

BULLETIN DE LA S. M. F.

BERTRAND GAMBIER

**Triangles homologiques, tétraèdres homologiques,
tétraèdres en situation hyperboloïdale**

Bulletin de la S. M. F., tome 66 (1938), p. 8-47

http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1938__66__8_0

© Bulletin de la S. M. F., 1938, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

TRIANGLES HOMOLOGIQUES, TÉTRAÈDRES HOMOLOGIQUES,
TÉTRAÈDRES EN SITUATION HYPERBOLOÏDALE;

PAR M. BERTRAND GAMBIER.

1. Deux triangles ABC , $A_1B_1C_1$ d'un même plan sont dits *homologiques* si les droites AA_1 , BB_1 , CC_1 concourent au point S ; dans ce cas les côtés (BC, B_1C_1) , (CA, C_1A_1) , (AB, B_1A_1) se coupent en trois points α , β , γ situés sur une même droite Δ . Ces deux propositions sont réciproques : une polarité par rapport à une conique quelconque échange en effet les deux propositions.

Le choix du nom résulte de ce fait qu'il existe effectivement une homologie, et une seule, de pôle S , d'axe Δ transformant ABC en $A_1B_1C_1$. Inutile de revenir sur les démonstrations; il est bon toutefois de signaler que c'est sans doute ce résultat qui a enseigné aux géomètres l'art de simplifier certaines démonstrations par l'immersion de l'espace linéaire étudié dans un autre espace linéaire ayant un plus grand nombre de dimensions : la figure plane en jeu peut, ici, être regardée comme la projection de la figure formée par une pyramide $SABC$ et une section plane $A_1B_1C_1$.

2. Supposons deux triangles marqués au hasard dans un même plan : on peut joindre chaque sommet du premier à un sommet du second de six façons différentes : *il est intéressant de chercher combien d'homologies on peut ainsi obtenir*. Dans le cas général, il y en a *zéro* bien entendu; nous allons montrer que l'on en peut obtenir :

zéro, une, deux, trois, quatre (de deux façons différentes), ou six; cinq n'est jamais obtenu : bien entendu, on compte le nombre exact d'homologies, sans en oublier.

C'est encore un exemple très simple, où il y a désaccord entre les résultats fournis par un décompte d'inconnues et d'équations.

Deux triangles marqués au hasard donnent une figure à douze

paramètres (deux arbitraires pour chaque sommet). Dans le cas où l'on veut obtenir une homologie, on marque A, B, C, S arbitraires, on choisit A_1 , B_1 , C_1 respectivement sur SA, SB, SC arbitrairement; cela fait un total de onze arbitraires, manifestement indépendantes, la variation de l'une d'elles changeant le résultat; d'autre part, comme le point S est *unique* pour deux triangles où A et A_1 , B et B_1 , C et C_1 se correspondent dans une homologie, le système (A, B, C; A_1 , B_1 , C_1) dépend du même nombre de paramètres que le système (A, B, C; A_1 , B_1 , C_1 , S), c'est-à-dire de onze paramètres; *une homologie entraîne donc une condition unique*; on ne saurait en déduire que p homologies ($1 \leq p \leq 6$) doivent entraîner p conditions, et la suite nous apprendra qu'il y a souvent réduction du nombre de conditions.

Un raisonnement, d'ailleurs bien simple, suffit à nous mettre en garde, sans nous montrer quel est le résultat exact : *si* deux triangles peuvent être homologues de *six façons différentes*, leur ensemble dépend de *huit paramètres au moins*, et non pas de $12 - 6$, soit six paramètres, de sorte qu'il y a nécessairement réduction : en effet, on voit tout de suite que les trois sommets du second ne peuvent être tous les trois sur un même côté du premier; ni deux sur un côté du premier, le dernier étant sur un autre côté du premier; ni chacun sur un côté différent du premier. Il existe donc un sommet A_1 du second non situé sur un côté du premier; or, par une homographie du plan, on peut amener A, B, C, A_1 à coïncider avec quatre points choisis arbitrairement : il y a donc bien au moins huit paramètres.

Ce raisonnement, qui vient d'être employé, nous met en garde contre une autre faute : nous pourrions être tentés de croire évidente la possibilité d'obtenir six homologies : la soustraction $12 - 6 = 6$ est exacte, mais n'a rien à voir avec la question; nous nous sommes déjà servis de ce fait que le groupe des homographies respecte les rapports d'homologie éventuels qui peuvent exister entre deux triangles, de sorte que, en réalité, *ce n'est pas de douze paramètres dont nous disposons, mais simplement de quatre*; nous pouvons en effet marquer A, B, C, A_1 où nous voulons et nous n'avons plus à notre disposition que les positions de B_1 , C_1 ; mais alors nous risquons de tomber dans l'erreur inverse et de croire que nous ne pourrions réaliser que quatre

homologies au maximum, tandis qu'en réalité on peut en obtenir jusqu'à six.

Désormais nous ne regarderons plus comme distinctes deux configurations se transformant l'une en l'autre par une homographie et nous nous bornerons à compter les *invariants homographiques*, autrement dit le nombre de paramètres arbitraires qui s'ajoutent aux huit paramètres de l'homographie générale (celle qui restitue à A, B, C, A₁ la permission de se loger individuellement chacun où il voudra, en une résidence autre que celle que nous lui avons imposée *a priori*).

3. La clé est facile à trouver; supposons l'homologie

A	B	C
A ₁	B ₁	C ₁

réalisée (ce schéma indique que A et A₁ se correspondent, B et B₁, puis C et C₁). Considérons l'hexagone

$$AB_1CA_1BC_1A$$

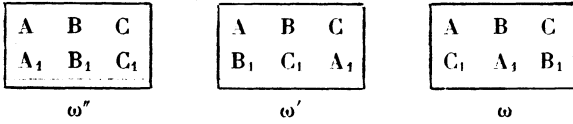
(les sommets des deux triangles se succèdent alternativement en lisant ce schéma; les sommets homologues sont à trois rangs d'intervalle; cette remarque est utile pour la suite). *D'après le théorème de Brianchon il est circonscrit à une conique Γ; réciproquement, s'il est circonscrit à une conique Γ, l'homologie indiquée plus haut existe.*

[On sait d'ailleurs que deux triangles réciproques par rapport à une conique sont homologues, et que, inversement, si deux triangles sont homologues, ils sont polaires réciproques par rapport à une conique, d'ailleurs unique.]

Les résultats subsistent si la conique Γ dégénère en deux points ω, ω'. Nous traçons donc, arbitrairement, un triangle ABC; nous choisissons arbitrairement, deux points ω, ω' distincts, non situés sur les côtés (fig. 1). Nous joignons (en traits interrompus sur la figure), Aω, Bω, Cω, puis (en pointillé sur la figure), Aω', Bω', Cω'. Nous marquons les points d'intersection

$$A_1(B\omega, C\omega'), \quad B_1(C\omega, A\omega'), \quad C_1(A\omega, B\omega').$$

Nous avons les trois homologies



Les deux dernières ont lieu par construction; la première a lieu, comme conséquence de la réciproque du théorème de Brianchon (appliqué à la conique dégénérée $\omega\omega'$). Nous avons indiqué les droites AA_1, BB_1, CC_1 en traits mixtes; $\omega, \omega', \omega''$ sont les pôles de ces homologies; deux quelconques d'entre elles entraînent la troisième; ce sont *deux homologies telles que chacun des sommets A, B, C du premier triangle ait deux homologues différents dans chacune des deux homologies en jeu, et alors existe automatiquement la troisième homologie où chaque sommet A, B, C a pour homologue le sommet du second triangle qui ne lui a pas encore été associé.*

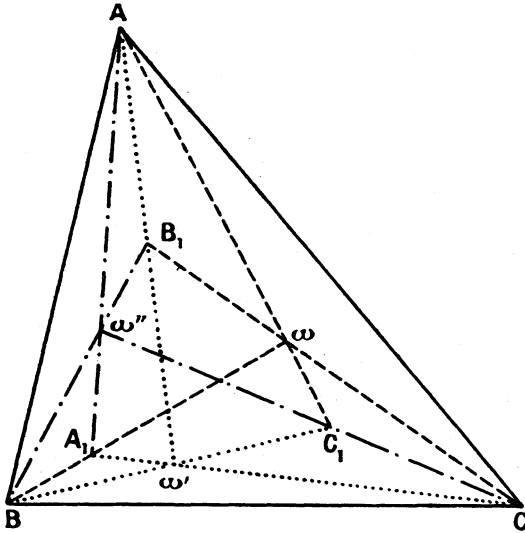
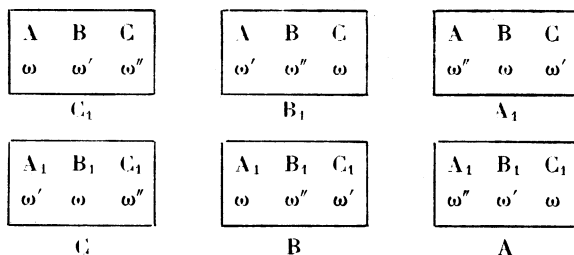


Fig. 1.

Cette configuration est extrêmement curieuse, elle comporte trois triangles, $ABC, A_1B_1C_1, \omega\omega'\omega''$ qui jouent le même rôle,

car nous pouvons écrire les schémas d'homologie



La configuration, prise en elle-même, dépend des dix paramètres qui permettent de prendre A, B, C, ω , ω' arbitrairement; elle ne contient que deux invariants homographiques. On n'a pas obtenu trois relations de conditions, mais deux seulement. *Nous avons réalisé ainsi le cas de trois homologies* (qui n'entraîne que deux conditions).

4. Supposons maintenant que nous cherchions à réaliser les deux homologies simultanées



caractérisées par ce fait qu'un sommet déterminé, A par exemple, se trouve avoir le même homologue dans chacune d'elles. La construction est immédiate, on prend arbitrairement (*fig. 2*), B, C, B₁, C₁; le point de concours O de BB₁ et CC₁ est le pôle de la première homologie; le point O' où BC₁ et B₁C se coupent est le pôle de la seconde; A et A₁ sont des points arbitraires de la droite OO'. La figure dépend de dix paramètres métriques; elle a deux invariants homographiques. *C'est le cas de deux homographies* (chacune a donné une condition indépendante de l'autre).

Nous allons chercher ce qu'il faut éviter ou réaliser, de façon à n'avoir pas ou avoir :

a. l'homologie complémentaire

A	B	C
B ₁	C ₁	A ₁

 et par suite aussi

A	B	C
C ₁	A ₁	B ₁

, ce sera un cas de *quatre homologies* en cas de réussite;

b. l'homologie complémentaire $\begin{matrix} A & B & C \\ C_1 & B_1 & A_1 \end{matrix}$ et nous verrons

qu'alors on a automatiquement la nouvelle homologie $\begin{matrix} A & B & C \\ B_1 & A_1 & C_1 \end{matrix}$,
ce sera un autre cas de *quatre homologies*;

c. les deux homologies complémentaires

$$\begin{matrix} A & B & C \\ B_1 & C_1 & A_1 \end{matrix} \quad \text{et} \quad \begin{matrix} A & B & C \\ C_1 & B_1 & A_1 \end{matrix},$$

c'est la réunion de *a* et *b* et l'on a six homologies, puisque chacune des deux nouvelles homologies en entraîne une autre.

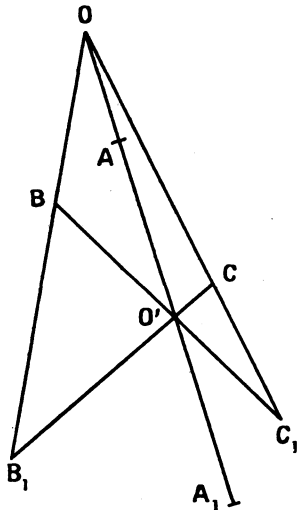


Fig. 2.

Et alors on a épuisé tous les cas possibles (0, 1, 2, 3, 4 de deux façons différentes; 6, jamais 5).

5. Nous nous plaçons dans le cas de la figure 2; d'après une remarque faite, on peut donner aux quatre points BCB_1C_1 la position que l'on veut; nous dessinons donc un carré dont les sommets consécutifs sont BC, CB_1 (*fig. 3*); le point O est à l'infini, le point O' aussi; A et A_1 sont deux points à l'infini, que nous indiquons par la direction qui les porte.

Si l'homologie

A	B	C
B ₁	C ₁	A ₁

 existe, nous formons l'hexagone de

Brianchon obtenu par la règle donnée plus haut AC₁, CB₁, BA₁; les trois côtés C₁C, BB₁, AA₁ (droite de l'infini) sont concourants; donc si nous pouvons trouver une conique inscrite, cette conique dégénère en deux points et les trois côtés AC₁, CB₁, BA₁ non

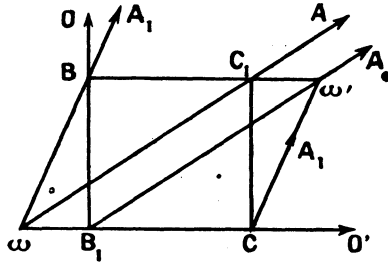


Fig. 3.

encore considérés doivent être concourants. Si donc nous avons choisi sur la droite OO' (droite de l'infini) le point A, la droite C₁A coupe B₁C en un point ω : *suivant que la droite BA₁ ne passe pas ou passe en ω nous évitons ou obtenons la troisième homologie annoncée*; si nous avons obtenu cette troisième homologie, nous savons que l'homologie

A	B	C
C ₁	A ₁	B ₁

 se présente

automatiquement comme conséquence de la première et troisième. On a ainsi un cas de quatre homologies, n'exigeant qu'un total de trois conditions, laissant subsister un invariant homographique (qui est par exemple le birapport des rayons BO, BO', BA, BA₁). Le point ω', pôle de la quatrième homologie obtenue s'obtient (dans le cas précis de la figure 3, où BC₁, CB₁ est un parallélogramme) en reportant $\vec{C_1\omega'} = \vec{\omega B_1}$ sur le côté BC₁.

Les trois triangles qui, au n° 3, s'appelaient ABC, A₁B₁C₁, ωω'ω'' s'appellent ici ABC, A₁B₁C₁, ωω'O, et il est curieux de constater que deux quelconques de ces trois triangles sont homologues de quatre façons différentes. Cela résulte de ce que les

homologies

A	B	C
O	ω'	ω
O'		

A ₁	B ₁	C ₁
O	ω	ω'
O'		

existent et s'ajoutent à celles qui ont été indiquées au n° 3; il est curieux de retrouver cette symétrie des trois triangles du n° 3.

6. Nous partons de nouveau de la figure 2; le choix arbitraire de B, C, B₁, C₁ a donné la droite OO'; nous voulons maintenant choisir A et A₁ sur la droite OO', de sorte que l'homologie

A	B	C
C ₁	B ₁	A ₁

existe aussi, Ω étant son pôle. Le point A est un

point de OO'; supposons que nous le choisissons arbitrairement

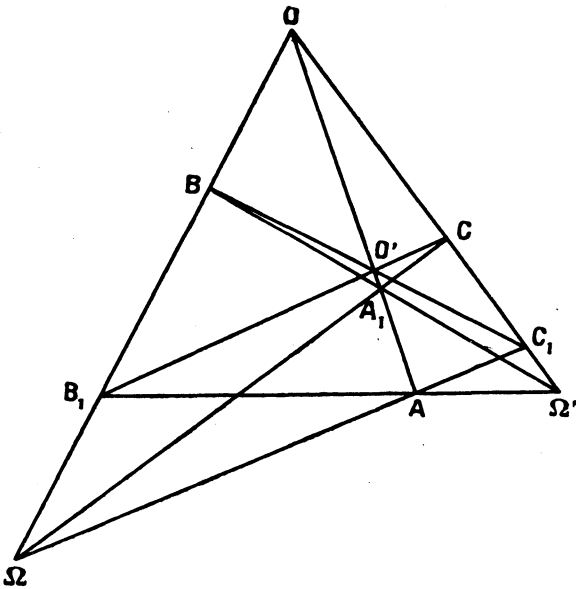


Fig. 4.

(fig. 4); Ω est alors à l'intersection de AC_1 et OB ; A_1 à l'intersection de ΩC et OO' ; la troisième homologie est obtenue; elle a donné une condition, puisque le choix des deux points A et A₁

sur OO' n'est plus arbitraire, mais celui de A seul par exemple.

Nous allons montrer que la quatrième homologie

A	B	C
B_1	A_1	C_1

 est

obtenue elle aussi; tout revient à démontrer que BA_1 et B_1A se coupent en un point Ω' de CC_1 . Représentons par (Ω) le birapport de quatre positions quelconques de Ω prises sur BB_1 ; on a, avec les symboles analogues $(\Omega) = (A) = (A_1)$ quand B, B_1, C, C_1 restent fixes et que Ω varie sur BB_1 ; donc les rayons BA_1 et B_1A se correspondent homographiquement; or, si Ω vient en O , les points A et A_1 viennent tous deux en O aussi et les deux rayons BA_1, B_1A coïncident tous deux avec la droite BB_1O ; donc le point de rencontre Ω' de BA_1 et B_1A a pour lieu une droite; quand Ω vient en B_1 , le point A_1 vient en O' , la droite ΩAC_1 devient B_1C_1 , le point Ω' vient en C_1 ; de même si Ω vient en B , Ω' vient en C ; le lieu de Ω' est donc la droite CC_1 , ce qui justifie la proposition.

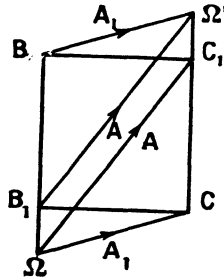


Fig. 5.

On sait donc, une fois A choisi sur OO' , trouver la position de A_1 de façon à avoir les deux nouvelles homologies que nous venons d'indiquer; cette position est unique; donc si l'on choisit A_1 au hasard, on n'a que les deux homologies du n° 4; si l'on choisit A_1 convenablement, on a le cas nouveau annoncé des quatre homologies. On remarquera encore ici que les triangles $ABC, A_1B_1C_1$, et $O\Omega\Omega'$ sont deux à deux homologiques de 4 façons différentes; même remarque pour $ABC, A_1B_1C_1$ et $O'\Omega\Omega'$. Une forme réduite élégante consiste à choisir pour A, B, C les sommets d'un triangle équilatéral et pour O le centre de ce triangle : $A_1B_1C_1$ est homothétique de ABC par rapport à O .

Le cas des quatre homologies (un seul invariant) comprend donc deux types : à partir d'une première homologie, chaque sommet ne retrouve jamais le même homologue, ou au contraire, chaque sommet retrouve successivement le même homologue dans l'une des trois nouvelles homologies. Nous n'avons finalement trouvé que trois relations pour obtenir ces quatre homologies.

On peut remarquer qu'il est avantageux d'utiliser pour la figure 4 la transformation de BC_1, CB_1 en un carré (fig. 5), les droites ΩC_1 et ΩC indiquent les directions A, A_1 , et il est clair alors qu'en prenant sur CC_1 le vecteur $\vec{C_1\Omega'} = \vec{\Omega B_1}$, les droites $B\Omega', B_1\Omega'$ sont respectivement parallèles à ΩC et c'est la démonstration de la proposition qui précède, rendue intuitive.

7. Nous saurons donc, en comparant les figures 5 et 3 trouver les conditions propres à obtenir le maximum des six homologies et c'est surtout pour ce cas final que la transformation de BC_1, CB_1 en carré est avantageuse. *Le rayon C_1A doit couper BA_1 sur CB_1 et couper CA_1 sur BB_1 .* Prenons donc pour axe des x la droite B_1C , pour axe des y la droite B_1B et nous supposons $\overline{B_1C} = +1 = \overline{B_1B}$. Les équations de CA_1, C_1A, BA_1 sont :

$$\begin{array}{ll} CA_1 \dots\dots\dots & y = m_1(x-1) \\ C_1A \dots\dots\dots & y-1 = m(x-1) \\ BA_1 \dots\dots\dots & y-1 = m_1x \end{array}$$

Le point Ω commun à CA_1, C_1A a pour coordonnées

$$\Omega \left(\frac{m_1 - m + 1}{m_1 - m}, \frac{m_1}{m_1 - m} \right);$$

le point commun à C_1A et BA_1 , soit α a pour coordonnées

$$\left(\frac{m_1}{m - m_1}, \frac{m - m_1 + m m_1}{m - m_1} \right).$$

On a les deux équations

$$m_1 - m + 1 = 0, \quad m - m_1 + m m_1 = 0$$

qui reviennent à

$$m - m_1 = 1, \quad m m_1 = -1.$$

On en conclut $m = -j, m_1 = j^2$ où j est une racine cubique

imaginaire de l'unité. La configuration est donc imaginaire; elle n'a plus d'invariant homographique. Les six homographies donnent un ensemble de conditions distinctes réduit à quatre seulement. Le birapport $(BB, \Omega O)$ ou $(0, 1, -j^2, \infty)$ est égal à $(-j)$: c'est la valeur classique du rapport *équianharmonique*.

Ce qui a été dit dans le cas de quatre homologies telles qu'aucun sommet ne retrouve le même homologue serait intéressant à reprendre ici, mais les triangles qui interviennent étant imaginaires, nous ne pousserons pas l'étude plus loin (bien que cette configuration imaginaire puisse conduire à des applications réelles, mais nous n'en connaissons pas). On trouverait des systèmes de triangles ayant, par couples, six homologies. *Une forme réduite de cette figure doit être signalée* : ABC triangle équilatéral, A_1 centre de ce triangle, B_1 et C_1 points cycliques du plan; la figure admet évidemment AA_1 , BA_1 , CA_1 , pour axes de symétrie, de sorte que l'on aperçoit aussitôt deux homologies de même axe AA_1 , deux autres de même axe BA_1 , et deux autres d'axe CA_1 .

8. Quand on passe à l'espace à quatre dimensions, les circonstances se modifient beaucoup; deux tétraèdres *quelconques* mettent en jeu 24 paramètres; pour deux tétraèdres homologiques, on peut choisir les sommets A, B, C, D du premier, le pôle S arbitrairement, puis les sommets du second respectivement sur SA, SB, SC, SD, ce qui fait un total de 19 paramètres; on trouve donc cinq conditions pour réaliser l'homologie, au lieu d'une seule dans le plan. Bien que ces décomptes ne soient pas une indication absolue, cela fait comprendre que le nombre d'homologies possibles, quand on joint un à un les sommets des deux tétraèdres, risque de ne pouvoir être très élevé : nous montrerons qu'il ne peut s'élever que jusqu'à *quatre*. Comme précédemment, nous devons faire état de l'homographie générale de l'espace à trois dimensions, de sorte qu'en réalité nous devons nous borner à 9 *paramètres (au lieu de 24) comme nombre des paramètres disponibles*, susceptibles d'être liés entre eux par certaines conditions [autrement dit on donne à A, B, C, D, A' des positions initiales choisies une fois pour toutes et l'on ne dispose plus que de B', C', D'].

Si nous prenons le tétraèdre A'B'C'D', réciproque par rapport à une quadrique Q d'un tétraèdre donné ABCD, *ces deux*

tétraèdres ne sont pas homologiques, contrairement à ce qui se passe pour deux triangles réciproques vis-à-vis d'une conique : en effet, ABCD et Q font intervenir $12 + 9$, ou 21 paramètres *métriques*, tandis que deux tétraèdres homologiques ne font intervenir que 19 paramètres métriques. On forme d'ailleurs aisément les deux conditions que doivent vérifier mutuellement ABCD et Q pour que l'homologie ait lieu entre ABCD et A'B'C'D'. Il est bon de remarquer aussi que si deux tétraèdres sont polaires réciproques vis-à-vis d'une quadrique Q, cette quadrique est *unique*, sinon on aurait deux quadriques avec huit points distincts chacun ayant même plan polaire par rapport aux deux quadriques. *Il n'y a d'exception que si l'on prend deux quadriques se raccordant le long d'une conique ou se coupant suivant un quadrilatère gauche*; dans le premier cas si ABC, A'B'C' sont deux triangles du plan de la conique de raccord et polaires réciproques par rapport à cette conique, et si D et D' sont confondus avec le sommet du cône circonscrit le long de la conique, les deux tétraèdres ABCD, A'B'C'D' sont polaires réciproques par rapport à toutes les quadriques du faisceau défini par les deux premières; ils sont homologiques par rapport au pôle d'homologie de ABC et A'B'C'. Dans le second cas, soit $\alpha\beta\gamma\delta$ le quadrilatère gauche commun aux deux quadriques; A et B' d'une part, A' et B de l'autre sont deux points conjugués par rapport à $\alpha\gamma$, extrémités d'une diagonale du quadrilatère; de même C et D', puis C' et D sont conjugués, par rapport à $\beta\delta$; les deux tétraèdres ABCD et A'B'C'D' sont réciproques par rapport à toutes les quadriques contenant $\alpha\beta\gamma\delta$; ils ne sont pas homologiques. Si l'on considère les droites AA', BB', CC', DD', on constate aisément qu'*elles appartiennent à une même semi-quadrique*. Convenons de dire que deux tétraèdres sont en *situation hyperboloïdale* si les droites AA', BB', CC', DD' sont génératrices d'une même semi-quadrique; il est facile de voir que deux tels tétraèdres dépendent, au total, de vingt et un paramètres : en effet, on choisit une quadrique (9 paramètres), quatre génératrices d'un même système (4 paramètres), puis, sur chacune un couple de points (8 paramètres). Or, puisque deux tétraèdres réciproques vis-à-vis d'une quadrique sont en situation hyperboloïdale, ils forment, ou un cas

(¹) Voir la note en fin du Mémoire.

particulier de tétraèdres en situation hyperboloïdale, ou le cas *général*. Or, comme le nombre de paramètres est le même, 21, soit pour les couples de tétraèdres en situation hyperboloïdale, soit pour les couples de tétraèdres réciproques par rapport à une quadrique (et que, en plus, il n'y a pas plusieurs espèces de tétraèdres en situation hyperboloïdale), on conclut de là que, *inversement*, deux tétraèdres en situation hyperboloïdale sont réciproques vis-à-vis d'une certaine quadrique, théorème bien simple qui ne semble pas avoir été déjà signalé. Le problème à étudier comme généralisation naturelle de notre étude plane serait donc (1) : chercher les tétraèdres qui offrent le plus de situations hyperboloïdales parmi les vingt-quatre façons différentes de joindre un à un leurs sommets, et non pas étudier les tétraèdres homologues de plusieurs façons.

9. Étudions d'abord le cas de tétraèdres homologues, qui est celui des deux problèmes, cités à l'instant, qui donne le maximum de restrictions, donc le minimum de solutions (du moins à première estime).

Il est clair que si l'on prend dans un même plan P deux triangles ABC, $A_1 B_1 C_1$, les deux tétraèdres ABCD, $A_1 B_1 C_1 D$ où D est un point quelconque, hors de P, ont les mêmes homologues que ABC et $A_1 B_1 C_1$, car la droite DD₁ est indéterminée. Nous écartons donc un tel cas banal, où l'on pourrait trouver jusqu'à six homologues.

Nous écartons le cas d'un sommet confondu (par dualité, le cas d'une face portée par le même plan dans les deux tétraèdres), le cas d'une arête confondue (à titre de droite indéfinie), le cas où simultanément deux sommets homologues sont confondus, les faces opposées ayant même plan support.

Pour simplifier la recherche nous dirons que deux homologues

(1) Étant donnés deux tétraèdres quelconques ABCD, A'B'C'D' les deux systèmes de quatre droites : AA', BB', CC', DD' joignant les sommets homologues, puis (BCD, B'C'D'), (CDA, C'D'A'), (DAB, D'A'B'), (ABC, A'B'C') communes aux faces homologues ont les mêmes invariants. Si le premier système est formé de droites concourantes, le second est formé de droites coplanaires; si le premier système est formé de quatre génératrices d'une semi-quadrique, il en est de même du second.

du type

A	B	C	D
A ₁	B ₁	C ₁	D ₁

A	B	C	D
A ₁	*	*	*

où A₁ est le seul à avoir conservé le même homologue n'intéresse que A, ou encore n'intéresse que BCD, car le groupe BCD a conservé — en *bloc* — les mêmes homologues.

Autrement dit nous considérons deux homologies qui intéressent un groupe de

a. 4 sommets, exemple

A	B	C	D
A ₁	B ₁	C ₁	D ₁

A	B	C	D
B ₁	C ₁	D ₁	A ₁

b. 3 sommets (ou 1), exemple

A	B	C	D
A ₁	B ₁	C ₁	D ₁

A	B	C	D
A ₁	C ₁	D ₁	B ₁

c. 2 sommets, exemple

A	B	C	D
A ₁	B ₁	C ₁	D ₁

A	B	C	D
B ₁	A ₁	D ₁	C ₁

Nous allons voir que seules les homologies du dernier type sont possibles.

Pour le premier, on voit aisément qu'il n'y a qu'un schéma à étudier ⁽¹⁾; car A, dans la seconde homologie, a un correspondant autre que A₁, et un simple changement de notations permet de supposer que c'est B₁; mais alors B a, dans la seconde, un homologue qui n'est pas B₁, et qui n'est pas non plus A, (sinon les

(1) Une autre façon d'expliquer le résultat est de montrer qu'une correspon-

dance telle que

A	B	C	D
C ₁	D ₁	B ₁	A ₁

 peut s'écrire

A	C	B	D
C ₁	B ₁	D ₁	A ₁

 où la seconde ligne résulte bien du décalage de la première d'un rang vers la gauche, et l'on fait le changement de notations à ce moment.

deux homologies intéresseraient le groupe AB); on peut donc choisir les noms de sorte que l'homologue de B s'appelle C_1 plutôt que D_1 ; ensuite C ne peut avoir ni A_1 , ni B_1 , ni C_1 pour homologue dans la seconde homologie, mais simplement D_1 . Si donc nous indiquons les centres O, O_1 des deux homologies, puis A et A_1 alignés avec O , on voit que par des alignements successifs avec O ou O_1 et un sommet déjà indiqué, tous les points B_1, C_1, D_1, C, D viendraient successivement dans le plan OO_1A ; nous écartons le cas de tétraèdres aplatis.

Dans le second cas, on donnera la droite OO_1AA_1 avec la position de ces quatre points sur la droite, et le point B ; des alignements feraient venir successivement les sommets tous dans le plan OO_1B .

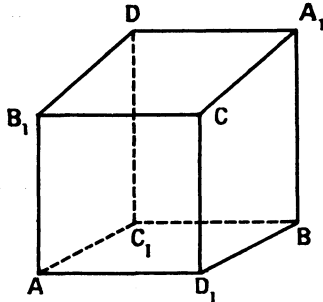


Fig. 6.

Il ne reste donc que le dernier cas qui est immédiat : on donne deux points O et O_1 arbitraires (6 paramètres), on choisit un plan passant par OO_1 (1 paramètre); on mène deux droites par O dans ce plan, deux autres par O_1 (4 paramètres) et l'on marque A, B, A_1, B_1 aux points où ces droites se rencontrent (A et A_1 sur un même rayon issu de O , B et B_1 aussi, en mettant les noms de sorte que A, B_1 soient alignés avec O_1 et A_1 et B aussi). On a de même 5 paramètres pour obtenir C, D, C_1, D_1 . On a engagé successivement $6 + 5 + 5$ ou 16 paramètres; il reste un seul invariant homographique; on peut remarquer que AB et A_1B_1 percent OO_1 en deux points α et α_1 conjugués par rapport à OO_1 ; de même CD et C_1D_1 percent OO_1 en un autre couple γ, γ_1 conjugué par rapport à OO_1 ; le birapport $(OO_1\alpha\gamma)$, par exemple,

est l'invariant homographique signalé. On écarterait le cas où γ coïncide avec α , car ABCD seraient dans un même plan (mais il y aurait néanmoins encore 2 homologies); d'ailleurs γ_1 coïnciderait avec α_1 .

Mais on peut prendre le cas où γ_1 coïncide avec α et par suite α_1 avec γ . C'est le cas qui peut, par homographie, s'obtenir avec un parallélépipède où AB et CD sont les diagonales non parallèles de deux faces parallèles et A_1, B_1, C_1, D_1 les symétriques de A, B, C, D par rapport au centre du parallélépipède (*fig. 6*). On a alors quatre homologies

<table style="border-collapse: collapse; width: 100%;"> <tr><td>A</td><td>B</td><td>C</td><td>D</td></tr> <tr><td>A_1</td><td>B_1</td><td>C_1</td><td>D_1</td></tr> </table>	A	B	C	D	A_1	B_1	C_1	D_1	<table style="border-collapse: collapse; width: 100%;"> <tr><td>A</td><td>B</td><td>C</td><td>D</td></tr> <tr><td>B_1</td><td>A_1</td><td>D_1</td><td>C_1</td></tr> </table>	A	B	C	D	B_1	A_1	D_1	C_1
A	B	C	D														
A_1	B_1	C_1	D_1														
A	B	C	D														
B_1	A_1	D_1	C_1														
<table style="border-collapse: collapse; width: 100%;"> <tr><td>A</td><td>B</td><td>C</td><td>D</td></tr> <tr><td>C_1</td><td>D_1</td><td>A_1</td><td>B_1</td></tr> </table>	A	B	C	D	C_1	D_1	A_1	B_1	<table style="border-collapse: collapse; width: 100%;"> <tr><td>A</td><td>B</td><td>C</td><td>D</td></tr> <tr><td>D_1</td><td>C_1</td><td>B_1</td><td>A_1</td></tr> </table>	A	B	C	D	D_1	C_1	B_1	A_1
A	B	C	D														
C_1	D_1	A_1	B_1														
A	B	C	D														
D_1	C_1	B_1	A_1														

Il n'y a plus d'invariant homographique.

Les quatre centres d'homologie forment un tétraèdre $T(\alpha\beta\gamma\delta)$ arbitraire; un point A choisi arbitrairement donne, dans les homologies involutives relatives à un sommet de T et à la face opposée des homologues A_1, B_1, C_1, D_1 ; B, C, D sont les homologues de A dans les involutions biaxiales ayant pour directrices deux arêtes opposées de T. On voit que deux homologies donnent huit conditions et non dix et que quatre homologies donnent neuf conditions et non vingt.

Une discussion analogue se ferait pour deux $(p + 1)$ — èdres pris dans un même espace linéaire à p dimensions. La parité de p joue un rôle fondamental; et en même temps le lien avec les groupes d'homographies apparaît clairement.

10. Nous allons maintenant traiter le cas des *tétraèdres en situation hyperboloidale*. Rappelons que, si l'on donne deux tétraèdres ABCD, $A_1B_1C_1D_1$, les quatre droites AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 ont deux invariants homographiques, à savoir les birapports qu'elles interceptent sur leurs deux sécantes communes (si chacune est tangente à la semi-quadrique déterminée par les trois autres, ces deux birapports sont égaux; si elles appartiennent à une même

semi-quadrique, ces deux birapports sont encore égaux, mais, de plus, il y a une même relation linéaire et homogène entre les coordonnées plückériennes de même rang des quatre droites). Si l'on prend les quatre droites d'intersection des faces homologues $(BCD, B_1C_1D_1)$, $(CDA, C_1D_1A_1)$, $(DAB, D_1A_1B_1)$, $(ABC, A_1B_1C_1)$ on obtient un système équivalent, par homographie ou corrélation, au précédent, car les deux invariants sont les mêmes (en particulier si les quatre premiers rayons sont concourants, les quatre derniers sont coplanaires; si les quatre premiers ont une sécante commune double, les quatre derniers aussi; si les quatre premiers appartiennent à une même semi-quadrique, les quatre derniers aussi).

Nous cherchons donc combien de situations hyperboloïdales peuvent offrir $ABCD, A_1B_1C_1D_1$. Deux voies s'offrent au chercheur et peuvent conduire toutes deux au résultat; l'une ne fait intervenir que les notions les plus élémentaires de géométrie dans l'espace, la seconde fait intervenir les biquadratiques et leur représentation paramétrique par fonctions elliptiques; mais la réunion des deux méthodes est précieuse pour éviter les tâtonnements inutiles. Nous commencerons par le second procédé.

Nous devons, en tous cas, signaler une *situation hyperboloïdale dégénérée* qui s'introduira, dès que nous cesserons de faire de la géométrie et que nous nous fierons au calcul. *Si quatre droites sont génératrices d'une semi-quadrique, il existe ∞^1 droites les rencontrant toutes quatre, à savoir les génératrices de la semi-quadrique complémentaire.* Mais ce cas n'est pas le seul où quatre droites D_1, D_2, D_3, D_4 admettent ∞^1 sécantes communes: supposons par exemple que D_1 et D_2 se rencontrent en un point α et par suite soient contenues dans un même plan π ; il y a ∞^1 droites qui remontent D_1, D_2 et D_3 sans rencontrer D_4 , à savoir les droites issues de α dans le plan (α, D_3) ; pour que ces droites rencontrent automatiquement D_4 , il est nécessaire et suffisant que D_4 soit dans ce plan, autrement dit que D_3 et D_4 soient aussi concourantes en un point α_1 , tandis que le plan π_1 de D_3 et D_4 passe en α ; en renversant le rôle des couples (D_1, D_3) et (D_3, D_4) , on voit qu'une droite Δ rencontrant trois des droites D_1, D_2, D_3, D_4 ne rencontre sûrement la dernière que si la droite joignant α et α_1 est en même temps la droite commune aux

plans π et π_1 : cette condition est de nature dualistique. Or, pour exprimer que quatre droites appartiennent à une même semi-quadrrique, nous écrirons qu'il existe une même relation linéaire et homogène entre leurs coordonnées plückériennes et l'on voit aisément que cette méthode ne sépare pas les situations hyperboloidales normales des situations dégénérées.

Commençons par les explications géométriques en écartant les situations dégénérées : s'il existe deux situations différentes, il y a ou 2, ou 1, ou 0 sommets du premier tétraèdre qui ont même homologue dans les deux situations (car *trois* entraînerait *quatre*, et alors les situations ne seraient pas différentes). Nous avons donc les divers cas :

a.

A	B	C	D
A ₁	B ₁	C ₁	D ₁

A	B	C	D
A ₁	B ₁	D ₁	C ₁

Nous dirons que ce cas *concerne séparément* A, B.

b.

A	B	C	D
A ₁	B ₁	C ₁	D ₁

A	B	C	D
A ₁	C ₁	D ₁	B ₁

Ce couple de situations *concerne* A.

c.

A	B	C	D
A ₁	B ₁	C ₁	D ₁

A	B	C	D
B ₁	A ₁	D ₁	C ₁

Ce couple *concerne* (AB), et par suite (C D), parce que le bloc (AB) a conservé les mêmes homologues en bloc; on aurait pu dire, pour la même raison, que le cas (a) concerne séparément A, B, (CD), que le cas (b) concerne A et (BCD) séparément.

d.

A	B	C	D
A ₁	B ₁	C ₁	D ₁

A	B	C	D
B ₁	C ₁	D ₁	A ₁

Ce cas *concerne* les quatre sommets (en bloc). Quand il n'y a que deux situations, nous pouvons choisir les notations de façon à obtenir les schémas qui précèdent : c'est évident pour (a), (b), (c).

Pour (*d*), nous prenons au hasard un sommet du premier tétraèdre, nous l'appelons A et appelons A₁, B₁ ses homologues dans la première et seconde situation; B est alors le sommet du premier tétraèdre homologue de B₁ dans la première situation; B a pour homologue dans la seconde situation un sommet qui n'est ni A₁ ni B₁, et que nous appelons C₁; à C₁ correspond C dans la première situation et notre choix des noms est alors achevé.

Si nous avons deux situations (non dégénérées), deux quadriques proprement dites entrent en jeu; leur courbe d'intersection contient les huit sommets; nous voyons donc que divers cas peuvent se présenter suivant que les huit sommets déterminent une seule biquadratique [non décomposée ou décomposée] et par suite ∞¹ quadriques, ou suivant qu'ils déterminent ∞² quadriques et ∞² biquadratiques (le nombre précis de biquadratiques décomposées pourra jouer un rôle important).

Si donc nous envisageons le cas (*a*), les deux quadriques mises en jeu ont deux génératrices AA₁, BB₁ communes; le reste de leur intersection se trouve donc sur deux droites rencontrant AA₁, BB₁; l'une porte CD, l'autre C₁D₁; CD coupe AA₁ en α, BB₁ en β; C₁D₁ coupe AA₁ en α₁ et BB₁ en β₁; nous pouvons, *a priori*, choisir le quadrilatère gauche αββ₁α₁; nous prenons C et D conjugués harmoniques par rapport à α et β et de même C₁, D₁ conjugués par rapport à α₁ et β₁; de la sorte

$$(\alpha\beta CD) = (\alpha_1\beta_1 C_1 D_1) = (\alpha_1\beta_1 D_1 C_1) = -1,$$

et les quatre droites αα, ββ₁, CC₁, DD₁ appartiennent à une même quadrique, et de même αα₁, ββ₁, CD₁, DC₁; nous choisissons au hasard A et A₁ sur αα₁, B et B₁ sur ββ₁; le nombre de paramètres arbitraires est dix-huit; il y a trois invariants homographiques (par exemple les birapports ααAA₁, ββ₁BB₁ et le nouveau birapport ainsi obtenu : la quadrique déterminée par αα₁, ββ₁, CC₁ possède une génératrice de système opposé, issue de A₁, recoupant ββ₁ en B'₁; on prend le birapport ββ₁BB'₁). On peut aisément obtenir une configuration avec trois situations de ce genre, en reprenant la construction qui précède et choisissant A seul au hasard sur αα₁; A₁ est le conjugué de A par rapport à αα₁; on prend pour droite AB ou droite A₁B₁ les génératrices issues de A, A₁, sur la quadrique αα₁, ββ₁, CC₁, de

système opposé à $\alpha\alpha_1$. Et alors on a les situations

A	B	C	D
A ₁	B ₁	C ₁	D ₁

A	B	C	D
A ₁	B ₁	D ₁	C ₁

A	B	C	D
B ₁	A ₁	C ₁	D ₁

Cette fois il n'y a plus d'invariant homographique; la réunion des situations de rang 2 et 3 appartient au type (c). C'est un cas où la réunion des trois situations entraîne neuf conditions qui ne se réduisent pas; les huit sommets appartiennent à deux biquadratiques dégénérées distinctes (l'une est formée par les droites AA₁, BB₁, CD, C₁D₁, l'autre par AB, A₁B₁, CC₁, DD₁), de sorte que ces huit points déterminent un réseau de quadriques. On peut dire que *les deux quadrilatères gauches que nous venons de mettre en évidence sont tracés sur une même quadrique et se divisent harmoniquement* (les quatre génératrices de même système se divisant harmoniquement).

Dans le cas (b), les deux quadriques en jeu se coupent suivant la droite AA₁ et une cubique (dégénérée ou non) recoupant AA₁ en deux points, réels ou non. Il est facile de traiter synthétiquement, en nous bornant au cas précis de trois situations (et non davantage). *Nous prenons quatre points B, C, D, B₁ arbitraires sur une cubique gauche Γ ; les paramètres de B, C, D sur la cubique sont racines d'une équation de degré 3 dont le hessien détermine sur Γ deux points α et α_1 ; A et A₁ sont deux points arbitraires de la corde $\alpha\alpha_1$; la quadrique Q, déterminée par Γ et les cordes $\alpha\alpha_1$ et BB₁, donne en C, D des génératrices de même système que $\alpha\alpha_1$, recoupant Γ en C₁, D₁. On voit tout de suite que l'on a les situations*

A	B	C	D
A ₁	B ₁	C ₁	D ₁

A	B	C	D
A ₁	C ₁	D ₁	B ₁

A	B	C	D
A ₁	D ₁	B ₁	C ₁

car on peut choisir le paramètre de sorte que α et α_1 correspondent à 0 et ∞ ; si B et B₁ correspondent à t_1 et t'_1 , les paramètres de C et C₁ sont jt_1 , $j^2t'_1$, ceux de D et D₁ j^2t_1 et jt'_1 ; les trois quadriques que l'on trouve correspondent aux involutions $TT' = t_1t'_1$, ou $jt_1t'_1$, ou $j^2t_1t'_1$; si B, C, D sont réels, la corde $\alpha\alpha_1$ est réelle mais α et α_1 sont imaginaires conjugués; si α et α_1 sont réels, un

seul point du système BCD est réel. Le nombre de paramètres est $12 + 4 + 2 = 18$; il y a trois invariants homographiques qui sont, par exemple, le birapport des paramètres de B, C, D et B₁ et ensuite les birapports déterminés par A ou A₁ avec les points où la droite $\alpha\alpha_1$ perce les plans osculateurs à Γ en B, C, D.

Supposons que les huit points ABCD, A₁B₁C₁D₁ n'offrent pas la configuration précédente et déterminent une seule biquadratique \mathcal{B} indécomposée non unicursale (sans point double). Nous savons que nous ne pouvons avoir les cas (a), (b); cherchons à réaliser le cas (c) ou le cas (d). Nous savons aussi que *le nombre de situations ne pourra dépasser quatre* sinon il y aurait nécessairement deux situations offrant pour le sommet A le même homologue A₁ et l'on retrouverait deux quadriques dont l'intersection comprend une ou deux génératrices. Sur cette biquadratique \mathcal{B} , nous choisissons un paramètre elliptique u , tel que la condition $u_1 + u_2 + u_3 + u_4 = 0$ exprime que les quatre points correspondants sont dans un plan. Si donc a est une constante arbitraire, $u_1 + u_2 = a$ définit, quand u_1 varie, une semi-quadrique engendrée par la corde $u_1 u_2$; et $u_3 + u_4 = -a$ définit la semi-quadrique complémentaire, car nous avons deux surfaces réglées telles que chaque génératrice de l'une rencontre toutes les génératrices de l'autre.

Supposons donc que l'on ait les deux situations indiquées au type (c). Si u_1, u_2, u_3, u_4 sont les paramètres de A, B, C, D, en vertu de la première situation ceux de A₁, B₁, C₁, D₁ sont respectivement $a - u_1, a - u_2, a - u_3, a - u_4$ où a est une certaine constante. En vertu de la seconde situation on a

$$u_1 + a - u_2 = u_2 + a - u_1 = u_3 + a - u_4 = u_4 + a - u_3,$$

ou

$$2(u_2 - u_1) = 0$$

(à un multiple près des périodes bien entendu). Si l'on appelle les périodes $2\omega, 2\omega'$ on peut choisir les notations de sorte que $u_2 = u_1 + \omega$; $u_4 - u_3$ est égale à $u_2 - u_1$, donc $u_4 = u_3 + \omega$. Nous avons ainsi réalisé très intuitivement les deux situations

u_1	$u_1 + \omega$	u_3	$u_3 + \omega$
$a - u_1$	$a - u_1 + \omega$	$a - u_3$	$a - u_3 + \omega$

et

u_1	$u_1 + \omega$	u_3	$u_3 + \omega$
$a - u_1 + \omega$	$a - u_1$	$a - u_3 + \omega$	$a - u_3$

Si S_1, S_2, S_3, S_4 sont les sommets des quatre cônes du second degré contenant \mathcal{B} , les génératrices de ces cônes issues du point u_1 donnent sur la biquadratique les nouveaux points $-u_1, -u_1 + \omega, -u_1 + \omega', -u_1 + \omega + \omega'$, de sorte que les deux points $u_1, u_1 + \omega$ se correspondent dans l'involution biaxiale d'axes $S_1 S_2, S_3 S_4$; A et B se correspondent, C et D aussi, puis A_1 et B_1, C_1 et D_1 . La configuration dépend de $16 + 2 + 1$ ou 19 paramètres (16 pour \mathcal{B} , 2 pour choisir A, C, 1 pour choisir A_1). En général il n'y a que ces deux situations.

Nous allons voir que si l'on réalise la situation nouvelle ⁽¹⁾, intéressant (AC) on a automatiquement la quatrième situation concernant (AD). En effet, pour obtenir la troisième situation, on doit écrire

$$u_1 + a - u_3 = u_3 + a - u_1 = u_1 + a - u_3 = u_3 + a - u_1,$$

ce qui se réduit à

$$2(u_3 - u_1) = 0,$$

et puisque l'on ne doit pas prendre $u_3 = u_1 + \omega$ qui ferait coïncider C et B, on prend $u_3 = u_1 + \omega'$, de sorte que $u_4 = u_1 + \omega + \omega'$. On voit que B, C, D dérivent de A par les involutions biaxiales relatives aux couples d'arêtes opposées du tétraèdre $S_1 S_2 S_3 S_4$. Nous pouvons exposer le résultat intuitivement, sans employer la théorie des biquadratiques.

La configuration fournissant quatre situations biaxiales dont deux quelconques concernent deux sommets s'obtient en choisissant arbitrairement un tétraèdre $S_1 S_2 S_3 S_4$ et deux points A, A_1 ; B, C, D sont les homologues de A (et B_1, C_1, D_1 ceux de A_1) dans les involutions biaxiales relatives aux couples d'arêtes opposées du tétraèdre. La configuration dépend de 18 paramètres métriques.

⁽¹⁾ Nous associons chaque situation nouvelle à la première situation, afin de pouvoir définir les sommets concernés par un couple de situations.

Dans le cas particulier où A_1 est homologue de A dans l'homologie involutive dont un sommet S_1, S_2, S_3, S_4 est pôle, le plan directeur correspondant étant la face opposée, les quatre situations sont les homologues déjà signalées en étudiant les tétraèdres homologiques (les huit points déterminent un réseau de quadratiques). Nous retrouverons cette situation en étudiant les situations dégénérées.

Étudions maintenant deux situations du cas (d). Nous trouvons alors automatiquement les quatre situations

<table style="border-collapse: collapse; width: 100%;"> <tr><td style="padding: 2px 10px;">A</td><td style="padding: 2px 10px;">B</td><td style="padding: 2px 10px;">C</td><td style="padding: 2px 10px;">D</td></tr> <tr><td style="padding: 2px 10px;">A₁</td><td style="padding: 2px 10px;">B₁</td><td style="padding: 2px 10px;">C₁</td><td style="padding: 2px 10px;">D₁</td></tr> </table>	A	B	C	D	A ₁	B ₁	C ₁	D ₁	<table style="border-collapse: collapse; width: 100%;"> <tr><td style="padding: 2px 10px;">A</td><td style="padding: 2px 10px;">B</td><td style="padding: 2px 10px;">C</td><td style="padding: 2px 10px;">D</td></tr> <tr><td style="padding: 2px 10px;">B₁</td><td style="padding: 2px 10px;">C₁</td><td style="padding: 2px 10px;">D₁</td><td style="padding: 2px 10px;">A₁</td></tr> </table>	A	B	C	D	B ₁	C ₁	D ₁	A ₁
A	B	C	D														
A ₁	B ₁	C ₁	D ₁														
A	B	C	D														
B ₁	C ₁	D ₁	A ₁														
<table style="border-collapse: collapse; width: 100%;"> <tr><td style="padding: 2px 10px;">A</td><td style="padding: 2px 10px;">B</td><td style="padding: 2px 10px;">C</td><td style="padding: 2px 10px;">D</td></tr> <tr><td style="padding: 2px 10px;">C₁</td><td style="padding: 2px 10px;">D₁</td><td style="padding: 2px 10px;">A₁</td><td style="padding: 2px 10px;">B₁</td></tr> </table>	A	B	C	D	C ₁	D ₁	A ₁	B ₁	<table style="border-collapse: collapse; width: 100%;"> <tr><td style="padding: 2px 10px;">A</td><td style="padding: 2px 10px;">B</td><td style="padding: 2px 10px;">C</td><td style="padding: 2px 10px;">D</td></tr> <tr><td style="padding: 2px 10px;">D₁</td><td style="padding: 2px 10px;">A₁</td><td style="padding: 2px 10px;">B₁</td><td style="padding: 2px 10px;">C₁</td></tr> </table>	A	B	C	D	D ₁	A ₁	B ₁	C ₁
A	B	C	D														
C ₁	D ₁	A ₁	B ₁														
A	B	C	D														
D ₁	A ₁	B ₁	C ₁														

(la première et la deuxième concernent les quatre sommets, de même les situations 1-4, ou 2-3, ou 3-4, tandis que les situations 1-3, 2-4 concernent le couple AC du premier tétraèdre). Nous avons, en effet,

$$u_1 + a - u_2 = u_2 + a - u_3 = u_3 + a - u_4 = u_4 + a - u_1.$$

Ces quatre quantités sont égales; leur somme vaut $4a$, donc chacune vaut a , à un quart de période près, $-\left(\frac{m}{2}\omega + \frac{n}{2}\omega'\right)$. Si l'on désigne, pour abrégier, par α la quantité $\frac{m}{2}\omega + \frac{n}{2}\omega'$, on a

$$u_2 = u_1 + \alpha, \quad u_3 = u_1 + 2\alpha, \quad u_4 = u_1 + 3\alpha, \quad \alpha = \frac{m}{2}\omega + \frac{n}{2}\omega'.$$

Les entiers m, n peuvent prendre les valeurs $-1, 0, 1, 2$ indépendamment l'un de l'autre; $\alpha = 0$ doit être rejeté, ainsi que $\alpha = \omega, \omega + \omega', \omega'$; il ne reste que douze valeurs distinctes pour α . D'une façon générale, une biquadratique admet un groupe de trente-deux transformations homographiques ⁽¹⁾ en elle-même faisant cor-

⁽¹⁾ Voir mon Mémoire : *Sur les Transformations homographiques d'une biquadratique en elle-même* (Journal de Math., XII, 1933, p. 309-336).

respondre au point u le point $\pm u + \frac{m}{2}\omega + \frac{n}{2}\omega'$; les transformations $(u, u + \frac{m}{2}\omega + \frac{n}{2}\omega')$ forment un sous-groupe à seize éléments. La correspondance $(u, u + \lambda)$ fournit des cordes engendrant (λ constant, u variable) une surface réglée algébrique de degré 8; pour $\lambda = \frac{m}{2}\omega + \frac{n}{2}\omega'$, la surface admet ∞^1 quadrilatères gauches, formés par des génératrices, ayant leurs sommets sur \mathcal{B} ; on choisit deux de ces quadrilatères, et nos tétraèdres sont ainsi obtenus. *On a donc dix-huit paramètres au total.*

Les deux types à quatre situations que nous avons ainsi obtenus sont des spécialisations du type (b) (deux situations concernant un couple); en effet, 2α est bien une demi-période, $m\omega + n\omega'$, et $u_3 = u_1 + m\omega + n\omega'$. Quand les huit sommets sont sur une biquadratique unique, non décomposée, nous avons épuisé tous les résultats : zéro, une, deux, quatre situations possibles (quatre étant obtenu de deux façons différentes). Mais si la biquadratique se décompose (avec une droite comme morceau de décomposition particulier) on peut obtenir d'autres cas. Si les huit points définissent un réseau de quadriques, il y a ∞^2 biquadratiques contenant les huit sommets : or, si l'on doit n'obtenir que deux situations au plus, notre analyse épuise les résultats, car il y a au plus deux semi-quadriques à intervenir et leur intersection est une biquadratique à laquelle s'appliquent nos constructions; mais on pourrait craindre l'existence d'une configuration telle que la suivante : trois situations s_1, s_2, s_3 , les quadriques correspondantes Q_1, Q_2, Q_3 non contenues dans un même faisceau; (s_2, s_3) conduisent à une biquadratique \mathcal{B}_{23} à laquelle s'applique la construction du type (c); de même (s_3, s_1) donnent \mathcal{B}_{13} et (s_1, s_2) \mathcal{B}_{12} ; ce que nous avons expliqué pour \mathcal{B}_{23} ne permet, en aucune façon de prévoir les particularités que les points ABCD et $A_1B_1C_1D_1$ peuvent offrir sur \mathcal{B}_{13} . Soit encore une autre configuration : supposons qu'il existe deux configurations s_1, s_2 relatives à une biquadratique \mathcal{B}_{12} intersection des deux quadriques Q_1, Q_2 fournies par s_1, s_2 , puis deux configurations s_3, s_4 relatives à deux quadriques Q_3, Q_4 et une autre biquadratique \mathcal{B}_{34} , notre analyse ne nous renseigne pas. D'autre part, quand les huit sommets définissent un réseau de quadriques et ∞^2 biquadratiques, il peut

arriver que, parmi ces biquadratiques figurent un nombre fini de courbes décomposées (nous en verrons un exemple plus bas).

En tous cas, nous sommes partis d'une première situation

A	B	C	D
A ₁	B ₁	C ₁	D ₁

, pour laquelle la somme des arguments des

sommets d'un même couple vaut α , donc la somme des huit arguments vaut 4α ; chaque fois que 4α est une période, nous sommes dans le cas critique où les huit points déterminent ∞^2 quadriques et ∞^2 biquadratiques. Un exemple très simple (et très particulier) (*fig. 7*) se présente en prenant pour ABCD les sommets consé-

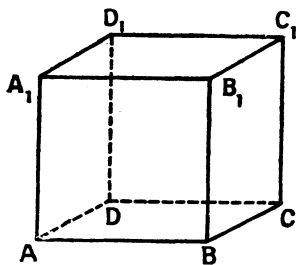


Fig. 7.

cutifs d'une base d'un parallélépipède (un cube pour fixer les idées), AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 étant parallèles entre eux; on a les quatre situations du type (*d*), la première est une homologie ainsi que la troisième, la seconde et la troisième donnent deux semi-quadriques complémentaires; ceci est une propriété générale: sur une quadrique donnée, traçons deux quadrilatères gauches (AB_1CD_1) et (A_1BC_1D) tels que AB_1 et A_1B soient de système opposé; les tétraèdres ABCD et $A_1B_1C_1D_1$ offrent manifestement les deux situations hyperboloïdales

A	B	C	D
B ₁	C ₁	D ₁	A ₁

A	B	C	D
D ₁	A ₁	B ₁	C ₁

[qui sont bien du type (*c*) concernant le couple (AC) ou le couple BD]. On réalise ainsi deux tétraèdres offrant deux situations hyperboloïdales avec deux semi-quadriques complémen-

taires. Cette configuration dépend de dix-sept paramètres, et il est très remarquable que (sauf changement de notations) cette configuration soit précisément celle que nous avons signalée plus haut, type (c), si la constante a , employée à cet endroit, reçoit la valeur $-\frac{\omega}{2}$. Il suffit en effet d'écrire les schémas (avec les notations employées à l'endroit cité)

$\Lambda(u_1)$	$B(u_1 + \omega)$	$C(u_3)$	$D(u_3 + \omega)$
$\Lambda_1\left(-\frac{\omega}{2} - u_1\right)$	$B_1\left(-u_1 + \frac{\omega}{2}\right)$	$C_1\left(-\frac{\omega}{2} - u_3\right)$	$D_1\left(-u_3 + \frac{\omega}{2}\right)$

Cette situation est relative à la semi-quadrique $\left(-\frac{\omega}{2}\right)$; l'autre schéma

$\Lambda(u_1)$	$B(u + \omega)$	$C(u_3)$	$D(u_3 + \omega)$
$B_1\left(-u_1 + \frac{\omega}{2}\right)$	$A_1\left(-\frac{\omega}{2} - u_1\right)$	$D_1\left(-u_3 + \frac{\omega}{2}\right)$	$C_1\left(-\frac{\omega}{2} - u_3\right)$

fournit la situation relative à la semi-quadrique $\left(\frac{\omega}{2}\right)$. Par ce procédé la situation semble faire intervenir dix-huit paramètres (16 pour la biquadratique, 1 pour A, 1 pour C), mais il faut remarquer que nous avons non seulement indiqué la configuration, mais encore *une* biquadratique particulière (dont on aurait pu se dispenser); or, ici les huit points sont bases d'un réseau de quadriques; ils déterminent ∞^2 biquadratiques, sur lesquelles ∞^1 seulement sont susceptibles de donner une représentation conforme au schéma : ce sont les intersections de la quadrique

$$Q(AA_1, BB_1, CC_1, DD_1)$$

avec les quadriques du réseau $\lambda Q + \mu Q_1 + \nu Q_2 = 0$, c'est-à-dire finalement les ∞^1 biquadratiques d'équation $Q = 0, \mu Q_1 + \nu Q_2 = 0$.

Étant donnée une biquadratique \mathcal{B} quelconque, il existe six quadriques dont chacune possède ∞^1 quadrilatères gauches dont les sommets sont sur \mathcal{B} ; elles jouent un rôle important dans la théorie des transformations homographiques de la biquadratique en elle-même et nous les avons retrouvées ici. (Je renvoie à

mon Mémoire déjà cité.) Nous avons, d'autre part, trouvé ce théorème : *deux quadrilatères gauches tracés sur une quadrique déterminent par leurs sommets huit points bases d'un réseau de quadriques, de ∞^2 biquadratiques, dont ∞^1 sont situées sur la quadrique.*

Appliquons au plan ce dernier théorème (il suffit de mettre la quadrique en perspective sur un plan quelconque à partir d'un point de cette quadrique). Nous considérons deux points fixes I, J d'un plan et les quartiques de ce plan ayant I, J pour points doubles; elles dépendent de huit paramètres et, en général, huit points suffisent à déterminer une quartique de ce système; si nous imaginons deux quadrilatères complets différents ayant chacun I et J pour sommets opposés, les huit sommets de ces deux quadrilatères (autres que I, J) déterminent ∞^1 quartiques.

11. Nous allons maintenant faire cette étude par voie élémentaire, ce qui nous permettra, grâce aux renseignements fournis par la méthode transcendante, de signaler un cas où il y a *six situations hyperboloïdales*, dont certaines sont dégénérées. Nous pouvons supposer ABCD choisi comme tétraèdre de référence; les coordonnées des sommets sont ainsi

A	1	0	0	0
B	0	1	0	0
C	0	0	1	0
D	0	0	0	1

A_1	a	b	c	d
B_1	a'	b'	c'	d'
C_1	a''	b''	c''	d''
D_1	a'''	b'''	c'''	d'''

(on pourra ensuite supposer $a = b = c = d = a' = a'' = a''' = 1$, mais pour l'instant c'est inutile et il vaut mieux, pour les permutations de A_1, B_1, C_1, D_1 relatives aux diverses situations, laisser les coordonnées sous la forme générale). Les coordonnées plückériennes de AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 sont ($p_{14}, p_{24}, p_{34}, p_{23}, p_{31}, p_{12}$)

AA_1	d	0	0	0	$-c$	b
BB_1	0	d'	0	c'	0	$-a'$
CC_1	0	0	d''	$-b''$	a''	0
DD_1	$-a'''$	$-b'''$	$-c'''$	0	0	0

La situation hyperboloïdale (ABCD) ($A_1 B_1 C_1 D_1$) s'obtient en exprimant qu'il existe des constantes $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$, telles que l'on ait

$$\begin{aligned} \lambda_1 d - \lambda_4 a''' &= 0, & \lambda_2 c' - \lambda_3 b'' &= 0, \\ \lambda_2 d' - \lambda_4 b''' &= 0, & \lambda_3 a'' - \lambda_1 c &= 0, \\ \lambda_3 d'' - \lambda_4 c''' &= 0, & \lambda_1 b - \lambda_2 a' &= 0. \end{aligned}$$

Les équations de gauche permettent de prendre

$$\lambda_4 = 1, \quad \lambda_1 = \frac{a'''}{d}, \quad \lambda_2 = \frac{b'''}{d'}, \quad \lambda_3 = \frac{c''}{d''},$$

et alors les équations de droite permettent d'écrire les conditions nécessaires et suffisantes

$$(I) \quad \begin{array}{|l} c' d'' b''' = d' b'' c''' \\ d' a'' c''' = c' d'' a''' \\ b' d' a''' = d' a' b''' \end{array} \quad \begin{array}{|l} A \quad B \quad C \quad D \\ A_1 \quad B_1 \quad C_1 \quad D_1 \end{array}$$

D'ailleurs les équations de droite, aux λ , fournissaient aussitôt la relation

$$c' a'' b = b'' c a',$$

conséquence de (I) [on l'a en multipliant les équations (I) membre à membre].

Des équations (I) on déduit aussitôt les conditions nécessaires pour la situation (ABCD) ($B_1 C_1 D_1 A_1$) par exemple, en remplaçant les accents

zéro, prime, seconde, tierce,

par

prime, seconde, tierce, zéro.

Écrivons ainsi le système (II) relatif à cette nouvelle situation

$$(II) \quad \begin{array}{|l} c'' a''' b = d'' b''' c \\ d' a''' c = c' d'' a' \\ b' d'' a = d' a'' b \end{array} \quad \begin{array}{|l} A \quad B \quad C \quad D \\ B_1 \quad C_1 \quad D_1 \quad A_1 \end{array}$$

On a de même

(III)	$\begin{aligned} c'' d b' &= d'' b c' \\ d'' a c' &= c'' d a' \\ b'' d'' a' &= d'' a'' b' \end{aligned}$	<table style="border-collapse: collapse; width: 100%;"> <tr> <td style="padding: 2px 5px;">A</td> <td style="padding: 2px 5px;">B</td> <td style="padding: 2px 5px;">C</td> <td style="padding: 2px 5px;">D</td> </tr> <tr> <td style="padding: 2px 5px;">C₁</td> <td style="padding: 2px 5px;">D₁</td> <td style="padding: 2px 5px;">A₁</td> <td style="padding: 2px 5px;">B₁</td> </tr> </table>	A	B	C	D	C ₁	D ₁	A ₁	B ₁
A	B	C	D							
C ₁	D ₁	A ₁	B ₁							
(IV)	$\begin{aligned} c d' b'' &= d b' c'' \\ d''' a' c'' &= c''' d' a'' \\ b'' d a'' &= d'' a b'' \end{aligned}$	<table style="border-collapse: collapse; width: 100%;"> <tr> <td style="padding: 2px 5px;">A</td> <td style="padding: 2px 5px;">B</td> <td style="padding: 2px 5px;">C</td> <td style="padding: 2px 5px;">D</td> </tr> <tr> <td style="padding: 2px 5px;">D₁</td> <td style="padding: 2px 5px;">A₁</td> <td style="padding: 2px 5px;">B₁</td> <td style="padding: 2px 5px;">C₁</td> </tr> </table>	A	B	C	D	D ₁	A ₁	B ₁	C ₁
A	B	C	D							
D ₁	A ₁	B ₁	C ₁							

On pourrait, sans l'analyse géométrique, être assez long à remarquer que (I) et (II) entraînent (III) et (IV) [c'est le type catalogué (*d*), concernant les quatre sommets]. D'abord trois de ces quatre systèmes entraînent le quatrième, car en multipliant les quatre équations qui sont au même étage, on trouve aux deux membres le produit des quatre lettres *a*, des quatre lettres *b*, des quatre lettres *c*, des quatre lettres *d*. Le produit membre à membre des équations que je représente par (I₂), (II₂) et (II₃) donne précisément (III₁); le produit (I₁), (II₁), (II₂) donne

$$a'' b c'' = a b'' c'',$$

qui est équivalent, comme on l'a remarqué, à une équation (III). Si l'on écrit (I₂), (I₃), (II₁), en renversant l'ordre des deux membres pour cette dernière équation, on a, multipliant membre à membre,

$$\left. \begin{aligned} d a'' c'' &= c d'' a'' \\ b d' a'' &= d a' b'' \\ d'' b'' c &= c'' d'' b \end{aligned} \right\} d' a'' c'' = d'' a' c'',$$

qui est (IV₂), de sorte que (III₂), d'après une remarque faite en découle: nous avons donc eu (III₁), (III₂) et l'équation $a'' b c'' = a b'' c''$ équivalente à (III₃) quand (III₁) et (III₂) sont vérifiées; donc (III) est conséquence de (I), (II); (IV) aussi est conséquence. On vérifie sans peine que (I) et (II) sont composées d'équations distinctes; mais, sans s'embarrasser de ce point, nous pouvons considérer les équations [se réduisant à trois]

$$c' a'' b = b'' c a', \quad c' a'' b' = b'' c' a'', \quad c'' a b'' = b c' a, \quad c a' b'' = b' c'' a,$$

qui permettent d'écrire

$$(1) \quad c' = c \frac{a' b''}{a'' b}, \quad c'' = c \frac{a' b'' b'''}{a''' b b'}, \quad c''' = c \frac{a' b'''}{a b'}.$$

Un calcul semblable, opéré au moyen des équations (I₃), (II₃), (III₃), (IV₃), donne

$$(2) \quad d' = d \frac{a' b'''}{a'' b}, \quad d'' = d \frac{a' a'' b'''}{a a''' b}, \quad d''' = d \frac{a'' b'''}{a b''},$$

et comme on vérifie aussitôt que (I), (II) sont vérifiées, il en résulte bien que l'on avait six équations indépendantes entre les douze quantités du début; nous avons pris les a et b comme variables indépendantes et exprimé $\frac{c'}{c}$, $\frac{c''}{c}$, $\frac{c'''}{c}$, $\frac{d'}{d}$, $\frac{d''}{d}$, $\frac{d'''}{d}$ au moyen de ces expressions. La discussion géométrique transcendante qui a été faite nous a prouvé que l'on peut obtenir ainsi des situations non dégénérées. Si nous envisageons maintenant les quatre situations

A B C D	A B C D
A ₁ B ₁ C ₁ D ₁	B ₁ A ₁ D ₁ C ₁
A B C D	A B C D
C ₁ D ₁ A ₁ B ₁	D ₁ C ₁ B ₁ A ₁

elles conduisent aux systèmes (I), (II'), (III), (IV') où (I) et (III) ont déjà été écrits; (II') se déduit de (I) par échange des accents zéro et prime, seconde et tierce; (IV') d'une façon analogue. On vérifie comme plus haut que (I), (II'), (III), (IV') se réduisent à trois d'entre eux, toujours parce que les équations de même étage multipliées terme à terme donnent une identité. Il est très simple de résoudre les équations (I), (II'), (III), mais cela n'a qu'un intérêt médiocre — d'ailleurs, nous avons donné l'interprétation géométrique — mais ce qui est intéressant, c'est de trouver *un couple de tétraèdres qui offrent les six situations*, obtenues en réunissant les deux cas qui précèdent; la discussion géométrique transcendante faite précédemment ne pouvait nous permettre de conclure, tandis que, maintenant, il suffit d'adjoindre le système (II') aux systèmes (I), (II); ou simplement, il suffit de vérifier

les équations (II')

$$(II') \quad \boxed{\begin{array}{l} c \, d''' \, b'' = d \, b''' \, c'' \\ d' \, a'' \, c'' = c' \, d''' \, a'' \\ b' \, d \, a'' = d' \, a \, b'' \end{array}}$$

en utilisant les formules (1), (2), et cela conduit à l'unique équation complémentaire

$$(3) \quad aa' b' b''' = a'' a''' b b',$$

et cela donne les formules définitives

$$(4) \quad \left\{ \begin{array}{l} a, a', a'', a''', b, b', b'', c, d \text{ arbitraires,} \\ b'' = \frac{a'' a''' b b'}{a a' b''}, \quad c' = c \frac{a' b''}{a'' b}, \quad c'' = c \frac{a''}{a}, \quad c''' = c \frac{a'' a''' b}{a^2 b''}, \\ d' = d \frac{a'' b'}{a b''}, \quad d'' = d \frac{a''^2 b}{a^2 b''}, \quad d''' = d \frac{a''^2 a''' b b'}{a^2 a' b''^2}. \end{array} \right.$$

Il reste, au point de vue homographique, deux arbitraires seulement, car on peut supposer $a, b, c, d, a', a'', a'''$ égaux à l'unité (choisissant A_1 comme point unité et profitant de l'homogénéité).

Le tableau des coordonnées est alors

$$(T) \quad \boxed{\begin{array}{l} A_1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \\ B_1 \quad 1 \quad b' \quad b'' \quad \frac{b'}{b''} \\ C_1 \quad 1 \quad b'' \quad 1 \quad \frac{1}{b''} \\ D_1 \quad 1 \quad \frac{b'}{b''} \quad \frac{1}{b''} \quad \frac{b'}{b''^2} \end{array}}$$

tableau où b', b'' jouent le rôle d'invariants homographiques; écrivons les schémas relatifs aux six situations :

A	B	C	D
A ₁	B ₁	C ₁	D ₁

A	B	C	D
B ₁	C ₁	D ₁	A ₁

A	B	C	D
C ₁	D ₁	A ₁	B ₁

A	B	C	D
D ₁	A ₁	B ₁	C ₁

A	B	C	D
B ₁	A ₁	D ₁	C ₁

A	B	C	D
D ₁	C ₁	B ₁	A ₁

Étudions maintenant chaque situation : les coordonnées plückériennes des droites qui entrent en jeu dans la première situation sont ($p_{13}, p_{24}, p_{34}, p_{23}, p_{31}, p_{12}$) :

$$\begin{array}{rcccccc}
 AA_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\
 BB_1 & 0 & \frac{b'}{b''} & 0 & b'' & 0 & -1 \\
 CC_1 & 0 & 0 & \frac{1}{b''} & -b'' & 1 & 0 \\
 DD_1 & -1 & \frac{-b'}{b''} & \frac{-1}{b''} & 0 & 0 & 0
 \end{array}$$

Les invariants simultanés de deux de ces droites sont ⁽¹⁾ :

$$\begin{array}{l}
 (AA_1, BB_1) \text{ ou } (CC_1, DD_1) \dots\dots\dots b'' - \frac{b'}{b''} \\
 (AA_1, CC_1) \text{ ou } (BB_1, DD_1) \dots\dots\dots \frac{1}{b''} - b'' \\
 (AA_1, DD_1) \text{ ou } (BB_1, CC_1) \dots\dots\dots \frac{b'}{b''} - \frac{1}{b''}
 \end{array}$$

Cette situation ne dégénère que si $(b' - 1)(b' - b''^2)(b''^2 - 1)$ est nul; $b'' = 1$ est à rejeter (A_1 et C_1 seraient confondus, B_1 et D_1 aussi).

Étudions de même la seconde situation et, puisque la méthode a été expliquée, il suffira de donner les invariants simultanés des divers couples d'arêtes : pour la seconde situation

$$\begin{array}{l}
 (AB_1, BC_1) \text{ ou } (CD_1, DA_1) \dots\dots\dots \frac{b'}{b''} - 1 \\
 (AB_1, CD_1) \text{ ou } (BC_1, DA_1) \dots\dots\dots 0 \\
 (AB_1, DA_1) \text{ ou } (BC_1, CD_1) \dots\dots\dots 1 - \frac{b'}{b''}
 \end{array}$$

La seconde situation est dégénérée; de plus, on a en évidence le cas où $b' = b''$: la situation devient alors une homologie.

⁽¹⁾ On sait que les deux invariants homographiques des droites AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 sont les rapports mutuels des quantités $(b'' - \frac{b'}{b''})^2, (\frac{1}{b''} - b'')^2, (\frac{b'}{b''} - \frac{1}{b''})^2$, et le fait que la somme des racines carrées (convenablement choisies) de ces quantités est nulle est une vérification dans le cas actuel.

La troisième situation donne

$$\begin{aligned} (AC_1, BD_1) \text{ ou } (CA_1, DB_1) &\dots\dots\dots \frac{1}{b''} - \frac{b'}{b''} \\ (AC_1, CA_1) \text{ ou } (BD_1, DB_1) &\dots\dots\dots b'' - \frac{1}{b''} \\ (AC_1, DB_1) \text{ ou } (BD_1, CA_1) &\dots\dots\dots \frac{b'}{b''} - b'' \end{aligned}$$

On retrouve les mêmes cas de dégénérescence que pour la première situation. Pour la quatrième situation, on a

$$\begin{aligned} (AD_1, BA_1) \text{ ou } (CB_1, DC_1) &\dots\dots\dots \frac{b'}{b''} - 1 \\ (AD_1, CE_1) \text{ ou } (BA_1, DC_1) &\dots\dots\dots 0 \\ (AD_1, DC_1) \text{ ou } (BA_1, CB_1) &\dots\dots\dots 1 - \frac{b'}{b''} \end{aligned}$$

et l'on retrouve les mêmes valeurs que pour la seconde situation. Pour la cinquième on trouve

$$\begin{aligned} (AB_1, BA_1) \text{ ou } (CD_1, DC_1) &\dots\dots\dots \frac{b'}{b''} - b'' \\ (AB_1, CD_1) \text{ ou } (BA_1, DC_1) &\dots\dots\dots 0 \\ (AB_1, DC_1) \text{ ou } (BA_1, CD_1) &\dots\dots\dots b'' - \frac{b'}{b''} \end{aligned}$$

Cette cinquième situation est dégénérée, et même, pour $b' = b''^2$, elle se transforme en une homologie.

La sixième situation donne

$$\begin{aligned} (AD_1, BC_1) \text{ ou } (CB_1, DA_1) &\dots\dots\dots \frac{b' - 1}{b''} \\ (AD_1, CB_1) \text{ ou } (BC_1, DA_1) &\dots\dots\dots 0 \\ (AD_1, DA_1) \text{ ou } (BC_1, CB_1) &\dots\dots\dots \frac{1 - b'}{b''} \end{aligned}$$

Cette sixième situation est dégénérée ; et même pour $b' = 1$, elle se transforme en une homologie. Nous avons ainsi constaté que *sur les six situations, quatre sont dégénérées* ; en regardant nos tableaux, nous voyons que la dégénérescence tient simplement à ce que AC rencontre B₁D₁ et que BD rencontre A₁C₁, pendant que la droite commune aux deux plans (ACB₁D₁) et (A₁C₁BD) porte les points d'intersection des côtés opposés du quadrilatère

AD, CB_1 et les points analogues relatifs au quadrilatère A, DC_1, B_1 ; et quand deux de ces quatre points viennent à se confondre, on a les homologies annoncées.

Cet exemple est très instructif : *pour réaliser simplement quatre situations dégénérées*

A	B	C	D
B_1	C_1	D_1	B_1

A	B	C	D
D_1	A_1	B_1	C_1

A	B	C	D
B_1	A_1	D_1	C_1

A	B	C	D
D_1	C_1	B_1	A_1

on prend deux quadrilatères plans AB_1, CD_1 et A_1, BC_1, D et on les transporte arbitrairement dans l'espace de façon que les droites portant les points d'intersection des côtés opposés de chacun d'eux coïncident. La figure dépend de 18 paramètres métriques; il y a trois invariants homographiques qui sont : d'abord le birapport des quatre points alignés (AB_1, CD_1) , (AD_1, CB_1) , (A_1, B_1, C_1, D) , (A_1, D, C_1, B) , puis les deux birapports ainsi obtenus : sur la droite commune aux deux plans, les coniques du faisceau AB_1, CD_1 déterminent une involution; de même les coniques du faisceau A_1, BC_1, D donnent une seconde involution; supposons que ij soit le couple commun à ces deux involutions; sur la conique AB_1, CD_1 nous prenons le birapport (AB_1, CD_1) et nous obtenons de même (A_1, BC_1, D) sur la conique A_1, BC_1, D ; ce sont les deux birapports annoncés. Pour obtenir les deux situations complémentaires (en général non dégénérées)

A	B	C	D
A_1	B_1	C_1	D_1

A	B	C	D
C_1	D_1	A_1	B_1

il est nécessaire et suffisant que les deux derniers birapports signalés coïncident; d'ailleurs nous construisons synthétiquement cette configuration ainsi : dans deux plans distincts, dont Δ est la droite commune, nous construisons deux coniques Γ et Γ_1 perçant Δ aux deux mêmes points i et j : sur Γ nous marquons deux couples A et C , B_1 et D_1 conjugués par rapport à (ij) ; sur Γ_1 nous marquons deux points A_1 et B tels que les birapports

(AB, ij) sur Γ et $(A_1 B_1, ij)$ sur Γ_1 soient égaux, enfin C_1 est conjugué de A_1 , et D de B , par rapport au couple (ij) . On voit aussitôt que AD_1 et $B_1 C$ se coupent sur Δ , ainsi que AB_1 et $D_1 C$ et de même $A_1 D$ et BC_1 ou $A_1 B$ et DC_1 ; d'autre part il existe évidemment une transformation homographique changeant Γ en Γ_1 et faisant correspondre

$$\begin{aligned} (\Gamma) & \quad i \quad j \quad A \quad C \quad B_1 \quad D_1, \\ (\Gamma_1) & \quad i \quad j \quad A_1 \quad C_1 \quad B \quad D, \end{aligned}$$

de sorte que AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 sont génératrices d'une même semi-quadrique; il existe de même une autre homographie produisant les échanges

$$\begin{aligned} (\Gamma) & \quad i \quad j \quad A \quad C \quad B_1 \quad D_1, \\ (\Gamma_1) & \quad i \quad j \quad C_1 \quad A_1 \quad D \quad B, \end{aligned}$$

on le voit en supposant que les points (i, j, A, C, B_1, D_1) ont respectivement $(0, \infty, a, -a, b, -b)$ pour paramètres sur Γ et que ces mêmes valeurs correspondent à (i, j, A_1, C_1, B, D) sur Γ_1 : la correspondance primitive sur Γ correspond alors à $t = t_1$, tandis que la seconde correspond à $t = -t_1$. Alors AC_1, CA_1, DB_1 et BD_1 sont génératrices d'une autre semi-quadrique et la proposition est établie. Les deux quadriques que nous venons de construire contiennent toutes deux les coniques Γ et Γ_1 (correspondance homographique entre Γ et Γ_1), i se correspondant à lui-même ainsi que j et droite joignant les points homologues; les huit points déterminent une seule biquadratique, décomposée en Γ et Γ_1 , sauf cas où l'une des quatre situations dégénérées devient une homologie.

Pour terminer, supposons maintenant que nous voulions obtenir, en même temps que les six situations qui viennent d'être réalisées, la septième

A	B	C	D
A ₁	C ₁	D ₁	B ₁

autrement dit on doit adjoindre aux systèmes (I), (II) et (II') qui ont déjà été écrits et résolus le système déduit de (I) en laissant

les lettres a, b, c, d , mais remplaçant les accents

par zéro, prime, seconde, tierce,

zéro, seconde, tierce, prime,

ce qui donne

$$(II''') \quad \begin{array}{l} c'' d''' b' = d'' b''' c' \\ d a''' c' = c d''' a' \\ b d'' a' = d a'' b' \end{array}$$

En utilisant les valeurs de a, b, c, d, \dots, d''' fournies par le Tableau T des coordonnées (A_1, B_1, C_1, D_1) , on a

$$b' = b'', \quad b' = b'''^3, \quad 1 = b' b'',$$

et écartant la solution $b' = b'' = 1$ qui réunirait A_1, B_1, C_1, D_1 en un seul point, on a $b' = b'' = -1$; le tableau des coordonnées de A_1, B_1, C_1, D_1 est alors

$$(T_1) \quad \begin{array}{l} A_1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \\ B_1 \quad 1 \quad -1 \quad -1 \quad 1 \\ C_1 \quad 1 \quad -1 \quad 1 \quad -1 \\ D_1 \quad 1 \quad +1 \quad -1 \quad -1 \end{array}$$

On pourra faire aisément la figure en supposant, par exemple, que A est l'origine, AB, AC, AD trois axes rectangulaires issus de A, le plan BCD étant le plan de l'infini (autrement dit AB est Ax, AC est Ay, AD est Az); A_1, B_1, C_1, D_1 sont quatre sommets du cube d'arête égale à 2, ayant A pour centre et ses arêtes parallèles aux axes; B_1, C_1, D_1 sont les symétriques de $A(1, 1, 1)$ par rapport à Az, Ay, Ax. La première situation dégénère, AA_1 rencontrant CC_1 au point $\alpha(-1, -1, -1)$ et BB_1 rencontrant DD_1 au point $\gamma(1, -1, 1)$. La troisième situation dégénère aussi, AC_1 et CA_1 se coupant au point γ et BD_1, DB_1 se coupant en α . La deuxième situation est une homologie par rapport au point $\beta(1, 1, -1)$; la quatrième situation est une homologie par rapport au point $\delta(-1, 1, 1)$; la cinquième situation dégénère, AB_1 et CD_1 se coupant en β , tandis que BA_1 et DC_1 se coupent en γ ; la sixième situation dégénère, AD_1 et CB_1 se coupant en δ et BC_1 et DA_1 se coupant en β . Quant à la septième

situation, elle dégénère AA_1 et DB_1 se coupant en α , tandis que BC_1 et CD_1 se coupent en β . Donc sur les sept situations, deux sont des homologies, les autres sont des situations dégénérées proprement dites : au point de vue projectif on peut dire que

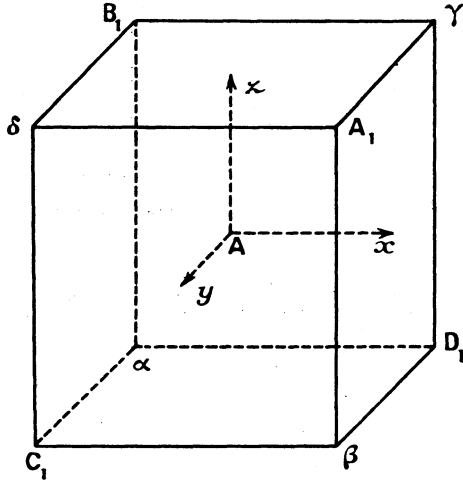


Fig. 8. — Triangles homologues.

l'on a pris un premier tétraèdre ABCD arbitraire; on choisit un point A_1 arbitrairement et l'on prend les homologues de A_1 dans les involutions biaxiales qui ont pour directrices un couple d'arêtes opposées de ABCD : la figure réalisée avec le cube employé déjà montre que, réciproquement, le premier tétraèdre se déduit du second par le même procédé; d'autre part nous avons dit que si le point A_1 , par exemple, prend par rapport au tétraèdre ABCD une autre position A'_1 (auquel cas B_1, C_1, D_1 deviennent B'_1, C'_1, D'_1), la nouvelle figure ABCD, $A'_1B'_1C'_1D'_1$ est équivalente à la première; mais si A'_1 coïncide avec B_1 , B'_1 coïncide avec A_1 , C'_1 avec D_1 et D'_1 avec C_1 de sorte qu'une première situation connue ou bien s'échange avec une situation déjà connue, ou avec une nouvelle : ainsi la première est devenue $(ABCD)(A'_1B'_1C'_1D'_1)$, c'est-à-dire $(ABCD)(B_1A_1D_1C_1)$: on a retrouvé la cinquième situation déjà connue; on voit que le procédé revient dans un schéma de situation à échanger en seconde ligne A_1 avec B_1 , C_1 avec D_1 ; la seconde situation

fournit aussi celle que nous appelons 8 dans le schéma ci-dessous, la situation 4 donne 9 et 7 donne 10 (nous ne citons pas les situations qui se sont reproduites). Par échange de A_1 et C_1 , B_1 et D_1 on obtient 11 à partir de 7, et 12 à partir de 10. On a ainsi le tableau des douze situations, toutes dégénérées :

1	2	3																								
<table border="0" style="width: 100%; text-align: center;"> <tr><td>A</td><td>B</td><td>C</td><td>D</td></tr> <tr><td>A_1</td><td>B_1</td><td>C_1</td><td>D_1</td></tr> </table>	A	B	C	D	A_1	B_1	C_1	D_1	<table border="0" style="width: 100%; text-align: center;"> <tr><td>A</td><td>B</td><td>C</td><td>D</td></tr> <tr><td>B_1</td><td>C_1</td><td>D_1</td><td>A_1</td></tr> </table>	A	B	C	D	B_1	C_1	D_1	A_1	<table border="0" style="width: 100%; text-align: center;"> <tr><td>A</td><td>B</td><td>C</td><td>D</td></tr> <tr><td>C_1</td><td>D_1</td><td>A_1</td><td>B_1</td></tr> </table>	A	B	C	D	C_1	D_1	A_1	B_1
A	B	C	D																							
A_1	B_1	C_1	D_1																							
A	B	C	D																							
B_1	C_1	D_1	A_1																							
A	B	C	D																							
C_1	D_1	A_1	B_1																							
4	5	6																								
<table border="0" style="width: 100%; text-align: center;"> <tr><td>A</td><td>B</td><td>C</td><td>D</td></tr> <tr><td>D_1</td><td>A_1</td><td>B_1</td><td>C_1</td></tr> </table>	A	B	C	D	D_1	A_1	B_1	C_1	<table border="0" style="width: 100%; text-align: center;"> <tr><td>A</td><td>B</td><td>C</td><td>D</td></tr> <tr><td>B_1</td><td>A_1</td><td>D_1</td><td>C_1</td></tr> </table>	A	B	C	D	B_1	A_1	D_1	C_1	<table border="0" style="width: 100%; text-align: center;"> <tr><td>A</td><td>B</td><td>C</td><td>D</td></tr> <tr><td>D_1</td><td>C_1</td><td>B_1</td><td>A_1</td></tr> </table>	A	B	C	D	D_1	C_1	B_1	A_1
A	B	C	D																							
D_1	A_1	B_1	C_1																							
A	B	C	D																							
B_1	A_1	D_1	C_1																							
A	B	C	D																							
D_1	C_1	B_1	A_1																							
7	8	9																								
<table border="0" style="width: 100%; text-align: center;"> <tr><td>A</td><td>B</td><td>C</td><td>D</td></tr> <tr><td>A_1</td><td>C_1</td><td>D_1</td><td>B_1</td></tr> </table>	A	B	C	D	A_1	C_1	D_1	B_1	<table border="0" style="width: 100%; text-align: center;"> <tr><td>A</td><td>B</td><td>C</td><td>D</td></tr> <tr><td>A_1</td><td>D_1</td><td>C_1</td><td>B_1</td></tr> </table>	A	B	C	D	A_1	D_1	C_1	B_1	<table border="0" style="width: 100%; text-align: center;"> <tr><td>A</td><td>B</td><td>C</td><td>D</td></tr> <tr><td>C_1</td><td>B_1</td><td>A_1</td><td>D_1</td></tr> </table>	A	B	C	D	C_1	B_1	A_1	D_1
A	B	C	D																							
A_1	C_1	D_1	B_1																							
A	B	C	D																							
A_1	D_1	C_1	B_1																							
A	B	C	D																							
C_1	B_1	A_1	D_1																							
10	11	12																								
<table border="0" style="width: 100%; text-align: center;"> <tr><td>A</td><td>B</td><td>C</td><td>D</td></tr> <tr><td>B_1</td><td>D_1</td><td>C_1</td><td>A_1</td></tr> </table>	A	B	C	D	B_1	D_1	C_1	A_1	<table border="0" style="width: 100%; text-align: center;"> <tr><td>A</td><td>B</td><td>C</td><td>D</td></tr> <tr><td>C_1</td><td>A_1</td><td>B_1</td><td>D_1</td></tr> </table>	A	B	C	D	C_1	A_1	B_1	D_1	<table border="0" style="width: 100%; text-align: center;"> <tr><td>A</td><td>B</td><td>C</td><td>D</td></tr> <tr><td>D_1</td><td>B_1</td><td>A_1</td><td>C_1</td></tr> </table>	A	B	C	D	D_1	B_1	A_1	C_1
A	B	C	D																							
B_1	D_1	C_1	A_1																							
A	B	C	D																							
C_1	A_1	B_1	D_1																							
A	B	C	D																							
D_1	B_1	A_1	C_1																							

On vérifie par le même procédé que les douze autres associations ne donnent aucune situation hyperboloïdale dégénérée ou non; par exemple, chaque association

$$(ABCD)(A_1B_1D_1C_1), (ABCD)(A_1C_1B_1D_1), (ABCD)(A_1D_1B_1C_1)$$

fait intervenir dans le cube, de côté égal à 2 employé pour la figure 8, la diagonale AA_1 et trois arêtes non concurrentes parallèles à AB , AC , AD : ces quatre droites ne sont pas sur un même hyperboloïde; chacune de ces associations par les échanges indiqués fait intervenir trois autres situations de même définition (AA_1 étant successivement remplacée par AB_1 , en AC_1 ou AD_1), et par suite il suffit de trois essais pour vérifier que les douze associations non écrites ne donnent rien. C'est un résultat intéressant d'avoir ainsi obtenu le nombre maximum 12 de situations; au lieu d'obtenir douze fois trois conditions, on n'a obtenu que neuf conditions distinctes. Sur les douze situations, quatre sont des homologies (ayant leur pôle aux sommets du cube en jeu opposés à A_1 , B_1 ,

C_1, D_1), c'est le nombre maximum d'homologies. On peut remarquer d'ailleurs que la figure que nous venons de donner est projectivement équivalente à celle que nous avons donnée précédemment : en effet, dans la figure $\hat{7}$, on voit que dans l'involution biaxiale d'axes (AB, CD) , ou (AC, BD) , ou (AD, BC) A_1 a pour homologues B_1, C_1 ou D_1 , ce qui, sauf changement de notation, est bien ce que nous avons donné pour le cas étudié ici. Il est intéressant de constater que les trois tétraèdres que nous obtenons simultanément, à savoir les deux tétraèdres déduits l'un de l'autre par la construction de ce paragraphe et le nouveau tétraèdre formé par les pôles des quatre homologies, jouent le même rôle (comparer avec le cas de deux triangles homologues de trois façons différentes, où l'on a trois triangles jouant un même rôle); deux quelconques de ces trois tétraèdres possèdent quatre homologies et huit autres situations dégénérées. Les points qui interviennent dans les huit situations dégénérées ne sont autres que ceux qui ont déjà servi pour les homologies.

Notes complémentaires.

I. *Étude d'un paradoxe.* — Nous avons montré plus haut par un raisonnement intuitif que si deux tétraèdres sont en situation hyperboloïdale, ils sont réciproques par rapport à une quadrique Q (unique, sauf les deux cas d'exception qui ont été donnés plus haut). Pour déterminer cette quadrique, nous avons douze équations linéaires entre les coefficients ponctuels (ou entre les coefficients tangentiels de la quadrique inconnue Q). On pourrait être tenté de dire : conservons les équations exprimant que A est pôle de $B'C'D'$, B pôle de $C'D'A'$ et C pôle de $D'A'B'$; le paradoxe qui se présente est le suivant : si ces équations, au nombre de neuf, déterminaient Q , le pôle de $A'B'C'$ serait un point *déterminé* de la droite DD' (génératrice de la semi-quadrique déterminée par AA', BB', CC'), et ce ne serait pas nécessairement D . D'autre part, en réfléchissant davantage, on s'aperçoit que les plans $\alpha(B'C'D')$, $\beta(C'D'A')$, $\gamma(D'A'B')$, qui forment un trièdre de sommet D' sont seuls à intervenir (avec A, B, C), mais que les positions précises de A', B', C' sur les arêtes de ce trièdre n'interviennent pas dans les neuf équations écrites : il faut donc mieux interpréter les équations.

Supposons donc que nous donnions un point D' et trois plans α , β , γ issus de D' ; nous choisissons trois points A , B , C et nous cherchons s'il y a une quadrique Q telle que A soit pôle de α , B pôle de β , C pôle de γ . *En général* cette quadrique, étudiée ponctuellement, se réduit au plan double ABC ; étudiée ponctuellement elle se réduirait au point double D' ; s'il existe une quadrique Q véritable, il résulte de ce qui précède que toutes les quadriques du faisceau ponctuel $Q + \lambda P^2 = 0$, où P est le plan ABC , répondent aux conditions (comme le pôle de P est alors D' , on a une équation linéaire aussi en coordonnées tangentielles $q + \mu d^2 = 0$, où $d = 0$ est l'équation tangentielle de D'). Donc il faut, pour obtenir une quadrique véritable, que les neuf équations se réduisent à huit; la condition est bien connue : les plans $D'AA'$, $D'BB'$, $D'CC'$ déterminés par les arêtes du trièdre donné de sommet D' et les arêtes correspondantes $D'A$, $D'B$, $D'C$ doivent se couper suivant une droite issue de D' ; s'il en est ainsi et si A' , B' , C' sont trois points pris au hasard sur les arêtes du trièdre de sommet D' , la droite G commune aux trois plans $D'AA'$, $D'BB'$, $D'CC'$ est manifestement une génératrice de la semi-quadrique complémentaire de celle que AA' , BB' , CC' déterminent; autrement dit D' est sur la quadrique déterminée par AA' , BB' , CC' ; la condition que le pôle de $A'B'C'$ soit le point D de G est la neuvième équation qui achève de déterminer d'une façon unique la quadrique cherchée.

II. Page 19, on doit ajouter le troisième cas d'exception où les quadriques Q et Q' ont deux coniques communes γ, γ' ; les sommets A et A' coïncident avec l'un des sommets des deux cônes contenant les deux coniques, B et B' avec l'autre sommet. Les sommets C, D sont pris quelconques sur la droite réunissant les points α, β communs aux deux coniques; C' est le conjugué de D par rapport à α, β et D' le conjugué de C ; les plans supports des faces ACD et $A'C'D'$ coïncident donc, ainsi que les plans des faces BCD et $B'C'D'$. Les deux tétraèdres sont réciproques vis-à-vis de toutes les quadriques du faisceau Q, Q' et peuvent être regardés comme homologues vis-à-vis de tout point de la droite $CDC'D'$.
