ALEXANDRE DINGHAS

Sur un théorème de Carleman et sur un théorème de Carlson-Nevanlinna

Bulletin de la S. M. F., tome 64 (1936), p. 78-86

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1936__64__78_0>

SUR UN THÉORÈME DE CARLEMAN ET SUR UN THÉORÈME DE CARLSON-NEVANLINNA;

PAR M. ALEXANDRE DINGHAS
(Berlin).

Dédié à la mémoire de
mon professeur et ami
Aristote Oeconomou.

1. Le théorème bien connu de Carlson ([1]), d'après lequel toute fonction entière d'ordre un et du type moyen $< \pi$ ne peut s'annuler pour tous les entiers positifs sans être identiquement nul, a été l'objet de plusieurs travaux ([2]). Le progrès le plus essentiel en ce qui concerne la généralisation dudit théorème, est dû à MM. F. et R. Nevanlinna ([3]) qui sont parvenus au résultat général suivant ([4]) :

Considérons dans le secteur

$$-\frac{\pi}{2k} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2k} \qquad \left(k \geq \frac{1}{2}\right)$$

une fonction $f(z)$ méromorphe en $z = re^{i\varphi}$, ayant pour zéros

$$a_n = |a_n| e^{i\alpha_n} \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots, |a_n| \leq |a_{n+1}|)$$

et pour pôles

$$b_n = |b_n| e^{i\beta_n} \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots, |b_n| \leq |b_{n+1}|).$$

([1]) F. CARLSON, *Sur une classe de séries de Taylor* (*Thèse Upsala*, 1914, p. 58). Ce théorème est établi aussi par M. Wigert, mais sous certaines restrictions pour $f(z)$. *Voir* S. WIGERT, *Sur un théorème concernant les fonctions entières* (*Arkiv for Matematik*, vol. 11, 1916, n° 22, p. 1-5).

([2]) *Voir* par exemple G. H. HARDY, *On two theorems of F. Carlson and S. Wigert* (*Acta Math.*, 42, 1920, p. 327-339).

([3]) F. et R. NEVANLINNA, *Ueber die Eigenschaften analytischer Funktionen in der Umgebung einer singulären Stelle oder Linie* (*Acta Soc. Scient. Fenn.*, vol. 50, n° 5, p. 40).

([4]) Je fais abstraction ici d'un théorème de R. Nevanlinna, qui généralise le théorème de Carlson dans un sens différent. *Voir* R. NEVANLINNA, *Ueber die Eigenschaften von meromorphen Funktionen in einem Winkelraum* (*Acta Soc. Scient. Fenn.*, 50, 1925, n° 5).

Posons

$$n_k(r, o) = \sum_{|a_\nu|<r} \cos k\alpha_\nu \qquad n_k(r, \infty) = \sum_{|o_\nu|<r} \cos k\beta_\nu,$$
$$n_k(r) = n_k(r, o) - n_k(r, \infty).$$

Supposons que la fonction $\mathrm{F}(r)$ *soit pour* $r \geqq r_0 > 0$ *constamment positive et telle que l'intégrale*

$$\mathrm{T}(r) = \int^r \frac{\mathrm{F}(r)}{r^{k+1}}\, dr$$

diverge pour $r \to \infty$. *Si les grandeurs*

$$(1,1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2}\left\{ \log\left|f\left(\rho e^{-i\frac{\pi}{2k}}\right)\right| + \log\left|f\left(\rho e^{i\frac{\pi}{2k}}\right)\right| \right\} \\ \frac{1}{\rho^k}\int_{-\frac{\pi}{2k}}^{\frac{\pi}{2k}} \log|f(\rho e^{i\varphi})| \cos k\varphi\, d\varphi \quad \text{et} \quad n_k(r) \end{array} \right.$$

satisfont respectivement aux inégalités

$$\leqq p[1+o(1)]\,\mathrm{F}(\rho); \qquad \leqq q[1+o(1)]\,\mathrm{T}(\rho); \qquad \geqq s[1+o(1)]\,\mathrm{F}(r),$$

on aura

$$p + q \geqq \pi s.$$

Ils dérivent leur théorème ([1]) d'un principe général d'après lequel une certaine expression dépendant des zéros, des pôles et de la grandeur absolue de la fonction $f(z)$ méromorphe dans un domaine B, ne peut converger vers l'infini négatif que dans le cas où $f(z)$ s'annule identiquement dans B.

2. Je vais démontrer dans ce petit travail que le théorème connu de Carleman ([2]) suffit complètement pour la démonstration du théo-

---

([1]) *Loc. cit.*, p. 36.

([2]) *Ueber die Approximation analytischer Funktionen durch lineare Aggregate von vorgeschriebenen Potenzen* (*Arkiv för Mat. och Fysik*, vol. 17, n° 9, p. 5). Carleman fait du reste la remarque que son théorème démontre celui de Carlson.

Pour une autre démonstration du théorème de Carleman, *voir* encore A. Dinghas, *Ueber einige Sätze aus der Theorie der meromorphen und ganzen Funktionen* (*Math. Ann.*, 110, 1934, p. 284).

rème général mentionné plus haut, si on le transforme convenablement. A cette occasion je remplace dans le théorème de Carleman un certain $O(1)$ par une expression explicite. D'ailleurs je voudrais observer que le détour par la formule générale (3.5) n'est pas absolument nécessaire. On pourrait au contraire se servir d'autres démonstrations du théorème de Carleman. Mais la démonstration donnée ici rend plus clair le fait que ce théorème joue dans un certain sens, pour l'étude des fonctions méromorphes dans un angle, le rôle du théorème de Jensen.

3. La formule de Poisson pour un demi-cercle et pour un secteur (1). — Soit $w(z)$ la fonction analytique qui donne la représentation conforme du demi-cercle

$$(3,1) \qquad \mathcal{R}\, z \geqq 0, \qquad |z| \leqq \rho$$

sur le cercle unité, et soit d'autre part $f(z)$ une fonction de z holomorphe dans (3,1). D'après la formule de Poisson, on aura

$$(3,2) \qquad f(\zeta) = i\,C + \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_\rho} \mathcal{R}\, f(z)\, \frac{w(z)+w(\zeta)}{w(z)-w(\zeta)}\, \frac{w'(z)}{w(z)}\, dz,$$

dans laquelle ζ représente un point intérieur de (3,1), et l'intégrale sera prise dans le sens positif. La constante C dépend de la fonction $w(z)$. Mais on peut par une modification simple de (3,2) arriver à une autre expression où C ne dépend que de $f(0)$.

Pour cela écrivons (3,2) pour un autre point de l'axe réel ζ_0 et considérons la différence

$$f(\zeta) - f(\zeta_0).$$

On aura

$$(3,3) \quad f(\zeta) - f(\zeta_0) = \frac{1}{\pi i}\int_{\Gamma_\rho} \mathcal{R}\, f(z)\, \frac{w(\zeta)-w(\zeta_0)}{[w(z)-w(\zeta)][w(z)-w(\zeta_0)]}\, w'(z)\, dz.$$

---

(1) Cette formule fut établie premièrement par moi dans mon travail : *Zur Theorie der meromorphen Funktionen in einem Winkelraum* (*Sitzungsber. der Preuss. Akad. der Wiss.*, 1935, p. 576-596).

La démonstration développée ici tient essentiellement à une idée qui revient à M. Erhard Schmidt. La disposition de la démonstration et les détails sont dues à mon ami Heinz Westphal.

D'autre part, on sait que

$$w(z) = \frac{z-\gamma}{z+\gamma}\,\frac{\rho^2+\bar{\gamma} z}{\rho^2-\bar{\gamma} z},$$

où γ est un point intérieur de $(3,1)$.

Posons $\gamma = \zeta_0$. On aura

$$f(\zeta) = f(\zeta_0) + \frac{1}{\pi i}\int_{\Gamma_\rho} \mathcal{R}\, f(z)\, \frac{\dfrac{\zeta-\zeta_0}{\zeta+\zeta_0}\,\dfrac{\rho^2+\zeta\zeta_0}{\rho^2-\zeta\zeta_0}}{\dfrac{z-\zeta_0}{z+\zeta_0}\,\dfrac{\rho^2+\zeta_0 z}{\rho^2-\zeta_0 z} - \dfrac{\zeta-\zeta_0}{\zeta+\zeta_0}\,\dfrac{\rho^2+\zeta\zeta_0}{\rho^2-\zeta\zeta_0}}$$

$$\times\left(\frac{1}{z-\zeta_0} - \frac{1}{z+\zeta_0} + \frac{\zeta_0}{\rho^2+\zeta_0 z} + \frac{\zeta_0}{\rho^2-\zeta_0 z}\right)dz$$

ou

$$f(\zeta) = f(\zeta_0) + \frac{1}{\pi i}(\zeta-\zeta_0)(\rho^2+\zeta\zeta_0)$$

$$\times \int_{\Gamma_\rho} \mathcal{R}\, f(z)\, \frac{z^2+\rho^2}{(z-\zeta_0)(\rho^2+\zeta_0 z)(z-\zeta)(\rho^2+z\zeta)}\,dz.$$

Pour $\zeta_0 \to 0$, nous savons [1] que cette intégrale converge vers la valeur principale de

$$\frac{\zeta}{\pi i}\int_{\Gamma_\rho}^{(C)} \mathcal{R}\, f(z)\, \frac{z^2+\rho^2}{(z-\zeta)(\rho^2+z\zeta)}\,\frac{dz}{z} - \mathcal{R} f(0),$$

on aura alors

$$(3,4)\qquad f(\zeta) = \mathcal{J} f(0) + \frac{\zeta}{\pi i}\int_{\Gamma_\rho}^{(C)} \mathcal{R}\, f(z)\, \frac{z^2+\rho^2}{(z-\zeta)(\rho^2+z\zeta)}\,\frac{dz}{z}$$

ou

$$(3,5)\qquad f(\zeta) = \mathcal{J} f(0) + \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_\rho}^{(C)} \mathcal{R}\, f(z)\left\{\frac{z+\zeta}{z-\zeta} - \frac{\rho^2-z\zeta}{\rho^2+z\zeta}\right\}\frac{dz}{z}.$$

Pour un secteur quelconque

$$(3,6)\qquad 0 \leqq r \leqq \rho, \qquad -\frac{\pi}{2k} \leqq \varphi \leqq \frac{\pi}{2k} \qquad \left(k \geqq \frac{1}{2}\right),$$

on aura

$$(3,7)\quad f(\zeta) = \mathcal{J} f(0) + \frac{k}{2\pi i}\int_{S_\rho}^{(C)} \mathcal{R} f(z)\left\{\frac{z^k+\zeta^k}{z^k-\zeta^k} - \frac{\rho^{2k}-z^k\zeta^k}{\rho^{2k}+z^k\zeta^k}\right\}\frac{dz}{z}$$

et. dans ce cas, (C) signifie que l'intégrale sera prise dans le sens de Cauchy. En outre S_ρ est la frontière de (3,6). Enfin, pour z^k, ζ^k, on doit prendre les déterminations qui sont réelles pour z, ζ réelles.

---

(1) *Voir*, par exemple, HURWITZ-COURANT, *Funktionentheorie*, 2e éd., p. 309.

4. Supposons maintenant que la fonction $f(z)$ soit dans le secteur $\mathcal{R} z \geqq 0$ une fonction méromorphe, ayant pour zéros $a_1, a_2, \ldots$, et pour pôles $b_1, b_2, \ldots$. On peut encore admettre que

$$|a_1| > 0, \qquad |b_1| > 0 \qquad \text{et} \qquad |f(0)| = 1.$$

La fonction

$$g_\rho(z) = f(z) \prod_{|a_\nu| \leqq \rho} \frac{z + \bar{a}_\nu}{z - a_\nu} \frac{\rho^2 - \bar{a}_\nu \zeta}{\rho^2 + a_\nu \zeta} \prod_{|b_\nu| \leqq \rho} \frac{z - b_\nu}{z + \bar{b}_\nu} \frac{\rho^2 + b_\nu z}{\rho^2 - \bar{b}_\nu z}$$

est dépourvue de zéros et de pôles dans notre demi-cercle (3,1), alors la fonction $\log g_\rho(z)$ est holomorphe dans ce même demi-cercle.

De la formule (3,5) on tire, après quelques calculs faciles élémentaires ([1]),

$$(4.1) \quad \log f(\zeta) = -\sum_{|a_\nu| \leqq \rho} \log \frac{\zeta + \bar{a}_\nu}{\zeta - a_\nu} \frac{\rho^2 - \bar{a}_\nu \zeta}{\rho^2 + a_\nu \zeta} + \sum_{|b_\nu| \leqq \rho} \log \frac{\zeta + \bar{b}_\nu}{\zeta - b_\nu} \frac{\rho^2 - \bar{b}_\nu \zeta}{\rho^2 + b_\nu \zeta}$$
$$+ \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_\rho} \log |f(z)| \left\{ \frac{z + \zeta}{z - \zeta} - \frac{\rho^2 - z\zeta}{\rho^2 + z\zeta} \right\} \frac{dz}{z} + \arg f(0).$$

Considérons la fonction

$$(4.2) \quad \log g(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\rho_0 i}^{-\rho_0 i} \log |f(z)| \left\{ \frac{z + \zeta}{z - \zeta} - \frac{\rho^2 - z\zeta}{\rho^2 + z\zeta} \right\} \frac{dz}{z} + \arg f(0)$$

avec $\rho_0 < \min(|a_1|, |b_1|)$, fonction qui est holomorphe dans (3,1) et qui s'annule sur le demi-cercle $|z| = \rho_0 \, \mathcal{R} z > 0$, tandis que sur le segment $-\rho_0 < y < \rho_0$ elle prend les valeurs $\log |f(iy)|$. Une combinaison de (4,1) et de (4.2) donne

$$\log f(\zeta) - \log g(\zeta) = -\sum_{|a_\nu| \leqq \rho} \log \frac{\zeta + \bar{a}_\nu}{\zeta - a_\nu} \frac{\rho^2 - \bar{a}_\nu \zeta}{\rho^2 + a_\nu \zeta} + \sum_{|b_\nu| \leqq \rho} \log \frac{\zeta + \bar{b}_\nu}{\zeta - b_\nu} \frac{\rho^2 - \bar{b}_\nu \zeta}{\rho^2 + b_\nu \zeta}$$
$$+ \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_{\rho,\rho_0}} \log |f(z)| \left\{ \frac{z + \zeta}{z - \zeta} - \frac{\rho^2 - z\zeta}{\rho^2 + z\zeta} \right\} \frac{dz}{z},$$

où Γ_{ρ,ρ_0} représente le chemin suivant :

1° de $-\rho_0 i$ jusque $-\rho i$ en ligne droite;

2° sur le demi-cercle $|z| = \rho$, $\mathcal{R} z > 0$;

3° de ρi jusque $\rho_0 i$ en ligne droite.

([1]) Ce procédé est analogue avec celui de M. R. Nevanlinna dans son travai mentionné plus haut.

Divisons les deux membres de cette formule par 2ζ et faisons converger ζ vers o, on aura

$$
\begin{aligned}
(4,3)\qquad C &= \lim_{\zeta \to 0} \frac{\log f(\zeta) - \log g(\zeta)}{2\zeta} \\
&= -\sum_{|a_\nu| \leq \rho} \left\{ \frac{\cos \alpha_\nu}{|a_\nu|} - \frac{|a_\nu| \cos \alpha_\nu}{\rho^2} \right\} \\
&\quad + \sum_{|b_\nu| \leq \rho} \left\{ \frac{\cos \beta_\nu}{|b_\nu|} - \frac{|b_\nu| \cos \beta_\nu}{\rho^2} \right\} \\
&\quad + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_{\rho,\rho_0}} \log |f(z)| \left\{ \frac{1}{z} + \frac{z}{\rho^2} \right\} \frac{dz}{z}.
\end{aligned}
$$

5. On peut démontrer maintenant que

$$
\begin{aligned}
(5,1)\qquad C &= \frac{1}{\pi \rho_0} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \log |f(\rho_0 e^{i\varphi})| \cos \varphi \, d\varphi \\
&\quad + \frac{1}{2\pi} \left(\frac{1}{\rho_0^2} - \frac{1}{\rho^2} \right) \int_{-\rho_0}^{\rho_0} \log |f(iy)| \, dy.
\end{aligned}
$$

En effet on a, pour un point intérieur du demi-cercle $|z| \leq \rho_0$, $\mathcal{R} z \geq 0$,

$$
\log f(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_{\rho_0}} \log |f(z)| \left\{ \frac{z+\zeta}{z-\zeta} - \frac{\rho_0^2 - z\zeta}{\rho_0^2 + z\zeta} \right\} \frac{dz}{z} + \arg f(0),
$$

alors

$$
\begin{aligned}
\log f(\zeta) - \log g(\zeta) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \log |f(\rho_0 e^{i\varphi})| \left\{ \frac{\rho_0 e^{i\varphi} + \zeta}{\rho_0 e^{i\varphi} - \zeta} - \frac{\rho_0 e^{-i\varphi} - \zeta}{\rho_0 e^{-i\varphi} + \zeta} \right\} d\varphi \\
&\quad - \frac{1}{2\pi i} \int_{\rho_0 i}^{-\rho_0 i} \log |f(z)| \left\{ \frac{\rho_0^2 - z\zeta}{\rho_0^2 + z\zeta} - \frac{\rho^2 - z\zeta}{\rho^2 + z\zeta} \right\} \frac{dz}{z}
\end{aligned}
$$

et, par suite, par une transformation élémentaire,

$$
\begin{aligned}
\lim_{\zeta \to 0} \frac{\log f(\zeta) - \log g(\zeta)}{2\zeta} &= \frac{1}{\pi \rho_0} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \log |f(\rho_0 e^{i\varphi})| \cos \varphi \, d\varphi \\
&\quad - \frac{1}{2\pi i} \int_{\rho_0 i}^{-\rho_0 i} \log |f(z)| \left\{ \frac{1}{\rho_0^2} - \frac{1}{\rho^2} \right\} dz.
\end{aligned}
$$

Nous introduisons encore les fonctions

$$R_1(r, 0) = \sum_{|a_\nu| \leqq r} |a_\nu| \cos \alpha_\nu,$$

$$R_1(r, \infty) = \sum_{|b_\nu| \leqq r} |b_\nu| \cos \beta_\nu.$$

En remarquant que

$$\sum_{|a_\nu| \leqq r} \left\{ \frac{\cos \alpha_\nu}{|\alpha_\nu|} - \frac{|\alpha_\nu| \cos \alpha_\nu}{\rho^2} \right\} = 2 \int_0^\rho \frac{R_1(t, 0)}{t^3} dt$$

et

$$\sum_{|b_\nu| \leqq r} \left\{ \frac{\cos \beta_\nu}{|b_\nu|} - \frac{|b_\nu| \cos \beta_\nu}{\rho^2} \right\} = 2 \int_0^\rho \frac{R_1(t, \infty)}{t^3} dt,$$

on obtiendra la formule de Carleman sous la forme suivante :

$$(5.2) \qquad C = -2 \int_0^\rho \frac{R_1(t, 0)}{t^3} dt + 2 \int_0^\rho \frac{R_1(t, \infty)}{t^3} dt + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_{\rho, \rho_0}} \log |f(z)| \left\{ \frac{1}{z} + \frac{z}{\rho^2} \right\} \frac{dz}{z}$$

où C est donné par (5,1).

6. Posons enfin

$$n_1(r, 0) = \sum_{|a_\nu| \leqq r} \cos \alpha_\nu, \qquad n_1(r, \infty) = \sum_{|b_\nu| \leqq r} \cos \beta_\nu,$$

on aura

$$2 \int_0^\rho \frac{R_1(t, 0)}{t^3} dt = - \int_0^\rho R_1(t, 0)\, d\left(\frac{1}{t^2}\right) = - \frac{R_1(\rho, 0)}{\rho_2} + \int_0^\rho \frac{dn_1(t, 0)}{t}$$

ou

$$2 \int_0^\rho \frac{R_1(t, 0)}{t^3} dt = - \frac{R_1(\rho, 0)}{\rho^2} + \frac{n_1(\rho, 0)}{\rho} + \int_0^\rho \frac{n_1(t, 0)}{t^2} dt.$$

Mais on a

$$R_1(\rho, 0) = \int_0^\rho t\, dn_1(t, 0) = \rho n_1(\rho, 0) - \int_0^\rho n_1(t, 0)\, dt,$$

alors

$$- \frac{R_1(\rho, 0)}{\rho^2} + \frac{n_1(\rho, 0)}{\rho} = \frac{1}{\rho^2} \int_0^\rho n_1(t, 0)\, dt;$$

de là on tire

$$(6,1)\qquad 2\int_0^{\rho} \frac{R_1(t,0)}{t^3}\,dt = \int_0^{\rho}\left\{\frac{1}{t^2}+\frac{1}{\rho^2}\right\} n_1(t,0)\,dt$$

et. d'une manière analogue,

$$(6.2)\qquad 2\int_0^{\rho} \frac{R_1(t,\infty)}{t^3}\,dt = \int_0^{\rho}\left\{\frac{1}{t^2}+\frac{1}{\rho^2}\right\} n_1(t,\infty)\,dt.$$

En combinant (5,2), (6,1) et (6,2), on a finalement

$$(6,3)\quad C = -\int_0^{\rho}\left\{\frac{1}{t^2}+\frac{1}{\rho^2}\right\} n_1(t)\,dt + \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_{\rho,\rho_0}} \log|f(z)|\left\{\frac{1}{z}+\frac{z}{\rho^2}\right\}\frac{dz}{z},$$

où l'on a posé encore

$$n_1(r) = n_1(r,0) - n_1(r,\infty).$$

Pour un secteur quelconque, on peut obtenir par des considérations analogues la formule de Carleman sous la forme

$$C_k = -\int_0^{\rho}\left\{\frac{1}{t^{k+1}}+\frac{t^{k-1}}{\rho^{2k}}\right\} n_k(t)\,dt + \frac{1}{2\pi i}\int_{S_{\rho,\rho_0}} \log|f(z)|\left\{\frac{1}{z^k}+\frac{z^k}{\rho^{2k}}\right\}\frac{dz}{z},$$

où

$$C_k = \frac{1}{\pi\rho_0^k}\int_{-\frac{\pi}{2k}}^{\frac{\pi}{2k}} \log|f(\rho_0 e^{i\varphi})|\cos k\varphi\,d\varphi$$
$$-\frac{1}{2\pi i}\int_{T_{\rho_0}} \log|f(z)|\left\{\frac{1}{\rho_0^{2k}}-\frac{1}{\rho^{2k}}\right\} z^{k-1}\,dz$$

et S_{ρ,ρ_0} signifie le chemin :

1° de $\rho_0 e^{-i\frac{\pi}{2k}}$ jusque $\rho e^{-i\frac{\pi}{2k}}$ en ligne droite;

2° de $\rho e^{-i\frac{\pi}{2k}}$ jusque $\rho e^{i\frac{\pi}{2k}}$ sur l'arc du cercle $|z| = \rho$;

3° de $\rho e^{i\frac{\pi}{2k}}$ jusque $\rho_0 e^{i\frac{\pi}{2k}}$ en ligne droite;

et enfin T_{ρ_0} le chemin :

1° de $\rho_0 e^{i\frac{\pi}{2k}}$ jusque o en ligne droite;

2° de o jusque $\rho_0 e^{-i\frac{\pi}{2k}}$ en ligne droite.

7. Démonstration du théorème de M. Nevanlinna. — De la formule (6,4) on peut facilement déduire le théorème de M. Nevanlinna formulé dans 1°. Puisque $n_k(r) \geqq 0$, on a

$$C_k \leqq -\int_0^\rho \frac{n_k(t)}{t^{k+1}} dt + \frac{1}{2\pi i} \int_{S_{\rho,\rho^0}} \log|f(z)| \left\{ \frac{1}{z^k} + \frac{z^k}{\rho^{2k}} \right\} \frac{dz}{z}.$$

Cette intégrale est égale à

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\rho_0}^\rho \left\{ \log\left|f\left(te^{-i\frac{\pi}{2k}}\right)\right| + \log\left|f\left(te^{i\frac{\pi}{2k}}\right)\right| \right\}$$

$$\times \left(\frac{1}{t^k} - \frac{t^k}{\rho^{2k}} \right) \frac{dt}{t} + \frac{1}{\pi\rho^k} \int_{-\frac{\pi}{2k}}^{\frac{\pi}{2k}} \log|f(\rho e^{i\varphi})| \cos k\varphi \, d\varphi,$$

et cette expression est plus petite que

$$p[1 + o(1)] \frac{1}{\pi} \int_{\rho_0}^\rho \frac{F(t)}{t^{k+1}} dt + \frac{1}{\pi\rho^k} \int_{-\frac{\pi}{2k}}^{\frac{\pi}{2k}} \log|f(\rho e^{i\rho})| \cos k\varphi \, d\varphi$$

$$\leqq \frac{1}{\pi}(p + q)[1 + o(1)] T(\rho).$$

Supposons maintenant que notre fonction vérifie les conditions (1,1). Divisons la dernière formule par $T(\rho)$ et faisons ρ croître indéfiniment. On aura

$$0 \leqq -s + \frac{1}{\pi}(p + q),$$

c'est-à-dire

$$\pi s \leqq p + q.$$