Bulletin de la S. M. F.

S. Finikoff

Congruences associées dans une déformation simultanée

Bulletin de la S. M. F., tome 68 (1940), p. 53-82
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1940__68__53_0>

CONGRUENCES ASSOCIÉES DANS UNE DÉFORMATION SIMULTANÉE;

Par M. S. Finikoff.

Dans un Mémoire récent (¹) M. Terracini a introduit une nouvelle définition de la déformation projective et l'a appliquée à la déformation de la figure complexe composée d'une surface et d'une congruence dont les rayons passent par les points homologues de la surface.

Cette nouvelle conception de la déformation a enrichi la géométrie. N. I. Boutorine a démontré qu'on ne peut, en partant de la définition classique de la déformation de MM. Fubini-Cartan, obtenir les résultats de M. Terracini sur les congruences associées à une surface.

Or, je crois que cette dernière définition de la déformation peut nous donner des résultats nouveaux, si on l'applique à la déformation d'une figure complexe convenablement choisie.

Dans le Mémoire présent, j'examine la déformation simultanée de deux congruences. Selon la définition de M. Cartan, deux figures [M] et [N] sont dites applicables par une déformation du $n^{\text{ième}}$ ordre, si, entre leurs éléments générateurs M et N une correspondance biunivoque peut être établie et si à chaque couple d'éléments homologues (M, N) peut être associée une homographie Π faisant coïncider les éléments N, M et leurs infiniment voisins jusqu'aux infiniment petits du $n^{\text{ième}}$ ordre inclus.

Par rapport à un couple de congruences, la déformation même du premier ordre n'est pas banale : un couple *arbitraire* (M_1, M_2), (M_3, M_4) est indéformable; mais quelle que soit la congruence donnée (M_1, M_2), on peut lui associer avec trois fonctions arbitraires de deux arguments une autre congruence (M_3, M_4) telle que le couple obtenu soit déformable. Nous appellerons une telle

(¹) *Su alcuni elementi lineari projettion* (*Annali Scuola Norm. Sup. di Pisa*, 2ᵉ série, t. 2, 1933, p. 401-428).

congruence, congruence associée dans une déformation simultanée.

En imposant une condition supplémentaire j'étudie une congruence associée qui est en même temps une transformée T de la congruence primitive.

Deux congruences sont en relation de transformation T, si les droites, qui joignent les foyers homologues de deux rayons correspondants, touchent en ces points les nappes focales. Un couple arbitraire de congruences en relation de transformation T est applicable sur le couple transformé du premier par une corrélation. Cette propriété ne caractérise pas la transformation T; car, quelle que soit la congruence donnée, on peut lui rattacher, avec trois fonctions arbitraires de deux arguments. une autre, telle que le couple ainsi obtenu soit applicable sur un couple transformé du premier, par une corrélation convenable. Ce cas banal exclus, toute congruence, dont l'associée est une transformée T, est une congruence particulière qui dépend d'une fonction arbitraire de deux arguments. Le couple applicable appartient à la même classe.

En choisissant convenablement cette fonction arbitraire on obtient des couples stratifiables de congruences associées ou des couples qui entrent dans une configuration de Bianchi (du théorème de permutabilité des transformations asymptotiques) avec seize fonctions arbitraires d'un argument.

On peut noter des cas spéciaux :

1° Deux congruences réciproques par rapport au système nul d'un complexe linéaire sont déformables ; le couple applicable (de la même espèce) dépend d'une fonction arbitraire de deux arguments;

2° Un couple de congruences W avec focales réglées communes est déformable; le couple applicable (de la même espèce) dépend d'une fonction arbitraire d'un argument;

3° Un couple stratifiable conjugué est applicable sur n'importe quel couple conjugué ou sur un couple obtenu par une déformation projective d'une congruence du couple, si les rayons de la seconde congruence sont portés par les plans focaux homologues de la première;

4° Chaque couple de congruences opposées d'une suite de Laplace périodique à période 4 est déformable; le couple déformable est de la même espèce (à moins qu'il ne contienne deux congruences réciproques par rapport à un complexe linéaire).

Un couple de congruences est déformable du deuxième ordre pour la première congruence et du premier pour la seconde s'il contient une congruence W à focales réglées dont le rayon homologue de la seconde congruence coupe les mêmes génératrices rectilignes. Si le rayon touche les nappes focales aux points considérés, les deux congruences s'appliquent sur celles du second couple par une déformation du deuxième ordre.

La déformation projective différentielle de la congruence W à focales réglées qu'on obtient possède une propriété remarquable à savoir : les semi-quadriques engendrées par les rayons qui coupent deux génératrices rectilignes homologues des nappes focales restent invariantes pendant la déformation. Réciproquement la déformation citée est la seule qui conserve invariantes les surfaces réglées de la congruence.

Les résultats contenus dans le Mémoire ont été énoncés dans une Note des *Comptes rendus de l'Académie des Sciences de Paris*, t. 189, p. 177, en 1934. La méthode employée a été développée dans les articles *Sur les congruences stratifiables* (*Rendic. Palermo*, t. 53, p. 314, 1929), et *Transformations des congruences de droites* (*Annali di Pisa*, 2e série, t. 2, p. 59-83) (cités dans la suite par les lettres S et T). D'ailleurs, tout ce qui est nécessaire est donné dans le paragraphe 1. On peut juger du contenu des autres paragraphes à la lecture de la Table des matières :

1. **Tétraèdre normal d'une congruence.** — Donnons-nous deux congruences (M_1M_2) et (M_3M_4) dont la première n'est pas parabolique. On choisit comme sommets du tétraèdre normal les foyers M_1, M_2 du rayon M_1M_2 et les points d'intersection M_3, M_4 du rayon M_3M_4 avec les plans focaux de M_1M_2.

Si l'on désigne par les lettres grasses $\mathbf{M}_i$ les quatre coordonnées homogènes du point géométrique M_i, les dérivées $\mathbf{M}_{iu}$, $\mathbf{M}_{iv}$ déterminent deux points dans le plan tangent de la surface (M_i). Si l'on désigne par a_i^k, b_i^k les coordonnées locales de $\mathbf{M}_{iu}$ par rapport au tétraèdre $M_1M_2M_3M_4$, on obtient les identités fondamentales

$$\mathbf{M}_{iu} = \Sigma a_i^k \mathbf{M}_k, \qquad \mathbf{M}_{iv} = \Sigma b_i^k \mathbf{M}_k, \tag{1}$$

qui déterminent les déplacements projectifs du tétraèdre [M] quand les paramètres u et v varient. Si l'on choisit comme variables indépendantes u, v les paramètres des développables de la congruence (M_1M_2), et si l'on choisit une normalisation convenable des sommets M_i, les composantes a_i^k, b_i^k prennent les valeurs indiquées au tableau suivant (*voir* S, p. 320 et T, p. 65).

(2)

	$\mathbf{M}_1$	$\mathbf{M}_2$	$\mathbf{M}_3$	$\mathbf{M}_4$
$\mathbf{M}_{1u}$	0	δ	0	0
$\mathbf{M}_{2u}$	q_1	p_1	0	1
$\mathbf{M}_{3u}$	m	n	0	$-q$
$\mathbf{M}_{4u}$	N_1	R_1	$-\Delta_1$	$-P_1$

	$\mathbf{M}_1$	$\mathbf{M}_2$	$\mathbf{M}_3$	$\mathbf{M}_4$
$\mathbf{M}_{1v}$	p	q	1	0
$\mathbf{M}_{2v}$	δ_1	0	0	0
$\mathbf{M}_{3v}$	R	N	$-P$	$-\Delta$
$\mathbf{M}_{4v}$	n_1	m_1	$-q_1$	0

Les conditions de compatibilité du système (1) sont traduites par les équations

$$(3a)\qquad P_u - p_u = \Delta\Delta_1 - \delta\delta_1, \qquad P_{1v} - p_{1v} = \Delta\Delta_1 - \delta\delta_1,$$

$$(3b)\qquad p_u = \delta\delta_1 - qq_1 - m, \qquad p_{1v} = \delta\delta_1 - qq_1 - m_1,$$

$$(3c)\qquad \delta_v - q_u = p\delta + p_1 q + n, \qquad \delta_{1u} - q_{1v} = p_1\delta_1 + pq_1 + n_1,$$

$$(3d)\qquad \Delta_u - q_v = P_1\Delta + Pq + N, \qquad \Delta_{1v} - q_{1u} = P\Delta_1 + P_1 q_1 + N_1,$$

$$(3e)\qquad \begin{cases} m_v - R_u = -m(P+p) - \Delta N_1 - \delta_1 n + Nq_1 + n_1 q, \\ m_{1u} - R_{1v} = -m_1(P_1+p_1) - \Delta_1 N - \delta n_1 + N_1 q + nq_1, \end{cases}$$

$$(3f)\qquad \begin{cases} n_v - N_u = R\delta - R_1\Delta + Np_1 - Pn - q(m - m_1), \\ n_{1u} - N_{1v} = R_1\delta_1 - R\Delta + N_1 p - P_1 n_1 - q_1(m_1 - m). \end{cases}$$

Si les fonctions Δ, Δ_1, δ, δ_1, R, R_1, m, m_1, n, n_1, N, N_1, P, P_1, p, p_1, q, q_1 vérifient les équations ($3a$-f), le système (1) est complètement intégrable et détermine $\mathbf{M}_i$ avec quatre constantes arbitraires. Si l'on prend quatre solutions linéairement indépendantes comme coordonnées homogènes des points M_i. Le tétraèdre [**M**], quand les paramètres u, v varient, décrit, par ses arêtes opposées, M_1M_2, M_3M_4, deux congruences. Toutes les autres solutions de (1) déterminent des congruences projectivement équivalentes à celles-là. Les dix-huit fonctions Δ, Δ_1, etc. déterminent donc complètement deux congruences dans l'espace projectif.

La réciproque n'a pas lieu. Le tableau des composantes (2) admet: 1° le changement des paramètres u, v déterminé par les formules $u^* = \varphi(u)$, $v^* = \psi(v)$; 2° la multiplication des quatre coordonnées $\mathbf{M}_1$ et $\mathbf{M}_3$ par une fonction arbitraire $V = f_1(v)$, des coordonnées $\mathbf{M}_2$ et $\mathbf{M}_4$ par $U = f_2(u)$. Les composantes nouvelles (désignées par l'astérique) sont déterminées par les formules (*voir* T, p. 67)

$$(4)\qquad \begin{cases} \Delta^* = \Delta \dfrac{V}{U}\left(\dfrac{dv}{dv^*}\right)^2 \dfrac{du^*}{du}, & \delta^* = \delta \dfrac{V}{U}\dfrac{du}{du^*}; \\ R^* = R\left(\dfrac{dv}{dv^*}\right)^2, & N^* = N\dfrac{V}{U}\left(\dfrac{dv}{dv^*}\right)^2, \\ m^* = m\dfrac{du}{du^*}\dfrac{dv}{dv^*}, & n^* = n\dfrac{V}{U}\dfrac{du}{du^*}\dfrac{dv}{dv^*}; \\ q^* = q\dfrac{V}{U}\dfrac{dv}{dv^*}, & p^* = p\dfrac{dv}{dv^*} + \dfrac{d\log V}{dv^*}, \\ & P^* = P\dfrac{dv}{dv^*} - \dfrac{d}{dv}\log\left(V\dfrac{dv}{dv^*}\right). \end{cases}$$

On peut remarquer que les quantités p, q, et p_1, q_1, déterminent la position des points M_3, M_4 situés dans les plans focaux $(M_1 M_2 M_{1v})$ et $(M_1 M_2 M_{2u})$. Si l'on change ces points M_3, M_4 la seconde congruence $(M_3 M_4)$ varie, mais non la première. Les quatre composantes Δ, Δ_1, δ, δ_1 restent invariantes. Quant aux autres, leur changement est déterminé par les formules (*voir* T, p. 66)

$$(5a) \qquad \mathrm{P} = \overline{\mathrm{P}} + p, \qquad m = \overline{m} - p_u - q q_1, \qquad n = \overline{n} - q_u - p_1 q - p\delta;$$

$$(5b) \qquad \mathrm{R} = \overline{\mathrm{R}} - \overline{\mathrm{P}}p - p^2 - q_1 \Delta - p_v - q\delta;$$

$$(5c) \qquad \mathrm{N} = \overline{\mathrm{N}} - \overline{\mathrm{P}}q - pq - p_1\Delta - q_v,$$

où les composantes qui correspondent aux valeurs p, q, p_1, q_1 égales à zéro (on les appelle composantes de Wilczynski) sont barrées. En portant les valeurs $p = q = p_1 = q_1 = 0$ dans les équations (3 *a-f*), on obtient le système

$$(6a) \qquad \overline{m} = \overline{m_1} = \delta\delta_1, \qquad \overline{n} = \delta_v, \qquad \overline{n_1} = \delta_{1u}, \qquad \overline{\mathrm{P}_u} = \overline{\mathrm{P}_{1v}} = \Delta\Delta_1 - \delta\delta_1;$$

$$(6b) \qquad \overline{\mathrm{N}} = \Delta_u - \overline{\mathrm{P}_1}\Delta, \qquad \overline{\mathrm{N}_1} = \Delta_{1v} - \overline{\mathrm{P}}\Delta_1:$$

$$(6c) \qquad \overline{n_v} - \overline{\mathrm{N}_u} + \overline{\mathrm{P}}\delta_v = \overline{\mathrm{R}}\delta - \overline{\mathrm{R}_1}\Delta, \qquad \overline{n_{1u}} - \overline{\mathrm{N}_{1v}} + \overline{\mathrm{P}_1}\delta_{1u} = \overline{\mathrm{R}_1}\delta - \overline{\mathrm{R}}\Delta;$$

$$(6d) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \overline{\mathrm{R}_u} = \overline{\mathrm{N}_1}\Delta + 2\delta_v\delta_1 + \delta\delta_{1v} + \overline{\mathrm{P}}\delta\delta_1, \\ \overline{\mathrm{R}_{1v}} = \overline{\mathrm{N}}\Delta_1 + 2\delta_{1u}\delta + \delta_1\delta_u + \overline{\mathrm{P}_1}\delta\delta_1. \end{array} \right.$$

2. Déformation du premier ordre. — Soit donné un couple de congruences $(M_1 M_2)$, $(M_3 M_4)$ déterminé par le tableau de composantes (2), et un autre couple $(M'_1 M'_2)$, $(M'_3 M'_4)$ dont le tableau de composantes a le même aspect, mais dont toutes les composantes sont marquées par l'accent. Le couple [M] est applicable sur le couple [M′] par une déformation du premier ordre si l'on peut établir une correspondance biunivoque entre leurs éléments et à chaque paire des éléments homologues M′, M faire correspondre une transformation projective $\mathbf{\Pi}$ possédant la propriété suivante : le couple [N] transformé par $\mathbf{\Pi}$ de [M′] touche le couple [M], les éléments homologues N et M et leur voisinage coïncident jusqu'aux infiniment petits du premier ordre inclus.

Si l'on désigne par $\mathbf{M}_1\mathbf{M}_2$ les six coordonnées linéaires de la droite $M_1 M_2$, c'est-à-dire les six mineurs de la matrice composée des coordonnées homogènes des points M_1 et M_2, la condition en question s'écrit dans la forme des équations

$$(7a)\quad (\mathbf{N}_1\mathbf{N}_2) + d(\mathbf{N}_1\mathbf{N}_2) + \ldots = [(\mathbf{M}_1\mathbf{M}_2) + d(\mathbf{M}_1\mathbf{M}_2) + \ldots]\,(\lambda_1 + \lambda_1\,du + \ldots),$$

$$(7b)\quad (\mathbf{N}_3\mathbf{N}_4) + d(\mathbf{N}_3\mathbf{N}_4) + \ldots = [(\mathbf{M}_3\mathbf{M}_4) + d(\mathbf{M}_3\mathbf{M}_4) + \ldots]\,(\mu + \mu_1\,du + \mu_2\,dv + \ldots)$$

qui sont vérifiées jusqu'aux infiniment petits du premier ordre inclus. Les facteurs de proportionnalité λ, λ_1, λ_2, ..., μ, μ_1, ... sont arbitraires.

Il en résulte

$$(8a)\qquad (\mathbf{N}_1\mathbf{N}_2) = \lambda\,(\mathbf{M}_1\mathbf{M}_2), \qquad (\mathbf{N}_3\mathbf{N}_4) = \mu\,(\mathbf{M}_3\mathbf{M}_4),$$

$$(8b)\qquad d(\mathbf{N}_1\mathbf{N}_2) = \lambda\, d(\mathbf{M}_1\mathbf{M}_2) + (\lambda_1\,du + \lambda_2\,dv)\,(\mathbf{M}_1\mathbf{M}_2),$$

$$(8c)\qquad d(\mathbf{N}_3\mathbf{N}_4) = \mu\, d(\mathbf{M}_3\mathbf{M}_4) + (\mu_1\,du + \mu_2\,dv)\,(\mathbf{M}_3\mathbf{M}_4).$$

L'examen du système (8 *a-c*) peut se simplifier beaucoup grâce aux considérations que voici :

Dans le voisinage d'un rayon arbitraire M_1M_2 il existe deux rayons (réels ou imaginaires) qui le coupent (aux infiniment petits du deuxième ordre près) aux foyers M_1, M_2 et déterminent les plans focaux $M_1M_2M_3$, $M_1M_2M_4$. Il est évident que les rayons concourants de la première congruence (M_1M_2) coïncident (aux infiniment petits du premier ordre) avec les rayons concourants de (N_1N_2). Donc les points d'intersection, c'est-à-dire les foyers de (M_1M_2), coïncident avec les foyers de (N_1N_2). Les plans qu'ils déterminent, c'est-à-dire les plans focaux de (M_1M_2), coïncident avec ceux de (N_1N_2), et l'enveloppe des plans focaux, c'est-à-dire les développables de (M_1M_2) correspondent à celles de (N_1N_2).

Un changement convenable des paramètres u', v' du second couple $[M']$ fait coïncider ces paramètres avec les paramètres u, v de $[M]$. Les foyers N_1, N_2 de (N_1N_2) coïncident avec les points M_1, M_2. De plus, comme le rayon N_3N_4 coïncide avec M_3M_4, et que les plans focaux $N_1N_2N_3$, $N_1N_2N_4$ se confondent avec les plans homologues de (M_1M_2), les points N_3, N_4 coïncident également avec M_3, M_4. On peut donc ajouter aux conditions (8 *a*, *c*) les équations

$$(9)\qquad N_1 = \rho_1 M_1, \qquad N_2 = \rho_2 M_2, \qquad N_3 = \rho_3 M_3, \qquad N_4 = \rho_4 M_4.$$

Les équations (8 a) donnent maintenant

$$\lambda = \rho_1\rho_2 = \rho_3\rho_4, \tag{10}$$

et les équations (8 b) et (8 c) se décomposent chacune en deux équations que l'on obtient en comparant les termes contenant les différentielles du et dv

$$(\mathbf{N}_{1u}\mathbf{N}_2) + (\mathbf{N}_1\mathbf{N}_{2u}) = \lambda(\mathbf{M}_{1u}\mathbf{M}_2) + \lambda(\mathbf{M}_1\mathbf{M}_{2u}) + \lambda_1(\mathbf{M}_1\mathbf{M}_2), \tag{11a}$$
$$(\mathbf{N}_{1v}\mathbf{N}_2) + (\mathbf{N}_1\mathbf{N}_{2v}) = \lambda(\mathbf{M}_{1v}\mathbf{M}_2) + \lambda(\mathbf{M}_1\mathbf{M}_{2v}) + \lambda_2(\mathbf{M}_1\mathbf{M}_2), \tag{11b}$$
$$(\mathbf{N}_{3u}\mathbf{N}_4) + (\mathbf{N}_3\mathbf{N}_{4u}) = \mu(\mathbf{M}_{3u}\mathbf{M}_4) + \mu(\mathbf{M}_3\mathbf{M}_{4u}) + \mu_1(\mathbf{M}_3\mathbf{M}_4), \tag{11c}$$
$$(\mathbf{N}_{3v}\mathbf{N}_4) + (\mathbf{N}_3\mathbf{N}_{4v}) = \mu(\mathbf{M}_{3v}\mathbf{M}_4) + \mu(\mathbf{M}_3\mathbf{M}_{4v}) + \mu_2(\mathbf{M}_3\mathbf{M}_4). \tag{11d}$$

Comme une transformation projective ne change pas les composantes des déplacements projectifs d'un tétraèdre, les dérivées $\mathbf{N}_{iu}$, $\mathbf{N}_{iv}$ sont déterminées par le tableau de composantes du couple $[\mathbf{N}']$. Si l'on porte les expressions obtenues de $\mathbf{N}_{iu}$, $\mathbf{N}_{iv}$, ainsi que celles de $\mathbf{M}_{iu}$, $\mathbf{M}_{iv}$ du tableau (2), dans les équations (11 a-d) et si l'on remplace $\mathbf{N}_i$ à l'aide des formules (9), on obtient des relations linéaires entre $(\mathbf{M}_i\mathbf{M}_k)$, qui doivent disparaître identiquement, car les arêtes du tétraèdre ne sont pas situées dans le même plan. Donc les coefficients de crochets $(\mathrm{M}_i\mathrm{M}_k)$ s'annulent et l'on obtient

$$\mu = \lambda = \rho_1\rho_4 = \rho_2\rho_3, \qquad \frac{\lambda_1}{\lambda} = p'_1 - p_1, \qquad \frac{\lambda_2}{\lambda} = p' - p; \tag{12a}$$
$$m' = m, \qquad m'_1 = m_1, \qquad \mathrm{R}'_1 = \mathrm{R}_1, \qquad \mathrm{R}' = \mathrm{R}; \tag{12b}$$
$$\mathrm{N}'_1\rho_1 = \mathrm{N}_1\rho_2, \qquad \mathrm{N}'\rho_2 = \mathrm{N}\rho_1, \qquad n'\rho_2 = n\rho_1, \qquad n'_1\rho_1 = n_1\rho_2; \tag{12c}$$
$$\frac{\mu_1}{\mu} = -\mathrm{P}'_1 + \mathrm{P}_1, \qquad \frac{\mu_2}{\mu} = -\mathrm{P}' + \mathrm{P}. \tag{12d}$$

Or, il suit de (12 a) et (10)

$$\rho_3 = \rho_1, \qquad \rho_4 = \rho_2.$$

Si l'on introduit la notation

$$\frac{\rho_1}{\rho_2} = \mathfrak{I}, \tag{13}$$

les équations (12 b, c) prennent la forme

$$m' = m, \qquad m'_1 = m_1, \qquad \mathrm{R}' = \mathrm{R}, \qquad \mathrm{R}'_1 = \mathrm{R}_1; \tag{14a}$$
$$n' = \mathfrak{I}n, \qquad n'_1 = \frac{n_1}{\mathfrak{I}}, \qquad \mathrm{N}' = \mathfrak{I}\mathrm{N}, \qquad \mathrm{N}'_1 = \frac{\mathrm{N}_1}{\mathfrak{I}}. \tag{14b}$$

Quant aux équations (12 *a-d*) elles déterminent les facteurs de proportionnalité λ_i, μ_i, qui ne nous intéressent pas pour le moment.

Les équations (14 *a*, *b*) déterminent huit composantes des déplacements projectifs du tétraèdre [M′] au moyen d'une fonction auxiliaire $\mathfrak{I}$. Il s'agit d'obtenir dix autres composantes Δ', Δ'_1, δ, δ'_1, p', p'_1, q', q'_1, P', P'_1 et la fonction $\mathfrak{I}$ telles que le système (3 *a-f*) écrit pour les composantes accentuées de [M′], système que nous désignerons désormais par (3 *a′-f′*), soit vérifié. Or, pour 11 fonctions inconnues, nous avons 12 équations, de sorte que l'existence d'un couple [M′] applicable sur le couple général [M] n'est pas démontrée.

3. Congruences associées dans une déformation. — Nous appellerons couple déformable un couple de congruences [M] tel qu'il existe un couple [M′], projectivement applicable sur [M], et différant de lui. Nous appellerons congruence associée dans une déformation, une congruence (M_3M_4) qui forme avec une congruence donnée (M_1M_2) un couple déformable. Cela posé, nous allons démontrer le théorème suivant : *Quelle que soit la congruence donnée* (M_1M_2), *il existe* ∞ *congruences associées et la congruence associée générale dépend de trois fonctions arbitraires de deux arguments.*

Supposons que la première congruence (M_1M_2) soit donnée au moyen des composantes des déplacements projectifs d'un tétraèdre normal $[M_1M_2\overline{M}_3\overline{M}_4]$ lié à la congruence, par exemple, du tétraèdre de Wilczynski aux composantes

$$(15)\qquad \begin{array}{l} p = 0, \quad q = 0, \quad p_1 = 0, \quad q_1 = 0, \\ \Delta, \ \Delta_1, \ \delta, \ \delta_1, \ \mathrm{P}, \ \overline{\mathrm{P}}_1, \ \overline{m}, \ \overline{m}_1, \ \overline{n}, \ \overline{n}_1, \ \ldots \end{array}$$

qui vérifient le système des équations (6 *a-d*).

S'il existe une congruence (M_3M_4) associée à la première dans une déformation, la même congruence (M_1M_2) est liée avec le tétraèdre $[M_1M_2M_3M_4]$ aux composantes

$$(16)\quad p,\ q,\ p_1,\ q_1,\ \Delta,\ \Delta_1,\ \delta,\ \delta_1,\ \mathrm{P},\ \mathrm{P}_1,\ m,\ m_1,\ n,\ n_1,\ \mathrm{N},\ \mathrm{N}_1,\ \mathrm{R},\ \mathrm{R}_1$$

Les composantes (15) et (16) sont liées par les relations (5 a-c). Les composantes (16) et les composantes (accentuées) d'un couple applicable [M′] vérifient les équations (14 a, b). Les composantes [M′], de leur côté, vérifient le système fondamental que nous avons appelé (3 a'-f').

Si les fonctions (15) sont données, les composantes (16) sont déterminées par les équations (5 a-c) au moyen de quatre fonctions inconnues p, q, p_1, q_1. En portant dans les équations (14 a, b) les expressions de m, m_1, R, R_1, n, n_1, N, N_1 tirées de (5 a-c), on obtient

$$m' = \delta\delta_1 - qq_1 - p_u, \qquad m'_1 = \delta\delta_1 - qq_1 - p_{1v};$$

$$R' = \overline{R} - \overline{P}p - p^2 - q_1\Delta - q\delta_1 - p_v,$$

$$R'_1 = \overline{R}_1 - \overline{P}_1 p_1 - p_1^2 - q\Delta_1 - q_1\delta - p_{1u};$$

$$n' = \mathfrak{I}(\delta_v - q_u - p_1 q - p\delta),$$

$$n'_1 = \frac{1}{\mathfrak{I}}(\delta_{1u} - q_{1v} - pq_1 - p_1\delta_1);$$

$$N' = \mathfrak{I}(\Delta_u - \overline{P}_1\Delta - \overline{P}q - pq - p_1\Delta - q_v),$$

$$N'_1 = \frac{1}{\mathfrak{I}}(\Delta_{1v} - \overline{P}\Delta_1 - \overline{P}_1 q_1 - p_1 q_1 - p\Delta_1 - q_{1u}).$$

Il faut joindre ces équations au système (3 a'-f') qui prend maintenant la forme

(17 a) $$p_u = \delta\delta_1 - qq_1 - m', \qquad p_v = \overline{R} - \overline{P}p - p^2 - q_1\Delta - q\delta_1 - R';$$

(17 b) $$q_u = \overline{n} - p_1 q - p\delta - \frac{n'}{\mathfrak{I}}, \qquad q_v = \overline{N} - \overline{P}q - pq - p_1\Delta - \frac{N'}{\mathfrak{I}};$$

(17 c) $$p'_u = \delta'\delta'_1 - q'q'_1 - m';$$

(17 d) $$P'_u = \Delta'\Delta'_1 - q'q'_1 - m';$$

(17 e) $$\delta'_v - q'_u = p'\delta' + p'_1 q' + n';$$

(17 f) $$\Delta'_u - q'_v = P'_1\Delta' + P'q'_1 + N';$$

(17 g) $$m'_v - R'_u = -m'(P' + p') - \Delta'N'_1 - \delta'_1 n' + N'q'_1 + n'_1 q';$$

(17 h) $$n'_v - N'_u = R'\delta' - R'_1\Delta' + N'p'_1 - P'n' - q'(m' - m'_1).$$

On doit ajouter les équations obtenues par le changement de u en v. Le système (17 a-h) n'est pas complet. En différentiant les équations (17 a) et en éliminant les dérivées, on obtient

$$(18a)\quad m'(\mathrm{P}'+p'-\overline{\mathrm{P}}-2p)-\mathrm{N}'\left(q'_1-\frac{q_1}{\mathfrak{S}}\right)+\mathrm{N}'_1(\Delta'-\Delta\mathfrak{S})$$
$$=-n'\left(\delta'_1-\frac{\delta_1}{\mathfrak{S}}\right)+n'_1(q'-q\mathfrak{S}),$$

$$(18b)\quad m'_1(\mathrm{P}'_1+p'_1-\overline{\mathrm{P}_1}-2p_1)-\mathrm{N}'_1(q'-q\mathfrak{S})+\mathrm{N}'\left(\Delta'_1-\frac{\Delta_1}{\mathfrak{S}}\right)$$
$$=-n'_1(\delta'-\delta\mathfrak{S})+n'\left(q'_1-\frac{q_1}{\mathfrak{S}}\right),$$

$$(18c)\quad (m'-m'_1)\,(q'-q)+\mathrm{N}'\left(p'_1-\frac{p_1}{\mathfrak{S}}+\frac{1}{\mathfrak{S}}\frac{\partial\log\mathfrak{S}}{\partial u}\right)$$
$$=\mathrm{R}'_1(\Delta'-\Delta)-\mathrm{R}'(\delta'-\delta)-n'\left[\mathrm{P}'-\frac{1}{\mathfrak{S}}\left(\mathrm{P}+p-\frac{\partial\log\mathfrak{S}}{\partial v}\right)\right],$$

$$(18d)\quad (m'_1-m')\,(q'_1-q_1)+\mathrm{N}'_1\left(p'-p\mathfrak{S}-\mathfrak{S}\frac{\partial\log\mathfrak{S}}{\partial v}\right)$$
$$=\mathrm{R}'(\Delta'_1-\Delta_1)-\mathrm{R}'_1(\delta'_1-\delta_1)-n'_1\left[\mathrm{P}'_1-\mathfrak{S}\left(\mathrm{P}_1+p_1+\frac{\partial\log\mathfrak{S}}{\partial u}\right)\right].$$

Si l'on introduit des nouvelles variables indépendantes

$$\alpha=\alpha(u,\,v),\qquad \beta=\beta(u,\,v),$$

on peut résoudre les équations (17 c-h) par rapport aux dérivées de p', p'_1, P', P'_1, δ', δ'_1, Δ', φ'_1, m', m'_1, n', n'_1 par rapport à α.

En portant ces expressions dans les équations obtenues par une différentiation de (18 a-d) par rapport à α, on obtient quatre équations qui contiennent les dérivées de q', q'_1, R', R'_1, N', N'_1 par rapport à α. Les déterminants de la matrice composée des coefficients de ces dérivées, contiennent essentiellement les fonctions inconnues. Un choix convenable des valeurs initiales rend l'un de ces déterminants différent de zéro. On peut donc résoudre les équations en question par rapport aux quatre dérivées, par exemple

$$\mathrm{R}'_\alpha,\quad \mathrm{R}'_{1\alpha},\quad \mathrm{N}'_\alpha,\quad \mathrm{N}'_{1\alpha}.$$

Il en résulte le théorème : une congruence arbitraire $(\mathrm{M}_1\mathrm{M}_2)$ étant donnée, la congruence associée $(\mathrm{M}_3\mathrm{M}_4)$ et le couple applicable $[\mathrm{M}']$ sont pleinement déterminés si l'on choisit pour $q'\,q'_1$, $\mathfrak{S}$ trois fonctions arbitraires de deux arguments, pour les valeurs initiales de p', p'_1, P', P'_1, δ', δ'_1, Δ', Δ'_1, m', m'_1, n', n'_1 des fonctions arbitraires d'un argument β (pour une valeur arbitraire $\alpha=\alpha_0$), et pour valeurs initiales de p, p_1, q, q_1 des constantes arbitraires (pour $\alpha = \alpha_0$, $\beta = \beta_0$). Si l'on prend $\mathfrak{I}$ différent de l'unité, le couple applicable [M′] est projectivement différent du couple primitif [M].

La congruence associée dépend donc de trois fonctions arbitraires de deux arguments. Au contraire, dans un couple arbitraire ($M_1 M_2$), ($M_3 M_4$) la position du rayon $M_3 M_4$ fait intervenir quatre fonctions de deux variables (à savoir les fonctions p, q, p_1, q_1); donc le cas le plus général ($M_1 M_2$), ($M_3 M_4$) est indéformable.

4. **Propriétés générales des couples déformables.** — Si deux congruences sont applicables l'une sur l'autre par une déformation du premier ordre, leurs développables se correspondent et la transformation projective, qui amène ces deux congruences en contact du premier ordre, met en coïncidence les foyers et les plans focaux homologues.

Il en dérive que les développables de la congruence ($M_3 M_4$) correspondent à celles de ($M'_3 M'_4$) et que la transformation projective II met les foyers et les plans focaux de ($M'_3 M'_4$) en coïncidence avec ceux de ($M_3 M_4$). Or les équations (14 a, b) le prouvent également.

Le plan focal de la congruence ($M_3 M_4$) enveloppe une surface développable de la congruence. On peut écrire son équation sous la forme

$$(19)\qquad (\mathbf{M}_1 + \nu \mathbf{M}_2, \mathbf{M}_3, \mathbf{M}_4, \mathbf{P}) = 0,$$

où $\mathbf{M}_1 + \nu \mathbf{M}_2$ est le point d'intersection de ce plan avec le rayon $M_1 M_2$; P est le point général du plan et chaque lettre, $\mathbf{M}_i$ ou $\mathbf{P}$, désigne quatre éléments d'une colonne du déterminant dont une ligne est écrite entre les crochets de (19). Or si le plan (19) enveloppe une développable, la caractéristique de ce plan coïncide avec le rayon $M_3 M_4$. L'équation obtenue par la différentiation de (19) le long de la développable $du : dv$, à savoir

$$(20)\qquad \begin{aligned}&[d(\mathbf{M}_1 + \nu \mathbf{M}_2), \mathbf{M}_3, \mathbf{M}_4, \mathbf{P}] \\ &\quad + [\mathbf{M}_1 + \nu \mathbf{M}_2, d\mathbf{M}_3, \mathbf{M}_4, \mathbf{P}] + [\mathbf{M}_1 + \nu \mathbf{M}_2, \mathbf{M}_3, d\mathbf{M}_4, \mathbf{P}] = 0\end{aligned}$$

est vérifiée si l'on y porte $\mathbf{P} = \mathbf{M}_3$ ou $\mathbf{P} = \mathbf{M}_4$. On obtient donc

$$(\mathbf{M}_1 + \nu \mathbf{M}_2, \mathbf{M}_{3u}\,du + \mathbf{M}_{3v}\,dv, \mathbf{M}_4, \mathbf{M}_3) = 0,$$
$$(\mathbf{M}_1 + \nu \mathbf{M}_2, \mathbf{M}_3, \mathbf{M}_{4u}\,du + \mathbf{M}_{4v}\,dv, \mathbf{M}_4) = 0,$$

d'où suit en vertu de (2)

$$(21)\qquad \begin{cases} \nu(m\,du + R\,dv) = n\,du + N\,dv, \\ \nu(N_1\,du + n_1\,dv) = R_1\,du + m_1\,dv. \end{cases}$$

En éliminant ν, on obtient l'équation différentielle des développables de la congruence

$$(22)\qquad (mR_1 - nN_1)\,du^2 + (mm_1 + RR_1 - NN_1 - nn_1)\,du\,dv + (Rm_1 - n_1N)\,dv^2 = 0.$$

En éliminant $du:dv$, on obtient l'équation qui détermine ν, c'est-à-dire les plans focaux de la congruence

$$(23)\qquad \nu^2(mn_1 - RN_1) + \nu(RR_1 - mm_1 - nn_1 + NN_1) + nm_1 - NR_1 = 0.$$

L'équation (20) détermine le foyer $\mathbf{M}_3 + \sigma\mathbf{M}_4$ du rayon, si la différentiation est prise dans une direction arbitraire. Pour les différentiations le long des lignes coordonnées, on obtient des équations

$$\nu m - R = \sigma(\nu N_1 - n_1),$$
$$\nu n - N = \sigma(\nu R_1 - m_1),$$

d'où, ν éliminé, on a

$$(24)\qquad \sigma^2(N_1m_1 - n_1R_1) + \sigma(RR_1 - mm_1 + nn_1 - NN_1) + mN - nR = 0.$$

Des équations de la même forme déterminent les développables, les foyers $\mathbf{M}'_3 + \sigma\mathbf{M}'_4$ et les plans focaux $(\mathbf{M}'_3, \mathbf{M}'_4, \mathbf{M}'_1 + \nu'\mathbf{M}'_2)$ de la congruence $(\mathbf{M}'_3\mathbf{M}'_4)$. En y portant les expressions (14 a, b), on voit que l'équation (22) reste invariante; quant aux équations (23), (24) elles donnent les relations

$$\nu'\mathfrak{I} = \nu, \qquad \sigma' = \sigma\mathfrak{I}.$$

L'équation (13) montre que les foyers $\mathbf{M}_3 + \sigma\mathbf{M}_4$, $\mathbf{M}'_3 + \sigma'\mathbf{M}'_4$ et les plans focaux correspondants coïncident quand on applique au couple $[M']$ la transformation projective Π.

La réciproque n'est pas exacte : la correspondance des développables, des foyers et des plans focaux de chaque congruence de deux couples ne suffit pas pour que les couples s'appliquent. L'invariance des équations (22), (23), (24) par rapport à la transformation (14 a, b) donne neuf équations sur les composantes de deux couples tandis que le système (14 *a*, *b*) comprend huit équations.

L'examen que nous avons fait montre que, si les développables des deux congruences d'un couple se correspondent ou si les foyers d'une congruence d'un couple sont situés dans les plans focaux de l'autre, le couple applicable possède la même propriété.

5. Couples déformables de deux congruences en transformation T. — Il existe des couples de congruences remarquables dont les foyers de chaque congruence sont situés dans les plans focaux de l'autre. Les droites qui joignent les foyers homologues touchent les deux nappes focales, c'est-à-dire que le quadrilatère gauche $M_1M_2M_4M_3$ décrit, par ses arêtes, quatre congruences rangées en cycle, et chaque couple de congruences consécutives a une nappe focale commune. On dit que les quatre congruences forment une configuration (T); deux congruences opposées (M_1M_2), (M_3M_4) sont en relation de transformation T (*voir* p. 59 et suiv.).

Il est évident que deux congruences en transformation T conservent cette propriété pendant une déformation simultanée.

Si le quadrilatère $M_1M_2M_4M_3$ décrit une configuration (T), les surfaces (M_3) et (M_4) touchent les plans ($M_1M_3M_4$) et ($M_2M_4M_3$). Il en résulte que les dérivées $\mathbf{M}_{3u}$ et $\mathbf{M}_{3v}$ ne contiennent pas de composante par rapport à $\mathbf{M}_2$ et que les dérivées de $\mathbf{M}_4$ ne contiennent pas de composante par rapport à $\mathbf{M}_1$. Le tableau (2) nous conduit aux relations caractéristiques

$$n = 0, \qquad n_1 = 0, \qquad N = 0, \qquad N_1 = 0. \tag{25}$$

En portant les expressions (25), (14 *a*) dans les équations (3 *a*-*f*) écrites pour les deux couples applicables, on obtient

$$p'_u = \delta'\delta'_1 - q'q'_1 - m, \qquad p'_{1v} = \delta'\delta'_1 - q'q'_1 - m_1; \tag{26a'}$$

$$P'_u = \Delta'\Delta'_1 - q'q'_1 - m, \qquad P'_{1v} = \Delta'\Delta'_1 - q'q'_1 - m_1; \tag{26b'}$$

$$\delta'_v = q'_u + p'\delta' + p'_1q', \qquad \delta'_{1u} = q'_{1v} + p'_1\delta' + p'q'_1; \tag{25c'}$$

$$\Delta'_u = q'_v + P'_1\Delta' + P'q', \qquad \Delta'_{1v} = q'_{1u} + P'\Delta'_1 + P'_1q'_1; \tag{26d'}$$

$$R_u = m_v + m(P' + p'), \qquad R_{1v} = m_{1u} + m_1(P'_1 + p'_1); \tag{26e'}$$

$$R\delta' - R_1\Delta' = q'(m - m_1), \qquad R_1\delta'_1 - R\Delta'_1 = q'_1(m_1 - m). \tag{26f'}$$

Il faut y joindre les équations analogues pour les composantes du couple [M], équations que nous désignerons (26 *a*-*f*).

Si m et m_1 ne sont pas nuls, on obtient comme conséquence de $(26\,e')$ $(26\,e)$

$$(27)\qquad P'+p'=P+p,\qquad P'_1+p'_1=P_1+p_1.$$

En portant les expressions de P', P'_1, tirées de (27), dans les équations $(26\,b')$, on obtient, à l'aide de $(26\,a', a, b)$, une seule équation

$$(28)\qquad \Delta'\Delta'_1+\delta'\delta'_1-2q'q'_1=\Delta\Delta_1+\delta\delta_1-2qq_1.$$

Si l'on introduit les nouvelles variables indépendantes

$$\alpha=\alpha(u, v),\qquad \beta=\beta(u, v),$$

on peut résoudre les équations $(26\,a', a, b)$ par rapport aux dérivées de p, p_1, P, P_1, p', p'_1 relatives à α. Si l'on y joint les équations obtenues par une différentiation de $(26\,f, f')$, (28) par rapport à α, on obtient un système d'équations que l'on peut résoudre par rapport aux dérivées de Δ, Δ_1, δ, δ_1, q, q_1, R, R_1, q', q'_1, Δ', Δ'_1; δ', δ'_1, $m\varepsilon-m$, relatives à α, si le déterminant

$$(29)\quad \left\{\begin{aligned} &2\frac{\delta\Delta_1}{\varphi^2}+2\varepsilon\Delta\delta_1\varphi^2+3(\varepsilon+1)(\Delta\Delta_1+\delta\delta_1)\\ &-q\left[\frac{\Delta_1}{\varphi}(\varepsilon+3)+\delta_1\varphi(3\varepsilon+1)\right]-q_1\left[\frac{\delta}{\varphi}(\varepsilon+3)+\Delta\varphi(3\varepsilon+1)\right]\\ &-2\frac{\delta'\Delta'_1}{\varphi^2}-2\varepsilon\Delta'\delta'_1\varphi^2-3(\varepsilon+1)(\Delta'\Delta'_1+\delta'\delta'_1)\\ &+q'\left[\frac{\Delta'_1}{\varphi}(\varepsilon+3)+\delta'_1\varphi(3\varepsilon+1)\right]\\ &+q'_1\left[\frac{\delta'}{\varphi}(\varepsilon+3)+\Delta'\varphi(3\varepsilon+1)\right]\end{aligned}\right\}\left(R\varphi-\frac{R_1}{\varphi}-m_1-m\right)^3,$$

$\left(\text{où } \varepsilon=\text{const. et } \varphi=\frac{\alpha_u}{\alpha_v}\right)$, est différent de zéro.

On peut donc donner $m\varepsilon+m_1$, comme une fonction arbitraire de deux arguments et les valeurs initiales de seize fonctions inconnues, par exemple Δ, Δ_1, δ, δ_1, Δ', Δ'_1, δ'; R, R_1, p, p_1, p', p'_1, P, P_1, $m\varepsilon-m$, pour $\alpha=\alpha_0$, comme fonctions de β. Les fonctions q, q_1, q', q'_1, P', P'_1 et δ'_1 sont déterminées en termes finis par les équations $(26\,f, f')$, (27) et (28).

Une congruence générale dépendant de deux fonctions arbitraires de deux arguments, tandis que le couple déformable en transformation T dépend seulement d'une seule fonction arbitraire de deux arguments, une congruence arbitraire n'admet pas une transformation T en congruence associée dans une déformation simultanée.

6. **Configurations** (T) **remarquables.** — Diverses valeurs de la constante ε nous conduisent à certaines configurations (T) remarquables. Si $\varepsilon = -1$, on peut imposer la condition

$$m = m_1. \tag{30}$$

Si R et R_1 sont différents de zéro, l'équation (26 f) donne

$$\Delta\Delta_1 - \delta\delta_1 = 0. \tag{31}$$

Or les asymptotiques de la surface (M_1) sont déterminées par l'équation

$$(\mathbf{M}, \mathbf{M}_{1u}, \mathbf{M}_{1v}, d^2\mathbf{M}_1) = 0,$$

ou bien en vertu de (2)

$$\delta\, du^2 - \Delta\, dv^2 = 0. \tag{32a}$$

Celles de (M_2) par l'équation

$$\Delta_1\, du^2 - \delta_1\, dv^2 = 0. \tag{32b}$$

Elles se correspondent en vertu de (31). On démontre (*voir* T, p. 75) sans peine que les asymptotiques de (M_3) et (M_4) sont déterminées par la même équation (32a). Donc, si $m = m_1$ et R, R_1 sont différents de zéro, les quatre congruences de la configuration sont W et la configuration est celle du théorème de Bianchi sur la permutabilité des transformations asymptotiques. On l'appelle configuration de Bianchi.

Le système (26 a-f), (26 a'-f'), (30) détermine, avec seize fonctions arbitraires d'un argument, les configurations de Bianchi telles que chaque couple de congruences soit déformable.

Une autre configuration remarquable est caractérisée par l'équation

$$m + m_1 = 0. \tag{33}$$

Le couple de congruences ($M_1 M_2$), ($M_3 M_4$) est maintenant stratifiable (*voir* S, p. 314 et suiv.), c'est-à-dire qu'il existe deux familles de surfaces Σ et Σ', telles que des plans tangents aux surfaces Σ aux points d'intersection avec le rayon M_1M_2 passent par le rayon M_3M_4, et ceux de Σ' aux points de rencontre avec M_3M_4 passent par M_1M_2.

Le système (26 a-f), (26 a'-f'), (33) détermine, avec seize fonctions arbitraires d'un argument, les couples stratifiables qui admettent une déformation. Les couples applicables sont stratifiables également.

Si l'on a de plus

$$(34)\qquad \Delta = \delta_1,\qquad \Delta_1 = \delta_1,\qquad P = p,\qquad P_1 = p_1,\qquad q = q_1,$$

le couple stratifiable contient deux congruences appartenant au même complexe linéaire (*voir* S, p. 350).

En portant les expressions (34) dans le système (26 a-f), (26 a'-f'), (27), (28), on obtient le système

$$
\begin{array}{lll}
(35a) & p_u = \delta\delta_1 - q^2 - m, & p_{1v} = \delta\delta_1 - q^2 + m; \\
(35b) & \delta_v = q_u + p\delta + p_1 q, & \delta_{1u} = q_v + p_1\delta_1 + pq; \\
(35c) & R_u = m_v + 2mp, & R_{1v} = -m_u - 2mp_1; \\
(35d) & \multicolumn{2}{c}{R\delta - R_1\delta_1 = 2mq;} \\
(35b') & \delta'_v = q'_u + p\delta' + p_1 q', & \delta'_{1u} = q'_v + p_1\delta'_1 + pq'; \\
(35c') & \multicolumn{2}{c}{R\delta' - R_1\delta'_1 = 2mq';} \\
(35e) & p' = p,\quad p'_1 = p_1, & \delta'\delta'_1 - q'^2 = \delta\delta_1 - q^2;
\end{array}
$$

qui détermine les couples en question avec dix fonctions arbitraires d'un argument.

7. Premier cas spécial. Congruences W à focales réglées. — Revenons au système (26 a-f), (26 a'-f') et examinons le cas où le déterminant (29) est nul. Il comprend deux facteurs. Le premier facteur disparaît identiquement par rapport à φ et à ε, si l'on a les relations

$$
\begin{array}{lll}
(37a) & \delta\Delta_1 = \delta'\Delta'_1, & \Delta\delta_1 = \Delta'\delta'_1; \\
(37b) & \Delta\Delta_1 + \delta\delta_1 = \Delta'\Delta'_1 + \delta'\delta'_1; & \\
(37c) & q\Delta_1 + q_1\delta = q'\Delta'_1 + q'_1\delta', & q\delta_1 + q_1\Delta = q'\delta'_1 + q'_1\Delta'.
\end{array}
$$

En retranchant du carré de (37 b), le produit de (37 a) multiplié par quatre, on obtient

$$(\Delta\Delta_1 - \delta\delta_1)^2 = (\Delta'\Delta'_1 - \delta'\delta'_1)^2,$$

d'où suit

$$\Delta\Delta_1 - \delta\delta_1 = \Delta'\Delta'_1 - \delta'\delta'_1,$$

donc

$$(38)\qquad \Delta\Delta_1 = \Delta'\Delta'_1, \qquad \delta\delta_1 = \delta'\delta'_1$$

ou bien

$$\Delta\Delta_1 - \delta\delta_1 = -\Delta'\Delta'_1 + \delta'\delta'_1,$$

donc

$$(39)\qquad \Delta\Delta_1 = \delta'\delta'_1, \qquad \Delta'\Delta'_1 = \delta\delta_1.$$

Dans le premier cas, on résout les équations (37 a), (38) en introduisant une fonction auxiliaire t

$$(40)\qquad \delta' = \delta t, \qquad \Delta' = \Delta t, \qquad \delta'_1 = \frac{\delta_1}{t}, \qquad \Delta'_1 = \frac{\Delta_1}{t}.$$

En portant ces expressions dans (37 c), on obtient

$$(41)\qquad \begin{cases} \left(\dfrac{q'}{t} - q\right)\Delta_1 + (q'_1 t - q_1)\delta = 0, \\ \left(\dfrac{q'}{t} - q\right)\delta_1 + (q'_1 t - q_1)\Delta = 0, \end{cases}$$

donc

$$(42)\qquad q' = qt, \qquad q'_1 = q_1 t,$$

ou bien

$$(43)\qquad \Delta\Delta_1 - \delta\delta_1 = 0.$$

L'équation (43) nous ramène au second cas (39). Quant aux équations (42), en portant les expressions (40), (42) dans les équations (26 a'), on obtient, à l'aide de (26 a),

$$p'_u = p_u, \qquad p'_{1v} = p_{1v}.$$

Donc, $p' - p$ est une fonction de v seul, $p'_1 - p_1$ de u seul.

Une normalisation convenable des sommets du tétraèdre [M'] les réduit à zéro. On a donc

$$(44)\qquad p' = p, \qquad p'_1 = p_1, \qquad P' = P, \qquad P'_1 = P_1.$$

En portant les expressions (40), (42), (44) dans les équations

(26 c', d'), on obtient

$$(45)\qquad \begin{cases} t_v\delta - t_u q = 0, & t_u\delta_1 - t_v q_1 = 0; \\ t_u\Delta - t_v q = 0, & t_v\Delta_1 - t_u q_1 = 0, \end{cases}$$

d'où

$$t_u = 0, \qquad t_v = 0,$$

donc t est une constante, qu'on peut réduire à l'unité par une nouvelle normalisation des sommets M'_i [qui ne dérange pas (44)], toutes les composantes de [M′] coïncident avec celles de [M], et les deux couples sont projectivement équivalents, ou bien

$$(46)\qquad \Delta\delta = q^2, \qquad \Delta_1\delta_1 = q_1^2, \qquad \delta\delta_1 = qq_1, \qquad \Delta\Delta_1 = qq_1,$$

donc la configuration (T) dégénère. Le couple (M_1M_2), (M_3M_4) comprend (*voir* T, p. 70) une congruence W ayant deux surfaces gauches pour nappes focales et une autre congruence W, avec les mêmes nappes focales, qui coïncide avec la première si leurs développables se correspondent. Les rayons homologues M_1M_2, M_3M_4 touchent les nappes focales aux points situés sur les mêmes génératrices.

Comme maintenant, toutes les équations (26 a'-f') se réduisent à une seule équation, par exemple, la première (45) qui détermine t avec une fonction arbitraire d'un argument, le couple composé d'une congruence W à focales réglées prise deux fois est déformable, la congruence applicable dépendant d'une fonction arbitraire d'un argument.

8. Second cas spécial. Deux couples corrélatifs. — Examinons la seconde possibilité. En introduisant une fonction auxiliaire ν, on peut résoudre les équations (37 a), (39) sous la forme

$$(47)\qquad \delta' = \nu\Delta_1, \qquad \delta'_1 = \frac{\Delta}{\nu}, \qquad \Delta' = \nu\delta_1, \qquad \Delta'_1 = \frac{\delta}{\nu}.$$

En portant ces expressions dans les équations (37 b), on obtient

$$(48)\qquad \begin{cases} \left(\dfrac{q'}{\nu} - q_1\right)\delta + (q'_1\nu - q)\Delta_1 = 0, \\ \left(\dfrac{q'}{\nu} - q_1\right)\Delta + (q'_1\nu - q)\delta_1 = 0, \end{cases}$$

donc

$$(43)\qquad \Delta\Delta_1 = \delta\delta_1$$

ou bien

$$q' = \nu q_1, \qquad q'_1 = \frac{q}{\nu}. \tag{49}$$

En portant les expressions (47), (49) dans les équations (26 a'), (26 b), on obtient

$$p'_u = P_u, \qquad p'_{1v} = P_{1v}.$$

Une normalisation convenable des sommets M'_i ramène $p' - P$, $p'_1 - P_1$ à zéro. On a donc

$$p' = P, \qquad p'_1 = P_1, \qquad P' = p, \qquad P'_1 = p_1. \tag{50}$$

En portant les expressions (47), (49), (50) dans les équations (26 c', d'), on obtient

$$\begin{cases} \nu_v \Delta_1 = q_1 \nu_u, & \nu_u \Delta = q \nu_v; \\ \nu_u \delta_1 = q_1 \nu_v, & \nu_v \delta = q \nu_u. \end{cases} \tag{51}$$

Si le système (51) contient une seule équation indépendante, on revient aux équations (46). Si

$$\nu_u = 0, \qquad \nu_v = 0,$$

ν est une constante, qu'on réduit à l'unité. La première congruence W et sa transformée T restent arbitraires; le couple applicable est déterminé par les équations

$$\begin{cases} \delta' = \Delta, \quad \Delta' = \delta_1, \quad \delta'_1 = \Delta, \quad \Delta'_1 = \delta, \quad q' = q_1, \quad q'_1 = q; \\ p' = P, \quad p'_1 = P_1, \quad P' = p, \quad P'_1 = p_1. \end{cases} \tag{52}$$

En revenant à l'équation (43), on introduit une nouvelle fonction inconnue τ, et les équations (48) prennent la forme

$$q' = \nu(q_1 + \tau\Delta_1), \qquad q'_1 = \frac{1}{\nu}(q - \tau\delta). \tag{53}$$

Or, l'équation (28), en vertu de (38), donne

$$q' q'_1 = q q_1.$$

En y portant les expressions (53), on obtient, τ n'étant pas égal à zéro,

$$\tau = -\frac{q_1}{\Delta_1} + \frac{q}{\delta},$$

donc les expressions (53) prennent la forme

$$(54) \qquad q'_1 = \nu \dot{q}_1 \frac{\delta}{\Delta_1}, \qquad q' = \nu q \frac{\Delta_1}{\delta}.$$

En introduisant une nouvelle fonction

$$t = \nu \frac{\Delta_1}{\delta} = \nu \frac{\delta_1}{\Delta},$$

on ramène les équations (47), (54) à la forme (40), (42). Donc le couple [M] contient deux congruences W à focales réglées communes.

Quant aux équations (52), le sens géométrique en est bien simple. Si l'on désigne par $(\mathbf{M}_i\mathbf{M}_k\mathbf{M}_l)$ les quatre mineurs de la matrice composée de quatre coordonnées homogènes des points $\mathbf{M}_i$, $\mathbf{M}_h$, $\mathbf{M}_l$, les quatre faces du tétraèdre sont déterminées par les coordonnées

$$m_1 = \rho'(\mathbf{M}_2\mathbf{M}_1\mathbf{M}_4), \qquad m_2 = \rho(\mathbf{M}_1\mathbf{M}_2\mathbf{M}_3),$$
$$m_3 = \rho\,(\mathbf{M}_2\mathbf{M}_3\mathbf{M}_4), \qquad m_4 = \rho(\mathbf{M}_1\mathbf{M}_4\mathbf{M}_3),$$

où ρ est facteur arbitraire. Si l'on adopte pour ρ une solution du système

$$(57) \qquad \frac{\partial \log \rho}{\partial u} = P_1 - p_1, \qquad \frac{\partial \log \rho}{\partial v} = P - p$$

complètement intégrable en vertu de $(3\,a)$, on obtient pour les faces du tétraèdre m_i le tableau suivant des composantes des déplacements projectifs, tableau qui dérive du tableau (2) :

(58)

	m_1	m_2	m_3	m_4
m_{1u}	o	Δ_1	o	o
m_{2u}	q	P_1	o	1
m_{3u}	m	N_1	o	$-q_1$
m_{4u}	n	R_1	$-\delta$	$-p_1$

	m_1	m_2	m_3	m_4
m_{1v}	P	q_1	1	o
m_{2v}	Δ	o	o	o
m_{3v}	R	n_1	$-p$	$-\delta_1$
m_{4v}	N	m_1	$-q$	o

Or, il est facile de voir que le tableau (58) coïncide, en vertu de (14 *a*), (45) et (52), avec le tableau des composantes des déplacements du tétraèdre [M'] pris sous la forme (2). Il en résulte que la corrélation qui fait correspondre aux faces m_i du tétraèdre [M], dans sa position initiale, les sommets M'_i du tétraèdre [M'] pour les mêmes valeurs de u, v amène toute la famille des ∞^2 tétraèdres [M] en coïncidence avec les tétraèdres homologues [M']. Deux couples de congruences [M] et [M'] sont réciproques dans une corrélation.

Un couple arbitraire de congruences en transformation T est déformable et s'applique sur un couple qui lui correspond dans une corrélation. Inversement, si un couple de congruences [M] est applicable sur un couple [M'] qui lui correspond dans une corrélation, les relations

$$n' = N_1, \qquad n'_1 = N, \qquad N' = n_1, \qquad N'_1 = n,$$

qu'on obtient en rapprochant les tableaux des composantes (58) et (2), sont compatibles avec les équations (14 *b*). En éliminant les composantes n', n'_1, N', N'_1 et la fonction ϑ, on obtient une seule équation

$$nn_1 = NN_1 \tag{59}$$

qui caractérise les couples [M] applicables sur les couples [M'] réciproques. Quelle que soit la congruence (M_1M_2), on peut lui associer, avec trois fonctions arbitraires de deux arguments, une congruence (M_3M_4), telle que le couple obtenu soit applicable sur un couple réciproque.

9. **Troisième cas spécial. Couple de congruences réciproques par rapport au système nul d'un complexe linéaire.** — Examinons maintenant le second facteur du déterminant (29). Il s'annule, quel que soit φ, si

$$R = 0, \qquad R_1 = 0, \qquad m = m_1. \tag{60}$$

L'équation (26 f') disparaît identiquement. Si $m = m_1 = 0$, la droite M_3M_4 ne bouge pas. Si m, m_1 sont différents de zéro, l'équation (25 e') donne, en vertu de (26 e),

$$P' + p' = P + p, \qquad P'_1 + p'_1 = P_1 + p_1, \tag{61}$$

et l'équation ($26\,b'$) donne, P', P'_1 éliminés,

$$\Delta'\Delta'_1 + \delta'\delta'_1 - 2q'q'_1 = \Delta\Delta_1 + \delta\delta_1 - 2qq_1. \tag{62}$$

Si l'on donne q' comme une fonction arbitraire de deux arguments, on peut éliminer q'_1 à l'aide de (62) et le système des équations ($26\,a'$), ($26\,c'$), ($26\,d'$) détermine p', p'_1, Δ', Δ'_1, δ', δ'_1 avec six fonctions arbitraires d'un argument.

Un couple de congruences déterminé par les équations (25), (60) est déformable, et le couple applicable dépend d'une fonction arbitraire de deux arguments.

Il est facile de voir (*voir* T, p. 74) que les congruences (M_1M_3), (M_2, M_4) appartiennent au même complexe linéaire. Si l'on désigne par ($\mathbf{M}_i\mathbf{M}_k$) les coordonnées plückériennes de la droite M_iM_k, c'est-à-dire les six mineurs indépendants de la matrice composée des coordonnées homogènes des points M_i, M_k la condition pour que les rayons M_1M_3 et M_2M_4 appartiennent à un complexe linéaire s'exprime par les équations

$$\Sigma c(M_1M_3) = 0, \qquad \Sigma c(M_2M_4) = 0, \tag{63a}$$

où la somme est étendue aux coordonnées du rayon et où les coefficients c, dont les indices sont omis, représentent des constantes. Comme les sommets et les faces du tétraèdre [M] sont les foyers et les plans focaux des rayons M_1M_3, M_2M_4, et que le complexe contenant une congruence comprend les faisceaux des droites situés dans les plans focaux et dont les centres coïncident avec les foyers, les droites M_1M_4, M_2M_3 appartiennent au même complexe. Donc,

$$\Sigma c(M_1M_4) = 0, \qquad \Sigma c(M_2M_3) = 0. \tag{63b}$$

Or, les équations ($63\,a$, b) sont vérifiées quels que soient u, v. En les différentiant par rapport à u et v, on obtient les équations (69) et une seule relation

$$\Sigma c(M_3M_4) + m\Sigma c(M_1M_2) = 0. \tag{63c}$$

Les nouvelles différentiations donnent des identités.

Inversement, si les équations (25), (60) sont vérifiées, les six coordonnées linéaires

$$(M_1M_3) = x, \qquad (M_2M_4) = y, \qquad (M_1M_4) = z, \qquad (M_2M_3) = t,$$
$$(M_3M_4) + m(M_1M_2) = \varphi$$

satisfont au système complètement intégrable des équations linéaires

$$\begin{aligned} x_u &= -qz + \delta t, & x_v &= (p-P)x - \Delta z + qt; \\ y_u &= (p_1 - P_1)y + q_1 z - \Delta_1 t, & y_v &= \delta_1 z - q_1 t; \\ z_u &= -\Delta_1 x + \delta y - P_1 z, & z_v &= -q_1 x + qy + pz + \varphi; \\ t_u &= q_1 x - qy + p_1 t - \varphi, & t_v &= \delta_1 v - \Delta y - Pt; \\ \varphi_u &= 2mz - P_1\varphi, & \varphi_v &= -2mt - P\varphi \end{aligned}$$

qui les détermine avec cinq constantes arbitraires; six solutions arbitraires sont liées par une relation linéaire à coefficients constants. Nous revenons donc aux équations ($63\,a, b, c$).

Un couple de congruences réciproques par rapport au système nul d'un complexe linéaire est déformable, et le couple applicable (de la même nature) dépend d'une fonction arbitraire de deux arguments.

10. Suite de Laplace périodique de période 4. — Si

$$R = 0, \qquad R_1 = 0 \tag{64}$$

et si m est différent de m_1, les équations ($26\,f, f'$) donnent

$$q = 0, \qquad q_1 = 0, \qquad q' = 0, \qquad q'_1 = 0 \tag{65}$$

et les équations ($26\,e, e'$)

$$P' + p' = P + p, \qquad P'_1 + p'_1 = P_1 + p_1.$$

Si, pour simplifier les raisonnements, on adopte

$$p' = p, \qquad p'_1 = p_1, \qquad P' = P, \qquad P'_1 = P_1,$$

les équations ($26\,a', b', a, b$) donnent

$$\Delta'\Delta'_1 = \Delta\Delta_1, \qquad \delta'\delta'_1 = \delta\delta_1, \tag{66}$$

et les équations (26 c', d', c, d) s'intègrent et donnent

$$\delta' = U\delta, \qquad \delta'_1 = V\delta_1, \qquad \Delta' = V_1\Delta, \qquad \Delta'_1 = U_1\Delta_1,$$

où U, U_1, V, V_1 sont des fonctions de u et de v seuls.

Or, en vertu de (66),

$$U = \frac{1}{V} = c, \qquad V_1 = \frac{1}{U_1} = c_1$$

sont des constantes. Une normalisation convenable des sommets du tétraèdre [M′] réduit l'une de ces constantes à l'unité; l'autre est essentielle. Si elle est différente de l'unité, le couple de congruences [M′] est projectivement différent de [M]; donc, le couple [M] est déformable.

Or, le tableau (2) nous donne maintenant

$$\begin{aligned} M_{1u} &= \delta M_2, & M_{1v} &= \Phi M_1 + M_3; \\ M_{3u} &= m M_1, & M_{3v} &= -\Phi M_3 - \Delta M_4. \end{aligned}$$

Les développables de quatre congruences engendrées par les arêtes du quadrilatère gauche $M_1M_2M_4M_3$ se correspondent; chaque congruence est transformée de Laplace des deux congruences contiguës, et la configuration est une suite de Laplace périodique à période 4 (*voir* T, p. 12).

Inversement, si le quadrilatère $M_1M_2M_4M_3$ décrit une suite de Laplace périodique à période 4, les équations (25), (64), (65) sont vérifiées. Quels que soient m, m_1, égaux entre eux ou différents, le couple de congruences est déformable. Si m, m_1 sont différents, le couple est applicable sur un couple de la même nature (aux composantes q', q'_1 égales à zéro). Si m est égal à m_1, on peut supposer q', q'_1 différents de zéro; donc, le couple applicable ne détermine pas une suite de Laplace.

Il en résulte : deux congruences opposées d'une suite de Laplace périodique à période 4 composent un couple déformable qui est applicable sur un couple de la même nature, à moins que les congruences ne soient réciproques par rapport à un complexe linéaire, auquel cas, le couple applicable contient deux congruences réciproques par rapport à un complexe linéaire, mais qui, en général, ne déterminent pas une suite de Laplace.

11. Quatrième cas spécial. Couple stratifiable conjugué. — Il nous reste à examiner le cas

$$m = 0, \qquad m_1 = 0. \tag{67}$$

Il est évident que R, R_1 sont différents de zéro, à moins que le couple ne dégénère. Les équations ($26\,e, e'$) montrent maintenant que R est une fonction de v seul, R_1 de u seul. Il en dérive, en vertu de ($26\,f, f'$), si les paramètres sont bien choisis,

$$\Delta = \delta, \qquad \Delta_1 = \delta_1, \qquad \Delta' = \delta', \qquad \Delta'_1 = \delta'_1, \qquad R = R_1 = \text{const.} \tag{68}$$

Inversement, si la première congruence du couple [M] satisfait aux équations (68), les équations ($26\,a$-d) déterminent la seconde avec cinq constantes arbitraires, y compris la constante R. Les équations ($26\,a'$-f') déterminent le second couple avec quatre fonctions arbitraires d'un argument.

Les équations (25), (67), (68) caractérisent (*voir* S, p. 336) deux congruences R qui forment un couple stratifiable conjugué. Chaque rayon de l'une ou l'autre congruence du couple porte ∞^1 points qui décrivent les surfaces dont les plans tangents aux points considérés passent par le rayon homologue de la seconde congruence. Les développables des deux congruences se correspondent. Le second couple est un couple arbitraire de la même nature, avec la même valeur de la constante $R = R_1$.

Un couple de congruences stratifiable conjugué est déformable; il est applicable sur n'importe quel couple de la même nature, à moins que la constante $R = R_1$ n'ait la même valeur.

12. Déformation du deuxième ordre de la première congruence du couple. — Revenons aux raisonnements du paragraphe 2, et examinons le cas où la déformation est du premier ordre pour le couple de congruences, mais, pour la première congruence du couple, parvient au second ordre.

L'équation ($7\,a$) est vérifiée jusqu'aux infiniment petits du second ordre inclus. Aux équations ($8\,a$-c), il faut joindre celles qui parviennent de l'équation

$$\begin{aligned} d^2(\mathbf{N}_1\mathbf{N}_2) = \lambda\, d^2(\mathbf{M}_1\mathbf{M}_2) + 2(\lambda_1\, du + \lambda_2\, dv)\, d(\mathbf{M}_1\mathbf{M}_2) \\ + (\lambda_{11}\, du^2 + 2\lambda_{12}\, du\, dv + \lambda_{22}\, dv^2)\, (\mathbf{M}_1\mathbf{M}_2), \end{aligned}$$

où λ_{ik} sont les facteurs de proportionnalité.

En y portant les dérivées de $\mathbf{M}_i$, $\mathbf{N}_i$ calculées à l'aide du tableau (2) ou le tableau analogue des composantes du second couple [M]; en remplaçant $\mathbf{N}_i$ par leurs expressions tirées des formules (9), on obtient, en rapprochant les termes avec les mêmes crochets $[\mathbf{M}_i\mathbf{M}_k]$ et les mêmes différentielles du, dv et en tenant compte des équations (10), (12 *a-c*), (13), (14 *a*, *b*),

$$(69a) \qquad \delta' = \mathfrak{I}\delta, \qquad \delta'_1 = \frac{\delta_1}{\mathfrak{I}}, \qquad \Delta' = \mathfrak{I}\Delta, \qquad \Delta'_1 = \frac{\Delta_1}{\mathfrak{I}};$$

$$(69b) \qquad q' = \mathfrak{I}q, \qquad q'_1 = \frac{q'}{\mathfrak{I}};$$

$$(69c) \qquad p' + P' = p + P, \qquad p'_1 + P'_1 = p_1 + P_1.$$

Les équations (69 *a*, *b*) coïncident avec le système (40), (42), mais les équations (25) manquent. Il faut donc y joindre les équations (3 *a-f*) et les équations analogues pour les composantes du second tétraèdre [M′] que nous désignerons désormais par les lettres (3 *a′-f′*).

L'examen du système (3 *a-f*), (3 *a′-f′*), (14 *a*, *b*), (69 *a-c*) est tout analogue à l'examen fait au paragraphe 7. Les équations (3 *b*, *b′*) montrent que $p' - p$ et $p'_1 - p_1$ sont des fonctions de v seul ou de u seul. La normalisation des sommets du tétraèdre [M′] les réduit à zéro. On a donc

$$(70) \qquad p' = p, \qquad p'_1 = p_1, \qquad P' = P, \qquad P'_1 = P_1.$$

Les équations (3 *c*, *d*), (3 *c′*, *d′*) en vertu de (69 *a*, *b*), (14 *b*) nous procurent le système (45); donc, $\mathfrak{I}$ est une constante qu'on peut réduire à l'unité, et le second couple est projectivement identique au premier, ou bien les équations (46) sont vérifiées et la congruence (M_1M_2) est une congruence W à focales réglées.

La seconde congruence (M_3M_4) est arbitraire, avec la seule condition que le rayon homologue M_3M_4 coupe les génératrices M_1M_3, M_2M_4 des nappes focales.

En effet, en introduisant une fonction auxiliaire t, on peut écrire les équations (46) sous la forme

$$(71a) \qquad \delta = tq, \qquad \delta_1 = \frac{q_1}{t}, \qquad \Delta = \frac{q}{t}, \qquad \Delta_1 = tq_1.$$

Les équations ($3c$, d) et ($3f'$) donnent maintenant

$$n = t\mathrm{N}, \qquad n_1 = \frac{1}{t}\,\mathrm{N}_1; \tag{71b}$$

$$\left\{\begin{aligned} & t_v + \frac{t_u}{t} + 2t\,\frac{\partial \log q}{\partial v} - 2\,\frac{\partial \log q}{\partial u} = 0, \\ & t_v + \frac{t_u}{t} + 2t\,\frac{\partial \log q_1}{\partial v} - 2\,\frac{\partial \log q_1}{\partial u} = 0. \end{aligned}\right. \tag{71c}$$

Quelle que soit la congruence W à focales réglées, si l'on prend les génératrices homologues des nappes focales comme arêtes $\mathrm{M}_1\mathrm{M}_3$, $\mathrm{M}_2\mathrm{M}_4$, on obtient les formules (71 a). Les fonctions p, p_1 restent arbitraires; un choix convenable de p, p_1 nous permet d'augmenter l'applicabilité des secondes congruences de [M], [M'] jusqu'au deuxième ordre.

L'équation

$$\begin{aligned} d^2(\mathrm{N}_3\mathrm{N}_4) = \mu\, d^2(\mathrm{M}_3\mathrm{M}_4) & \\ + 2(\mu_1\,du + \mu_2\,dv)\, d(\mathrm{M}_3\mathrm{M}_4) & \\ + (\mu_{11}\,du^2 + 2\mu_{12}\,du\,dv + \mu_{22}\,dv^2)\,(\mathrm{M}_3\mathrm{M}_4) & \end{aligned}$$

nous donne maintenant les conditions

$$\begin{array}{llll} \mathfrak{S}_u\mathrm{N}_1 = 0, & \mathfrak{S}_u n = 0, & \mathfrak{S}_u n_1 = 0, & \mathfrak{S}_u\mathrm{N} = 0, \\ \mathfrak{S}_v\mathrm{N} = 0, & \mathfrak{S}_v n_1 = 0, & \mathfrak{S}_v n = 0, & \mathfrak{S}_v\mathrm{N}_1 = 0, \end{array}$$

d'où $\mathfrak{S}$ est une constante qu'on peut réduire à l'unité, et les deux couples sont identiques, ou bien

$$n = 0, \qquad n_1 = 0, \qquad \mathrm{N} = 0, \qquad \mathrm{N}_1 = 0, \tag{72}$$

le couple présente une configuration (T), et le rayon homologue de la seconde congruence $\mathrm{M}_3\mathrm{M}_4$ touche les nappes focales de la première.

13. Déformation d'une congruence aux réglées invariantes. — Dans le paragraphe précédent, nous avons vu que la congruence W à focales réglées la plus générale peut se déformer projectivement. La congruence applicable est une congruence de la même classe. La déformation obtenue possède des propriétés remarquables qui la rapprochent de la déformation métrique des surfaces réglées. Il est bien connu que les surfaces réglées seules se déforment en conservant une famille de lignes (les génératrices rectilignes) rigides.

Pour la déformation projective des congruences, le même problème se pose de la façon suivante. Selon la définition de M. Cartan, deux congruences sont projectivement applicables s'il existe une correspondance biunivoque entre leurs rayons et si, à chaque couple de rayons homologues, on peut faire correspondre une transformation projective Π faisant coïncider les rayons considérés et leurs infiniment voisins jusqu'aux infiniment petits du deuxième ordre inclus. La transformation Π varie d'un couple de rayons homologues à l'autre.

Or, on peut imposer la condition que la transformation Π reste la même le long de chaque surface d'une famille de surfaces réglées L de la congruence. La transformation Π est donc associée à un couple de surfaces L homologues des deux congruences et fait coïncider tous leurs rayons et les rayons infiniment voisins jusqu'aux infiniment petits du second ordre inclus.

Or, si l'on choisit comme arête M_3M_4 le rayon arbitraire de la congruence appartenant à la même réglée L, les deux congruences (M_3M_4) et $(M'_3M'_4)$ s'appliquent par une déformation du second ordre également. Nous revenons donc à la déformation d'une congruence W à focales réglées que nous avons examinée au paragraphe 7. Or, il est facile de voir que la déformation citée possède la propriété en question.

Il est bien connu que les rayons de la congruence, qui coupent deux génératrices rectilignes homologues des nappes focales, forment une demi-quadrique. En coordonnées locales par rapport au tétraèdre [M], l'équation de la quadrique-support est

$$x_1x_4 + \nu x_2x_3 = 0, \tag{72}$$

où ν est un facteur convenable.

Or, si le tétraèdre [M] se déplace, les coordonnées locales d'un point fixe P varient. Si l'on différentie l'identité

$$P = M_1x_1 + M_2x_2 + M_3x_3 + M_4x_4,$$

on obtient, en annulant les coefficients de M_i, les formules

$$\tag{73} \left\{\begin{aligned} dx_1 &= -px_1\,dv - x_2(q_1\,du + \delta_1\,dv) \\ &\qquad - x_3(m\,du + R\,dv) - x_4(N_1\,du + m_1\,dv), \\ dx_2 &= -x_1(\delta\,du + q\,dv) - x_2p_1\,du \\ &\qquad - x_3(n\,du + N\,dv) - x_4(R_1\,du + m_1\,dv), \\ dx_3 &= -x_1\,dv + x_3P\,dv + x_4(\Delta_1\,du + q_1\,dv), \\ dx_4 &= -x_2\,du + x_3(q\,du + \Delta\,dv) + x_4P_1\,du, \end{aligned}\right.$$

qui déterminent les accroissements infiniment petits dx_i des coordonnées locales x_i quand le tétraèdre [M] se déplace dans la direction $du : dv$.

Or, si les points M_1, M_2 bougent le long des droites M_1M_3, M_2M_4, les différentielles $du : dv$ vérifient la relation

$$du : dv = -\frac{1}{t}, \tag{74}$$

et l'équation (72) reste invariante. Donc, l'équation

$$\begin{aligned} x_4[x_1 p\,dv + x_3(m\,du + R\,dv)] + x_1[x_2\,du - x_4 P_1\,du] - x_2x_3\,dv \\ + \nu x_3[x_2 p_1\,du + x_4(R_1\,du + m_1\,dv)] + \nu x_2[x_1\,dv - x_3 P\,dv] = 0, \end{aligned} \tag{75}$$

obtenue par une différentiation de l'équation (72) dans la direction (74), est vérifiée par les valeurs $x_3 = 0$, $x_4 = 0$ ou $x_1 = 0$, $x_2 = 0$.

Il en dérive

$$\nu = \frac{1}{t}. \tag{76}$$

L'équation de la quadrique qui porte les rayons de la congruence qui interceptent les génératrices homologues M_1M_3, M_2M_4 est

$$tx_1x_4 + x_2x_3 = 0. \tag{72'}$$

Il est facile à voir que les quadriques (72′) coïncident avec les quadriques homologues de la congruence $M'_1\,M'_2$ quand la transformation projective Π fait coïncider les tétraèdres [M] et [M′].