho(x_1 - a_1), \\ y_2 &= b_1 + \rho(y_1 - b_1), \\ z_2 &= c_1 + \rho(z_1 - c_1). \end{aligned}$$

M_2 étant sur Q on a

$$[a_1 + \rho(x_1 - a_1)][b_1 + \rho(y_1 - b_1)] - c_1 - \rho(z_1 - c_1) = 0.$$

A priori, cette équation en ρ a la racine $\rho = 1$ qui correspond au point M_1. La racine correspondant au point M_2 est

$$\rho = \frac{a_1 b_1 - c_1}{(x_1 - a_1)(y_1 - b_1)}.$$

D'où les formules

$$(1) \qquad x_2 - a_1 = \frac{a_1 b_1 - c_1}{y_1 - b_1}, \qquad y_2 - b_1 = \frac{a_1 b_1 - c_1}{x_1 - a_1}.$$

Ces formules (1) s'interprètent aisément. En effet, par translation dans le plan xOy, transportons l'origine des coordonnées au

point (a_1, b_1). En désignant par (X, Y) les coordonnées nouvelles, nous aurons

$$X_2 = \frac{K_1}{Y_1}, \qquad Y_2 = \frac{K_1}{X_1} \qquad (\text{on a posé } K_1 = a_1 b_1 - c_1).$$

D'où

$$\frac{X_2}{X_1} = \frac{Y_2}{Y_1} = \frac{K_1}{X_1 Y_1}.$$

Donc m_1, m_2, projections de M_1, M_2 sur xOy sont, comme il était prévu, alignés avec la projection de O_1 sur Oxy.

En second lieu on a

$$X_1 Y_2 + Y_1 X_2 - 2K_1 = 0,$$

relation qui exprime que m_1, m_2 sont conjugués par rapport à la conique (γ_1) $XY - K_1 = 0$. Cherchons la signification géométrique de (γ_1). Le plan polaire de O_1 par rapport à (Q) est

$$a_1 y + b_1 x - z - c_1 = 0.$$

Il coupe (Q) suivant une conique dont la projection sur xy est

$$a_1 y + b_1 x - xy - c_1 = 0 \qquad \text{ou} \qquad (x - a_1)(y - b_1) + c_1 - a_1 b_1 = 0,$$

ou dans le nouveau système $XY - K_1 = 0$.

En résumé : *les projections de* M_1, M_2 *sur* Oxy *sont alignées avec la projection de* O_1 *sur* Oxy *et conjuguées par rapport à la conique* γ_1, *projection de la courbe de contact* Γ_1 *du cône circonscrit à* (Q) *de sommet* O_1.

Nombre de solutions. — Considérons maintenant la ligne brisée $M_1, M_2, \ldots, M_{p+1}$ inscrite dans (Q) et dont les côtés M_1M_2, $M_2M_3, \ldots, M_pM_{p+1}$ passent respectivement par $O_1, O_2, \ldots, O_p$. Nous désignons par (x_i, y_i, z_i) les coordonnées de M_i. En appliquant les formules précédentes à la corde M_2M_3, on a

$$x_3 - a_2 = \frac{a_2 b_2 - c_2}{y_2 - b_2} = \frac{K_2}{b_1 - b_2 + \dfrac{K_1}{x_1 - a_1}},$$

$$y_3 - b_2 = \frac{K_2}{a_1 - a_2 + \dfrac{K_1}{y_1 - b_1}} \qquad \text{avec} \qquad K_2 = a_2 b_2 - c_2.$$

Si l'on désigne par le signe FH une fonction homographique quelconque, on a donc

$$x_3 = \mathrm{FH}(x_1), \qquad y_3 = \mathrm{FH}(y_1).$$

Évaluons de même (x_4, y_4) en fonction de (x_1, y_1). On a

$$x_4 - a_3 = \frac{a_3 b_3 - c_3}{y_3 - b_3} \qquad \text{ou} \qquad x_4 = \mathrm{FH}(y_3).$$

Mais $y_3 = \mathrm{FH}(y_1)$. Donc $x_4 = \mathrm{FH}(y_1)$; on a de même $y_4 = \mathrm{FH}(x_1)$ et ainsi de suite.

Nous aurons donc à distinguer deux cas suivant la parité de p.

1° *p pair.* — Alors $p+1$ est impair et nous avons de proche en proche

$$x_{p+1} = \mathrm{FH}(x_1), \qquad y_{p+1} = \mathrm{FH}(y_1).$$

Le point M_{p+1} sera confondu avec le point de départ M_1 si l'on a

$$x_{p+1} = x_1, \qquad y_{p+1} = y_1.$$

D'où

$$x_1 = \mathrm{FH}(x_1), \qquad y_1 = \mathrm{FH}(y_1).$$

On est ramené à résoudre deux équations du second degré. Soient α, α' les racines de l'équation en x_1, β, β' celles de l'équation en y_1. Nous obtenons quatre points de départ donnant une ligne polygonale inscrite fermée : ce sont les points de (Q) projetés sur xOy aux points (α, β), (α', β'), (α, β'), (α', β).

2° *p impair.* — $p+1$ étant pair on a

$$x_{p+1} = \mathrm{FH}(y_1), \qquad y_{p+1} = \mathrm{FH}(x_1).$$

M_{p+1} sera confondu avec M_1 si

$$x_{p+1} = x_1, \qquad y_{p+1} = y_1.$$

On est ramené pour trouver M_1 à l'intersection de deux hyperboles

$$x = \mathrm{FH}(y), \qquad y = \mathrm{FH}(x).$$

Ces deux hyperboles ayant Ox et Oy pour directions asymptotiques se coupent en deux points à distance finie. En partant des points de (Q) projetés en ces points, on obtiendra deux lignes polygonales fermées inscrites dans (Q).

En résumé : *le problème de Castillon pour une quadrique admet quatre ou deux solutions suivant que p est pair ou impair.*

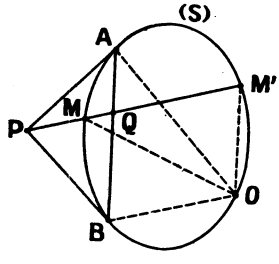
Si l'on ne tient plus compte de l'ordre des points O_i, les nombres de solutions précédents doivent être multipliés par $(p-1)!$.

II. — Solution géométrique.

3. **Remarques préliminaires.** — Établissons d'abord diverses propriétés préliminaires.

Lemme I. — *Soient* A, B *les points où une conique* (S) *est coupée par la polaire d'un point* P. *Une droite passant par* P *rencontre* (S) *en* M *et* M'. *Si* O *est un point quelconque pris sur* (S), *le faisceau* O(ABMM') *est harmonique* (*fig.* 1).

Fig. 1.



Cette propriété résulte immédiatement de ce qu'on sait sur l'involution sur une conique. Mais donnons une démonstration directe. D'après un théorème de Chasles, on a l'égalité de rapports anharmoniques O(ABMM') = A(ABMM'). Coupons par la sécante PM le faisceau de sommet A.

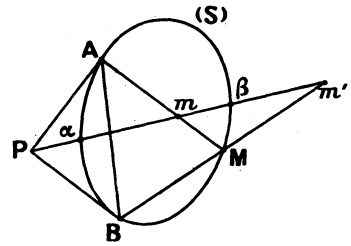
Si Q est le point où MM' rencontre AB, on a

$$A(ABMM') = (PQMM') = -1.$$

D'où $O(ABMM') = -1$.

Lemme II. — *Soient* A, B *deux points d'une conique* (S) *et* Δ *une droite passant par le pôle* P *de* AB. *Si* M *est un point quelconque de* (S), *les droites* MA *et* MB *coupent* Δ *en deux points* m, m' *qui sont conjugués par rapport à* (S) (*fig.* 2).

Fig. 2.



En effet, soient $\alpha\beta$ les points communs à (S) et Δ. D'après le lemme I, $M(AB\alpha\beta) = -1$. Coupons ce faisceau de sommet M par la sécante Δ. On a $M(AB\alpha\beta) = (mm'\alpha\beta)$. Donc $(mm'\alpha\beta) = -1$, c'est-à-dire que m et m' sont conjugués par rapport à (S).

Nous nous bornons à énoncer cette *réciproque* qui est immédiate : *Si* m *et* m' *sont sur* Δ *deux points conjugués par rapport à* (S), *les droites* Am, Bm' (*ou* Bm, Am') *se coupent sur la conique* (S). C'est cette réciproque que nous appliquerons plus loin.

Problème. — *Soit une quadrique* (Q). *D'un point* ω *de* Q, *on fait une projection centrale sur un plan* π. *Une corde variable* MM′ *de* (Q), *projetée en* mm' *sur* π, *passe par un point fixe* A. *Étudier la correspondance entre les points* m *et* m' (*fig.* 3).

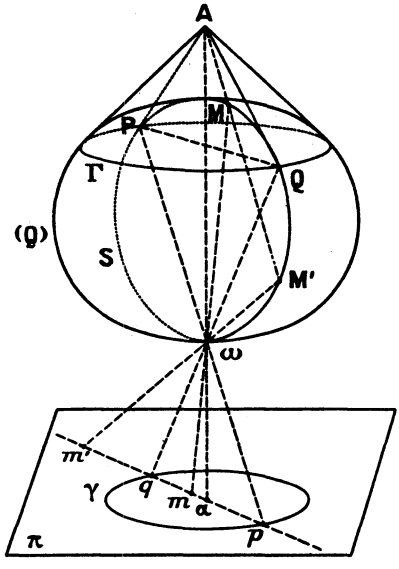
Soit a la projection de A. Tout d'abord il est évident que a, m, m' sont alignés. En second lieu soit Γ la courbe de contact du cône de sommet A circonscrit à Q et γ sa projection sur π. Le plan ωAMM′ coupe (Q) suivant une conique (S). La polaire de A par rapport à S rencontre S en deux points P, Q projetés en p, q. Les points P, Q sont sur la conique Γ et par suite p, q sont sur γ. Mais, d'après le lemme I, $\omega(PQMM') = -1$, ce qui entraîne

$$(pqmm') = -1.$$

Donc m et m' sont conjugués par rapport à γ.

En résumé : *mm' sont alignés avec la projection de* A *et sont conjugués par rapport à la conique* γ, *projection de la courbe de contact* Γ *du cône de sommet* A *circonscrit à* Q.

Fig. 3.



4. **Solution géométrique du problème de Castillon.** — Soit une ligne polygonale L ouverte $M_1M_2M_3 \ldots M_{p+1}$ inscrite dans une quadrique (Q) et dont les côtés consécutifs M_1M_2, M_2M_3, ..., M_pM_{p+1} passent par les points fixes donnés O_1, O_2, ..., O_p.

Du point ω pris sur Q, elle se projette sur le plan π suivant la ligne polygonale $m_1 m_2 \ldots m_{p+1}$.

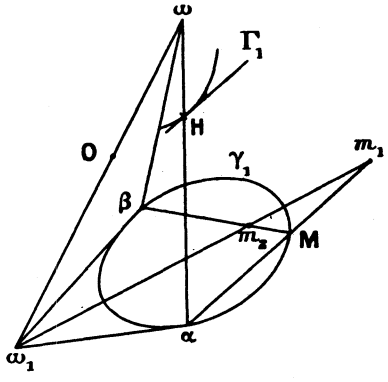
Étudions d'abord, lorsque L *varie, la correspondance entre les points* m_1 *et* m_k.

Désignons par ω_i la projection sur π du point O_i, par γ_i la projection de la courbe de contact Γ_i du cône de sommet O_i circonscrit à (Q). Nous avons vu que m_1 et m_2 sont alignés avec ω_1 et conjugués par rapport à la conique γ_1.

Les deux génératrices de (Q) issues du centre de projection rencontrent le plan π en α et β. Soit H le point où la génératrice $\omega\alpha$

rencontre Γ_1. Le plan tangent en H à (Q) contient la tangente en H à Γ_1, la génératrice $\omega\alpha$ et le point O_1. La tangente en H à Γ_1 est donc projetée en $\omega_1\alpha$. Dès lors la conique γ_1 est tangente à $\omega_1\alpha$ et $\omega_1\beta$ en α et β. D'après la réciproque du lemme II, αm_1 et βm_2 se coupent en M sur γ_1. Donc, lorsque m_1, m_2 varient, les rayons αm_1, βm_2 (ou αm_2, βm_1) se correspondent homographiquement. De même βm_2 et αm_3 sont en homographie. Il s'ensuit que αm_1 et αm_3 sont en homographie et ainsi de suite.

Fig. 4.



En second lieu, βm_2 et βm_4 étant, pour la même raison, en homographie, on voit que αm_1 et βm_4 (ou αm_4 et βm_1) sont en homographie et ainsi de suite.

Ainsi : *en général, les rayons de même sommet αm_1 et αm_{1+2i} (ou βm_1 et βm_{1+2i}) sont en homographie et les rayons de sommets différents αm_1 et βm_{2i} (ou βm_1 et αm_{2i}) sont en homographie.* Nous sommes donc conduits à distinguer deux cas suivant la parité de p.

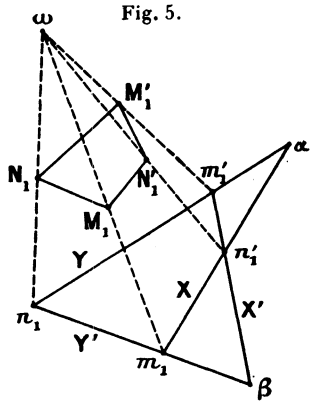
1° *p pair.* — Dans ce cas, $p+1$ étant impair les rayons αm_1, αm_{p+1} sont homologues dans une homographie (H) autour de α. De même βm_1, βm_{p+1} sont homologues dans une homographie (H′) autour de β. Si M_{p+1} vient se confondre avec M_1, m_{p+1} vient se confondre en μ avec m_1; $\alpha\mu$ est alors un rayon double de (H) et $\beta\mu$ un rayon double de (H′). Donc μ est point commun à un rayon double de (H) et à un rayon double de (H′). Réciproque-

ment, si μ est un tel point, en prenant pour point de départ sur (2) le point M_1 projeté en μ, on obtiendra un polygone de Castillon. Or (H) a deux rayons doubles αX, αY; (H') en a deux ($\beta X'$, $\beta Y'$); il y a quatre points μ.

Donc : *si p est pair, le problème de Castillon, pour une quadrique, admet en général quatre solutions.*

Remarque. — On voit que les projections sur π : m_1, m'_1, n_1, n'_1 des quatre points de départ M_1, M'_1, N_1, N'_1 sur (Q) sont avec α, β les sommets d'un quadrilatère complet de côtés αX, αY, $\beta X'$, $\beta Y'$. Considérons, par exemple, le plan $\omega\beta m_1 n_1$; il coupe (Q) suivant une deuxième génératrice. Celle-ci contenant M_1 et N_1 est la

Fig. 5.

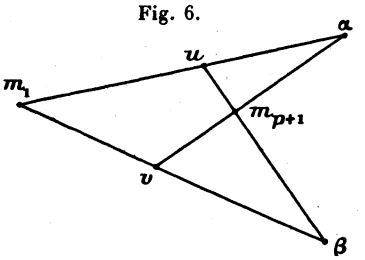


droite M_1N_1. De même $M_1N'_1$, M'_1N_1, $M'_1N'_1$ sont génératrices de (Q). Comme n'importe quel sommet d'un polygone de Castillon peut jouer le rôle de point de départ, nous obtenons cette propriété : *Le quadrilatère gauche* $M_iN_iM'_iN'_i$ *formé par quatre sommets correspondants des quatre polygones de Castillon est tracé sur la quadrique* (Q). Il s'ensuit que les droites $M_iM'_i$, $N_iN'_i$ correspondant aux diagonales du quadrilatère complet $m_in_im'_in'_i$ autres que $\alpha\beta$ sont conjuguées par rapport à la quadrique.

2° *p impair.* — $p+1$ étant pair, αm_1 et βm_{p+1} sont en homographie et il en est de même de βm_1 et αm_{p+1}. Le point u commun à αm_1 et βm_{p+1} décrit donc une conique U passant par α et β. De

même, le point v commun à βm_1 et αm_{p+1} décrit une seconde conique V passant par $\alpha\beta$. Si la ligne polygonale L se ferme, m_1 et m_{p+1} viennent se confondre en un point μ; u et v viennent aussi en μ qui est dès lors un point commun à U et V autre que α et β.

Fig. 6.



Réciproquement, si μ est un tel point, on voit qu'en prenant pour point de départ sur (Q) le point M_1 projeté en μ, on obtient un polygone de Castillon. Or les deux coniques U et V ont deux points communs autres que α et β.

Donc : *si p est impair, le problème de Castillon, pour une quadrique, admet en général deux solutions.*

5. **Cas particulier.** — Supposons que les points O_i soient tous dans un même plan π. Si *p est impair*, les deux polygones de Castillon relatifs à la quadrique (Q) sont plans et identiques aux polygones de Castillon relatifs à la conique section de (Q) par le plan π.

Si *p est pair*, il y a en plus de ces deux polygones plans deux polygones gauches dont les points de départ sont aisés à construire. Soient en effet M_1, M'_1 les points de départ des polygones plans, N_1, N'_1 ceux des polygones gauches.

Nous avons vu que $N_1N'_1$ est la droite conjuguée de $M_1M'_1$ par rapport à (Q).

Donc après avoir, par une opération de géométrie plane, déterminé M_1 et M'_1, on construira la conjuguée de $M_1M'_1$ par rapport à (Q) et l'on prendra ses points d'intersection avec la quadrique.

Exemple. — Prenons pour quadrique la sphère

$$x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$$

et pour points fixes dans le plan $z = 0$ les points

$$O_1(x = 25, y = 0), \qquad O_2(x = 0, y = 25),$$
$$O_3(x = -25, y = 0), \qquad O_4(x = 0, y = -25).$$

On a dans le plan $z = 0$ deux polygones de Castillon qui sont deux carrés symétriques l'un de l'autre par rapport aux axes Ox et Oy. Les points de départ sont

$$M_1(x = 4, y = 3) \quad \text{et} \quad M_1'(x = -3, y = -4).$$

La droite M_1M_1' a pour équations

$$\left\{ \begin{array}{r} z = 0, \\ x - y - 1 = 0. \end{array} \right.$$

Sa conjuguée, par rapport à la sphère, est $x = 25$, $y = -25$. Elle coupe la surface aux points N_1, N_1'. Au point de départ N_1 correspond un quadrilatère gauche imaginaire $N_1N_2N_3N_4$. Les coordonnées de ses sommets sont donnés par le tableau ci-dessous :

	N_1	N_2	N_3	N_4
x	25	25	-25	-25
y	-25	25	25	-25
z	$35i$	$-35i$	$35i$	$-35i$

Il a pour axes de symétrie Ox, Oy, Oz.

Au point N_1' correspond un deuxième quadrilatère gauche symétrique du premier par rapport au plan xOy.

III. — Détail des constructions. Discussion.

Nous distinguerons deux cas suivant que la quadrique (Q) est réellement ou imaginairement réglée.

6.I. **Quadrique réellement réglée.** — Soit la quadrique (Q) définie par trois génératrices A, B, C de même système. Nous supposons A, B, C représentées dans une épure de géométrie descriptive. Adoptons pour centre de projections ω sur (Q) le point à l'infini de A. La deuxième génératrice A_1 issue de ω s'obtient en construisant la parallèle à A qui s'appuie sur B et C.

Les génératrices A, A_1 ont pour traces sur le plan horizontal de projection π les deux points désignés plus haut par α et β. Prenons pour point de départ d'une ligne polygonale ouverte un point quelconque M_1 appartenant, par exemple, à la génératrice B.

On obtient M_2 en construisant le second point où O_1M_1 rencontre (Q), de même M_3 s'obtient en construisant le second point où O_2M_2 rencontre (Q) et ainsi de suite. Pour déterminer le point M_3, par exemple, on prend pour plan auxiliaire le plan contenant O_2M_2 et une génératrice issue de M_2 (par exemple celle qui rencontre A, B, C). Ce plan coupe (Q) suivant une deuxième droite qui rencontre O_2M_2 en M_3. Toutes ces opérations s'effectuent au moyen de la règle et de l'équerre. En projetant ensuite de ω sur le plan horizontal π les extrémités M_1, M_{p+1} de la ligne polygonale L, on obtient les points m_1, m_{p+1}. De deux autres points de départ M'_1 et M''_1 on déduit les couples de points (m'_1, m'_{p+1}), (m''_1, m''_{p+1}).

Tenons compte maintenant de la parité de p.

1° *p est pair.* — On construit les rayons doubles αX, αY de l'homographie (H) autour du point α définie par les trois couples de rayons homologues $(\alpha m_1, \alpha m_{p+1})$, $(\alpha m'_1, \alpha m'_{p+1})$, $(\alpha m''_1, \alpha m''_{p+1})$. De même, on construit les rayons doubles $\beta X'$, $\beta Y'$ de l'homographie (H') autour de β définie par les couples $(\beta m_1, \beta m_{p+1})$, $(\beta m'_1, \beta m'_{p+1})$, $(\beta m''_1, \beta m''_{p+1})$. Ces opérations exigent le compas. En prenant les points communs à αX, αY et $\beta X'$, $\beta Y'$, on obtient les projections sur π des points de départ, d'où l'on déduit ensuite les points de départ sur la quadrique (Q).

En résumé, on voit que : *dans le cas de réalité, les quatre polygones de Castillon peuvent se construire au moyen de la règle et du compas.*

La discussion est immédiate. Si les couples $(\alpha X, \alpha Y)$, $(\beta X', \beta Y')$ sont réels, il y a quatre solutions réelles; si un seul de ces couples est réel, les quatre points communs sont imaginaires; les quatre polygones sont imaginaires. Si les deux couples sont imaginaires, les quatre points communs sont imaginaires, mais cette fois deux à deux conjugués et les quatre polygones de Castillon sont ima-

ginaires, deux à deux conjugués. On étudiera plus loin les cas d'indétermination.

2° *p est impair.* — Les rayons αm_1, $\alpha m'_1$, $\alpha m''_1$ coupent respectivement βm_{p+1}, $\beta m'_{p+1}$, $\beta m''_{p+1}$ aux points u, u', u''; les points α, β, u, u', u'' déterminent une conique U. De même βm_1, $\beta m'_1$, $\beta m''_1$ coupent αm_{p+1}, $\alpha m'_{p+1}$, $\alpha m''_{p+1}$ aux points v, v', v'' qui, avec α et β, déterminent une conique V. Reste à trouver les points μ, μ' communs à U et V et autres que α et β.

Pour cela construisons d'abord la droite Δ qui joint μ et μ'. Appliquons le théorème de Desargues-Sturm au faisceau ponctuel de coniques défini par U et V en coupant ce faisceau par la sécante uv. Cette droite uv coupe U en un second point u_1 qu'on peut déterminer par le théorème de Pascal. De même, on construit le second point v_1 où uv coupe V. La droite $\alpha\beta$ rencontre uv en un point p. Si p_1 est le point où Δ coupe uv, p_1 est l'homologue de p dans l'involution définie par les deux couples (u, u_1), (v, v_1) de points homologues. En prenant pour deuxième sécante $u'v'$ on obtient de même un autre point q_1 de Δ. On voit que Δ peut ainsi se construire au moyen de la règle seule. On aura ensuite les points cherchés $\mu'\mu''$ en construisant les points communs à Δ et à la conique U, par exemple, qui est définie par cinq points. Cette dernière construction est classique et exige l'emploi de la règle et du compas. Les points de la quadrique (Q) qui, de ω, se projettent en μ et μ' seront les points de départ des deux polygones de Castillon cherchés.

Ainsi, *p étant impair, les deux polygones de Castillon, s'ils sont réels, peuvent se construire au moyen de la règle et du compas.*

Si μ, μ' sont réels, on a deux polygones réels; si μ, μ' sont imaginaires, ils sont conjugués et l'on voit aisément qu'il leur correspond deux polygones imaginaires conjugués.

Remarque. — Le cas où (Q) *est un cône réel* doit être étudié à part. Soit ω le sommet du cône, Γ sa section par un plan π, ω_i la trace de ωO_i sur π.

On résout d'abord le problème de Castillon relatif à la conique Γ et aux points ω_i; on obtient ainsi deux polygones $m_1 m_2 \ldots m_p$,

$m'_1 m'_2 \ldots m'_p$. On considère ensuite une ligne brisée L ouverte inscrite dans le cône et ayant son point de départ M_1 sur ωm_1. Le point M_{p+1} est aussi sur ωm_1 et correspond homographiquement à M_1. Cette homographie a pour premier point double le sommet ω. Son second point double est le point de départ d'un polygone de Castillon inscrit dans le cône. On a ainsi deux solutions quelle que soit la parité de p.

7.II. **Quadrique imaginairement réglée.** — Soit Q une quadrique réelle imaginairement réglée distincte d'un cône ou cylindre. (Q) est un ellipsoïde réel, ou un hyperboloïde à deux nappes, ou un paraboloïde elliptique. Dans ce cas, on simplifie le problème de Castillon en se ramenant au cas d'une quadrique de révolution (Q′) ayant au moins un sommet réel sur l'axe de révolution.

En effet, supposons d'abord (Q) à centre et soient Ox, Oy, Oz ses axes de symétrie. Dans une épure de descriptive prenons Oxy pour plan horizontal de projection, Oxz pour plan frontal. En effectuant une affinité d'abscisse, c'est-à-dire une transformation de la forme $x' = Kx$, $y' = y$, $z' = z$ (K rapport de deux longueurs connues) nous pouvons changer (Q) en une quadrique de révolution (Q′) définie par les axes de sa méridienne principale. Si Q est un paraboloïde, nous prendrons pour plans de coordonnées ses deux plans de symétrie et un plan normal à l'axe ne passant pas par le sommet (ce dernier étant plan xOy), et par l'affinité précédente nous le changerons en un paraboloïde de révolution. Par cette même affinité, les points O_i se changent en des points O'_i. On voit que les données nouvelles se déduiront des anciennes au moyen de la règle et de l'équerre.

Il n'y a plus qu'à résoudre le problème de Castillon pour (Q′) et les points O'_i; l'affinité inverse de la précédente donne ensuite les polygones de Castillon relatifs à (Q). On peut donc, dans ce qui suit, supposer (Q) de révolution.

Rappel de propriétés. — Rappelons deux théorèmes classiques sur les quadriques de révolution utilisés plus loin.

I. *Si l'on prend pour centre de projection un sommet d'une quadrique* (Q) *de révolution, la projection d'une section plane de* (Q) *sur un plan normal à l'axe de révolution se fait suivant*

un cercle. En effet, soit ω le sommet pris pour centre de projection. Supposons l'axe de révolution vertical. La quadrique (Q) contient les droites ωi, ωj, i et j désignant les points cycliques du plan horizontal de projection. La section plane considérée est une conique Γ qui rencontre ωi, ωj en deux points I, J. Du point ω, I et J se projettent en i et j. La projection centrale de Γ passant par i, j est donc un cercle. Si Γ est une méridienne, le raisonnement est en défaut; mais Γ se projette suivant une droite qu'on peut regarder comme un cercle de rayon infini.

II. *Dans les conditions précédentes, la courbe de contact* Γ *d'un cône circonscrit à* (Q) *se projette suivant un cercle* γ *ayant pour centre la projection* s *du sommet* S *du cône.*

En effet la droite ωS étant conjuguée de IJ par rapport à (Q) rencontre le plan de Γ en un point σ pôle de IJ par rapport à Γ. Or IJ se projette en ij, σ en s, donc s est le pôle de ij par rapport au cercle γ, c'est-à-dire le centre de γ.

Correspondance entre m_1 *et* m_{p+1}. Sur (Q) prenons un point de départ arbitraire M_1. Construisons une ligne polygonale ouverte L inscrite à (Q) soit M_1, M_2, ..., M_{p+1} dont les côtés passent par les points donnés O_1, O_2, ..., O_p. En utilisant des plans auxiliaires de bout et appliquant le théorème I, on voit aisément que les sommets de L peuvent se construire successivement au moyen de la règle et du compas. Prenons pour centre de projection ω un sommet de (Q); M_1 et M_{p+1} se projettent en m_1 et m_{p+1}, sur le plan horizontal. Étudions la transformation T de m_1 en m_{p+1}. Les courbes de contact des cônes circonscrits à (Q) de sommets O_1, O_2, ..., O_p se projettent du centre ω (théorème II) sur le plan horizontal suivant des cercles γ_1, γ_2, ..., γ_p centrés aux points ω_1, ω_2, ..., ω_p projections de O_1, O_2, ..., O_p. On a vu que m_1, m_2 sont alignés avec ω_1 et conjugués par rapport à γ_1. Donc m_1 et m_2 sont inverses dans l'inversion définie par le cercle γ_1. De même m_2 et m_3 sont inverses dans l'inversion définie par γ_2 et ainsi de suite.

Ainsi : *la transformation* T *de* m_1 en m_{p+1} *est le produit de* p *inversions.* — Nous ne considérons, dans ce qui suit, que les points M_i réels. Distinguons maintenant deux cas selon la parité de p.

8. 1° **Le nombre des côtés est pair.** — On sait que, p étant pair, le produit T de p inversions dans le plan est, en général, le produit d'un déplacement, d'une symétrie par rapport à une droite et d'une inversion (*voir* Darboux, *Géométrie analytique*, p. 373 ou Deltheil et Caire, *Géométrie*, p. 214). La transformation T qui change en cercles les cercles de rayon fini ou infini et conserve les angles en grandeur et sens est donc ce qu'on appelle une *transformation circulaire directe*. Définissons T sous une autre forme. On peut prendre aussi une autre inversion, que nous désignons par $\dot{I}$, pour premier facteur et écrire $T = \dot{I}SD$, S désignant une symétrie par rapport à une droite et D un déplacement. Cherchons une relation entre les affixes z, z' des points m_1, m_{p+1}. Soumettons les axes de coordonnées à une translation en prenant pour nouvelle origine le pôle de l'inversion $\dot{I}$. On sait que S est le produit d'une symétrie S′ par rapport à l'axe des abscisses et d'un déplacement de sorte que $T = \dot{I}S'D'$, D′ désignant un nouveau déplacement. Si $\dot{I}S'$ change le point d'affixe z en un point d'affixe u, on a $u = \frac{K}{z}$ (K puissance de l'inversion). Ensuite D′ change le point u en un point z' tel que $z' = a + ue^{i\alpha}$, a étant une constante complexe et α un angle de rotation. D'où $z' = a + \frac{Ke^{i\alpha}}{z}$; z et z' sont donc liés homographiquement. Le retour aux axes anciens modifie z et z' d'une même constante additive et laisse subsister l'homographie. Ainsi, à un autre point de vue, *la correspondance* (m_1, m_{p+1}) *est une homographie dans le plan complexe.*

Construction des points de départ. — En considérant deux nouvelles lignes polygonales L′, L″ inscrites dans (Q), on obtient deux nouveaux couples (m'_1, m'_{p+1}), (m''_1, m''_{p+1}) de points homologues de la transformation T. Pour déterminer, en projection, les points de départ des polygones de Castillon, on est donc ramené à la construction suivante :

Construction I. — *Une homographie dans le plan complexe étant définie par trois couples* (m_1, m_{p+1}), (m'_1, m'_{p+1}), (m''_1, m''_{p+1}) *de points homologues, construire ses deux points doubles.* — Pour simplifier, modifions les notations; désignons par (A, A′) (B, B′) (C, C′) les couples donnés. Représentons ces points par

les points (a, a'), (b, b'), (c, c') d'une conique (S) ayant pour paramètres, dans une représentation unicursale propre de (S), les affixes des points A, A', etc. Les points doubles xy de l'homographie correspondante sur (S) s'obtiennent en coupant (S) par l'axe d'homographie, lequel joint, par exemple, les points communs aux droites (ac', ca'), (bc', cb').

Or (x, y) (b, c') (c, b') sont en involution sur (S). Si p, p' sont les points doubles de cette involution i_1, on a $(xypp') = -1$.

De même, (x, y) (a, c') (c, a') sont en involution sur (S) et si (q, q') sont les points doubles de cette involution i_2, on a $(xyqq') = -1$. Donc x et y sont les points doubles de l'involution définie par les couples (p, p'), (q, q').

D'où cette construction dans le plan complexe : on détermine les points doubles P, P' de l'involution complexe $\dot{I}_1$ définie par les couples (B, C') (C, B'); puis les points doubles QQ' de l'involution $\dot{I}_2$ définie par (A, C') (C, A'); on construit enfin les points doubles X, Y de l'involution complexe définie par les deux couples (P, P'), (Q, Q').

On a donc à effectuer trois fois cette construction plus simple :

Construction II. — *Construire les points doubles d'une involution dans le plan complexe définie par deux couples* (P, P') (Q, Q') *de points homologues.*

Nous simplifierons à son tour cette construction en appliquant la remarque suivante :

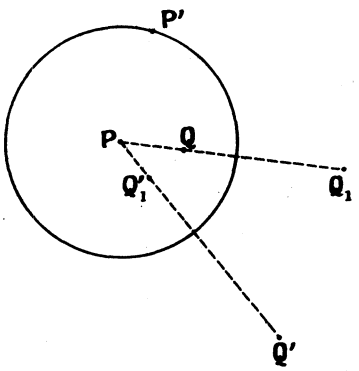
La transmuée par inversion d'une involution complexe est encore une involution complexe. — En effet, soient z, z' les affixes de deux points homologues de l'involution considérée. Une inversion $\dot{I}$ change ces points en deux points d'affixes u et u'. On sait que a étant l'affixe du pôle et K la puissance de $\dot{I}$ on a

$$(1) \qquad (u-a)(\bar{z}-\bar{a}) = K, \qquad (u'-a)(\bar{z'}-\bar{a}) = K$$

en désignant par $\bar{z}$, $\bar{z'}$, $\bar{a}$ les conjugués de z, z', a. Mais z, z' étant liés involutivement, il en est de même de $\bar{z}$, et $\bar{z'}$. Si l'on élimine $\bar{z}$, $\bar{z'}$ entre cette relation involutive et les relations (1), on obtient une relation involutive entre u et u'.

Cela posé, effectuons, par exemple, l'inversion de pôle P et puissance $\overline{PP'}^2$; P′ est inchangé, P devient le point $\dot{I}_\infty$ à l'infini dans le plan; a, a' se changent en a_1, a'_1. Il n'y a plus qu'à faire la construction avec les couples $(\dot{I}_\infty, a')$, (a_1, a'_1). On prendra ensuite les inverses des points doubles trouvés pour cette nouvelle involution.

Fig. 7.



En définitive, il suffit de savoir effectuer cette dernière construction.

Construction III. — *Construire les points doubles d'une involution dans le plan complexe définie par deux couples de points homologues, l'un de ces points étant à l'infini.* — Soient (A, A′), $(B\dot{I}_\infty)$ les deux couples donnés, U, V les points doubles cherchés. On doit avoir $(z_A\ z_{A'}\ z_u\ z_v) = -1$. Cette propriété entraîne, comme on sait, que les points A, A′, U, V sont sur un même cercle Γ sur lequel $(AA'UV) = -1$. Cela revient à dire que les droites AA′ et UV sont conjuguées par rapport à Γ ou que UV passe par le pôle H de AB par rapport à Γ. On a de même

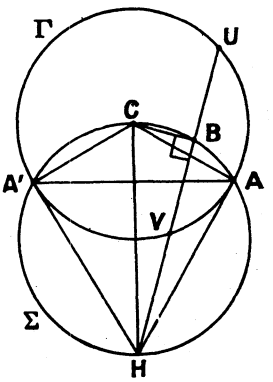
$$(z_B z_{i_\infty} z_u z_v) = -1.$$

Il s'ensuit que les points B, U, V sont en ligne droite et que B est le milieu de UV.

Si C est le centre du cercle Γ, l'angle $\widehat{CBH}$ est droit. Le cercle Σ de diamètre CH passe par A, A′, B; il est donc connu. D'où la

construction suivante : on trace le cercle Σ circonscrit au triangle AA'B; il coupe la médiatrice de AA' en deux points C et H; on choisit celui C de ces deux points qui est du même côté

Fig. 8.



que B par rapport à AA'; on trace le cercle Γ de centre C et rayon CA; enfin, on mène BH qui coupe Γ aux points doubles cherchés U et V.

Réduction des constructions. — Si l'on fait venir au sommet ω de la quadrique (Q) le point de départ M_1, le point désigné plus haut par m_1 devient le point à l'infini $\dot{I}_\infty$ du plan horizontal complexe. On peut supposer que m'_{p+1} est aussi à l'infini, c'est-à-dire confondre M'_{p+1} avec ω. En effectuant les constructions en sens inverse, on aura le point m'_1 correspondant. En définitive, il s'agit de trouver les points doubles d'une homographie du plan complexe définie par trois couples $(\dot{I}_\infty, A')$, $(B, \dot{I}_\infty)$, (C, C'). Pour cela, on cherchera les points doubles (P, P'), (Q, Q') des deux involutions définies par les couples $(\dot{I}_\infty, C')$, (A', C) et $(\dot{I}_\infty, C)$, (B, C'), c'est-à-dire qu'on effectuera deux fois la construction III. Il restera en appliquant les constructions II et III à trouver les points doubles U, V de l'involution définie par (P, P') et (Q, Q').

Conclusion. — Les points U, V étant réels, il leur correspond sur (Q) des points de départ réels et des polygones de Castillon réels. Les projections des deux autres points de départ sont d'après

la remarque du paragraphe 4 sommets opposés d'un quadrilatère complet ayant pour autres sommets opposés U, V et i, j (qui remplacent ici α et β). Ce sont donc les points limites du faisceau de cercles ayant U et V pour points bases (ou encore les points dits *associés* de U, V; Darboux, *Géométrie analytique*, p. 149). Ils sont imaginaires conjugués et il leur correspond deux polygones de Castillon imaginaires conjugués. En résumé : *La quadrique* Q *étant imaginairement réglée et p pair, il existe, en général, deux polygones de Castillon réels ayant pour points de départ les points* M_1, M'_1 *projetés en* U *et* V. *On peut les construire avec la règle et le compas. Les deux autres polygones sont imaginaires conjugués et leurs points de départ* N_1, N'_1 *sont les points communs à* (Q) *et à la droite conjuguée de* $M_1M'_1$ *par rapport à cette quadrique.*

Remarque. — Un cas très particulier est celui où deux ou plusieurs points O_i consécutifs seraient alignés avec le centre de projection ω. Le produit des inversions correspondantes est alors une homothétie ou une inversion. Dans ce cas, T est le produit d'une inversion par une similitude indirecte. T est encore une transformation circulaire directe. Les affixes z, z' de m_1, m_{p+1} sont toujours liés homographiquement car, dans le calcul précédent, la relation $z = a + ue^{i\alpha}$ est remplacée par $z = a + uhe^{i\alpha}$ h étant le rapport de similitude. Il n'y a donc rien à changer aux constructions précédentes.

9. 2° **Le nombre des côtés est impair.** — Le produit T d'un impair d'inversions est, en général, le produit d'un déplacement par une inversion (ou vice versa). La transformation T de m_1 en m_{p+1} est donc une *transformation circulaire indirecte*; elle conserve les angles en grandeur, mais change leur sens. On voit aisément que si z et z' sont les affixes des points m_1, m_{p+1}, z et $\overline{z'}$ (ou $\bar{z}$ et z') sont liés homographiquement; la correspondance T est donc une *antihomographie* dans le plan complexe. Il s'agit, pour trouver sur la quadrique (Q) les points de départ des polygones de Castillon, de construire les points doubles de la transformation T connaissant trois couples (m_1, m_{p+1}), (m'_1, m'_{p+1}), (m''_1, m''_{p+1}) de points homologues. Nous simplifierons les constructions en

prenant comme précédemment les couples particuliers ($\dot{I}_\infty$, A'), (B, $\dot{I}_\infty$), (C, C').

On a $T = D\dot{I}$, D et $\dot{I}$ désignant un déplacement et une inversion. On peut toujours supposer $\dot{I}$ positive : en effet, une inversion négative est le produit d'une symétrie par rapport au pôle, qu'on peut absorber dans D, et d'une inversion positive. Le déplacement D est en général une rotation. Cherchons d'abord D et $\dot{I}$.

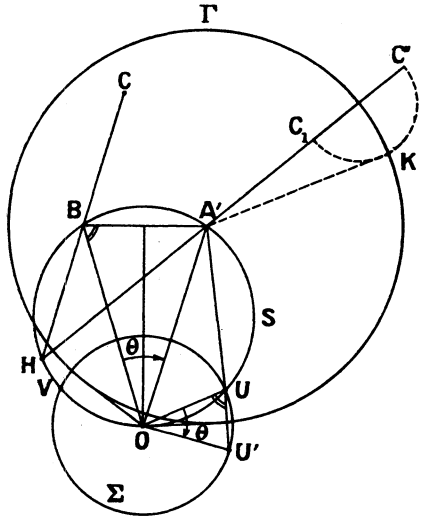
Recherche de la rotation et du cercle d'inversion. — Une droite X passant par B contient B et I_∞; sa transformée par T passe par A' et $\dot{I}_\infty$; c'est donc une droite X' passant par A'. Le déplacement D change X en une droite Y que l'inversion $\dot{I}$ doit changer en X'. Il en résulte que Y et X' sont confondues avec une droite passant par le pôle de $\dot{I}$. Toutes les droites X' qui pivotent autour de A' doivent aussi pivoter autour du pôle d'inversion; A' est donc le pôle de l'inversion $\dot{I}$.

Toutes les droites issues de B sont changées par D en droites issues de A'; il s'ensuit que D change B en A' et que le centre O de la rotation est sur la médiatrice de BA'. La droite A'C' étant invariante par $\dot{I}$, on voit que le déplacement D change BC en A'C'. Ces deux droites se coupent en H : le centre de rotation est alors, comme on sait, sur le cercle S circonscrit en HBA'. On a ainsi deux positions pour le centre de rotation; mais, si l'on veut une inversion positive, une seule de ces positions convient, celle indiquée sur la figure. La rotation est définie par son centre O et son angle $\theta = \widehat{BOA'}$. Elle amène C en C_1 sur la demi-droite A'C' et tel que $A'C_1 = BC$. Comme C_1 et C' doivent être inverses la puissance d'inversion est $K = A'C'.A'C_1 = \overline{A'K}^2$, et l'on peut construire le cercle d'inversion Γ. Nous connaissons donc les éléments des composantes D et $\dot{I}$ de T.

Construction des points doubles de T. — Soit U un point double de T. Son transformé U' par D doit être inverse de U; donc U et U' sont alignés avec A' et A'U. $A'U' = K$. En outre, l'angle $\widehat{UOU'} = \theta$ et $OU = OU'$. Le cercle Σ de centre O et de

rayon OU passe par U′ et est orthogonal à Γ. Ce cercle Σ est donc connu. Les triangles OBA′ et OUU′ sont isoscèles et semblables; les angles $\widehat{OBA'}$ et $\widehat{OUU'}$ sont égaux et de même sens; par suite U est sur le cercle S. Les points doubles sont donc les points U, V, intersections des cercles connus S et Σ.

Fig. 9.



La discussion est immédiate : le cercle d'inversion Γ est réel; le cercle réel S passant par O centre de Σ, U et V sont réels seulement dans le cas où Σ est réel. Si donc le centre de rotation O est extérieur au cercle Γ il y a deux polygones de Castillon réels; si O est intérieur à Γ, les deux polygones sont imaginaires conjugués. En résumé : *La quadrique* (Q) *étant imaginairement réglée et p impair, il existe, en général, deux polygones de Castillon réels ou imaginaires conjugués; lorsqu'ils sont réels, on peut les construire avec la règle et le compas.*

Remarque. — Dans le cas particulier où des points O_i consécutifs sont alignés avec le centre de projection ω, la transformation T est le produit d'une similitude directe par une inversion qu'on peut toujours supposer positive. Il y a alors peu de chose à

changer à la construction qui précède; il suffit de remplacer la médiatrice de BA′ par le cercle lieu des points dont le rapport des distances aux points A′ et B est égal au rapport connu h de la similitude et de prendre $A'C_1 = h.BC$.

IV. — Cas d'indétermination.

10. Étudions les cas, jusqu'ici écartés, où il existe une infinité de polygones de Castillon. Nous reprenons les notations du paragraphe 4. Distinguons deux cas selon la parité de p.

1° *Le nombre des côtés p est impair.* — Il y aura indétermination si les coniques désignées par U et V ont une infinité de points communs; il en est ainsi dans deux circonstances :

a. Les coniques U, V sont indécomposées et confondues. Le point de départ sur (Q) est arbitraire sur la conique tracée sur (Q) qui est projetée en U.

Il existe alors une infinité de polygones de Castillon dépendant d'un paramètre arbitraire. Leurs sommets décrivent p coniques; deux coniques consécutives sont sur un cône ayant pour sommet un des points O_i.

b. Les coniques U et V sont décomposées et ont une droite commune Δ; celle-ci ne peut être la droite $\alpha\beta$ car aux points de $\alpha\beta$ correspond sur (Q) le point unique ω et il n'y a pas alors d'indétermination. Si Δ est distincte de $\alpha\beta$, le point de départ est indéterminé sur la conique située dans le plan $\omega\Delta$ et ce cas ne diffère pas du précédent.

La proposition suivante est immédiate : *p étant impair, s'il existe trois polygones de Castillon, il y en a une infinité dépendant d'un paramètre.*

2° *Le nombre des côtés p est pair.* — Il y a alors deux cas d'indétermination.

a. L'une des homographies désignées plus haut par (H) et (H′), l'homographie (H′), par exemple, est l'homographie identique.

En projection, le point de départ est indéterminé sur les rayons doubles αX, αY de (H). Ces rayons doubles sont projections de deux génératrices G_1, G_2 de (Q) rencontrant $\omega\alpha$. Il existe alors une infinité de polygones de Castillon dépendant d'un paramètre arbitraire. Les points de départ sur la quadrique sont arbitraires sur G_1 et G_2. On a ainsi deux familles distinctes de polygones. Pour chaque famille, les sommets consécutifs décrivent des génératrices de (Q) appartenant alternativement à l'un et l'autre système.

Voici une conséquence immédiate : *s'il existe trois polygones de Castillon dont les points de départ (ou plus généralement trois sommets correspondants) sont sur une génératrice* G *de* (Q), *il en existe une infinité dépendant d'un paramètre.*

Tout point de G peut être pris pour point de départ. Cette propriété se démontre aussi directement par des considérations d'homographie.

b. Chacune des homographies (H) et (H') est l'homographie identique. Dans ce cas, le point de départ en projection sur le plan π est arbitraire. Le point de départ sur (Q) est complètement arbitraire. *Il existe alors une infinité de polygones de Castillon dépendant de deux paramètres.* On a immédiatement ce corollaire :

S'il existe cinq polygones de Castillon, trois sommets correspondants n'étant pas sur une même génératrice de (Q), *il en existe une infinité dépendant de deux paramètres.*

11. Exemples. — I. Donnons-nous quatre points fixes O_1, O_2, O_3, O_4 *formant un tétraèdre conjugué par rapport à* (Q). Montrons qu'*il existe dans ce cas* ∞^2 *polygones de Castillon.* Transformons homographiquement la figure de manière que la section de (Q) par le plan $O_2O_3O_4$ devienne l'ombilicale. On est ramené à établir la propriété pour une sphère (S) de centre O_1, les points O_2, O_3, O_4 étant à l'infini sur les arêtes d'un trièdre trirectangle O_1xyz.

Partons d'un point quelconque $M_1(x, y, z)$ de (S). La droite O_1M_1 recoupe (S) en $M_2(-x, -y, -z)$; O_2M_2 recoupe (S) en M_3 $(x, -y, -z)$; O_3M_3 recoupe (S) en $M_4(x, y, -z)$;

enfin O_4M_4 recoupe (S) au point $M_5(x, y, z)$ qui est bien confondu avec M_1. Observons que s'il y a indétermination pour un ordre déterminé des quatre points fixes, il y a aussi indétermination pour les cinq autres.

Réciproquement, s'il y a ∞^2 quadrilatères de Castillon relatifs aux points O_1, O_2, O_3, O_4, ceux-ci forment un tétraèdre conjugué par rapport à (Q). En effet, le plan P déterminé par O_1, O_2, O_3 coupe (Q) suivant une conique Γ. Prenons le point de départ M_1 sur Γ; les sommets $M_2M_3M_4$ sont sur Γ, mais M_4M_1 doit passer par O_4 extérieur à P; il faut donc que M_1 et M_4 coïncident et que O_4M_1 touche (Q) en M_1. Mais M_1 étant arbitraire sur Γ, O_4 est le pôle du plan $O_1O_2O_3$, chaque sommet du tétraèdre est donc le pôle de la face opposée, c'est-à-dire que le tétraèdre $O_1O_2O_3O_4$ est conjugué par rapport à (Q).

II. Choisissons pour quadrique (Q) le paraboloïde $xy - z = 0$ et donnons-nous quatre points quelconques O_1, O_2, O_3, O_4. En reprenant les notations et formules du paragraphe 2 on a

$$x_3 = \frac{(a_2b_1 - c_2)x_1 + a_1c_2 - c_1a_2}{(b_1 - b_2)x_1 + a_1b_2 - c_1}.$$

En décrivant à rebours la ligne polygonale ouverte $M_1, M_2, \ldots, M_5$ on a de même $x_3 = \frac{(a_3b_4 - c_3)x_5 + a_4c_3 - c_4a_3}{(b_4 - b_3)x^5 + a_4b_3 - c_4}$. Il y a entre x_1 et x_5 une correspondance homographique (H) qui devient l'homographie identique si

$$(1) \qquad \frac{b_1 - b_2}{b_4 - b_3} = \frac{a_2b_1 - c_1}{a_3b_4 - c_3} = \frac{a_1c_2 - c_2a_1}{a_4c_3 - c_4a_3} = \frac{a_1b_2 - c_1}{a_4b_3 - c_1}.$$

On a ensuite entre y_1 et y_5 une correspondance homographique (H') dont les éléments doubles sont définis par

$$(2) \qquad \frac{(b_2a_1 - c_2)y + b_1c_2 - c_1b_2}{(a_1 - a_2)y + a_2b_1 - c_1} = \frac{(b_3a_4 - c_3)y + b_4c_3 - c_4b_3}{(a_4 - a_3)y + a_3b_4 - c_4}.$$

L'équation (2) a deux racines β, β'.

Si les relations (1) *sont vérifiées, il existe* ∞^1 *quadrilatères de Castillon formant deux familles; leurs points de départ sont*

arbitraires sur les génératrices

$$\begin{cases} y = \beta, \\ z = \beta x, \end{cases} \qquad \begin{cases} y = \beta', \\ z = \beta' x. \end{cases}$$

L'homographie (H') devient à son tour identique si

$$(3) \qquad \frac{a_1 - a_2}{a_4 - a_3} = \frac{b_2 a_1 - c_2}{b_3 a_4 - c_3} = \frac{b_1 c_2 - c_1 b_2}{b_4 c_3 - c_4 b_3} = \frac{a_2 b_1 - c_1}{a_3 b_4 - c_4}.$$

Donc, *si les relations* (1) *et* (3) *sont vérifiées, il existe* ∞^2 *quadrilatères de Castillon.* On vérifie, conformément à l'exemple I, que les six relations (1) et (3) expriment que le tétraèdre $O_1O_2O_3O_4$ est conjugué par rapport à la quadrique.

III. Supposons p *impair*. Soit un polygone *gauche* M_1, M_2, ..., M_p inscrit dans une quadrique (Q). Ses côtés consécutifs rencontrent un plan donné π aux points O_1, O_2, ..., O_p. Ce plan π coupe (Q) suivant une conique Γ. Il y a deux polygones de Castillon plans $m_1 m_2 \ldots m_p$ et $m'_1 \ldots m'_p$ relatifs à Γ et aux points O_i. Il existe donc pour (Q) au moins trois polygones de Castillon. Ainsi : *il existe* ∞^1 *polygones de Castillon pour* (Q); leurs sommets décrivent les p coniques situées dans les plans $m_i m'_i M_i$.

IV. Supposons les points O_i dans un même plan π qui coupe (Q) suivant une conique Γ. Supposons de plus les points O_i tels que le problème de Castillon soit pour Γ indéterminé.

Si p *est pair* il existe pour (Q) plus de quatre polygones de Castillon; *il y en a donc* ∞^2. On peut d'ailleurs établir directement cette propriété.

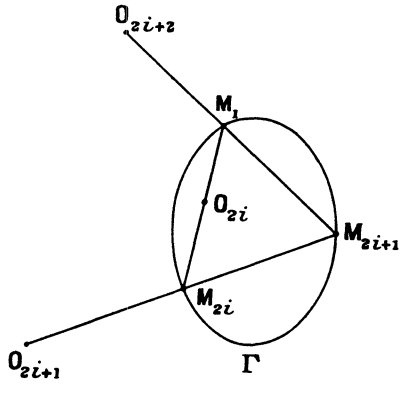
Si p est impair, il y a ∞^1 *polygones de Castillon pour* (Q); ils sont identiques à ceux qui sont relatifs à Γ; dans ce cas, les p coniques décrites par les sommets des polygones sont toutes confondues avec Γ.

V. Supposons p *pair*. Considérons un polygone P inscrit dans une conique Γ tracée sur la quadrique Q. Une droite quelconque du plan π de Γ rencontre en O_1, O_2, ..., O_p les côtés consécutifs du polygone P. Le problème de Castillon relatif à Γ et aux points O_1, O_2, ..., O_p admet au moins trois solutions, à savoir : le polygone P

et les deux polygones repliés obtenus en prenant pour points de départ les points où Δ coupe Γ. Le problème de Castillon est donc indéterminé pour la conique Γ; il l'est donc aussi pour (Q). Un point de départ décrivant une conique Γ, et non une droite, il s'ensuit *qu'il y a* ∞^2 *polygones de Castillon*. Ce résultat s'établit aussi directement. En effet, soit Γ' la section de (Q) par un plan quelconque π' passant par Δ. Si S est sommet de l'un des deux cônes passant par Γ et Γ', tout polygone de Castillon inscrit dans Γ se projette du centre S sur π' suivant un polygone de Castillon inscrit à Γ'.

VI. Pour terminer, indiquons des cas d'indétermination avec un nombre quelconque de sommets non tous coplanaires. Soient i tétraèdres conjugués par rapport à (Q), à savoir : $O_1O_2O_3\alpha_1$, $\alpha_1O_4O_5\alpha_2$, $\alpha_2O_6O_7\alpha_3$, etc., $\alpha_{i-2}O_{2i-2}O_{2i-1}\alpha_{i-1}$, $\alpha_{i-1}O_{2i}O_{2i+1}O_{2i+2}$.

Fig. 10.



Deux tétraèdres consécutifs ont un sommet commun. A chacun de ces tétraèdres correspondent ∞^2 quadrilatères de Castillon. Associons les deux premiers quadrilatères de façon que les côtés passant par α_1 soient confondus, puis le deuxième et le troisième de façon que les côtés passant par α_2 soient confondus et ainsi de suite. Si l'on supprime ensuite tous ces côtés communs, il reste ∞^2 *polygones de Castillon* relatifs aux points O_1, O_2, ..., O_{2i+2} en nombre pair.

Soit enfin un polygone de $2i$ côtés du type précédent. Son dernier côté $M_{2i}M_1$ passe par le point fixe O_{2i}. Donnons-nous deux autres points fixes O_{2i+1}, O_{2i+2} tels que le triangle $O_{2i}O_{2i+1}O_{2i+2}$ soit conjugué par rapport à la conique Γ section de (Q) par le plan du triangle. Assujettissons M_1M_{2i} à être une corde de Γ. Le problème de Castillon étant indéterminé pour Γ et les points O_{2i}, O_{2i+1}, O_{2i+2}, il existe M_{2i+1} sur Γ tel que $M_{2i}M_{2i+1}$ et $M_{2i+1}M_1$ passent par O_{2i+1} et O_{2i+2}. Si l'on supprime le côté commun M_1M_2 c'est-à-dire le point O_{2i}, on obtient ∞^1 polygones de Castillon de $2i+1$ côtés et dont les côtés passent par les points O_1, O_2, ..., O_{2i-1}, O_{2i+1}, O_{2i+2} en nombre impair.