E. LUCAS

Sur les développements en séries

Bulletin de la S. M. F., tome 6 (1878), p. 57-68
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1878__6__57_1>

Sur les développements en séries; par M. ÉDOUARD LUCAS.

L'étude des nombres de Bernoulli est importante : 1° dans le Calcul des différences et des sommes, où ces nombres se présentent comme coefficients des puissances de x dans la somme des puissances semblables des x premiers nombres entiers; 2° dans le Calcul différentiel, où ces nombres se présentent comme coefficients des puissances de la variable dans les développements en séries; 3° dans le Calcul intégral, comme valeurs d'intégrales définies; 4° dans l'Arithmétique supérieure, et principalement dans la théorie des résidus potentiels, aussi bien que dans celle de l'équation indéterminée

$$x^p + y^p = z^p,$$

ainsi que l'ont montré Cauchy, Genocchi et Kummer.

Nous avons montré précédemment le grand avantage obtenu par l'emploi du calcul symbolique pour le calcul de ces nombres (1),

(1) *Comptes rendus de l'Académie des Sciences,* septembre 1876.

et des nombres entiers qui proviennent du théorème de Staudt ([1]), pour le calcul des sommes des puissances semblables des nombres inférieurs et premiers à un nombre donné ([2]), pour le calcul des coefficients des sommes successives ([3]).

Nous allons faire voir que l'application du calcul symbolique permet de simplifier la théorie des développements en séries et de généraliser des théorèmes bien connus, tels que ceux de Stirling et de Boole.

1. Soient $f_{1,n}$ le coefficient de $\frac{x^n}{n!}$ dans le développement de $u = f(x)$ en série convergente, et $f_{p,n}$ le coefficient de $\frac{x^n}{n!}$ dans le développement de u^p; on a les formules symboliques

$$u = e^{f_1 x} = f_{1,0} + f_{1,1}\frac{x}{1} + f_{1,2}\frac{x^2}{2!} + f_{1,3}\frac{x^3}{3!} + \ldots + f_{1,n}\frac{x^n}{n!} + \ldots,$$

$$u^p = e^{f_p x} = f_{p,0} + f_{p,1}\frac{x}{1} + f_{p,2}\frac{x^2}{2!} + f_{p,3}\frac{x^3}{3!} + \ldots + f_{p,n}\frac{x^n}{n!} + \ldots.$$

Nous dirons que les coefficients $f_{p,n}$ sont d'ordre p et de rang n; mais n sera toujours entier positif, et p quelconque, positif ou négatif, entier ou fractionnaire. Nous supposerons, de plus,

$$f_{1,0} = 1, \quad f_{p,0} = 1, \quad f_{0,0} = 1, \quad f_{0,p} = 0,$$

et nous rappellerons qu'il faut toujours tenir compte de l'exposant zéro.

On peut calculer les coefficients d'ordre p au moyen des coefficients du premier ordre; en effet, on a la formule

$$(1) \qquad f_{p,n} = [f_1' + f_1'' + f_1''' + \ldots + f_1^{(p)}]^n,$$

dans le développement de laquelle on remplace les exposants de $f_1', f_1'', \ldots, f_1^{(p)}$ par des *seconds* indices, et l'on supprime ensuite les accents.

En particulier, si l'on désigne par $p_n, q_n, r_n, \ldots$ les nombres des arrangements de $p, q, r, \ldots$ objets n à n, les développements

---

([1]) *Annali di Matematica pura ed applicata*, Milano, 1877.
([2]) *Nouvelles Annales de Mathématiques*, avril 1877.
([3]) *The Messenger of Mathematics*, Cambridge, octobre 1877.

symboliques

$$(1+x)^p = e^{px}, \quad (1+x)^q = e^{qx}, \quad (1+x)^r = e^{rx}, \quad \ldots$$

donnent, par multiplication,

$$[p+q+r+\ldots]_n = [p+q+r+\ldots]^n;$$

c'est la formule du polynôme des factorielles.

D'autre part, si $f(x) = e^x$, on a

$$f_{1,n} = 1, \quad f_{p,n} = p^n,$$

ce qui est exact. La formule (1) exprime le coefficient d'ordre p et de rang n en fonction des n premiers coefficients du premier ordre.

On a aussi la relation

$$(2) \qquad f_{p,n} = (f_{p-1} + f_1)^n,$$

et, plus généralement, pour

$$p = \lambda + \mu + \nu + \ldots$$

la formule

$$(3) \qquad f_{p,n} = (f_\lambda + f_\mu + f_\nu + \ldots)^n,$$

et aussi, pour n différent de zéro,

$$(4) \qquad 0 = (f_p + f_{-p})^n;$$

cette dernière formule donne la relation entre les coefficients d'ordres égaux et de signes contraires. Nous observerons d'ailleurs que les relations (2) et (4) donnent lieu à des déterminants qui expriment $f_{p,n}$ en fonction des f_{p-1} et des f_1, ou en fonction des f_{-p}, et inversement.

Le calcul des f_p, pour p entier et positif, s'effectue plus avantageusement de la manière suivante. On a l'identité

$$(e^{f_1 x})^p = e^{f_p x}$$

et, en prenant les dérivées des logarithmes des deux membres,

$$\frac{p f_1 e^{f_1 x}}{e^{f_1 x}} = \frac{f_p e^{f_p x}}{e^{f_p x}}.$$

En identifiant les coefficients de $\frac{x^n}{n!}$, on en déduit la relation

$$(5) \qquad p f_1 (f_1 + f_p)^n = f_p (f_1 + f_p)^n,$$

qui exprime $f_{p,n+1}$ en fonction des n premiers coefficients d'ordre p et des $n+1$ premiers coefficients du premier ordre; on peut en déduire $f_{p,n+1}$ par un déterminant ne contenant que les f_1.

2. On a les développements bien connus

$$(6) \qquad u = \frac{x}{e^x - 1} = e^{B_1 x},$$

$$(7) \quad S_{n-1}(x) = 1^{n-1} + 2^{n-1} + 3^{n-1} + \ldots + (x-1)^{n-1} = \frac{(x + B_1)^n - B_1^n}{n},$$

dans lesquelles on remplace les exposants de B_1 par des *seconds* indices, et $B_{1,n}$ par le nombre de Bernoulli correspondant pris avec un signe et un indice convenables; ces nombres se calculent par la relation générale

$$(8) \qquad F(x + B_1 + 1) - F(x + B_1) = F'(x),$$

F désignant une fonction quelconque. La formule (8) contient toutes les relations connues pour le calcul des nombres bernoulliens et un grand nombre d'autres. On tire immédiatement de la formule (7)

$$\frac{dS_n(x)}{dx} = n S_{n-1}(x) + B_n \quad \text{(1)}.$$

Cela posé, on a, pour les nombres bernoulliens d'ordre négatif,

$$e^{B_{-p} x} = \left(\frac{e^x - 1}{x}\right)^p,$$

et par suite, en égalant les coefficients de $\frac{x^n}{n!}$,

$$B_{-p,n} = \frac{1}{(n+1)(n+2)\ldots(n+p)} \times \left[p^{p+n} - \frac{p}{1}(p-1)^{p+n} + \frac{p(p-1)}{1.2}(p-2)^{p+n} - \ldots\right],$$

---

(1) J. Bertrand, *Calcul différentiel*, p. 352, n° 351.

ou, par une formule connue du calcul des différences,

$$(9)\qquad B_{-p,n} = \frac{\Delta^p o^{p+n}}{(n+1)(n+2)\ldots(n+p)};$$

on a, en particulier,

$$B_{-1,n} = \frac{1}{n+1}, \quad B_{-2,n} = \frac{2^{n+2}-2}{(n+1)(n+2)}.$$

On peut obtenir les nombres de Bernoulli d'ordre positif par la méthode suivante : j'ai donné (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences,* septembre 1876) la formule

$$(10)\quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{d^p F(x_1, x_2, \ldots, x_p)}{dx_1\, dx_2\, dx_3 \ldots dx_p} \\ &\quad = \Delta^p_{x_1=1, x_2=1, \ldots, x_p=1} F\left[x_1 + B'_1,\ x_2 + B''_1,\ \ldots,\ x_p + B_1^{(p)}\right], \end{aligned} \right.$$

dans le développement de laquelle on remplace les exposants de B'_1, B''_1, ... par des seconds indices, et l'on supprime les accents ; par conséquent, si l'on pose

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_p) = (x_1 + x_2 + \ldots + x_p)^n,$$

on obtient, en faisant ensuite $x_1 = x_2 = \ldots = x_p = 0$,

$$(11)\ (B_p + p)^n - \frac{p}{1}(B_p + p - 1)^n + \frac{p(p-1)}{1.2}(B_p + p - 2)^n \pm \ldots \pm B_p^n = 0,$$

ou symboliquement

$$(12)\qquad \Delta^p B_p^n = 0;$$

cette dernière peut s'écrire, en ordonnant suivant les seconds indices de B_p, sous la forme

$$(13)\qquad (B_p + \Delta^p o)^n = 0,$$

dans laquelle on remplace les puissances de B_p par des seconds indices et les puissances α de $\Delta^p o$ par $\Delta^p o^\alpha$; celle-ci donne lieu à un déterminant ; d'ailleurs on a encore

$$(14)\qquad (B_p + B_{-p})^n = 0,$$

et l'on remplacera les B_{-p} par la formule (9).

3. Le calcul des B_p se fait plus rapidement par le procédé suivant : si l'on élimine e^x entre u^p et sa dérivée, on a l'équation

$$x\frac{du^p}{dx}=p(1-x)u^p-pu^{p+1};$$

donc, en égalant les coefficients de x^n, on trouve

$$pB_{p+1,n}=(p-n)B_{p,n}-pnB_{p,n-1}. \tag{15}$$

On a, en particulier, pour $p=1$,

$$B_{2,n}=(1-n)B_{1,n}-nB_{1,n-1}, \tag{16}$$

et, pour $q>1$, selon que n est *pair* ou *impair*,

$$B_{2,2q}=(1-2q)B_{1,2q},\quad B_{2,2q+1}=-(1+2q)B_{1,2q}.$$

Pour $p=2$, on a encore

$$2B_{3,n}=(2-n)B_{2,n}-2nB_{2,n-1},$$

et, en remplaçant les $B_{2,n}$ en fonction des $B_{1,n}$,

$$2B_{3,n}=(n-1)(n-2)B_{1,n}+3n(n-2)B_{1,n-1}+2n(n-1)B_{1,n-2}. \tag{17}$$

Pour obtenir une formule plus générale, nous changerons n en $n-1$ dans la relation (15); nous avons ainsi

$$\begin{aligned} pB_{p+1,n}&=(p-n)B_{p,n}-pnB_{p,n-1},\\ pB_{p+1,n-1}&=(p-n+1)B_{p,n-1}-p(n-1)B_{p,n-2}. \end{aligned}$$

Multiplions les deux termes de cette dernière par $(p+1)n$ et ceux de la précédente par $p-n+1$, et retranchons; nous obtenons, en tenant compte de la formule (15),

$$\begin{aligned}(p+1)pB_{p+2,n}=&(p-n+1)(p-n)B_{p,n}\\ &-(p-n+1)(2p+1)nB_{p,n-1}\\ &+p(p+1)n(n-1)B_{p,n-2}.\end{aligned}$$

On obtiendra de même

$$\begin{aligned}&(p+2)(p+1)pB_{p+3,n}\\ &\quad=(p-n+2)(p-n+1)(p-n)B_{p,n}\\ &\qquad-(p-n+2)(p-n+1)[p+\overline{p+1}+\overline{p+2}]nB_{p,n-1}\\ &\qquad+(p-n+2)[p(p+1)+p(p+2)+(p+1)(p+2)]n(n-1)B_{p,n-2}\\ &\qquad-p(p+1)(p+2)n(n-1)(n-2)B_{p,n-3},\end{aligned}$$

et ainsi de suite. Pour $p = 1$,

$$1.2.3\,B_{4,n} = (-1)^3 n(n-1)(n-2)(n-3) \times \left(\frac{B_{1,n}}{n} + 6\frac{B_{1,n-1}}{n-1} + 11\frac{B_{1,n-2}}{n-2} + 6\frac{B_{1,n-3}}{n-3}\right);$$

on a, en général, la formule symbolique

$$(18)\quad \left\{ \begin{array}{l} 1.2.3\ldots p\,B_{p+1,n} \\ \quad = (-1)^p n(n-1)(n-2)\ldots(n-p)\beta^{n-p}(1+\beta)(2+\beta)\ldots(p+\beta), \end{array} \right.$$

dans le développement de laquelle on remplace les exposants de β par des indices, et faisant ensuite

$$\beta_q = \frac{B_{1,q}}{q}.$$

On vérifie cette formule *a posteriori;* elle exprime les nombres bernoulliens d'ordre $p+1$ en fonction linéaire de $p+1$ nombres bernoulliens consécutifs du premier ordre.

4. Nous indiquerons encore les relations des nombres de Bernoulli des divers ordres avec d'autres fonctions numériques. Posons dans la formule (15)

$$(19)\qquad B_{p+1,n} = (-1)^n \frac{A_{p,n}}{C_{p,n}}, \quad C_{p,n} = \frac{p(p-1)\ldots(p-n+1)}{1.2\ldots n},$$

nous obtenons

$$(20)\qquad A_{p,n} = A_{p-1,n} + p\,A_{p-1,n-1}.$$

C'est la relation qui existe entre les sommes des produits n à n des p premiers nombres entiers, et, puisque les conditions initiales sont les mêmes, les quantités $A_{p,n}$ sont égales à ces sommes. On a d'ailleurs, plus généralement,

$$(21)\quad A^n_{p+q-1} = A^{n-q}_{p-1}(A_{p-1}+p)(A_{p-1}+p+1)\ldots(A_{p-1}+p+q-1),$$

en remplaçant les exposants de A_{p-1} par des seconds indices.

On a encore

$$(x+1)(x+2)(x+3)\ldots(x+p) = x^p + A_{p,1}x^{p-1} + A_{p,2}x^{p-2} + \ldots + A_{p,p},$$

et par conséquent

$$(22)\qquad (x+1)(x+2)\ldots(x+p)=(x-B_{p+1})^p.$$

En prenant r fois les différences, on a

$$(23)\quad \Delta^r(x-B_{p+1})^p=p(p-1)\ldots(p-r+1)(x+r-1+B_{p-r+1})^{p-r},$$

et, en prenant r fois les sommes, on a

$$(24)\quad \frac{(x-B_{p+r+1})^r}{(p+1)(p+2)\ldots(p+r)}-\frac{1.2.3\ldots p}{1.2.3\ldots(r-1)}(x-B_r)^{r-1}=(S_r-B_{p+1})^p,$$

$S_{r,n}$ désignant la $r^{\text{ième}}$ somme des puissances semblables $n^{\text{ièmes}}$ des x premiers nombres, et $S_{r,0}$ l'expression

$$S_{r,0}=\frac{x(x+1)(x+2)\ldots(x+r-1)}{1.2\ldots r}.$$

5. Les considérations exposées aux nos 2 et 3, pour les nombres de Bernoulli, s'appliquent encore aux coefficients des autres développements analogues, tels que [1]

$$(25)\quad\left\{\begin{array}{lll} e^{P_1 x}=\dfrac{-2x}{e^x+1} & \text{avec} & F(x+P_1+2)-F(x+P_1)=2F'(x)-2F'(x+1),\\[2mm] e^{R_1 x}=\dfrac{x}{e^x-e^{-x}} & & F(x+R_1+2)-F(x+R_1)=F'(x+1),\\[2mm] e^{E_1 x}=\dfrac{2}{e^x+e^{-x}} & & F(x+E_1+4)-F(x+E_1)=2F(x+3)-2F(x+1).\end{array}\right.$$

6. Eisenstein a donné un élégant théorème pour obtenir les coefficients $f_{m,n}$ d'ordre m quelconque, lorsque l'on connaît ces coefficients pour toutes les valeurs entières et positives de m et de n. Soit encore

$$u=e^{f_1 x}\quad\text{et}\quad f_{1,0}=1,$$

on a

$$u^m=(1+\overline{u-1})^m=1+m(u-1)+\frac{m(m-1)}{1.2}(u-1)^2+\ldots;$$

le coefficient de $\frac{x^n}{n!}$ dans u^p est $f_{p,n}$, et, puisque $f_{0,n}$ est nul, le

---

(1) *Théorie nouvelle des nombres de Bernoulli et d'Euler* (*Annali di Matematica pura ed applicata*), p. 23, Milano, 1877.

coefficient de $\frac{x^n}{n!}$ dans $(u-1)^p$ est donné par le développement de

$$(f_n - 1)^p,$$

dans lequel on remplace les exposants de f_n par des *premiers indices;* par conséquent, avec la même convention

$$f_{m,n} = m f_{1,n} + \frac{m(m-1)}{1.2}(f_n - 1)^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}(f_n - 1)^3 + \ldots$$
$$+ \frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{1.2\ldots n}(f_n - 1)^n;$$

nous ne tenons pas compte des termes suivants qui ne contiennent pas x^n. Dans les seconds membres, le coefficient de $f_{r,n}$ est

$$\frac{m(m-1)\ldots(m-r+1)}{1.2\ldots r}\left[1 - \frac{m-r}{1} + \frac{(m-r)(m-r-1)}{1.2} + \ldots \right.$$
$$\left. + (-1)^{n-r}\frac{(m-r)\ldots(m-n+1)}{1.2\ldots(n-r)}\right];$$

mais, en désignant par

$$\begin{array}{llllllll} 1, & a, & b, & c, & d, & \ldots, & l, & \ldots, \\ 1, & A, & B, & C, & D, & \ldots, & L, & \ldots \end{array}$$

les lignes de rang $q-1$ et q du triangle arithmétique, on a

$$A = 1 + a, \quad B = a + b, \quad C = b + c, \quad D = c + d, \quad \ldots,$$

et aussi

$$1 - A + B - C + D - \ldots \pm L = \pm l,$$

on a, par conséquent,

$$1 - q + \frac{q(q-1)}{1.2} - \frac{q(q-1)(q-2)}{1.2.3}$$
$$+ (-1)^s \frac{q(q-1)\ldots(q-s+1)}{1.2\ldots s} = (-1)^s \frac{(q-1)(q-2)\ldots(q-s)}{1.2\ldots s}.$$

Cette formule subsiste pour q quelconque, et, en faisant $q = m - r$ et $s = n - r$, on en conclut que le coefficient de $f_{r,n}$ est égal à

$$(-1)^{n-r}\frac{m(m-1)\ldots(m-r+1)}{1.2\ldots r}\,\frac{(m-r-1)(m-r-2)\ldots(m-n)}{1.2\ldots(n-r)}$$

ou

$$(-1)^{n-r}\frac{m(m-1)\ldots(m-n)}{1.2\ldots n}\,\frac{n(n-1)\ldots(n-r+1)}{1.2\ldots r}\,\frac{1}{m-r};$$

donc

$$f_{m,n}=\frac{m(m-1)\ldots(m-n)}{1.2\ldots n}$$

$$\times\left[(-1)^{n-1}\frac{n}{1}\,\frac{f_{1,n}}{m-1}+(-1)^{n-2}\frac{n(n-1)}{1.2}\,\frac{f_{2,n}}{m-2}+\ldots+\frac{f_{n,n}}{m-n}\right],$$

et enfin

$$f_{m,n}=\frac{m(m-1)\ldots(m-n)}{1.2\ldots n}(\varphi-1)^n, \tag{26}$$

en remplaçant les exposants de φ par des indices, et posant

$$\varphi_r=\frac{f_{r,n}}{m-r}.$$

7. Herschel a donné, sous forme symbolique, le développement de $\varphi(e^x)$ suivant les puissances de x; on a, en effet,

$$\varphi(e^x)=e^{\varphi(1+\Delta)0}, \tag{27}$$

en remplaçant dans le second membre les puissances de $\varphi(1+\Delta)0$ par

$$\varphi(1+\Delta)0^n=\varphi(1)0^n+\varphi'(0)\frac{\Delta 0^n}{1}+\varphi''(1)\frac{\Delta^2 0^n}{1.2}+\ldots,$$

$\Delta^p 0^n$ désignant, suivant l'usage, la $p^{\text{ième}}$ différence de x^n pour $x=0$. Soit, par exemple,

$$\varphi(e^x)=\frac{2}{e^x+e^{-x}}=\frac{2e^x}{e^{2x}+1},\quad \varphi(1+\Delta)=\frac{2+2\Delta}{2+\Delta^2};$$

on a, pour les nombres eulériens, la relation

$$\mathrm{E}_n=(1+\Delta)\left(1-\frac{\Delta^2}{2}+\frac{\Delta^4}{2^2}-\frac{\Delta^6}{2^3}+\ldots\right), \tag{28}$$

de laquelle on peut encore déduire la périodicité des résidus de E_n suivant un module premier.

8. Stirling et Boole ont donné d'autres développements en séries

qui sont des cas particuliers du suivant. Soit, en général,

$$(29)\quad \left\{\begin{aligned}&\frac{F(x)}{Ae^{\alpha x}+Be^{\beta x}+Ce^{\gamma x}+\ldots}\\&=a_0+a_1\frac{x}{1}+a_2\frac{x^2}{1.2}+\ldots+a_n\frac{x^n}{1.2\ldots n}+\ldots\end{aligned}\right.$$

une fonction développée en série convergente suivant les puissances *positives* et *entières* de x; en écrivant le second membre sous la forme symbolique e^{ax}, et en désignant par $f(x)$ une fonction quelconque et par h l'accroissement de x, on a le développement

$$(30)\qquad F(hf)=Ae^{ahf(x+\alpha h)}+Be^{ahf(x+\beta h)}+Ce^{ahf(x+\gamma h)}+\ldots,$$

dans lequel on remplace h^0f^0 par $f(x)$, h^nf^n par $h^n\dfrac{d^nf(x)}{dx^n}$, et $f^n(x+\alpha h)$ par $\dfrac{d^nf(x+\alpha h)}{dx^n}$.

En effet, soit $f(x)=ge^{kx}$, on a

$$\frac{d^nf(x+\alpha h)}{dx^n}=ge^{k(x+\alpha h)}k^n,$$

et par suite

$$F(hf)=ge^{kx}F(hk),$$
$$Ae^{ahf(x+\alpha h)}=ge^{kx}A^{ahk}e^{\alpha hk},$$

et

$$\begin{aligned}&Ae^{ahf(x+\alpha h)}+Be^{ahf(x+\beta h)}+Ce^{ahf(x+\gamma h)}+\ldots\\&=ge^{kx}[Ae^{\alpha hk}+Be^{\beta hk}+Ce^{\gamma hk}+\ldots]e^{ahk}=ge^{kx}F(hk).\end{aligned}$$

Ainsi le développement a lieu pour ge^{kx} quels que soient g et k; il a donc lieu généralement.

En particulier, on déduit des développements

$$\frac{x}{e^x-1}=e^{Bx},\quad \frac{-2x}{e^x+1}=e^{Px},\quad \frac{x}{e^x-e^{-x}}=e^{Rx},\quad \frac{2}{e^x+e^{-x}}=e^{Ex}$$

les formules

$$(31)\quad \left\{\begin{aligned}hf'(x)&=e^{Bhf(x+h)}-e^{Bhf(x)},\\-2hf'(x)&=e^{Phf(x+h)}+e^{Phf(x)},\\hf'(x)&=e^{Rhf(x+h)}-e^{Rhf(x-h)},\\2f(x)&=e^{Ehf(x+h)}+e^{Ehf(x-h)};\end{aligned}\right.$$

les deux premiers développements correspondent aux formules de Stirling et de Boole.

Au moyen du théorème d'Herschel, on peut présenter la formule (30) sous une autre forme. On observera d'ailleurs que ces considérations s'appliquent aux fonctions de plusieurs variables.