

BULLETIN DE LA S. M. F.

CHRISTIAN PAUC

**Recherche des ensembles denses dans un ensemble
 M donné appartenant à un espace topologique**

Bulletin de la S. M. F., tome 64 (1936), p. 220-230

[<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1936__64__220_0>](http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1936__64__220_0)

© Bulletin de la S. M. F., 1936, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

RECHERCHE DES ENSEMBLES DENSES DANS UN ENSEMBLE M DONNÉ
APPARTENANT A UN ESPACE TOPOLOGIQUE ;

PAR M. CHR. PAUC.

Dans cette note, nous supposerons connues les notions fondamentales de la théorie des espaces abstraits, telles qu'elles sont exposées dans les ouvrages : FRÉCHET, *Espaces abstraits* (1928) et HAUSDORFF, *Grundzüge der Mengenlehre* (1914).

Il nous faut cependant préciser deux points :

Nous considérerons un espace comme déterminé par l'ensemble H de ses points que nous appellerons son support et par une opération de fermeture $\mathfrak{F}$ faisant correspondre à tout sous-ensemble E de H un ensemble $\mathfrak{F}(E) \supseteq E$; un tel espace sera désigné par la notation $[H, \mathfrak{F}]$. Pour simplifier l'écriture nous poserons habituellement $\mathfrak{F}(E) = \bar{E}$.

Un point sera dit en contact avec E lorsqu'il appartiendra à la fermeture de E .

Lorsqu'il s'agira d'un espace $\mathfrak{V}$, c'est-à-dire lorsque l'opération $\mathfrak{F}$ sera non décroissante nous supposerons toujours que les voisinages d'un point contiennent ce point (Axiome A d'Hausdorff); un point sera alors en contact avec un ensemble E de cet espace, lorsque chacun de ses voisinages contiendra au moins un point de E .

Généralités sur les suites transfinies. — Nous appellerons suite transfinie illimitée une correspondance $e = g(\xi)$ attribuant à tout nombre ordinal ξ , y compris $\xi = 0$, un élément bien déterminé e ; ces éléments e seront dits : éléments de la suite. Nous représenterons une suite illimitée $\mathfrak{S}$ par la notation

$$\mathfrak{S} : e_0 e_1 e_2 \dots e_\xi \dots$$

e_ξ étant l'élément que g fait correspondre à ξ ; ξ sera dit son indice.

Nous désignerons par $\mathcal{S}_\xi$ la suite $\mathcal{S}$ limitée à l'ordre ξ , c'est-à-dire la correspondance définie seulement sur les nombres ordinaux ξ' précédents ξ et identique à g sur ceux-ci; nous la représenterons par

$$\mathcal{S}_\xi : e_0 e_1 e_2 \dots e_\xi, \dots (\xi' < \xi).$$

Se donner une suite illimitée c'est se donner la correspondance g ; habituellement une suite $\mathcal{S}$ sera considérée comme donnée lorsque nous connaissons :

1. Son élément initial e_0 ;
2. La loi de récurrence : $e_\xi = \zeta(\mathcal{S}_\xi)$ qui permettrait en supposant construits tous les éléments d'indice $< \xi$, de construire à son tour l'élément e_ξ .

Suites exponentielles. — Considérons une opération φ faisant correspondre à tout sous-ensemble P d'un ensemble M un autre de ses sous-ensembles et satisfaisant constamment à l'une des deux relations

$$\varphi(P) \supseteq P \text{ (relation } a), \quad \varphi(P) \subseteq P \text{ (relation } b).$$

Donnons-nous un sous-ensemble P_0 de M et considérons la suite

$$P_0 P_1 \dots P_\xi \dots,$$

dont les termes sont des ensembles de M et qui est définie par la loi de récurrence :

$$P_\xi = \sum_{S_\xi} \varphi(P_{\xi'}),$$

dans le cas où φ satisfait à la relation a ,

$$P_\xi = \prod_{S_\xi} \varphi(P_{\xi'}),$$

dans le cas où φ satisfait à la relation b .

S_ξ désignant l'ensemble des nombres ordinaux ξ' précédant ξ .

Nous conviendrons d'écrire $P_\xi = \varphi^\xi(P_0)$; P_0 étant un ensemble quelconque $\subseteq M$ nous venons de définir sur les ensembles P de M une opération φ^ξ dite : puissance $\xi^{\text{ième}}$ de l'opération φ et satisfaisant comme φ à la relation a ou à la relation b . La légitimité de l'ex-

pression employée résulte des formules

$$\begin{aligned}\varphi^{\xi_1}[\varphi^{\xi_2}(P)] &= \varphi^{\xi_1 + \xi_2}(P) \\ (\varphi^{\xi_1})^{\xi_2}(P) &= \varphi^{\xi_1 \xi_2}(P),\end{aligned}$$

analogues à celles concernant les exposants ordinaires.

La suite : $P_0, P_1, \dots, P_\xi, \dots$ est dite une suite exponentielle d'ensembles.

THÉOREME. — Soit $P_\xi = \varphi^\xi(P)$ le terme général d'une suite exponentielle d'ensembles, sous-ensembles d'un ensemble M ; à partir d'un certain rang les termes de cette suite deviennent identiques à un ensemble qu'on peut désigner par $\Phi(P)$. Quand P varie dans M , $\Phi(P)$ constitue la solution la plus générale de l'équation

$$\Phi(X) = X.$$

Nous voyons que dans le cas où φ satisfait à la relation a ou à la relation b nous venons d'indiquer une méthode de résolution de l'équation $\varphi(X) = X$.

Par analogie avec ce qui se fait en Analyse classique, nous l'appellerons *méthode des approximations successives*.

Ensemble dense dans un ensemble M . — Étant donné un espace $[H, \mathcal{F}]$ et deux ensembles X et M de cet espace, nous dirons que X est dense sur M lorsque tout point de M est en contact avec X , ceci se traduit par l'inclusion

$$M \subseteq \overline{X}$$

équivalente à

$$M = M \cdot \overline{X}.$$

Si X est de plus contenu dans M , il sera dit dense dans M .

Un ensemble dense partout est un ensemble dense dans H , il est caractérisé par

$$\overline{X} = H.$$

Il n'y a pas de différence essentielle entre un ensemble dense partout et un ensemble dense dans un sous-ensemble M de H ; considérons en effet l'espace $[M; f]$ de support M et dont l'opération de fermeture est définie par

$$f(P) = M \cdot \overline{P}.$$

Un ensemble dense dans M relativement à l'espace $[H, \mathcal{F}]$ est dense partout relativement à l'espace $[M, f]$.

L'espace $[M, f]$ jouit de propriétés communes avec l'espace $[H, \mathcal{F}]$: si $[H, \mathcal{F}]$ est un espace $\mathcal{V}$, $[M, f]$ l'est aussi et l'on peut prendre comme voisinages d'un point quelconque m de M , les intersections par M des voisinages V_m relatifs à l'espace $[H, \mathcal{F}]$.

Recherche des ensembles X denses dans un ensemble M donné.

— Un ensemble M de l'espace $[H, \mathcal{F}]$ étant donné, soit à chercher les ensembles X denses dans M . D'après ce que nous venons de dire, il reviendrait au même de chercher les ensembles X partout denses dans l'espace $[M, f]$; ce point de vue entraînerait quelques simplifications d'écriture; nous nous contenterons de l'avoir présent à l'esprit.

Supposons que l'espace $[H, \mathcal{F}]$ soit un espace $\mathcal{V}$; $\mathcal{F}$ est alors une opération non décroissante.

Cherchons les ensembles X parmi les sous-ensembles P de M : donnons-nous-en un, soit P_0 ; pour voir s'il satisfait à la condition $\overline{X} \supseteq M$, formons $M - \overline{P_0}$.

Si $M - \overline{P_0}$ est vide, cette condition est vérifiée pour $X = P_0$, P_0 est dense dans M . Sinon extrayons un point p_1 de $M - \overline{P_0}$ et formons $P_1 = P_0 + \{p_1\}$; P_1 est encore un sous-ensemble de M . De $P_1 > P_0$, nous déduisons $\overline{P_1} \supseteq \overline{P_0}$; il est possible que P_1 soit $\supseteq M$: vérifions-le en formant $M - \overline{P_1}$.

Si $M - \overline{P_1}$ est vide, P_1 est dense dans M . Si non prenons un point p_2 dans $M - \overline{P_1}$ et formons $P_2 = P_1 + \{p_2\}$, et ainsi de suite.

D'une façon générale soit ψ une correspondance définie sur les sous-ensembles P de M de la manière suivante :

Si P est non vide

$$\psi(P) = \{p\}$$

p étant un élément appartenant à P .

Si P est l'ensemble vide V ;

$$\psi(V) = V.$$

Considérons la suite illimitée $\mathcal{S}$,

$$\mathcal{S} : P_0 P_1 \dots, P_\xi \dots,$$

définie par la loi de récurrence suivante :

Si ξ est de première espèce

$$P_\xi = P_{\xi-1} + \psi(M - \overline{P_{\xi-1}}).$$

Si ξ est de deuxième espèce

$$P_{\xi} = \sum_{s_{\xi}} P_{\xi'},$$

S_{ξ} désignant l'ensemble des nombres ordinaux ξ' précédant ξ .

Nous pourrions étudier directement la suite $\mathfrak{S}$; il est plus simple de remarquer que si l'on introduit l'opération φ définie sur les sous-ensembles P de M par

$$\varphi(P) = P + \psi(M - \overline{P}),$$

elle satisfait à la condition $\varphi(P) \supseteq P$ et fait correspondre à tout sous-ensemble de M un sous-ensemble de M ; la suite $\mathfrak{S}$ n'est autre que la suite exponentielle

$$P_{\xi} = \varphi^{\xi}(P_0).$$

C'est une suite croissante jusqu'à un certain indice, à partir duquel tous ses termes deviennent égaux à $\Phi(P_0)$ et $\Phi(P_0)$ représente pour P_0 variant dans M la solution la plus générale de l'équation

$$X = \varphi(X),$$

et l'on vérifie aisément que celle-ci équivaut à la double inclusion

$$X \subseteq M \subseteq \overline{X},$$

qui caractérise les ensembles X denses dans M ; $\Phi(P)$ où P est un sous-ensemble quelconque de M représente l'ensemble le plus général dense dans M .

En somme nous avons naturellement été conduits à remplacer une double inclusion par une équation à laquelle s'applique immédiatement la méthode des approximations successives.

Remarquons que l'hypothèse que l'espace est un espace $\mathfrak{V}$ ne nous a servi que pour justifier l'introduction de la résolution : grâce à celle-ci la suite des fermetures $\overline{P}_{\xi}$ est non décroissante, et ainsi en formant les ensembles successifs de $\mathfrak{S}$, nous pouvons espérer une amélioration progressive. Mais sans cette hypothèse l'équivalence entre : $X \subseteq M \subseteq \overline{X}$ et $X = \varphi(X)$, subsiste et la résolution s'effectue de la même façon.

D'autre part l'opération φ fait intervenir une correspondance de Zermelo arbitraire; il pourra être intéressant de choisir ψ de façon

à obtenir des solutions remarquables. C'est ce que nous allons faire de manière indirecte dans le cas où l'espace est un espace $\mathcal{E}$.

Cas d'un espace $\mathcal{E}$. (Pour la définition d'un espace $\mathcal{E}$, voir FRÉCHET, *Espaces abstraits*, p. 214). — Supposons que l'espace $[H, \mathcal{F}]$ soit un espace $\mathcal{E}$; nous désignerons par $\overline{xy}$ l'écart de deux points x et y de H , par $S_\rho(h)$ l'ensemble des points x tels que $\overline{hx} < \rho$, h étant un point fixé de H et ρ un nombre positif donné; $S_\rho(h)$ sera dit sphéroïde de centre h et de rayon ρ .

D'après le théorème sur l'équivalence des familles de voisinages (FRÉCHET, *loc. cit.*, p. 173) nous pouvons prendre pour chaque point de h une famille dénombrable de voisinages à savoir :

$$S_{\rho_1}(h) S_{\rho_2}(h) \dots S_{\rho_n}(h) \dots,$$

$\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_n, \dots$, étant une suite de nombres positifs tendant vers 0.

Introduisons en vue de la démonstration un espace auxiliaire $\mathcal{E}_\rho = [H, \mathcal{F}_\rho]$; c'est un espace dont les points sont ceux de H , et où chacun d'eux ne possède qu'un seul voisinage : le sphéroïde centré sur lui et de rayon ρ ; on pourrait évidemment lui adjoindre les sphéroïdes concentriques de rayon $> \rho$, mais ceci n'est pas nécessaire. Pour simplifier l'écriture nous poserons,

$$\mathcal{F}_\rho(E) = E_\rho.$$

E désignant un sous-ensemble quelconque de H .

LEMME I. — *La fermeture E_ρ d'un ensemble E de H , dans l'espace $\mathcal{E}_\rho$ est la réunion des sphéroïdes de $S_\rho(e)$ de rayon ρ , et ayant comme centres les points de E ,*

$$E_\rho = \sum_E S_\rho(e),$$

en particulier h étant un point de H ,

$$\{h\}_\rho = S_\rho(h).$$

LEMME II. — $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_n, \dots$, désignant une suite de nombres positifs convergent vers 0.

$$\overline{E} = E_{\rho_1} \cdot E_{\rho_2} \dots E_{\rho_n} \dots$$

Demandons-nous ce que sera un ensemble dense dans M sous-ensemble de H relativement à l'espace $\mathcal{E}_\rho$: X_ρ étant un tel ensemble, il faudra que, pour tout point m de M , $S_\rho(m)$ contienne au moins un point de X_ρ , c'est-à-dire que, quelque soit m de M , il existe un point de X_ρ dont l'écart avec m soit $< \rho$.

Pour construire ces ensembles X_ρ , nous considérerons l'opération φ_ρ définie sur les sous-ensembles P de M par

$$\varphi_\rho(P) = P + \psi(M - P_\rho).$$

ψ étant toujours la correspondance introduite plus haut. Nous partirons d'un sous-ensemble P_0 quelconque de M et nous formerons la suite

$$P_\xi = \varphi_\rho^\xi(P_0).$$

Soit $\Phi_\rho(P_0)$ l'ensemble auquel ses termes finissent par devenir identiques; P_0 variant dans M , $\Phi_\rho(P_0)$ représente l'ensemble le plus général dense dans M relativement à l'espace $\mathcal{E}_\rho$.

LEMME III. — $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ désignant des ensembles denses dans M respectivement par rapport aux espaces $\mathcal{E}_{\rho_1}, \mathcal{E}_{\rho_2}, \dots, \mathcal{E}_{\rho_n}, \dots$ ($\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_n, \dots$ suite de nombres positifs $\rightarrow 0$) l'ensemble

$$X = X_1 + X_2 + \dots + X_n + \dots$$

est dense dans M (sous-entendu par rapport à l'espace $\mathcal{E}$).

Appelons avec Hausdorff ensemble totalement borné dans un espace $\mathcal{E}$ un ensemble tel que, quel que soit $\rho > 0$, on puisse le recouvrir avec un nombre fini de sphéroïdes de rayon ρ . Le lemme III a pour corollaire :

THÉORÈME. — Dans un espace $\mathcal{E}$ tout ensemble totalement borné est séparable.

Passons donc maintenant à la recherche des ensembles X denses dans un sous-ensemble donné M de H . Nous pourrions d'après le lemme III faire la réunion

$$X_1 + X_2 + \dots + X_n + \dots$$

d'ensembles denses dans M , par rapport aux espaces $\mathcal{E}_{\rho_1}, \mathcal{E}_{\rho_2}, \dots, \mathcal{E}_{\rho_n}, \dots$ respectivement, ensembles que nous savons déterminer d'après le lemme II. Nous allons plutôt mettre en évidence une solution particulière qui nous fournira des renseignements intéressants; soit m_0 un point de M , définissons la suite dénombrable

$$M_0 M_1 \dots M_n \dots,$$

de la façon suivante :

$$M_0 = \{m_0\} \quad \text{et} \quad M_n = \Phi_{\rho_n}(M_{n-1});$$

$\rho_1 \rho_2 \dots \rho_n \dots$ désignant toujours une suite de nombres positifs convergeant vers 0.

Nous obtenons une suite non décroissante d'ensembles et M_n est dense dans M relativement à $\mathcal{E}_{\rho_n}$, d'après le sens que nous avons donné à Φ_{ρ} .

L'écart entre les différents points de M_n est $> \rho_n$; M_n est isolé c'est-à-dire qu'il ne contient aucun de ses points d'accumulation. Posons

$$M_{\omega} = M_0 + M_1 + \dots + M_n + \dots,$$

d'après le lemme III, M_{ω} est dense dans M .

Disons qu'un ensemble appartenant à un espace quelconque jouit de la propriété $\mathcal{P}_1$ lorsque chacun de ces sous-ensembles non dénombrables a au moins un point d'accumulation.

THÉORÈME. — *Dans un espace $\mathcal{E}$ tout ensemble jouissant de la propriété $\mathcal{P}_1$ est séparable et inversement.*

Conséquence : *Dans un espace $\mathcal{E}$ tout ensemble condensé en soi (Définition : FRÉCHET, loc. cit., p. 174) est séparable.*

Cas d'un espace D. — En plus de ce que nous venons d'affirmer concernant les espaces $\mathcal{E}$ nous pouvons énoncer les résultats suivants : Tout ensemble M_n de la suite précédemment définie est non seulement isolé mais divergent, c'est-à-dire qu'il n'a pas de points d'accumulation ou que son dérivé est vide. *Il n'existe pas d'ensemble de puissance inférieure à celle de M_{ω} dense dans M .*

Disons qu'un ensemble appartenant à un espace quelconque jouit de la propriété $\mathcal{Q}$ lorsqu'aucun de ses sous-ensembles non dénombrables n'est divergent.

THÉORÈME. — Dans un espace $\mathcal{O}$ tout ensemble jouissant de la propriété $\mathfrak{R}$ est séparable et inversement.

Conséquences : Dans un espace $\mathcal{O}$ tout ensemble compact est séparable (FRÉCHET, loc. cit., p. 268); la séparabilité, la propriété $\mathfrak{R}$ et la propriété $\mathfrak{R}_1$ sont équivalentes.

THÉORÈME. — Dans tout espace $\mathcal{E}$ séparable, si E désigne un ensemble non dénombrable il existe une suite non croissante : $E_1 E_2 \dots E_n \dots$ de sous-ensembles de E ayant même puissance que E et tel que chacun soit contenu dans un sphéroïde de rayon ρ_n , ρ_n tendant vers 0 quand n augmente indéfiniment.

Conséquence : Dans un espace $\mathcal{O}$ séparable et complet (FRÉCHET, loc. cit., p. 74), tout ensemble non dénombrable a un point d'accumulation maximée (FRÉCHET, loc. cit., p. 192).

Familles g_M et Γ_M . — Revenons à la considération de la suite $M_1, M_2, \dots, M_n, \dots$; si ν désigne un point quelconque de M_n nous avons vu que

$$(M_n)_\rho = \sum_{M_n} S_{\rho_n}(\nu) \geq M.$$

Nous dirons qu'une famille d'ensembles $\mathfrak{F}(F)$ occupe un ensemble M quand

$$\sum_{\mathfrak{F}} F \geq M.$$

Dans notre cas, il en est ainsi de la famille des sphéroïdes $S_{\rho_n}(\nu)$ pour ρ_n fixé; mais remarquons qu'il n'en serait plus de même si on lui en retirait un seul d'entre eux soit $S_{\rho_n}(\nu_0)$; du fait que les distances mutuelles des points de M_n sont $> \rho_n$, le point ν_0 n'appartient qu'au sphéroïde $S_{\rho_n}(\nu_0)$. Nous pouvons dire de ce dernier qu'il contient le point ν_0 « en propre ».

Nous désignerons par g_M une famille d'ensembles occupant M , telle que $g_M - \{G\}$ n'occupe plus M quel que soit G appartenant à g_M . Sous une forme intuitive, une famille g_M est une famille occupant M et dont tous les ensembles sont indispensables pour assurer l'occupation. Nous venons de voir que : dans un espace $\mathcal{E}$ tout

ensemble M peut être occupé par une famille g_M de sphéroïdes de rayon ρ dont les centres appartiennent à M .

D'une famille $\mathcal{F}$ d'ensembles occupant un ensemble M on ne peut pas toujours extraire une famille g_M , ainsi si M est la demi-droite Ox et $\mathcal{F}$ la famille des intervalles fermés OA , A désignant un point quelconque de la demi-droite.

Nous appellerons famille Γ_M une famille d'ensembles couvrant M (FRÉCHET, *loc. cit.*, p. 176) dont chaque ensemble est indispensable pour assurer le recouvrement, c'est-à-dire telle que, quel que soit G de Γ_M , la famille $\Gamma_M - \{G\}$ ne recouvre plus M .

THÉORÈME. — *Dans un espace $\mathcal{V}$ accessible (Fréchet, *loc. cit.*, p. 185), si tout sous-ensemble de puissance supérieure ou égale à un nombre cardinal donné μ , d'un ensemble M a au moins un point d'accumulation appartenant à M , alors toute famille de type Γ_M est de puissance $< \mu$.*

Cas particulier : Si M est compact en soi, toute famille Γ_M est finie; si M est condensé en soi toute famille Γ_M est au plus dénombrable.

Nous dirons qu'une famille $\mathcal{F}'$ est dérivée d'une famille $\mathcal{F}$ lorsqu'elle est constituée par des ensembles qui sont sous-ensembles de ceux de $\mathcal{F}$.

THÉORÈME. — *Dans un espace $\mathcal{V}$ accessible, si M est un ensemble tel que de toute famille $\mathcal{F}$ le couvrant, on puisse dériver une famille de type Γ_M , alors :*

*si M est compact en soi, il sera parfaitement compact en soi;
si M jouit de la propriété $\mathcal{R}_1$, il jouira de la propriété de Lindelöf (FRÉCHET, *loc. cit.*, p. 176) et d'ailleurs inversement.*

THÉORÈME. — *Dans un espace $\mathcal{E}$ où les sphéroïdes sont ouverts, tout ensemble compact en soi est parfaitement compact en soi; tout ensemble jouissant de $\mathcal{R}_1$, jouit de la propriété de Lindelöf.*

Comme exemple d'espace $\mathcal{E}$ à sphéroïdes ouverts, nous avons les espaces $\mathcal{E}$ où l'écart de deux points est une fonction continue de chacun deux (espaces à métrique continue de Menger). Sur un

ensemble M compact en soi d'un tel espace, l'écart est régulier, c'est-à-dire : il existe une fonction $f(\Theta)$ tendant vers zéro avec Θ telle que, quels que soient les points m_1, m_2, m_3 de M , les inégalités

$$\overline{m_1 m_2} \leq \Theta, \quad \overline{m_1 m_3} \leq \Theta$$

entraînent $\overline{m_1 m_3} < f(\Theta)$; d'après un théorème de Chittenden (FRÉCHET, *loc. cit.*, p. 219), M peut être distancié sans altération de sa topologie interne. Mais tout espace $\mathcal{O}$ compact en soi est parfaitement compact en soi (FRÉCHET, *loc. cit.*, p. 269); nous obtenons dans un cas particulier une vérification partielle du dernier théorème.