BULLETIN DE LA S. M. F.

S. BERNSTEIN

La problème de l'approximation des fonctions continues sur tout l'axe réel et l'une de ses applications

Bulletin de la S. M. F., tome 52 (1924), p. 399-410

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1924__52__399_0>

LE PROBLÈME DE L'APPROXIMATION DES FONCTIONS CONTINUES SUR TOUT L'AXE RÉEL ET L'UNE DE SES APPLICATIONS ;

PAR M. SERGE BERNSTEIN.

Dans les Leçons que j'ai eu l'honneur de professer l'année dernière (mai 1923) à la Sorbonne [1], je me suis occupé, entre autres, de la question de l'approximation des fonctions continues par des polynomes sur tout l'axe réel. Ce problème, qui ne paraît pas avoir été étudié jusqu'à présent d'une façon systématique, comporte de nombreuses applications parmi lesquelles je signalerai le problème de M. Hadamard concernant les conditions suffisantes pour qu'une fonction soit entièrement déterminée par l'ensemble de toutes ses dérivées en un seul point. Dans le premier paragraphe de cet article je rappellerai et je compléterai un peu ceux des résultats exposés dans mes Leçons, dont j'aurai besoin pour la solution du problème de M. Hadamard, auquel sera consacré le second paragraphe.

I.

1. Soient $\varphi(x)$ une fonction positive et $f(x)$ une autre fonction arbitraire. Nous désignerons par $E''_{\varphi(x)}f(x)$ la meilleure approximation de $f(x)$ par des polynomes de degré n sur tout l'axe réel comparativement à $\varphi(x)$. En d'autres termes, si l'on considère l'ensemble des écarts maxima des expressions

$$\frac{f(x) - P_n(x)}{\varphi(x)}$$

(pour $-\infty < x < +\infty$), $P_n(x)$ étant un polynome quelconque de degré n, $E''_{\varphi(x)}f(x)$ est la limite inférieure de cet ensemble. Nous dirons que $f(x)$ est susceptible d'une approximation poly-

[1] Ces Leçons, dont le manuscrit a été remis en juillet 1923 à l'éditeur Gauthier-Villars, doivent paraître prochainement dans la collection de monographies dirigée par M. Émile Borel.

nomiale de l'ordre de $\varphi(x)$, dans le cas où

$$E_{\varphi(x)} f(x) = \lim_{n=\infty} E^n_{\varphi(x)} f(x) = 0.$$

La question qu'il importe de résoudre c'est la détermination de l'ordre de croissance de $\varphi(x)$ pour que l'on ait $E_{\varphi(x)} f(x) = 0$. J'ai démontré dans mon cours la proposition suivante :

Théorème. — *Soit* $\varphi(x) = \left(1+\frac{x^2}{\beta_1^2}\right) \cdots \left(1+\frac{x^2}{\beta_n^2}\right) \cdots$. *Dans le cas où* $\sum \frac{1}{\beta_n}$ *diverge, on a* $E_{\varphi(x)} f(x) = 0$, *quelle que soit la fonction continue* $f(x)$, *pourvu que* $\lim_{x=\infty} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = 0$; *au contraire, si* $\sum \frac{1}{\beta_n}$ *converge, l'égalité* $E_{\varphi(x)} f(x) = 0$ *exige que* $f(x)$ *soit une fonction analytique entière dont l'ordre apparent est non supérieur à celui de* $\varphi(x)$.

N'ayant pas besoin dans la suite de la seconde partie de ce théorème, je me bornerai à indiquer les points principaux de la démonstration de sa première partie.

2. A la base de la démonstration nous aurons le lemme suivant :

Lemme. — *Soit* $R(x) = s^2(x) + t^2(x)$ *un polynome de degré* $2n$ *ayant toutes ses racines complexes conjuguées* $\alpha_k \pm i\beta_k$, *où* $\beta_k > 0$. *Soit d'autre part* $P(x) = p_0 + x + p_1 x^2 + \ldots$ *un polynome de degré quelconque. Si* $R(0) = 1$, *l'expression*

$$\frac{|P(x)|}{\sqrt{R(x)}}$$

ne peut rester sur tout l'axe réel inférieure à

$$(1) \qquad M = \frac{1}{\left|\sum_1^n \frac{1}{\alpha_k - i\beta_k}\right|},$$

et il est possible de choisir le polynome $P(x)$ *de sorte que la valeur* M *ne soit pas dépassée.*

Ce lemme étant admis, considérons, en particulier, le cas où le polynome $R(x)$ est pair. Il est alors clair que le polynome $P(x)$ qui réalise alors l'écart minimum M sera impair.

On peut donc dire que l'écart minimum d'une expression de la forme

$$B(x) = \frac{x + p_1 x^3 + p_2 x^5 + \dots}{\sqrt{R(x)}}$$

sera dans ce cas égal à

$$M = \frac{1}{\left| \sum_1^n \frac{1}{\alpha_k - i\beta_k} \right|} = \frac{1}{2\sum_1^{\frac{n}{2}} \frac{\beta_k}{\alpha_k^2 + \beta_k^2}}$$

si $\alpha_k > 0$, ou bien

$$M = \frac{1}{\sum_1^n \frac{1}{\beta_k}}$$

si $\alpha_k = 0$.

Remarquons que dans l'expression $B(x)$ qui réalise l'écart minimum M le degré du numérateur est $n - 1$, de plus cet écart est atteint avec des signes alternés pour $\frac{n}{2}$ valeurs positives de x (n étant pair, pour fixer les idées).

De même, en supposant que

$$A(x) = \frac{x + q_1 x^2 + q_2 x^4 + \dots + q_{\frac{n}{2}} x^n}{\sqrt{R(x)}}$$

est l'expression qui s'écarte le moins possible de zéro sur l'axe positif parmi toutes les expressions de la même forme, l'écart N de $A(x)$ sera atteint avec des signes alternés en $\frac{n}{2}$ points et à l'infini. Je dis que

$$(2) \qquad N < M;$$

en effet, admettons, contrairement à notre affirmation, que $N > M$, alors aux points où $A(x)$ est extremum, $A(x) - B(x)$ aurait le signe de $A(x)$ et posséderait au moins $\frac{n}{2}$ racines positives. Or, les coefficients de $A(x)$ ayant des signes alternés, les coefficients de $A(x) - B(x)$ présenteront $\frac{n}{2} - 1$ variations de signe, et

$A(x) - B(x)$ ne pourrait avoir plus de $\frac{n}{2} - 1$ racines. On prouve d'une façon analogue l'impossibilité de $N = M$, mais je ne m'y arrête pas, puisqu'il serait sans importance, pour la suite, si l'inégalité (2) devait être remplacée par $N \leqq M$.

Nous en concluons que

$$E^n_{\sqrt{R(x)}} |x| < M,$$

ou, en remarquant que l'augmentation du degré du numérateur ne saurait améliorer l'approximation,

$$E_{\sqrt{R(x)}} |x| < M. \tag{3}$$

En employant un artifice que j'avais déjà employé dans une occasion semblable, on peut donner une borne inférieure de $E_{\sqrt{R(x)}} |x|$ qui est du même ordre de grandeur (*voir* les *Leçons* citées).

3. Si le degré de $R(x)$ augmentant indéfiniment, son développement en produit de facteurs groupés deux à deux converge, le produit $R(x)$ tend *en augmentant* vers une fonction limite entière $\varphi(x)$ de genre 0 ou 1, pourvu que nous admettions que pour k assez grand $\alpha_k \leqq \beta_k$ (dans le théorème énoncé au début, nous avons même supposé $\alpha_k = 0$).

Par conséquent,

$$E_{\sqrt{\varphi(x)}} |x| \leqq E_{\sqrt{R(x)}} |x| < M \tag{4}$$

et $|x|$ sera donc *susceptible d'une approximation par polynomes de l'ordre de* $\sqrt{\varphi(x)}$ *et* a fortiori *de* $\varphi(x)$, *si la fonction entière* $\varphi(x)$ *est de genre* 1 (*cela serait impossible, si* $\varphi(x)$ *était de genre* 0). Il est aisé de prouver, à présent, que *toute fonction continue* $f(x)$ $\left[\lim\limits_{x=\infty} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = 0\right]$ *est susceptible d'une approximation polynomiale de l'ordre* $\varphi(x)$, *quelle que soit la fonction entière paire* $\varphi(x)$ *de genre* 1 (avec $\alpha_k \leqq \beta_k$).

En effet, soit δ un nombre arbitrairement petit; fixons un nombre l assez grand pour qu'on ait $|f(x)| < \delta\varphi(x)$, lorsque $|x| \geqq l$.

Cela étant, posons

$$(5)\qquad \begin{cases} f_1(x) = f(x) & \text{pour} \quad |x| \leqq l, \\ f_1(x) = f(l) & \text{»} \quad x \geqq l, \\ f_1(x) = f(-l) & \text{»} \quad x \leqq -l. \end{cases}$$

Construisons une ligne polygonale $S_1(x)$, telle que

$$(6)\qquad \begin{cases} |f_1(x) - S_1(x)| < \delta\varphi(x) & \text{pour} \quad |x| < l, \\ S_1(x) = f_1(x) & \text{»} \quad |x| \geqq l. \end{cases}$$

On pourra mettre $S_1(x)$ sous la forme

$$S_1(x) = A_0 + \Sigma A_k |x - a_k|,$$

où $|a_k| \leqq l$. Or, quelque petit que soit le nombre ε, on pourra former, en vertu de ce qui précède, un polynome $P_k(x)$ de degré assez élevé pour avoir sur tout l'axe réel

$$\big|\, |x - a_k| - P_k(x) \big| < \varepsilon\varphi\left(\frac{x - a_k}{2}\right) < \varepsilon[\varphi(x) + \varphi(l)],$$

puisque $\varphi(x)$ croît avec la valeur absolue de x. Donc, en imposant à ε la condition que $\varepsilon\Sigma|A_k|\varphi(l) < \delta \leqq \delta\varphi(x)$, nous obtiendrons par addition un polynome $P(x)$, tel que

$$|S_1(x) - P(x)| < 2\delta\varphi(x)$$

et, en vertu de (6),

$$|f_1(x) - P(x)| < 3\delta\varphi(x).$$

Ainsi, finalement,

$$|f(x) - P(x)| < 3\delta\varphi(x) \quad \text{pour} \quad |x| \leqq l$$

et

$$|f(x) - P(x)| = |f_1(x) - P(x) + f(x) - f_1(x)| < 5\delta\varphi(x) \quad \text{pour} \quad |x| > l.$$

C. Q. F. D.

4. Ainsi, par exemple, en posant $\varphi(x) = (1 + x^2)\ldots\left(1 + \frac{x^2}{n^\mu}\right)\cdots$ on reconnaît que toute fonction continue admet une approximation de l'ordre de $e^{|x|}$, mais n'admet pas une approximation de l'ordre $e^{|x|^{1+\alpha}}$, où $\alpha > 1$.

D'une façon générale,

$$(7) \qquad \varphi(x) = \left(1+\frac{x^2}{\beta_1^2}\right)\cdots\left(1+\frac{x^2}{\beta_n^2}\right)\cdots = e^{x^2 u(x)} = e^{p(x)},$$

où $\int^x u(x)dx$ *croît indéfiniment avec* x, *lorsque* $\varphi(x)$ *est de genre* 1, *et reste bornée dans le cas contraire.*

En effet, $n(x)$ désignant la fonction inverse de β_n et posant $\gamma(x) = \frac{2n(x)}{x^2}$, on a

$$\int \frac{dn}{\beta_n} = \int \frac{n'(x)\,dx}{x} = \frac{1}{2}\int \gamma(x)\,dx + \frac{1}{2}x\gamma(x),$$

donc $\int \gamma(x)dx$ croîtra indéfiniment ou non suivant que $\varphi(x)$ sera de genre 1 ou de genre 0.

Or,

$$\frac{\varphi'(x)}{2x\,\varphi(x)} = \sum_{\beta_n \leq x} \frac{1}{x^2+\beta_n^2} + \sum_{\beta_n > x} \frac{1}{x^2+\beta_n^2},$$

où la première somme du second membre est de l'ordre de $\frac{n(x)}{x^2} = \frac{1}{2}\gamma(x)$, tandis que la seconde somme est de l'ordre de

$$\int_{n(x)}^{\infty} \frac{dn}{\beta_n^2} = \int_x^{\infty} \frac{n'(x)\,dx}{x^2} = \int_x^{\infty} \frac{\gamma(x)}{x}\,dx + \frac{1}{2}\gamma(x).$$

D'où, en multipliant par $2x$ et intégrant, on reconnaît immédiatement que $\log\varphi(x)$ est de l'ordre de

$$\int_0^x x\gamma(x)\,dx + x^2\int_x^{\infty} \frac{\gamma(x)}{x}\,dx = x^2 u(x),$$

et il est aisé de voir que $\int^x \gamma(x)dx$ et $\int^x u(x)dx$ sont en même temps convergentes ou divergentes. En effet,

$$\int_0^x u(x)\,dx = \int_0^x \frac{1}{x^2}\left[\int_0^x z\,\gamma(z)\,dz\right]dx + \int_0^x \left(\int_x^{\infty} \frac{\gamma(z)}{z}\,dz\right)dx$$
$$= \int_0^x \left(2-\frac{z}{x}\right)\gamma(z)\,dz + x\int_x^{\infty} \frac{\gamma(z)}{z}\,dz.$$

Par exemple, en prenant $\beta_n = \frac{1}{n \log n \log \log n \ldots}$, on a

$$u(x) = \frac{\lambda}{x \log x \log \log x \ldots},$$

λ étant borné.

Ainsi, *dans le cas où $\varphi(x)$ peut être mis sous la forme du produit* (7), *la condition nécessaire et suffisante pour que l'on ait $E_{\varphi(x)} f(x) = 0$, lorsque $\lim_{x=\infty} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = 0$, est que l'intégrale $\int^{\infty} u(x)\,dx$ soit infinie.*

Une fonction croissante $p(x) = x^2 u(x)$, où $\int u(x)\,dx$ diverge, étant donnée, on ne peut cependant affirmer qu'il est possible de former un produit $\varphi(x)$, tel que $\log \varphi(x) \leqq p(x)$, $\int^{\infty} \gamma(x)\,dx$ étant infini.

Il en sera ainsi, en particulier, lorsque $\int_0^x \frac{p(x)}{x}\,dx$ et $x^2 \int_x^{\infty} \frac{p(x)}{x^3}\,dx$ seront du même ordre [1] que $p(x)$.

Mais il me paraît probable que la restriction au sujet du développement particulier de $\varphi(x)$ qui suppose une certaine régularité de croissance de $p(x)$ n'a rien d'essentiel, de sorte que la divergence $\int u(x)\,dx$ serait la condition unique pour que $E_{\varphi(x)} = 0$.

II.

5. Le problème que nous venons de traiter trouve son application dans beaucoup de cas, où l'on doit délimiter le champ de fonctions à considérer pour qu'une infinité de conditions d'une nature donnée détermine sans ambiguïté la fonction.

Ainsi, par exemple, il est aisé, d'après ce qui précède, de reconnaître quelle classe de fonctions doit être considérée pour

---

[1] Il suffirait donc qu'il existe un nombre λ, tel que

$$p(x) > \lambda \int_1^x x \left[\int_x^{\infty} \frac{p(x)}{x^3} \right] dx$$

ou encore que $p'(x)$ soit de l'ordre de $\frac{p(x)}{x}$, car on peut identifier alors $\gamma(x)$ à $u(x)$ à un facteur constant près.

que les équations

$$(8) \qquad \int_{-\infty}^{\infty} f(x).x^n\,dx = 0 \qquad (n = 0, 1\ldots)$$

admettent la seule solution $f(x) = 0$.

En effet, il résulte de (8) que l'on a, quel que soit le polynome $P(x)$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,P(x)\,dx = 0.$$

Donc, si l'on a

$$E_{\varphi(x)} f(x) = 0,$$

on aura, quelque petit que soit ε,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f^2(x)\,dx < \varepsilon \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)\,\varphi(x)|\,dx.$$

Par conséquent, le problème des moments ne peut jamais posséder plus d'une solution continue $f(x)$, telle que l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,e^{x^2 u(x)}\,dx$$

ait un sens, si l'intégrale $\int^{\infty} u(x)dx$ est infinie [avec la restriction de la page précédente au sujet de $u(x)$].

Le problème de M. Hadamard peut être traité d'une façon analogue.

6. Soit $f(x)$ une fonction indéfiniment dérivable sur le segment $(-1, 1)$. Formons son développement en série de polynomes trigonométriques $T_n(x)$

$$f(x) = f(\cos t) = \sum_0^{\infty} a_n \cos nt = \sum_0^{\infty} a_n\,T_n(x);$$

nous pouvons d'abord établir le lemme suivant :

Si l'on peut former une fonction $\varphi(x) = \prod_1^{\infty}\left(1 + \frac{x^2}{\beta_n^2}\right)$ *de genre* 1, *telle que la série* $\Sigma\,|a_n|\,\varphi(n)$ *soit convergente, la fonction* $f(x)$ *est identiquement nulle, si en un point* $x_0\,(-1 \leq x_0 \leq 1)$ *elle s'annule avec toutes ses dérivées.*

En effet, soit $x_0 = \cos t_0$; on a, par hypothèse,

$$\Sigma n^{2k} a_n \cos n t_0 = \Sigma n^{2k+1} a_n \sin n t_0 = 0.$$

Par conséquent, $P(n)$ et $Q(n)$ étant, respectivement, des polynomes pairs et impairs quelconques, on a aussi

$$\Sigma P(n) a_n \cos n t_0 = \Sigma Q(n) a_n \sin n t_0 = 0.$$

Cela étant, nous pouvons (d'une infinité de façons) construire une fonction $F(x)$ continue et bornée sur l'axe réel, paire et satisfaisant pour toute valeur entière de n aux conditions

$$F(\pm n) = a_n \cos n t_0.$$

Or, d'après ce qui précède, quelque petit que soit ε, il existera un polynome pair $P(x)$, tel que sur tout l'axe réel

$$| F(x) - P(x) | < \varepsilon \varphi(x).$$

Donc

$$\Sigma a_n^2 \cos^2 n t_0 = \sum_0^\infty [F(n) - P(n)] a_n \cos n t_0 < \varepsilon \Sigma | a_n | \varphi(n).$$

D'où $\Sigma a_n^2 \cos^2 n t_0 = 0$, et par conséquent $a_n \cos n t_0 = 0$, quel que soit n. En construisant de même la fonction impaire $E(x)$, telle $E(n) = a_n \sin n t_0$ pour toutes les valeurs entières de n, on reconnaît également que $a_n \sin n t_0 = 0$; donc $a_n = 0$, quel que soit n. C. Q. F. D.

7. De ce lemme nous tirons le théorème suivant :

Théorème. — *Si la meilleure approximation* $E_n f(x)$ *sur un segment* AB *donné satisfait, quel que soit* n, *à l'inégalité*

$$(B) \qquad E_n f(x) < \frac{1}{\varphi(n)},$$

où $\varphi(x) = \prod_1^\infty \left(1 + \frac{x^2}{\beta_n^2}\right)$ *est une fonction de genre* 1, *la fonction* $f(x)$ *est déterminée sans ambiguïté sur tout le segment par la valeur qu'elle prend avec toutes ses dérivées en un point quelconque du segment* AB.

En effet, on sait que

$$E_n f(x) > \sqrt{\frac{1}{2}(a_{n+1}^2 + \ldots)}.$$

Donc la série

$$\sum \frac{|a_n|}{\sqrt{E_{n-1}f(x)}} < \sum \frac{|a_n|}{\sqrt[4]{\frac{1}{2}(a_n^2+\ldots)}}$$

$$= \sum \frac{|a_n|\sqrt[4]{\frac{1}{2}(a_n^2+\ldots)}}{\sqrt{\frac{1}{2}(a_n^2+\ldots)}} < \Sigma \sqrt[4]{2(a_n^2+a_{n+1}^2+\ldots)}$$

est certainement convergente pour toute fonction possédant au moins des dérivées bornées des trois premiers ordres; par conséquent, notre lemme est applicable et donne la conclusion énoncée.

8. Il reste à signaler la relation du résultat obtenu avec les solutions du problème de M. Hadamard fournies par les théorèmes de MM. Denjoy et Carleman. Le théorème de M. Carleman [1], dont celui de M. Denjoy est un cas particulier, affirme que, si la série

$$\text{(D)} \qquad \sum \frac{1}{M_n} \text{ diverge,}$$

où M_n'' est le maximum de la dérivée d'ordre n de $f(x)$ sur un segment donné ($-1, +1$, par exemple), la fonction $f(x)$ est entièrement définie par l'ensemble des valeurs qu'elle prend avec toutes ses dérivées en un point donné du segment. Nous appellerons les fonctions satisfaisant à la condition (D) fonctions quasi analytiques (D) sur le segment donné.

Pour comparer la condition (D) avec la condition (B), je remplacerai la condition (D) par la condition (D′) qui lui est essentiellement équivalente. Soit

$$\mu_n = \max. p \sqrt[n]{E_p f(x)},$$

lorsque, pour une valeur fixe de n, on donne à p toutes les valeurs possibles ($p \geqq n$), $E_p f(x)$ désignant la meilleure approximation par des polynomes de degré p sur le segment ($-1, +1$).

---

(1) *Voir*, par exemple la Communication au V° Congrès des Mathématiciens scandinaves (Helsingfors, 1922) de M. Torsten CARLEMAN, *Sur les fonctions quasi analytiques.*

Si la série

$$(\mathrm{D}') \qquad S' = \sum \frac{1}{\mu_n} \text{ diverge,}$$

la fonction $f(x)$ *est quasi analytique* (D) *sur tout segment* $\overline{ab}$ *intérieur à* $(-1, +1)$. Au contraire, *si la condition* (D) *est satisfaite sur le segment* $(-1, +1)$, *la condition* (D′) *a également lieu sur le même segment.*

Ainsi la condition (D′) est un peu plus générale [1] que la condition (D). Elle est cependant également suffisante pour affirmer que si $f(x)$ s'annule avec toutes ses dérivées même *à l'extrémité du segment* (où la condition (D) peut ne pas être réalisée), $f(x)$ est identiquement nulle.

En effet, réduisons, pour fixer les idées, le segment, où la condition (D′) pour $f(x)$ est remplie, à $(0,1)$; alors $f(x^2)$ satisfera à la même condition sur $(-1, +1)$, car $E_n f(x) = E_{2n} f(x^2)$, de sorte que les termes de la série S′ se trouvent simplement doublés.

Par conséquent, $f(x^2)$ satisfait à la condition (D) dans le voisinage de l'origine [2]. Il n'est d'ailleurs pas difficile de donner des exemples, où $f(x^2)$ est quasi analytique (D) à l'origine, tandis que $f(x)$ ne l'est pas : si $M_n = n \log^2 n$ [pour $f(x)$] à l'origine, on a $M'_n = n \log n$ [pour $f(x^2)$].

A cause de l'inégalité

$$M_n > \mu_n^{1-\frac{1}{n}},$$

nous concluons que les conditions de M. Denjoy $M_n < n \log n \log_2 n \ldots$ entraînent

$$E_p < \frac{[(n+1)\log(n+1)\log_2(n+1)\ldots]^{n+1}}{p^n} < e^{\frac{kp}{\log p \log_2 p \ldots}},$$

k étant un nombre positif fixe.

---

[1] Ces deux conditions sont entièrement identiques pour les fonctions périodiques, si l'on remplace l'approximation par polynomes par l'approximation trigonométrique.

[2] La plus grande généralité de la condition (D′) tient donc à ce fait que la croissance des dérivées en certain point peut être plus rapide, s'il ne s'agit de déterminer la fonction que d'un seul côté de ce point.

La condition de M. Denjoy rentre donc comme cas particulier dans notre théorème.

Il n'en est pas de même du théorème de M. Carleman, si l'on conserve la restriction au sujet de $\varphi(x)$ que nous avons dû faire; mais il n'est nullement certain que même sous sa forme restreinte notre théorème soit une conséquence de celui de M. Carleman (mis sous la forme générale de la condition D'). Au contraire, si, comme je le crois probable, la fonction croissante $\varphi(x)$ doit remplir la seule condition que $\log\varphi(x) \leqq x^2 u(x)$, où

$$\int^{\infty} u(x)\, dx = \infty,$$

notre condition (B) serait encore plus générale que celle de M. Carleman, car il n'est pas impossible que la série S' soit convergente, tandis que la série

$$S = \sum \frac{\log E_n}{n^2}$$

est divergente.