BULLETIN DE LA S. M. F.

J. HADAMARD

Principe de Huygens et prolongement analytique

Bulletin de la S. M. F., tome 52 (1924), p. 241-278

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1924__52__241_1>

© Bulletin de la S. M. F., 1924, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

PRINCIPE DE HUYGENS ET PROLONGEMENT ANALYTIQUE ;

PAR M. J. HADAMARD.

I.

Le principe de Huygens a, comme on le sait (1), reçu plusieurs acceptions dont la diversité a même été la principale cause des obscurités qui ont pendant longtemps régné sur ce sujet.

Huygens, — raisonnant en particulier sur le cas d'un signal lumineux émis sensiblement en un point indiqué O et à un instant unique t_0, — détermine l'effet produit par ce phénomène initial en un point A à un instant ultérieur t' en prenant comme intermédiaire l'état de choses qui s'établit à un instant quelconque t_1 pris dans l'intervalle (t_0, t'). Si l'on admet qu'à cet instant t_1, l'effet de la perturbation est localisé sur la surface d'une sphère de centre O et de rayon $v(t_1 - t_0)$, on est conduit, classiquement, à

(1) *Voir* notre précédent article *Sur l'intégrale résiduelle* (*Bulletin de la Société*, t. XXVIII, 1900, p. 81). Nous sommes revenus sur ces distinctions, pour les préciser, dans une conférence faite à la Société mathématique suisse à Zurich, en 1917. A leur sujet et pour les différents résultats et formules de la théorie des équations linéaires aux dérivées partielles utilisés ci-après, voir nos *Lectures on Cauchy's problems in Linear partial differential equations*, Yale-Cambridge, 1923. (Les renvois à cet ouvrage seront, dans ce qui suit, indiqués par la lettre *L*.)

représenter la perturbation en A par une certaine intégrale étendue à la surface de cette sphère; et c'est cela qui, depuis les travaux classiques de M. Volterra, est souvent considéré comme constituant le principe de Huygens.

On sait aujourd'hui que les deux derniers faits que nous venons d'énoncer sont loin d'être évidents et ne peuvent être admis sans un examen très approfondi. Il n'en est pas de même du premier point de départ, lequel s'impose à nous comme une des bases fondamentales de la connaissance. Le principe même du déterminisme scientifique, savoir :

De l'état de l'univers à l'instant t_0, on peut déduire l'état à un instant ultérieur t',

entraîne le complément suivant :

Cette déduction peut s'opérer par l'intermédiaire de n'importe quel instant t_1 tel que $t_0 < t_1 < t'$, l'état en t_0 permettant de calculer l'état en t_1 et celui-ci l'état en t',

C'est au principe de Huygens ainsi formulé qu'est consacré le présent travail.

Mathématiquement, il se traduit par l'existence de certains *groupes* d'opérations ordinaires ou fonctionnelles.

C'est ce qui a été remarqué, pour la première fois, par M. Picard (1), pour le cas où l'état du système est caractérisé par une seule quantité y définie en fonction du temps par une équation différentielle ordinaire. Si, par exemple, celle-ci est du second ordre et, pour prendre le cas le plus simple, ne contient pas explicitement la variable indépendante t, son intégrale générale sera de la forme

$$y = \varphi(t - t_0, y_0, y'_0),$$

et, en particulier, les valeurs de y et de y' pour $t = t_0 + h$ seront de la forme

$$y_1 = \varphi(h, y_0, y'_0),$$
$$y'_1 = \frac{\partial \varphi}{\partial h} = \psi(h, y_0, y'_0).$$

(1) *Rendic. Circ. Mat. Palermo*, 1895.

Il est clair que les transformations ainsi écrites, celles par lesquelles on passe des valeurs y_0, y'_0 aux valeurs y_1, y'_1, forment un groupe à un paramètre h, et même un groupe dont toutes les substitutions sont échangeables entre elles : le produit des substitutions correspondant aux valeurs h et k du paramètre donne la substitution correspondant à la valeur $h + k$.

M. Le Roux (1) a signalé l'analogue de ce fait dans la théorie des équations aux dérivées partielles. Soit, par exemple, une équation linéaire aux dérivées partielles du second ordre à une seule inconnue (2) u et à trois variables indépendantes x, y, t. Supposons-la hyperbolique et telle qu'une solution en soit bien déterminée par les données de Cauchy relatives à la multiplicité $t = t_0 = \text{const.}$, c'est-à-dire par les conditions

$$u(x, y, t_0) = f(x, y),$$
$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_{t=t_0} = g(x, y).$$

Dans ces conditions, si l'on pose

$$t_1 = t_0 + h, \tag{1}$$

les quantités analogues à f et à g, mais relatives à $t = t_1$,

$$u(x, y, t_1) = f_1(x, y),$$
$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_{t=t_1} = g_1(x, y),$$

seront déterminées lorsqu'on se sera donné les fonctions f et g, c'est-à-dire qu'elles seront de la forme

$$\begin{cases} f_1(x, y) = \mathrm{U}\,|\,[f, g\,|\,x, y, t_0, h]\,|, \\ g_1(x, y) = \mathrm{V}\,|\,[f, g\,|\,x, y, t_0, h]\,|, \end{cases} \tag{2}$$

U et V étant des fonctionnelles (3) de f, g, lesquelles sont aussi fonctions de x, y, t_0, h.

S'il se trouve que les coefficients de l'équation sont indépendants de t, on peut simplifier les équations précédentes en faisant abstrac-

---

(1) *Journ. de Math.*, 5e série, t. IX, 1903, p. 403-455; particulièrement n° 22, p. 434.

(2) M. Le Roux (*loc. cit.*) traite le cas général d'un nombre quelconque d'équations à un nombre quelconque d'inconnues.

(3) Voir nos *Leçons sur le Calcul des Variations* ou les *Leçons d'Analyse fonctionnelle* de M. Paul Lévy.

tion de l'équation (1) et supprimant, dans les équations (2), la mention de la quantité t_0. La transformation porte alors exclusivement sur les fonctions f et g (à l'exclusion de la quantité t_0).

Laissant de côté ce cas particulier, il est clair que les surfaces $t = \text{const.}$ peuvent être remplacées, dans ce qui précède, par n'importe quelle autre catégorie de surfaces, pourvu qu'elles soient propres à la définition d'une solution de l'équation aux dérivées partielles par les données de Cauchy. Tout couple de pareilles surfaces S définit une transformation fonctionnelle T telle que celles que nous venons de considérer et toute famille de surfaces semblables un groupe de transformations T.

Les surfaces S propres à porter des données de Cauchy, de manière à définir une solution de l'équation, sont celles dont le plan tangent coupe un cône caractéristique (ayant pour sommet un point infiniment voisin) suivant une ellipse. Un cas limite est celui de surfaces caractéristiques : dans ce cas, les données de Cauchy peuvent (1) (sans perdre leur caractère de données de Cauchy) être réduites à une seule, — la valeur de l'inconnue u en chaque point. Le passage d'une surface caractéristique à une autre se traduira encore par une transformation fonctionnelle, cas limite de T, que nous désignerons par T_0, et à toute famille de caractéristiques correspondra un groupe de transformations T_0.

Mais, d'autre part, on sait (2) que le problème de Cauchy n'est nullement le seul qui puisse se poser relativement à une équation aux dérivées partielles du type considéré. Les données peuvent être portées par deux portions de surfaces différentes limitées toutes deux à leur intersection, dont l'une S aura, par rapport au cône caractéristique, la situation sus-indiquée, — et portera des données de Cauchy, — tandis que l'autre Σ ne vérifiera pas la même condition (le plan tangent en un quelconque de ses points coupant un cône caractéristique voisin suivant une hyperbole) : sur cette dernière, les données devront être du genre de Dirichlet, par exemple, les valeurs de l'inconnue en chaque point. C'est ce qui porte le nom de *problème mixte*.

---

(1) Cf. *V*, n° 113.

(2) Voir *Les problèmes aux limites dans la théorie des équations aux dérivées partielles* (*Jour. de Phys.*, 1906) et *V*, Livre I, n°s 23 et suivants.

Il est clair qu'un tel problème donne lieu, sous le point de vue qui précède, à deux catégories de transformations, l'une correspondant au changement de la surface S et analogue dans une certaine mesure à T, l'autre correspondant à un changement de Σ et que nous pouvons appeler transformation U.

On obtient encore le problème mixte, sous une autre forme (équivalente à la première, comme il est aisé de s'en convaincre, moyennant la résolution d'un problème de Cauchy), en remplaçant S par une portion de surface caractéristique S_0 (toujours limitée à son intersection avec Σ). Une solution u de l'équation peut alors être considérée comme déterminée par les valeurs qu'elle prend sur S_0 et celles qu'elle prend sur Σ.

Ceci donnera encore lieu à deux sortes de transformations : les unes, correspondant au changement de S_0, ressembleront ainsi aux transformations T_0 ; les autres correspondront à un changement de Σ et seront encore appelées transformations U.

Le calcul de la solution du problème de Cauchy ou du problème mixte à l'aide des données s'effectue, comme l'on sait, par des intégrales définies faisant intervenir certaines quantités auxiliaires convenables (solution élémentaire, fonction de Riemann, fonction de Green, etc.), le fait que les transformations telles que T, T_0 ou U forment des groupes se traduit par des équations intégrales auxquelles satisfont les quantités en question.

J'ai formé, dans un travail précédent (1), celle qui correspond à l'équation classique de Laplace

$$(e) \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} + a\frac{\partial u}{\partial n} + b\frac{\partial u}{\partial y} + cu = 0,$$

et à la transformation T_0, équation intégrale vérifiée par la fonction de Riemann $v(x, y; x', y')$. Si (x', y'), (x, y) sont deux points du plan; $x = x_1$ une caractéristique de l'un des systèmes passant entre ces deux points, on a

$$(3) \qquad \int_{y'}^{y} v(x, y; x_1, \eta_1)\left[\frac{\partial}{\partial \eta_1} v(x_1, \eta_1; x', y') - a(x_1, \eta_1)\, v(x_1, \eta_1; x', y')\right] d\eta_1$$
$$= v(x, y; x', y') - v(x, y; x_1, y')\, e^{\int_{x'}^{x_1} b(x, y')\, dx}.$$

(1) ***Bulletin de la Société***, t. XXXI, 1903.

Il est clair que toutes les autres formes d'équations hyperboliques (et même paraboliques) et toutes les transformations ci-dessus considérées qu'on peut leur appliquer fournissent des relations analogues.

Les équations du type elliptique elles-mêmes permettraient d'en obtenir. Soient C, C′ deux contours dont le second soit intérieur au premier; $G(x, y; \xi, \eta)$, $G'(x, y; \xi, \eta)$ les deux fonctions de Green correspondantes; on aura pour deux points M, N intérieurs à C′

$$G(M, N) - G'(M, N) = \int_{C'} G(M, P) \frac{d}{dn_P} G'(N, P) ds_P,$$

ce qui peut manifestement être considéré comme une transformation U.

Il est clair que des faits analogues se présenteront quel que soit le nombre des variables indépendantes. Nous formerons, un peu plus loin, les relations correspondantes.

De telles relations expriment des propriétés analytiques de quantités telles que la fonction de Riemann. J'ai montré, dans le travail cité, il y a un instant, qu'on obtient effectivement ainsi, dans les deux cas classiques de l'équation des télégraphistes et de l'équation d'Euler et de Poisson, de véritables théorèmes d'addition intégraux pour la fonction de Bessel et pour la fonction hypergéométrique. Le premier de ces théorèmes avait déjà été obtenu directement par M. Caillier, de Genève, qui en avait fait la base d'une nouvelle et très élégante théorie de la fonction de Bessel. A ma demande, le profond géomètre, dont la Science ne saurait trop déplorer la perte prématurée, voulut bien étudier de même le théorème relatif à la série hypergéométrique, et obtint, par voie directe, une série de formules qui comprennent celle que j'avais écrite comme cas particulier.

Ce sont, semble-t-il, des considérations du même genre appliquées à l'équation de la chaleur, qui ont conduit M. F. Bernstein au remarquable théorème intégral relatif à la fonction thêta dont il a développé les conséquences dans les *Sitzungsberichte* de l'Académie de Berlin et les *Proceedings* de l'Académie d'Amsterdam (¹).

(¹) *Sitzungsber.*, Berl., t. XL, 1920, p. 735; *Proceedings*, Amst., t. XXIII, 1921, p. 817.

On sait d'autre part que la belle théorie de la composition des noyaux développée par M. Volterra conduit à de tels théorèmes d'addition, et il serait intéressant de rechercher les relations qui existent entre les deux ordres de résultats.

II.

Dans le travail actuel, je me propose d'appliquer ces relations intégrales, non à l'obtention de nouvelles propriétés analytiques des expressions dont il s'agit, mais à la connaissance de leur domaine d'existence, et à leur prolongement analytique.

Considérons d'abord, pour prendre le cas le plus simple, l'équation de Laplace (e) et la fonction de Riemann correspondante. Cette dernière est définie autant qu'on le sait (outre l'équation aux dérivées partielles à laquelle elle satisfait) par la connaissance de ses valeurs le long des deux caractéristiques issues du point (x', y'). Dans les *Leçons* classiques de Darboux (1), ceci conduit à la calculer par l'application de la série de Taylor et du calcul des limites, c'est-à-dire dans un domaine forcément plus restreint qu'il ne conviendrait. Même si les coefficients de l'équation (et par conséquent aussi les exponentielles qui font connaître les valeurs de la fonction de Riemann sur les deux caractéristiques précédemment mentionnées) sont dépourvus de toute singularité *réelle*, la différence d'abscisses et la différence d'ordonnées entre les deux points dont dépend cette quantité ne peuvent dépasser, dans ces conditions, une certaine quantité l (en général en relation avec les singularités imaginaires des coefficients).

Cette difficulté, il est vrai, n'existe plus aujourd'hui, grâce à la méthode des approximations successives de M. Picard, laquelle permet de résoudre le même problème par des opérations convergentes dans tout rectangle (parallèle aux axes) où les données sont elles-mêmes régulières (2); mais, dans ce cas simple, il n'est pas sans intérêt de remarquer qu'elle pouvait être levée (3) par

(1) Tome II, Livre IV, n° 364.

(2) Cette méthode figure dans la deuxième édition du Tome II de Darboux (n° 365).

(3) La seule autre démonstration proposée dans ce but à notre connaissance est celle de M. Andrae (*Thèse*, Göttingue, 1903, p. 8-10), laquelle ne nous paraît d'ailleurs pas irréprochable.

l'emploi de la formule intégrale (3) : celle-ci permet évidemment, une fois v définie dans un certain carré de côté l, de la définir dans un carré voisin analogue, et de continuer ainsi dans toute région où les données de la question restent régulières et où, par conséquent, comme l'on sait, l a un minimum différent de zéro.

La question se présente moins simplement lorsque le nombre des variables indépendantes dépasse deux, du moins dans le cas hyperbolique auquel je m'attacherai particulièrement (1). Il faut alors introduire la *solution élémentaire*, analogue au potentiel élémentaire $\frac{1}{r}$.

En ce qui concerne la formation et l'usage de cette quantité, je renverrai le lecteur à trois Mémoires précédents publiés dans les *Annales scientifiques de l'École Normale supérieure* et dans les *Acta mathematica* (2), ainsi qu'aux *Lectures on Cauchy's problem*. On a d'abord à construire le conoïde caractéristique (3) ayant pour sommet le point arbitraire $a(a_1, a_2, \ldots, a_m)$ de l'espace à m dimensions et même, d'une manière plus précise, le premier membre Γ de son équation. Si

$$(E) \qquad \mathcal{L}(u) = \sum_{i,k} A_{ik} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k} + 2 \sum_i B_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + C u = f$$

est l'équation aux dérivées partielles (les A_{ik}, les B_i, C et f étant des fonctions données de nos variables indépendantes $x_1, x_2, \ldots, x_m$), **A** désignant la forme quadratique « caractéristique »

$$\mathbf{A}(P_1, P_2, \ldots, P_m; x_1, x_2, \ldots, x_m) = \Sigma A_{ik} P_i P_k$$

---

(1) Le cas elliptique est jusfiiable des rechershes de E. E. Levi (*Circolo di Palermo*) et de Hilbert (*Grundzüge*, 6e Partie).

(2) *Annales sc. Éc. Norm. sup.*, 3e série, t. XXI, 1904, et t. XXII, 1905 (ces deux Mémoires seront désignés dans ce qui suit par AE_1 et AE_2). *Acta mathematica*, t. XXXI, 1908 (désigné dans ce qui suit par *AM*). Les notations de *AM* diffèrent de celles de AE_1 ou AE_2 par l'introduction du facteur $\frac{1}{\sqrt{|\Delta|}}$ dans la solution élémentaire v; celles de *Y* (et du présent travail) diffèrent des précédentes par le changement de ψ en $-\psi$. D'autre part, en vue de notre objet actuel, nous avons dû changer la notation en ce qui regarde les données de Cauchy.

(3) *AE*, n° 6; *Y*, Livre II, Chap. III, n° 58.

et

$$\mathbf{H}(\xi_1, \ldots, \xi_m; x_1, \ldots, x_m) = \Sigma H_{ik} \xi_i \xi_k,$$

la forme réciproque (forme adjointe de $\mathbf{A}$, divisée par le discriminant Δ de $\mathbf{A}$), Γ n'est autre que le carré de la distance géodésique entre le point a et le point arbitraire $x(x_1, \ldots, x_m)$, comptée relativement à l'élément linéaire

$$\mathbf{H}(dx_1, \ldots, dx_m; x_1, \ldots, x_m).$$

Cette quantité Γ a donc, suivant les puissances des m quantités $(x_i - a_i)$, un développement qui commence par des termes du second ordre (termes qu'on obtient en remplaçant les ξ_i par $(x_i - a_i)$ dans la forme quadratique $\mathbf{H}$). Elle satisfait à l'équation aux dérivées partielles

$$\mathbf{A}\left(\frac{\partial \Gamma}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial \Gamma}{\partial x_m}; x_1, \ldots, x_m\right) = 4\Gamma. \tag{4}$$

La quantité Γ étant ainsi formée, deux cas sont à distinguer :

1° Si m est impair, la *solution élémentaire* de pôle a est, parmi les solutions de l'équation aux dérivées partielles, ou plutôt, lorsqu'on la considère comme fonction des x, de l'équation adjointe

$$\mathfrak{H}(v) = \sum_{i,k} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_k}(A_{ik} v) - 2\sum_i \frac{\partial}{\partial x_i}(B_i v) + C v = 0, \tag{E}$$

celle qui a la forme

$$v = \frac{V}{\Gamma^{\frac{m-2}{2}}}, \tag{5}$$

où le numérateur V est régulier au voisinage du point a et y prend la valeur $\frac{1}{\sqrt{|\Delta|_a}}$;

2° Si m est pair, soit $m = 2m_1$, la solution élémentaire n'est plus en général de la forme (5), mais bien de la forme

$$\frac{V}{\Gamma^{\frac{m-2}{2}}} - \Psi \log \Gamma = \frac{V}{\Gamma^{m_1-1}} - \Psi \log \Gamma, \tag{5'}$$

les fonctions V et Ψ, dont la première prend encore la valeur $\frac{1}{\sqrt{|\Delta|}}$

au point a, étant régulières. Cette condition, ici encore, détermine entièrement la fonction φ; mais il n'en est pas de même de V auquel on peut ajouter le produit de la fonction (régulière dans ce cas) Γ^{m_1} par n'importe quelle solution régulière de l'équation.

Quelle que soit la parité de m, l'expression ainsi formée satisfait à la *relation d'échange* (¹), c'est-à-dire que, par l'échange simultané de l'équation donnée (privée de second membre) avec son adjointe et du point x avec le point a, elle ne change pas (à l'élément arbitraire près qu'elle comporte dans le cas de m pair). Il en résulte que, considérée comme fonction du point a, elle satisfait, si m est impair, à l'équation proposée (E) avec $f = 0$. Si m est pair, cette même propriété (ainsi que celle de vérifier l'équation adjointe lorsqu'on la considère comme fonction des x) appartient à la fonction φ, coefficient du logarithme, laquelle peut d'ailleurs être identiquement nulle, comme il arrive dans le cas de l'équation classique des ondes sphériques.

Les solutions élémentaires ainsi définies permettent de calculer la solution du problème de Cauchy, lorsqu'on les introduit dans la formule fondamentale, à savoir celle qui, pour deux solutions *régulières*, l'une u de l'équation (E), l'autre v de l'équation (E'), s'écrit

$$(F) \quad -\mathbf{SSS}_T v f\, dx_1\, dx_2 \dots dx_m + \mathbf{SS}_S \left(u \frac{dv}{d\nu} - v \frac{du}{d\nu} - \mathrm{L}uv \right) dS = 0.$$

Dans cette formule, $\frac{du}{d\nu}$ et $\frac{dv}{d\nu}$ désignent respectivement les dérivées de u et v suivant la direction *transversale* à S (direction *conormale* de M. d'Adhémar), direction conjuguée du plan tangent à S par rapport au cône caractéristique représenté par l'équation tangentielle $\mathbf{A} = 0$ où l'équation ponctuelle $\mathbf{H} = 0$. Plus précisément, la dérivation $\frac{d}{d\nu}$ est définie par les formules

$$\frac{dx_i}{d\nu} = \frac{1}{2} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \pi_i} \qquad (i = 1, 2, \dots, m),$$

où $\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_m$ désignent les cosinus directeurs de la normale à S, si dS désigne à la manière ordinaire l'étendue de l'élément

(¹) *Cf.* DARBOUX, *loc. cit.*, n° 359 de la deuxième édition.

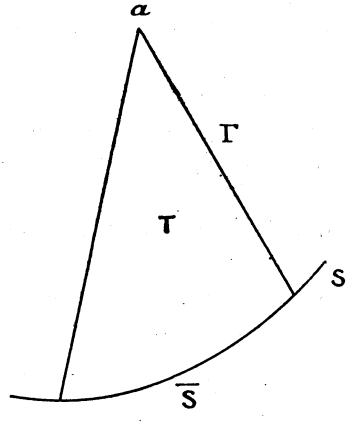
d'hypersurface. Mais, comme ce sont seulement les produits $\pi_i d\mathrm{S}$ qui interviennent dans les formules, on peut tout aussi bien prendre pour les π_i des quantités proportionnelles aux cosinus directeurs en question, à condition de modifier en conséquence la valeur de $d\mathrm{S}$ par l'intervention d'un facteur convenable. Par exemple, si $\mathrm{G}(x) = 0$ est l'équation de S, on peut prendre $\pi_i = \frac{\partial \mathrm{G}}{\partial x_i}$ à condition de remplacer $d\mathrm{S}$ par la quantité $d\mathrm{S}_\mathrm{G}$ ou encore $\frac{d\mathrm{T}}{d\mathrm{G}}$ (quotient de l'élément de volume $d\mathrm{T}$ par $d\mathrm{G}$) dont on obtient la valeur en divisant l'élément d'hypersurface $d\mathrm{S}$ par la dérivée normale $\frac{d\mathrm{G}}{dn}$ gradient de G).

Ces conventions interviennent également dans le calcul de la quantité L, dont l'expression est

$$\mathrm{L} = \sum_i \pi_i \left(\mathrm{B}_i - \sum_k \frac{\partial \mathrm{A}_{ik}}{\partial x_k} \right).$$

Le symbole **SSS** (qui se réduirait à $\int\int\int$ si l'on avait $m = 3$)

Fig. 1.



désigne une intégration m-uple dans une portion T d'espace (dans laquelle toute la régularité de u et de v est pour le moment supposée) limitée par une hypersurface S; le symbole **SS** (qui,

dans l'espace ordinaire, se réduirait à $\int\int$) représente une intégration $(m-1)$-uple suivant S.

Si maintenant, m étant d'abord supposé impair, $(m = 2m_1 + 1)$ au lieu de supposer la fonction v régulière, on la remplace par la solution élémentaire (5) de pôle a et que, en même temps, le domaine d'intégration soit limité d'une part par S, d'autre part par le conoïde caractéristique Γ de sommet a (*voir* la figure schématique ci-dessus), la valeur commune des deux membres n'est plus nulle, mais fait, au contraire, connaître celle de u_a, savoir (le coefficient Ω_{m-3} du premier membre représentant l'aire de l'hypersphère de rayon 1 dans l'espace à $m-2$ dimensions)

$$(6)\qquad \begin{aligned}(-1)^{m_1}\pi\Omega_{m-3}\,u_a &= -\overline{|\mathbf{SSS}_\Gamma\, v f\,dx_1, dx_2, \ldots, dx_m} \\ &\quad + \overline{|\mathbf{SS}_{\bar S}\left(u\frac{dv}{d\nu} - v\frac{du}{d\nu} - \mathrm{L}\,uv\right)d\mathrm{S}} \\ &= -\overline{|\mathbf{SSS}_\Gamma\, v f\,dx_1, dx_2, \ldots, dx_m} \\ &\quad + \overline{|\mathbf{SS}_{\bar S}\left(u\frac{dv}{d\nu} - u'v - \mathrm{L}\,uv\right)d\mathrm{S}},\end{aligned}$$

où u et u' représentent les valeurs (supposées données) de u et de sa dérivée transversale $\frac{du}{d\nu}$ en un point arbitraire de S et où l'intégrale **SS** est étendue à la portion $\bar{\mathrm{S}}$ de S intérieure au conoïde caractéristique.

Toutes ces intégrales (sauf, si $m = 3$, le premier terme du second membre) doivent, dans la formule précédente, être entendues au sens que j'ai expliqué dans mes Mémoires précédents (1). La quantité v étant [d'après (5)] infinie le long du conoïde caractéristique, et cela (du moins pour $m \geqq 5$) d'ordre supérieur à 1 (mais toujours fractionnaire) les intégrales en question n'ont, au point de vue classique, aucun sens. Si on limite le domaine d'intégration par l'hypersurface $\Gamma = \varepsilon$, l'intégrale ainsi obtenue augmentera indéfiniment avec $\frac{1}{\varepsilon}$. Mais j'ai montré, aux endroits cités, qu'il convient de lui ajouter une intégrale de frontière convenable, — savoir s'il s'agit de l'intégrale **SSS** qui constitue le premier terme, une intégrale $(m-1)$-uple **SS**

(1) AE_2; AM; Y, Livre III, Chap. I.

étendue à $\Gamma = \varepsilon$; s'il s'agit du second terme **SS**, une intégrale $(m-2)$-uple **S** étendue à l'intersection de $\Gamma = \varepsilon$ avec S — devenant également infinie avec $\frac{1}{\varepsilon}$ dans des conditions telles que le résultat total tend vers une limite parfaitement déterminée lorsque ε tend vers zéro. C'est cette manière d'opérer qui est exprimée par le symbole $\overline{|}$

Les intégrales ainsi généralisées n'ont pas les propriétés habituelles qui s'expriment par des inégalités. Au contraire, on peut généralement leur appliquer toutes les égalités auxquelles satisfont les intégrales ordinaires. Mentionnons en particulier ce que devient pour elles le calcul classique d'une intégrale multiple par quadratures superposées (1), c'est-à-dire par séparation des variables en deux groupes, les unes $x_1, x_2, \ldots, x_p$ étant d'abord laissées constantes pendant qu'on effectue une première quadrature par rapport aux variables restantes $x_{p+1}, \ldots, x_m$. Ce mode de calcul est légitime, tout comme pour les intégrales ordinaires, tant que la multiplicité $x_1 = \text{const.}, x_2 = \text{const.}, \ldots, x_p = \text{const.}$ coupe toujours la multiplicité (ici le conoïde caractéristique) le long duquel la fonction à intégrer devient singulière, sous un angle fini. Si, au contraire, cet angle est susceptible de tendre vers zéro, il faut (2), au moins dans la partie correspondante du domaine d'intégration, changer de variables de manière à éviter cette circonstance.

Le problème relatif à m impair est ainsi completement résolu par la formule (6), si l'on sait former la solution élémentaire v.

Lorsque les coefficients sont analytiques, le numérateur V de cette quantité se développe (3) en une série ordonnée suivant les puissances de Γ, laquelle converge tant que les deux points qui y figurent sont suffisamment voisins, ou même (*Y*, n° 180, p. 290) dès que Γ est suffisamment petit.

On peut également (4) obtenir la solution du problème de Cauchy et définir la solution élémentaire par un usage convenable des

(1) *Y*, Livre III, nos 88 et suivants.

(2) Pour un exemple de cette manière d'opérer, voir *Y*, Livre IV, nos 138 et suivants.

(3) *AE*, nos 9-10; *Y*, Livre II, nos 61 et suivants.

(4) *C. R. Ac. Sc.*, t. CLXX, p. 149; *Y*, Livre IV, nos 183 et suivants.

équations intégrales. Cette dernière méthode est valable dans tout domaine où la géodésique joignant nos deux points et, par conséquent, la distance géodésique de ces deux points peuvent être considérées comme déterminées d'une manière complètement univoque.

Il n'en est pas de même de la première méthode, c'est-à-dire de l'expression de V sous forme de série entière. La restriction apportée à la valeur absolue de Γ est évidemment essentielle, dans le cas général, pour la convergence de cette série.

Par contre, une première expression de V (et, par suite, de σ) étant ainsi acquise pour le cas de deux points suffisamment voisins l'un de l'autre, les principes posés dans ce qui précède vont nous permettre d'en effectuer le prolongement dans des domaines pour lesquels cette condition de voisinage n'est plus vérifiée.

Supposons, pour fixer les idées, que la dernière variable x_m soit une variable-temps au sens de la théorie de la Relativité et les $m-1$ premières des variables d'espace, de sorte que toute ligne $x_1 = \text{const.}$, $x_2 = \text{const.}$, ..., $x_{m-1} = \text{const.}$ soit intérieure au conoïde caractéristique ayant pour sommet l'un quelconque de ses points et que toute surface $x_m = \text{const.}$ ait, au contraire, son plan tangent en un point quelconque extérieur au cône caractéristique correspondant et soit coupée, au moins dans la région où l'on opère, par un conoïde caractéristique quelconque suivant une multiplicité fermée (¹). Convenons aussi d'employer indifféremment la notation x_m ou la notation t pour désigner la dernière variable. La région de validité du développement de V en série entière par rapport à Γ peut être considérée comme caractéristisé par le fait que la différence des t correspondant respectivement aux deux points intéressés soit inférieure en valeur absolue à un certain

(¹) Il est sous-entendu qu'il s'agit d'une équation appartenant au type hyperbolique *normal* (*F*, Livre I, n° 22), c'est-à-dire telle que la forme caractéristique se compose d'un seul carré positif et de $m-1$ carrés négatifs, les régions intérieures à un conoïde caractéristique $\Gamma = 0$ étant, dans ces conditions, celles qui correspondent à $\Gamma > 0$. Les hypothèses géométriques ainsi énoncées ne sont d'ailleurs pas les seules nécessaires à la validité du raisonnement et il y aurait lieu de préciser ces dernières : c'est ce dont je me dispenserai cependant pour le moment, ces hypothèses étant suffisantes pour toutes les équations à coefficients constants et pour toutes les équations qui ne diffèrent pas trop des équations à coefficients constants

nombre positif l (cette condition étant suffisante pour en entraîner d'autres analogues relativement aux $m-1$ autres coordonnées, en vertu de la condition $\Gamma \geq 0$).

Soit un premier point, que nous désignerons par la notation o et que nous prendrons comme sommet d'un premier conoïde caractéristique Γ_0 (*voir* la figure ci-après). Coupons ce conoïde par une première surface S_1, par exemple une surface $t = \text{const.}$, — délimitant avec lui une portion fermée T_1 d'hyperespace entièrement intérieure à la région où le développement en série de la solution élémentaire qui a son pôle au point o est convergent, — ce qui arrivera, par exemple, si S_1 est la surface $t = \text{const.} = t_1$, avec $|t_1 - t_0| < l$. La valeur d'une solution régulière quelconque u de l'équation (E) au point o sera exprimée à l'aide des valeurs u_1 et $u'_1 = \frac{du}{dv_1}$ de u et de sa dérivée transversale en un point quelconque de S_1 (ou, plus exactement, de la portion $\overline{S_1}$ de S_1 intérieure à Γ_0) par la formule (1) :

$$(-1)^{m_1}\pi\Omega_{m-3}u_0 = -\mathbf{SSS}_{T_1} v_{01} f_1 \, dT_1 + \mathbf{SS}_{\overline{S}_1}\left(u_1\frac{dv_{01}}{dv_1} - u'_1 v_{01} - L_1 u_1 v_{01}\right) dS_1. \tag{7}$$

dans laquelle v_{01} est valeur de la solution élémentaire formée avec les deux points (2) o, 1 et dT_1 l'élément de volume $dx_1\,dx_2\ldots dx_m$ décrit par le point 1.

Coupons maintenant le même conoïde Γ_0 par une seconde surface analogue S_2 (*voir* figure ci-après), sur laquelle Γ_0 découpe une portion $\overline{S_2}$ limitée en tous sens, de manière à enfermer un volume limité T_2. Il n'arrivera plus, en général, que les points de $\overline{S_2}$ soient dans la région de validité du développement de v_0, mais il pourra arriver que ceux d'entre eux qui sont intérieurs au conoïde caractéristique ayant pour sommet un point quelconque 1 de $\overline{S_1}$ soient toujours dans la région où converge le développement en

---

(1) Il nous arrivera, pour simplifier, de surmonter du symbole $\overline{\ }$ le numéro d'une formule au lieu d'en affecter toutes les intégrales qui y figurent.

(2) Dans ce qui suit, la quantité v affectée des indices de deux points satisfera à l'équation donnée (E) (privée du second membre) par rapport aux coordonnées du point correspondant au premier indice et à l'équation adjointe (E') par rapport aux coordonnées du second point.

série de la solution élémentaire ayant pour pôle ce point 1 : pour qu'il en soit ainsi, il nous suffira, par exemple, si S_1 a pour équation $t = t_1$, de supposer que S_2 a pour équation $t = \text{const.} = t_2$, avec $|t_2 - t_0| > l$, mais $|t_2 - t_1| < l$.

Si cependant nous imaginions que, par un procédé quelconque, la définition de v_0 soit connue dans tout T_2, nous pourrions considérer u comme défini par les données de Cauchy u_2 et $u^2 = \frac{du}{dv_2}$, relatives à S_2, cette définition étant valable au point o; et u_0 serait donné par la formule

$$\boxed{(8)} \quad (-1)^{m_1}\pi\Omega_{m-3}u_0 = -\mathbf{SSS}_{T_2} v_{02} f\, dT + \mathbf{SS}_{\overline{S_2}}\left(u_2\frac{dv_{02}}{dv_2} - u'_2 v_{02} - L_2 u_2 v_{02}\right) dS_2.$$

Mais, *en tout cas* (que nous puissions ou non parler de v_{02}), moyennant les hypothèses énoncées ci-dessus, la définition de u à l'aide des données relatives à S_2 s'appliquera en tout point de $\overline{S_1}$. Donc pour un tel point, on aura

$$\boxed{(9)} \quad (-1)^{m_1}\pi\Omega_{m-3}u_1 = -\mathbf{SSS}_{\overline{T_2}} v_{12} f_2\, dT_2 + \mathbf{SS}_{\overline{S_2}}\left(u_2\frac{dv_{12}}{dv_2} - u'_2 v_{12} - L_2 u_2 v_{12}\right) dS_2.$$

où $\overline{S_2}$ est la portion de S_2, $\overline{T_2}$ la portion de T_2 intérieure au conoïdes de sommet 1; et, pareillement, nos intégrales généralisées admettant la différentiation sous le signe intégral, u'_1 sera donné par la formule

$$\boxed{(9')} \quad (-1)^{m_1}\pi\Omega_{m-3}u'_2 = -\mathbf{SSS}_{\overline{T_2}} \frac{dv_{12}}{dv_1} f_2\, dT_2 + \mathbf{SS}_{\overline{S_2}}\left(u_2\frac{d^2 v_{12}}{dv_1\, dv_2} - u'_1\frac{dv_{12}}{dv_1} - L_2 u_2\frac{dv_{12}}{dv_1}\right) dS_2.$$

Reportant ces valeurs dans $\boxed{(7)}$ nous aurons l'expression de u_0 par des intégrales où figureront, outre la valeur f en un point quelconque de T_1 :

1° La valeur de la même fonction en un point quelconque 2 de la région $T_2 - T_1$ comprise à l'intérieur de Γ_0 entre les deux surfaces S_1 et S_2;

2° Les valeurs de u_2 et de u'_2 en un point quelconque de $\overline{S_2}$.

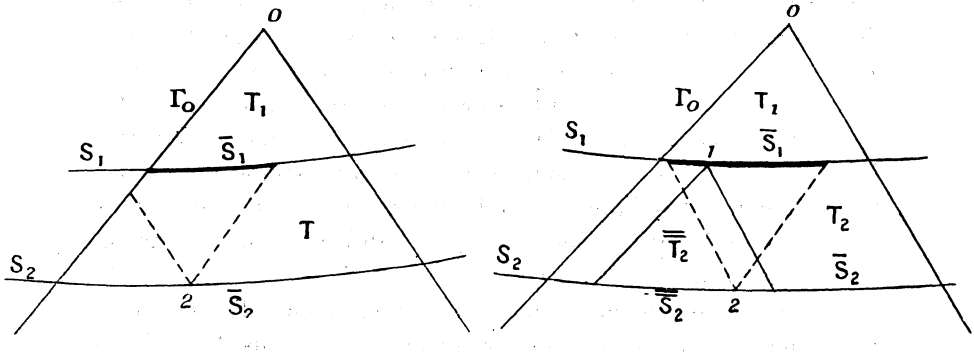
Les valeurs de f dans T_1 entreront par l'intégrale m — uple correspondante — $\mathbf{SSS}_{T_1}$, laquelle ne subira pas de transformation. Quant aux valeurs de f dans $T_2 - T_1$, de u_2 et de u'_2 sur S_2, elles figureront par des intégrales $(2m)$-uple, $(2m-1)$-uple et $(2m-2)$-uple étendues tant à la variation du point 2 qu'à celle du point 1.

D'après $\overline{(8)}$, v_{02}, s'il existe, n'est autre, au facteur $(-1)^{m_1}\pi\Omega_{m-3}$ près) que le coefficient de $-f_2\,dT_2$ ou celui de $-u'_2\,dS_2$ dans l'expression ainsi obtenue. Les deux résultats concordent et donnent

$$(\mathfrak{P}) \qquad (-1)^{m_1}\pi\Omega_{m-3}v_{02} = \overline{\left|\mathbf{S}\hat{\mathbf{S}}\left(v_{12}\frac{dv_{01}}{dv_1} - v_{01}\frac{dv_{12}}{dv_1} - L_1 v_{01}v_{12}\right)dS_1\right|}$$

La sommation est étendue cette fois à tous les points de S_1 dont le conoïde caractéristique contient un point 2 déterminé, c'est-à-dire à tous ceux qui sont intérieurs au conoide (nappe ascendante, si la nappe de Γ_0 à l'intérieur de laquelle nous opérons est descendante) de sommet 2. Suivant les cas, ce domaine d'intégration comprendra donc toute la trace du conoïde de sommet 2 sur S_1 (comme le montre la figure de droite) ou une partie seulement

Fig. 2.



de cette trace, le conoïde ayant été partiellement arrêté à sa rencontre avec Γ_0 (figure de gauche) (1).

(1) Précédemment (*Y*, n° 181) j'avais étudié cette question du prolongement, mais en raisonnant sur la fonction régulière V et non sur v. Les calculs obtenus, en se plaçant sous ce point de vue, sont analogues à ceux du texte, mais impliquent la connaissance de V, au delà même de S_1, sur la surface de Γ_0, ce qui ne permettrait pas d'en tirer les conclusions développées ci-après.

Inversement si, dans toute la région située au delà de S_1 à l'intérieur de Γ_0, nous définissons la quantité v_0 par la formule (Φ), il résulte de tout ce que nous venons de dire que cette définition ne sera jamais en contradiction avec celle de la solution élémentaire supposée connue par ailleurs, et qu'elle en constituera donc légitimement le prolongement analytique.

Il y aurait, il est vrai, des réserves à faire sur le calcul précédent en ce qui regarde tout point de S_2 tel que la trace de son conoïde sur S_1 soit tangente à celle de Γ_0, puisqu'un contact de cette espèce peut mettre en défaut, comme nous l'avons vu, la légitimité du calcul par quadratures superposées et par conséquent celle de l'interversion des intégrations. Autrement dit, si par l'intersection de S_1 et de Γ_0 nous menons une caractéristique (distincte de Γ_0) de notre équation, c'est-à-dire une surface $G(x) = 0$ solution de l'équation aux dérivées partielles du premier ordre

$$\mathbf{A}\left(\frac{\partial G}{\partial x_1}, \frac{\partial G}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial G}{\partial x_m}; x_1, x_2, \ldots, x_m\right) = 0.$$

notre calcul peut être mis en défaut le long de l'intersection de cette nouvelle caractéristique avec $\overline{S_2}$. Il y aurait évidemment lieu de discuter de plus près ce qui se passe à ce niveau. Je n'entreprendrai cependant pas ici cette discussion, mon but étant simplement pour le moment de montrer l'existence du prolongement analytique demandé. A cet égard, les raisonnements précédents suffisent en toute rigueur, si l'on prend soin de prendre pour f_2, u_2, u'_2 des quantités s'annulant dans toute une région (si petite soit-elle d'ailleurs) au voisinage de la caractéristique $G = 0$. Le prolongement analytique pourra d'ailleurs être calculé même dans cette région : il suffira évidemment de modifier en conséquence la surface (arbitraire) S_1.

Un tel prolongement pourra d'ailleurs éventuellement être recommencé un plus ou moins grand nombre de fois, les valeurs calculées sur S_2 permettant de même le calcul sur une surface analogue plus éloignée S_3, et ainsi de suite.

III.

Mais ici se présente une circonstance nouvelle et qui peut, à mon sens, conduire à des conséquences analytiques remarquables.

Le calcul de la solution élémentaire φ_0, tout d'abord par développement en série, repose essentiellement sur celui de la distance géodésique $\sqrt{\Gamma}$ entre les deux points considérés. Soit menée, par le point o, une géodésique arbitraire dont la direction initiale dépendra de $m-1$ paramètres $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{m-1}$, et soit pris sur cette ligne un point 1 : les coordonnées x_i de ce point seront fonctions de $\lambda_1, \ldots, \lambda_{m-1}$ et d'un paramètre (1) s déterminant sa position sur la géodésique. On ne pourra prendre le point 1 que dans la région où les équations ainsi écrites seront résolubles par rapport à $\lambda_1, \ldots, \lambda_{m-1}, s$. Il faudra donc, à titre de condition nécessaire sinon suffisante, que le déterminant fonctionnel

$$J = \frac{D(x_1, x_2, \ldots, x_m)}{D(\lambda_1, \ldots, \lambda_{m-1}, s)}$$

soit différent de zéro (le point o excepté). Non seulement il en est ainsi pour le calcul par série entière, mais également pour la seconde expression que nous avions également obtenue par la solution d'une équation intégrale. L'un et l'autre impliquent en effet la formation de la quantité Γ, et celle-ci cesse d'être bien définie lorsque la condition ci-dessus énoncée n'est plus vérifiée (2).

Or, dès qu'on abandonne le cas où les formes quadratiques **A** et **H** sont à coefficients constants, il n'y a, comme on le sait, aucune raison pour que cette condition ait lieu constamment et au contraire, le point o admet en général, sur chacune des géodésiques qui en sont issues, un foyer conjugué, lequel est précisément défini par la condition $J = o$.

Il n'est même plus exact, aujourd'hui, de dire que de tels éléments linéaires à coefficients variables n'ont pas un intérêt physique suffisant pour justifier leur étude approfondie.

Enfin s'il est vrai que les milieux à indice de réfraction continûment variable ne se prêtent pas assez bien à l'expérimentation

---

(1) Par exemple, l'arc o1, au sens ordinaire du mot. On ne peut pas employer l'arc compté à partir de l'élément linéaire H, parce qu'il s'annule identiquemen le long de Γ.

(2) Le premier terme du développement de V suivant les puissances de Γ devient, d'autre part, imaginaire, lorsque J change de signe [cf. *V*, n° 169, formule (72)].

pour permettre d'observer les singularités dont il s'agit, il n'en est pas de même des systèmes de rayons réfléchis, pour lesquels ces singularités sont d'expérience courante, et qui relèvent pourtant, comme on va le rappeler dans un instant, de considérations toutes semblables aux précédentes.

Or, pratiquement, les singularités ainsi observées dans la forme des ondes lumineuses ne donnent lieu à aucune difficulté particulière dans l'étude de la propagation (¹), au lieu que les problèmes d'Analyse correspondants semblent, comme nous venons de le voir, mettre en défaut nos méthodes de calcul.

Le fait analytique remarquable qui ressort des considérations précédentes est que, en réalité, la solution élémentaire est encore définissable et peut être appliquée à la résolution du problème de Cauchy, là même où le déterminant désigné plus haut par J n'est plus différent de zéro.

Supposons, comme précédemment, que la solution élémentaire v_0 ayant son pôle au point o ait pu être définie dans tout le volume désigné plus haut par T_1 jusque, et y compris, la surface S_1. Traçons encore une seconde hypersurface S_2 extérieure à T_1 et délimitant avec Γ_0 un nouveau volume T_2. Entre S_1 et S_2, les géodésiques issues du point o pourront fort bien présenter des foyers conjugués, et par exemple, le conoïde Γ_0 pourra offrir des points et des lignes singulières; mais nous admettrons, comme plus haut, que S_1 et S_2 sont assez voisines pour que la valeur de v_{12} soit définie relativement à un point quelconque S_1 combiné avec un point quelconque de S_2 (pourvu que chacun de ses points soit intérieur au conoïde issu de l'autre).

Dans ces conditions, la formule ($\mathfrak{P}$) fera connaître la valeur de v_{02} (et cela moyennant une petite déformation de S_1, même aux points situés sur la caractéristique précédemment désignée par $G = o$) et l'expression ainsi formée de v_0 permet encore la résolution du problème de Cauchy par la formule $\overline{(8)}$.

La quantité v_{02} ainsi obtenue n'est d'ailleurs différente de zéro que si le conoïde de sommet 2 a une partie commune avec S_1 : cette condition définit une portion $\overline{S_2}$ de S_2.

(¹) Notons toutefois, sous ce point de vue, les changements brusques de phases au foyer des systèmes optiques étudiés par M. Gouy.

Soit maintenant S_3 une nouvelle hypersurface située de manière analogue aux précédentes et, plus précisément, de manière à enclore, avec tout conoïde ayant son sommet sur $\overline{S_2}$, un volume limité en tout sens. Si, en outre, nous la supposons assez voisine de S_2 pour que, dans chacun des volumes dont nous venons de parler, la solution élémentaire ayant son pôle au sommet du conoïde correspondant soit définie, la méthode précédente permettra encore de prolonger la définition de la fonction v_0 (si du moins les singularités de v_{02} permettent l'exécution de nos intégrations); et ainsi de suite.

Ainsi se trouve établi ce résultat que l'interprétation physique nous faisait prévoir, mais qui reste si paradoxal au point de vue analytique. Il y aurait lieu, d'ailleurs, à tous points de vue, de le compléter par l'étude de l'allure de la fonction v_0 au voisinage des singularités du conoïde Γ_0.

IV.

L'étude de la réflexion dépend, au point de vue mathématique, de ce que nous avons appelé le problème mixte.

La surface qui porte les données se composera cette fois de deux parties, l'une S, de la même nature que celles qui se sont présentées jusqu'ici, c'est-à-dire obtenues en ne faisant varier que des coordonnées d'espace et telle par conséquent que son plan tangent soit toujours extérieur au cône caractéristique ayant pour sommet le point de contact : surface S qui sera d'ailleurs limitée à une certaine frontière (variété $m-2$ fois étendue) Ω; l'autre Σ, engendrée au contraire par la frontière en question (qui lui est ainsi commune avec S) lorsqu'on y fait varier une coordonnée-temps, de sorte que, contrairement à ce qui arrivait pour S, son plan tangent est toujours sécant au cône caractéristique au point de contact. Nous désignerons par $\mathfrak{R}$ la portion d'espace à m dimensions ainsi limitée par S et Σ.

Sur S, on se donnera comme précédemment les données u et u' de Cauchy; sur Σ, la seule valeur de u.

Nous avons donné, au *Congrès international des Mathématiciens* à Strasbourg (1), une méthode propre à résoudre ce pro-

(1) Pages 499-503 des *Comptes rendus du Congrès.*

blème mixte. Outre la solution élémentaire v_0 ayant pour pôle un point arbitraire o du domaine $\mathfrak{R}$ (*voir* les figures ci-après), il convient d'introduire une autre fonction $\mathbf{v}_0$, également solution de l'équation adjointe dans le domaine τ où elle est définie. Ce domaine s'obtient en coupant Σ par le conoïde caractéristique Γ_0 ou plutôt par sa nappe qui est tournée vers S et que nous appellerons, pour abréger, nappe descendante, puis traçant, par la multiplicité d'intersection $\mathcal{L}$, une seconde caractéristique G (sorte d'onde réfléchie) (1) : il est compris entre Σ et G ou, d'une manière plus précise, c'est la partie du domaine primitif qui est séparée du point o par G. La fonction $\mathbf{v}_0$, infinie d'ordre $\frac{m-2}{2}$ le long de G, est déterminée par la condition d'être en outre égale à v_0 en tous les points de Σ, de sorte que la somme algébrique

$$(v)_0 = v_0 - \mathbf{v}'_0$$

(analogue à la fonction classique de Green) s'annule le long de cette dernière surface. Si maintenant on convient que $(v)_0$, défini comme il vient d'être dit dans τ, doit être pris simplement égal à v_0 dans le reste de la région T (portion de $\mathfrak{R}$ intérieure à la nappe descendante de Γ_0), la solution du problème mixte est donnée par la formule

$$\overline{(11)} \quad (-1)^{m_1}\pi\Omega_{m-3}\,u_0 = -\mathbf{SSS}\,(v)_0 f\,d\mathrm{T} + \mathbf{SS}_{\mathrm{S}}\left[u\frac{d(v)_0}{d\nu} - (v)_0\frac{du}{d\nu} - \mathrm{L}\,u(v)_0\right]d\mathrm{S} + \mathbf{SS}_{\Sigma}\,u\frac{d(v)_0}{d\nu}\,d\Sigma,$$

où les intégrales sont étendues respectivement à T et aux portions de S et de Σ comprises à l'intérieur de la nappe descendante de Γ_0.

L'existence de $(v)_0$ résulte de développements donnés ultérieurement (2), du moins (les coefficients étant supposés analytiques ainsi que la multiplicité Σ) en tout point suffisamment rapproché de $\mathcal{L}$. La méthode n'est donc applicable, jusqu'à nouvel ordre, que

---

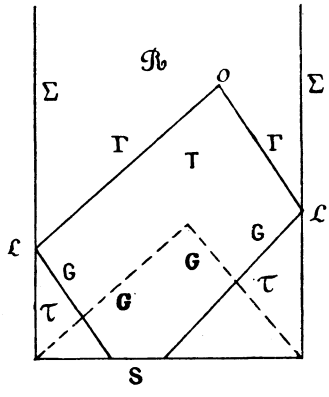
(1) Il s'agit, ici encore, d'une onde rétrograde, c'est-à-dire obtenue en remontant le cours du temps et qu'on peut considérer comme déduite d'une onde ordinaire par le principe du retour inverse.

(2) *AE_1*, nos 1-3; *Y*, Livre II, no 53.

si toute la région satisfait à cette dernière condition (1), ce qui exigerait que le point zéro ne soit lui-même pas trop éloigné de S (2).

A cette objection, qui restreindrait gravement la portée de notre méthode, il peut être répondu exactement comme nous venons de

Fig. 3.



le faire en ce qui concerne le problème de Cauchy. Le point o et la multiplicité Σ étant donnés, de sorte que la multiplicité peut être construite, soit S_1 une première position de S assez rapprochée (3) de $\mathcal{L}$ en tous ses points pour permettre l'application de la méthode précédente, c'est-à-dire pour permettre la définition de $(v)_0$. Soit S_2 une autre position de S, plus éloignée du point o que S_1 et dont, par exemple, chaque point se déduira d'un point correspondant de S_1 en diminuant la coor-

(1) Dans la communication citée plus haut, au Congrès de Strasbourg (*in fine*), j'ai proposé un autre mode de calcul de la quantité **v**, sous forme d'une intégrale, analogue à un potentiel de double couche, de manière à échapper à la restriction constatée dans le texte. Je dois toutefois ajouter que l'équation intégrale à laquelle on est ainsi conduit présente des difficultés particulières et nécessiterait une étude spéciale.

(2) Soit G une caractéristique menée par la frontière commune à S et à Σ (onde au sens ordinaire du mot, c'est-à-dire se propageant vers les temps croissants) et limitée à ses lignes multiples. Le point o, s'il est au delà de G, ne devra pas en être trop éloigné.

(3) Il est bien entendu en ce moment que la possibilité pour $\mathcal{L}$, de rencontrer S (ou S_1), — surface à laquelle elle serait alors arrêtée — n'est nullement exclue.

donnée-temps d'une certaine quantité constante ou variable l. Si S_2 est assez voisin de S_1, c'est-à-dire si l admet un maximum suffisamment petit, on pourra définir, en tout point 2 de S_2, la la fonction $(\varphi)_1$ analogue à $(\varphi)_0$ obtenu en partant d'un point arbitraire de S_1 (toujours avec la condition que chacun des points 1 et 2 soit intérieur au conoïde ayant l'autre pour sommet). On pourra écrire des relations toutes semblables à (7), (8), (9), (9'), au changement près de toutes les quantités φ en (φ). On pourra donc aussi écrire la formule correspondante à $(\mathfrak{P})$:

$$(\mathfrak{P}') \quad (-1)^{m_1}\pi\Omega_{m-3}(\varphi)_{02} = \left|\mathbf{SS}\left[(\varphi)_{12}\frac{d(\varphi)_{01}}{d\nu_1} - (\varphi)_{01}\frac{d(\varphi)_{12}}{d\nu_1} - L_1(\varphi)_{01}(\varphi)_{12}\right]dS_1,\right.$$

laquelle résout le problème.

L'opération pouvant être recommencée un plus ou moins grand nombre de fois, et l ayant, d'après des raisonnements connus, un minimum positif dans toute région où les données sont régulières, on peut progressivement atteindre tout l'intérieur d'une telle région.

Ici encore, rien de tout cela ne suppose la régularité de la surface S dans toute la région où l'on opère. La quantité (φ) sera donc définie et la formule (11) applicable, même si, sur les rayons réfléchis, il y a des foyers conjugués du point o. L'étude de l'intégrale $(\mathfrak{P}')$ permettrait de se rendre compte de l'allure de la fonction au voisinage de singularités de ce genre.

V.

Nous nous sommes jusqu'ici hornés au cas de m impair. Les valeurs paires de m donneraient lieu à des calculs sensiblement différents présentant des difficultés nouvelles et, par contre, un intérêt nouveau, ainsi que le montrerait déjà l'étude du cas classique des ondes sphériques.

Nous nous contenterons, dans le travail actuel, d'indiquer les principes à l'aide desquels le calcul doit être abordé, c'est-à-dire ce qui concerne la résolution du problème de Cauchy et du problème mixte.

J'avais précédemment (¹) obtenu la résolution du problème de Cauchy pour $m = 2m_1$ par ce qu'on peut appeler une « méthode de descente », c'est-à-dire en ramenant l'étude de l'équation (E) à $2m_1$ variables à celle d'une équation à une variable de plus

$$(E') \qquad \mathcal{F}_1(u) = \mathcal{F}(u) - \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = f,$$

dont l'adjointe est

$$(\mathcal{E}') \qquad \mathcal{G}_1(v) = \mathcal{G}(v) - \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = 0.$$

Soit $(a_1, a_2, \ldots, a_m, c)$ un point arbitraire de l'espace à $m+1$ dimensions, c désignant la valeur prise en ce point par la coordonnée supplémentaire z. La forme caractéristique relative à la nouvelle équation (E') étant

$$\mathbf{A}'(P_1, P_2, \ldots, P_m, R) = \mathbf{A}(P_1, P_2, \ldots, P_m) - R^2,$$

le conoïde caractéristique dans l'espace à $m+1$ dimensions a pour équation

$$(13) \qquad \Gamma' = \Gamma - (z - c)^2 = 0,$$

où le premier membre Γ' vérifie, bien entendu, l'équation

$$(4') \qquad \mathbf{A}'\left(\frac{\partial \Gamma'}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial \Gamma'}{\partial x_m}, \frac{\partial \Gamma'}{\partial z}; x_1, \ldots, x_m\right) = 4\Gamma'.$$

A la multiplicité $m-1$ fois étendue S de l'espace à m dimensions correspondra, dans le nouvel espace, la multiplicité cylindrique S' qui a S pour section droite, c'est-à-dire celle qu'on obtient en associant aux coordonnées x d'un point arbitraire de S, successivement, toutes les valeurs réelles de z. Le problème de Cauchy, posé pour l'équation (E) relativement à la multiplicité S, est entièrement équivalent à celui qu'on peut se poser relativement à l'équation (E') et à la multiplicité S', les données u et u' en un point quelconque de S' étant (quel que soit z) les mêmes qu'au point correspondant de S. En opérant ainsi, nous avons obtenu,

---

(¹) *A.M.*, 5ᵉ Partie; *V*, Livre IV.

dans les travaux cités, la formule

$$
\begin{aligned}
(14)\quad & \frac{2(-1)^{m_1}}{(m_1-2)!}\pi^{m_1-1}u_0 \\
&= -\mathbf{SSS}_{\mathrm{T}}\Psi f\,dx,\,dx_1,\,\ldots,\,dx_m \\
&\quad +\mathbf{SS}_{\mathrm{S}}\left[u\frac{d\mathrm{V}}{d\nu}-(u'+\mathrm{L}u)\Psi\right]d\mathrm{S} \\
&\quad -\frac{1}{(m_1-2)!}\frac{d^{m_1-2}}{d\gamma^{m_1-2}}\left\{-\mathbf{SS}_{\gamma}\,\mathrm{V}f\frac{d\mathrm{T}}{d\gamma}+\mathbf{S}_{\sigma_\gamma}\left[u\frac{d\mathrm{V}}{d\nu}-(u'+\mathrm{L}u)\,\mathrm{V}\right]\frac{d\mathrm{S}}{d\gamma}\right\} \\
&\quad -\frac{1}{(m_1-2)!}\frac{d^{m_1-1}}{d\gamma^{m_1-1}}\left(\mathbf{S}_{\sigma_\gamma}u\,\mathrm{V}\frac{d\Gamma}{d\nu}\frac{d\mathrm{S}}{d\gamma}\right)+\mathrm{S}_{\sigma_\gamma}u\Psi\frac{d\Gamma}{d\nu}\frac{d\mathrm{S}}{d\gamma}
\end{aligned}
$$

qui donne la valeur de u au point o et dans laquelle [les éléments Γ, V, Ψ de la formule (5′) étant pris relativement à ce point] on désigne par γ la portion de surface $\Gamma = \text{const.} = \gamma > 0$ intérieure à la nappe du conoïde qui coupe S et limitée à son intersection avec S, cette intersection elle-même étant désignée par σ_γ.

Passons maintenant au problème mixte.

La solution en ayant été donnée plus haut par la formule (11), pour une équation à $2m_1+1$ variables, le problème est, ici encore, virtuellement résolu, pour l'équation à $2m_1$ variables, par la méthode de descente. La question est de savoir si le calcul ainsi conduit pourra être poussé jusqu'à l'obtention d'une formule analogue à (14).

Pour cela, remarquons d'abord que si l'on introduit, non plus le premier membre de l'équation du conoïde caractéristique, mais une solution quelconque G de l'équation

$$
(4\ bis)\qquad \mathbf{A}\left(\frac{\partial \mathrm{G}}{\partial x_1},\,\ldots,\,\frac{\partial \mathrm{G}}{\partial x_m};\,x_1,\,\ldots,\,x_m\right)=4\mathrm{G},
$$

la quantité

$$
\mathrm{G}'=\mathrm{G}-(z-c)^2
$$

représentera encore une solution de l'équation (4′). Si ces deux fonctions sont telles que, égalées à zéro, elles représentent des surfaces régulières, on pourra, pour l'équation (E′) ou pour son adjointe ($\mathcal{E}'$), former une solution $\mathbf{v}'$ de la forme

$$
\mathbf{v}'=\frac{\mathbf{V}'}{\mathrm{G}'^{\frac{m-1}{2}}},
$$

et cela en se donnant arbitrairement les valeurs de la fonction régulière $\mathbf{V}'$ le long d'une multiplicité Σ sécante à S′ par exemple, une multiplicité cylindrique (au sens précédemment indiqué) dont la section droite soit sécante à S.

$\mathbf{v}'$ étant ainsi choisi, l'intégrale

$$\mathbf{v} = \sqrt{\int_{z+\sqrt{G}}^{c_1} \mathbf{v}'\,dc} \tag{15}$$

(c_1 constant) donnera (¹), pour l'équation correspondant à m variables, une solution de forme analogue à (5′), mais avec remplacement de Γ par G.

Ce sont ces principes que nous avons appliqués, dans les travaux cités, au conoïde caractéristique et à la solution élémentaire. Mais (en tenant compte des remarques précédentes) on peut tout aussi bien les appliquer à une caractéristique quelconque G, par exemple à celle que nous avons ainsi désignée dans la résolution du problème mixte. Il suffira, pour cela, d'avoir défini le premier membre G de l'équation de cette caractéristique comme étant la solution de l'équation (4 *bis*) (distincte de Γ) qui prend des valeurs égales à celles de Γ en tous les points de la multiplicité Σ : moyennant quoi la fonction

$$G' = G - (z - c)^2$$

fournira une solution de (4′) prenant les mêmes valeurs que Γ' en chaque point du cylindre droit Σ' de base Σ. Soient ensuite $\mathbf{v}'$ la solution de ($\mathcal{E}'$) qui prend sur Σ' les mêmes valeurs que la solution élémentaire v' et qui est infinie suivant G′ : l'expression $\mathbf{v}$ déduite de $\mathbf{v}'$ par la formule (15) pourra être considérée comme définie (à une quantité régulière près) par les conditions :

a. D'être solution de l'équation adjointe ($\mathcal{E}$) à m variables ;

b. D'être une somme de deux termes, l'un en $\frac{1}{G^{\frac{m-2}{2}}}$, l'autre en $\log G$, les coefficients étant des fonctions régulières ;

c. De prendre, sur Σ, les mêmes valeurs que v, ce qui implique

---

(¹) *AM*, p. 370-371 ; *V*, n° 134.

des conditions correspondantes pour chacun des deux coefficients dont il vient d'être question (¹).

En désignant encore par (ρ) la différence $\rho - \mathbf{v}$, cette quantité (ρ), également solution de l'équation $(\mathcal{E})$, sera encore de la forme $(5')$ (au remplacement près de Γ par G) le long de G.

Elle sera régulière dans τ sauf sur la surface de discontinuité G. Les deux coefficients (V) et $(\mathcal{V})$, qui correspondent aux coefficients V et $\mathcal{V}$ de la formule $(5')$, et qui sont encore des fonctions régulières aux environs de $\mathcal{L}$, s'annuleront le long de Σ : le second d'entre eux sera d'ailleurs pour son compte une solution de l'équation $(\mathcal{E})$.

Ces principes une fois posés, il est clair que la « descente » de $(\rho') = \rho' - \mathbf{v}'$ à (ρ) donnera lieu exactement aux mêmes calculs que celle de ρ' à ρ. La solution du problème mixte sera donc donnée par une formule identique à (14), à ceci près que $\mathcal{V}$ devra être remplacé par $(\mathcal{V})$ dans toute la région τ et dans toute la région correspondante de S, pendant que, d'autre part, on devra ajouter des termes en (V) analogues aux termes déjà calculés en V (intégrales **SS** le long de G et intégrales **S** le long de l'intersection de G avec S).

La méthode de descente nous permet donc de résoudre le problème mixte à $2m_1$ variables, tout comme elle avait fourni précédemment la solution du problème de Cauchy.

Il n'en reste pas moins qu'une telle méthode, basée sur l'intervention d'une coordonnée supplémentaire complètement étrangère à la question, présente, au moins à première vue, un caractère assez artificiel. Je me suis donc proposé d'établir, sans l'emploi de ce détour, la formule (14) et celle qui lui correspond pour le problème mixte; je vais montrer que c'est, en effet, chose relativement aisée.

Soit $G = o$ une caractéristique de l'équation, que nous suppo-

---

(¹) Le prémier **V** de ces deux coefficients n'est défini qu'à des termes de l'ordre de $G^{\frac{m-2}{2}} = G^{m_1-1}$ près, ses valeurs et celles de ses $m_1 - 2$ premières dérivées aux divers points de G ayant seules à intervenir. Les conditions que cette quantité doit remplir le long de G doivent donc s'entendre seulement à l'ordre $m_1 - 1$ près.

serons, pour commencer, régulière : c'est-à-dire que, non seulement le premier membre G de son équation devra être une fonction régulière des coordonnées (fonction admettant des dérivées continues jusqu'à l'ordre qui interviendra dans les raisonnements et les calculs) mais que, en outre, il n'existera dans la région où l'on opère aucun point (point singulier) où ses m dérivées du premier ordre s'annulent simultanément. L'équation caractéristique

$$\mathbf{A}\left(\frac{\partial G}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial G_1}{\partial x_m}; x_1, \ldots, x_m\right) = 0,$$

devant être vérifiée tout le long de cette surface, on devra avoir identiquement

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_1 G, \tag{16}$$

$\mathbf{A}_1$ étant une fonction régulière des x. Notons tout de suite qu'il en résulte, pour la dérivée transversale à une surface $G = \text{const.}$, en prenant $\pi_i = \dfrac{\partial G}{\partial x_i}$,

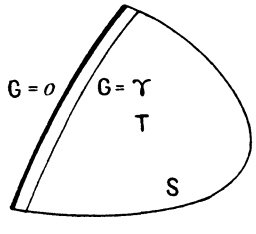
$$\frac{dG}{d\nu} = \frac{1}{2}\sum \pi_i \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \pi_i} = \mathbf{A}(\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_m) = \mathbf{A}_1 G. \tag{17}$$

Soit, d'autre part,

$$v = \frac{V}{G^p} - \Psi \log G,$$

p étant un entier positif pendant que V, Ψ sont des fonctions régulières, une solution de l'équation (E), ce qui implique que Ψ est

Fig. 4.



lui-même une solution de cette équation. Soient T (figure ci-dessus) le volume compris entre la surface précédente et une seconde sur-

face S et situé, pour fixer les idées, du côté $G \geqq 0$; et T_γ le domaine obtenu en coupant S, non plus par $G = 0$, mais par la surface voisine $G = \text{const.} = \gamma > 0$. Appliquons la formule fondamentale (F) à une solution u (régulière) de l'équation (E) et, d'autre part. successivement aux deux solutions v et Ψ de l'équation adjointe. L'introduction de Ψ donne d'abord, en désignant toujours par u' la dérivée transversale de u en un point arbitraire de S,

$$(18) \qquad \begin{aligned} -\mathbf{SSS}_{T_\gamma} \Psi f \, dT + \mathbf{SS}_S \left[u \frac{d\Psi}{d\nu} - (u' + Lu)\Psi \right] dS \\ = -\mathbf{SS}_\gamma \left[u \frac{d\Psi}{d\nu} - (u' + Lu)\Psi \right] dS, \end{aligned}$$

formule dans laquelle nous avons rassemblé au premier membre les termes de volume et les termes relatifs à S, en mettant à part, au contraire, dans le second membre, ceux qui sont relatifs à la surface $G = \gamma$. Si nous considérons encore u et u', le long de S, comme des données de la question, ce second membre reste la seule quantité inconnue.

Nous en désignerons la valeur par ϖ.

Pour obtenir une expression de cette inconnue, ou plutôt de sa valeur limite, ϖ_0, pour $\gamma = 0$, écrivons, toujours dans T_γ, la formule fondamentale, la solution introduite de l'équation adjointe étant, cette fois, v, et dérivons par rapport à γ (ou, si l'on veut, appliquons la formule dans la portion de T comprise entre deux surfaces voisines $G = \gamma$ et $G = \gamma + d\gamma$, et passons à la limite pour $d\gamma = 0$). Chaque élément de volume donnera, comme coefficient de $d\gamma$, l'élément d'intégrale $(m-1)$-uple désigné précédemment par $\frac{dT}{d\gamma}$; et, de même, chaque élément de la surface S donnera, comme coefficient de $d\gamma$ l'élément $(m-2)$-uple, convenablement compté, de la variété de σ_γ, intersection de S avec $G = \gamma$, élément désigné par $\frac{dS}{d\gamma}$. On trouve donc, en tenant compte de (16), l'égalité

$$(19) \qquad \frac{Q_1}{\gamma^{p+1}} + \frac{Q}{\gamma^p} - \frac{\varkappa_1}{\gamma} - \varkappa \log \gamma = \frac{d}{d\gamma}\left(\frac{P}{\gamma^p} - \varpi_1 - \varpi \log \gamma \right),$$

où, en même temps que la quantité ϖ déjà introduite, figurent les

expressions

$$Q_1 = -p\,\mathbf{S}_{\sigma_\gamma} u V \frac{dG}{d\nu}\frac{dS}{d\gamma},$$

$$Q = -\mathbf{S}\mathbf{S}_\gamma V f \frac{dT}{d\gamma} + \mathbf{S}_{\sigma_\gamma}\left[u\frac{dV}{d\nu} - (u' + Lu)V\right]\frac{dS}{d\gamma},$$

$$\varkappa_1 = \mathbf{S}_{\sigma_\gamma} u \Phi \frac{dG}{d\nu}\frac{dS}{d\gamma},$$

$$\varkappa = -\mathbf{S}\mathbf{S}_\gamma \Phi f \frac{dT}{d\gamma} + \mathbf{S}_{\sigma_\gamma}\left[u\frac{d\Phi}{d\nu} - (u' + Lu)\Phi\right]\frac{dS}{d\gamma}$$

(ν désignant la transversale à S), et

$$P = \mathbf{S}\mathbf{S}_\gamma\left[u\frac{dV}{d\nu} - (u' + Lu)V - p\,\mathbf{A}_1 u V\right]\frac{dT}{d\gamma}, \qquad \varpi_1 = \mathbf{S}\mathbf{S}_\gamma \mathbf{A}_1 u \Phi \frac{dT}{d\gamma}$$

(ν désignant la transversale à $G = \gamma$, calculée en prenant $\pi_i = \frac{\partial G}{\partial x_i}$).

On voit d'abord, comme il fallait s'y attendre, que les coefficients de $\log\gamma$ sont égaux de part et d'autre [c'est la relation obtenue en dérivant, par rapport à γ, les deux membres de (18)]. Mais de plus, comme dans les conditions où nous nous plaçons jusqu'ici, les fonctions P, ϖ_1, ϖ sont développables suivant les puissances de γ (au moins jusqu'à l'ordre qui nous intéressera), on voit aussi que ϖ_0 *est le coefficient de l'unique terme en* $\frac{1}{\gamma}$ *qui existe au second membre.*

Donc on a

$$(20) \qquad \varpi_0 = -\frac{1}{p!}\left(\frac{d^p Q_1}{d\gamma^p}\right)_{\gamma=0} - \frac{1}{(p-1)!}\left(\frac{d^{p-1} Q}{d\gamma^{p-1}}\right)_{\gamma=0} + (\varkappa_1)_{\gamma=0}.$$

Telle est, à la limite (c'est-à-dire pour $\gamma = 0$), la valeur du second membre de (18). L'élimination de ϖ_0 entre (18) et (20) fournit une relation entre les valeurs de u et de u' sur S (confirmant, comme on le sait déjà par ailleurs, que, dans la disposition de figure actuelle, ces valeurs ne peuvent pas être données arbitrairement).

Prenons maintenant, pour $G = 0$, non plus une caractéristique régulière, mais un conoïde caractéristiqne, de sorte que G n'est autre que Γ et que, par conséquent, la quantité précédemment désignée par **A** a la valeur constante 4 pendant que p a la valeur $\frac{m-2}{2}$. Les considérations précédentes vont se trouver modi-

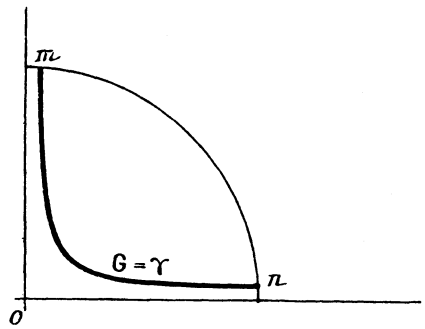
fiées par la singularité qui apparaît au sommet du conoïde. Ceci ne change rien à l'évaluation du premier membre de (19), mais, au second membre, le terme de coefficient ϖ n'est plus le seul qui fournisse un terme en $\frac{1}{\gamma}$ (c'est-à-dire qui, avant dérivation, soit en $\log \gamma$).

Pour le voir, on peut, soit abstraire du domaine d'intégration le voisinage du sommet du conoïde en coupant par une petite surface auxiliaire S_1 et évaluer (asymptotiquement) les termes correspondants ainsi ajoutés au premier membre de (19), soit laisser la surface $\Gamma = \gamma$ complète et étudier directement le changement à apporter au second membre. Nous adopterons cette seconde manière d'opérer.

Les choses apparaissent d'ailleurs sous un jour assez notablement différent suivant que m est égal à 2 ou supérieur à 2.

1° Prenons d'abord $m = 2$, c'est-à-dire le cas classique de Riemann. L'équation étant comme d'habitude réduite à la forme de Laplace (e), le conoïde se réduit à un angle droit, dont nous prendrons le sommet pour origine des coordonnées et les lignes $\Gamma = 4xy = \text{const.}$ seront des hyperboles équilatères.

Fig. 5.



Comme on a, ici (ainsi qu'il est bien connu dans l'étude de la méthode de Riemann) (1),

$$\pm \frac{d}{dv} ds = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} dx - \frac{\partial}{\partial y} dy\right)$$

(1) Sur le signe à prendre dans ces formules (et qui dépend de l'orientation de la ligne S par rapport aux axes coordonnées), voir *V*, Livre II, n° 42.

et que p est nul, on voit que le terme en P ne donne lieu qu'à des termes finis et à dérivée finie (¹) pour $\gamma = 0$. Par contre, sur l'hyperbole $\Gamma = \gamma$, on a

$$(21) \qquad \frac{d\mathrm{T}}{d\gamma} = \pm \frac{\cos(n, x)\, ds}{\left(\frac{\partial \Gamma}{\partial x}\right)} = \pm \frac{\cos(n, y)\, ds}{\left(\frac{\partial \Gamma}{\partial y}\right)} = \pm \frac{dx}{x} = \pm \frac{dy}{y}$$

et ϖ_1 représente, au signe près, l'intégrale curviligne

$$\int u \psi \frac{dx}{x}$$

étendue à l'arc mn intercepté sur l'hyperbole par la multiplicité — ici la ligne — S.

On voit immédiatement qu'on peut réduire $u\psi$ à sa valeur à l'origine : en effet, en raison de la double forme (21) de l'élément $\frac{d\mathrm{T}}{d\gamma}$, tout terme contenant en facteur soit x, soit y donnera un résultat fini et régulier (²). Cette quantité, qui se réduit à u_0 si l'on prend égale à l'unité la valeur initiale de ψ, sera multipliée par

$$\log \frac{x_1}{x_2} = \log \gamma - (\log y_1 x_2),$$

en désignant par x_1, y_1 ; x_2, y_2 les coordonnées des points m, n.

La différence des deux valeurs (18) et (20) de ϖ_0 n'est donc plus nulle, mais égale à u_0, dont elle fait connaître la valeur, de sorte qu'on retrouve ainsi (³) la formule classique.

2° Soit maintenant m supérieur à 2. Nous emploierons, comme nous l'avions déjà fait précisément (Y, n° 141) (⁴) le changement

---

(¹) *Voir* la note suivante.

(²) Ce sera une intégrale curviligne où, sous le signe $\int$, le coefficient de dx ou dy sera borné ainsi que ses dérivées. La dérivée d'une telle intégrale s'obtient immédiatement par transformation en une intégrale double, et l'on voit ainsi qu'elle est dans un rapport fini avec la dérivée de l'aire interceptée dans notre hyperbole par une ligne fixe.

(³) L'étude du premier membre de (19) présente, elle aussi, quelques différences avec le cas de $m > 2$: voir Y, n° 150.

(⁴) Cette manière d'opérer — comme d'ailleurs le raisonnement fait à l'endroit cité dans le texte — n'est, strictement parlant, légitime que si l'on connaît l'effet du changement de variables sur tous les calculs exécutés. Il y aurait eu lieu, à cet effet, d'écrire ces calculs sous forme entièrement invariante, ce qui aurait été

de variables (introduction des « variables normales » de Lipschitz) qui réduit **A** à une forme quadratique à coefficients constants, et par conséquent (moyennant une substitution linéaire) à la forme

$$\Gamma = \xi_m^2 - \xi_1^2 - \xi_2^2 - \ldots - \xi_{m-1}^2$$

($\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m$ étant les nouvelles variables), ce que nous écrirons encore plus brièvement

$$\Gamma = t^2 - r^2,$$

en désignant par t la dernière variable ξ_m et par r^2 la somme des carrés des variables restantes. Cette forme donnée à Γ implique que, à l'origine des coordonnées, la quantité $\mathbf{A}(P_1, P_2, \ldots, P_m)$ se réduit à

$$(22) \qquad \mathbf{A}(P_1, P_2, \ldots, P_m; o, o, \ldots, o) = P_m^2 - P_1^2 - \ldots - P_{m-1}^2$$

et par conséquent, au voisinage de l'origine, à une forme quadratique très peu différente de celle-là.

Les nouvelles variables indépendantes $\xi_1, \ldots, \xi_{m-1}$ peuvent elles-mêmes s'exprimer en fonctions de r et de $m - 2$ paramètres angulaires $\varphi_1, \ldots, \varphi_{m-1}$: l'élément de volume sera donc

$$d\mathrm{T} = d\xi_1 \ldots d\xi_m = r^{m-2}\, d\Omega_{m-2}\, dr\, dt$$

[$d\Omega_{m-2}$ étant l'élément de surface d'hypersphère de rayon 1 dans l'espace à $(m-1)$ dimensions] et l'on en déduit aisément (*Y*, *loc. cit.*) que l'élément désigné plus haut par $\frac{d\mathrm{T}}{d\gamma}$ a l'expression

$$\frac{1}{2}\, r^{m-3}\, d\Omega_{m-2}\, dt,$$

dans laquelle il convient ici de noter que, dans le cas actuel, l'exposant de r est positif et même au moins égal à 1.

Dans ces conditions, en opérant comme plus haut ou comme nous allons le faire dans un instant, il est aisé de voir que le

---

obtenu si l'on avait pris comme élément de volume de l'espace non la quantité $dx_1\, dx_2 \ldots dx_m$, mais bien son produit par $\frac{1}{\sqrt{|\Delta|}}$, ainsi qu'il est bien connu dans les recherches actuelles de géométrie généralisée. Les modifications à faire subir aux formules, et sur lesquelles je compte revenir à l'occasion, seraient aisées à indiquer (cf. *Y*, p. 91, note, et p. 582, note).

terme ϖ_1 ne fournit dans la dérivation aucun terme infini avec $\frac{1}{\gamma}$. Par contre, il en est autrement du terme en P. Dans ce dernier, la quantité qui figure entre crochets sous le signe **SS** est une fonction régulière; sa valeur à l'origine est d'ailleurs uniquement donnée par son dernier terme $-p\,\mathbf{A}_1\,u\mathrm{V}$, car dans tous les autres interviennent les dérivées $\pi_i = \frac{\partial \Gamma}{\partial \xi_i}$, lesquelles sont nulles au sommet de notre conoïde. Si donc nous commençons par multiplier par $d\Omega_{m-2}$ et intégrer par rapport à $\varphi_1, \ldots, \varphi_{m-1}$, le résultat sera une certaine fonction $\Phi(r, t)$ régulière (et paire par rapport à r) qui prend, pour $r = t = 0$, la valeur

$$-2(m-2)\Omega_{m-2}u_0\mathrm{V}_0, \tag{23}$$

après quoi on aura

$$\mathrm{P} = \frac{1}{2}\int r^{m-3}\Phi(r, t)\,dt, \tag{24}$$

l'intégrale étant prise, dans le plan des rt, le long d'un arc hyperbole $t^2 - r^2 = \gamma$, que l'on peut supposer limité par la ligne $t = h$. Si, sous le signe $\int$, on réduit Φ à son terme initial (23), celui-ci sera multiplié par l'intégrale

$$\frac{1}{2}\int r^{m-3}\,dt = \frac{1}{2}\int_{\sqrt{\gamma}}^{h}(t^2-\gamma)^{\frac{m-3}{2}}\,dt = \frac{1}{2}\int_{\sqrt{\gamma}}^{h}(t^2-\gamma)^{m_1-\frac{3}{2}}\,dt.$$

Or cette dernière est (cf *Y*, p. 151) de la forme

$$\frac{(-1)^{m_1}}{4}\,\mathrm{C}_{m_1-1}\,\gamma^{m_1-1}\log\gamma + \mathrm{P}(\gamma)$$

(C_{m_1-1} étant le coefficient numérique désigné plus haut), dans laquelle $\mathrm{P}(\gamma)$ est une série entière en γ. Comme on doit diviser par γ^{m_1-1}, ceci donne un terme de la forme qui nous intéresse et dont le coefficient est la quantité (23).

Il est aisé de voir que ce terme est seul de son espèce dans le cas où les données sont analytiques et où, par conséquent, $\Phi(r, t)$ est de la forme

$$\Phi(r, t) = \Phi_1(r, t^2) + t\Phi_2(r, t^2),$$

Φ_1 et Φ_2 désignant des séries entières en r et t^2 : il suffit de

traiter d'une manière analogue à la précédente chaque terme des développements ainsi obtenus.

Si l'on veut supposer seulement que les quantités sur lesquelles on opère sont régulières, c'est-à-dire dérivables jusqu'à un ordre suffisamment élevé, on raisonnera comme à l'endroit précédemment cité (*Y*, n° **141**), en formant les dérivées successives de l'intégrale (24) jusqu'à l'ordre $m_1 - 1$. Il apparaîtra ainsi, par l'emploi de la formule de Taylor, que la quantité

$$\frac{d}{d\gamma}\left(\frac{P}{\gamma^{m_1-1}}\right) = -(m_1-1)\frac{P}{\gamma^{m_1}} + \frac{1}{\gamma^{m_1-1}}\frac{dP}{d\gamma}$$

se présente sous la forme de termes en $\frac{1}{\gamma^{m_1}}, \frac{1}{\gamma^{m_1-1}}, \ldots, \frac{1}{\gamma}$ à coefficients constants et de termes finis augmentée d'un terme en $\log\gamma$ dont le coefficient a pour limite (23) au coefficient numérique $\frac{(-1)^{m_1}}{4} C_{m_1-1}$ près. D'une manière ou de l'autre, on retombe bien sur la formule (14); et l'on obtiendrait évidemment de même la formule qui résout le problème mixte.

Je renvoie à un travail ultérieur l'examen des conséquences de cette formule au point de vue développé plus haut et je me contenterai, en terminant, de noter la notable différence qui, dans le calcul précédent, parait séparer les cas de $m = 2$ et de $m \geq 4$. Il serait impossible de concevoir que les deux calculs correspondants se ramènent en réalité à une même norme, si l'on ne connaissait les liens qui rattachent l'une à l'autre les fonctions V et Ψ, tels qu'ils apparaissent lorsqu'on déduit le cas de $m = 2m_1$ de celui de $m = 2m_1 + 1$ par voie de « descente ». La méthode de descente, dont nous nous étions servis précédemment, se montre donc, en fin de compte, beaucoup moins artificielle qu'elle ne le semblait au premier abord et nous apparaît comme liée à la nature des choses.

En terminant, je reviendrai un instant sur le caractère paradoxal que présente la formule ($\mathfrak{P}$) par laquelle nous avons, dans le cas de m impair, exprimé la quantité $\mathring{v}_{02}$: il apparaît en effet, que cette quantité — laquelle est, si les coefficients sont analytiques et les points 0, 2 suffisamment rapprochés, une fonction analytique des coordonnées du point 2 — est représeutée par une inté-

grale dans laquelle le domaine d'intégration peut avoir plusieurs formes différentes suivant la situation respective des points o, 2 et de la variété S_1.

Prenons le cas le plus simple, celui de l'équation des ondes cylindriques :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0,$$

la surface S_1 étant un plan $t = \text{const.}$ Le nombre m est alors égal à 3 et la solution élémentaire est

$$v_{01} = \frac{1}{\sqrt{(t_0 - t_1)^2 - (x_0 - x_1)^2 - (y_0 - y_1)^2}} = \frac{1}{\sqrt{h^2 - (x_0 - x_1)^2 - (y_0 - y_1)^2}}.$$

On devra alors considérer les deux conoïdes (c'est-à-dire, ici, les deux cônes) caractéristiques de sommets respectifs o et 2, lesquels couperont le plan S_1 suivant deux cercles C_0, C_2 de centre $P(x_0, y_0)$, $Q(x_2, y_2)$ et de rayons $h = |t_0 - t_1|$, $k = |t_1 - t_2|$. L étant nul, v_{02} sera donné par l'intégrale double

$$(22) \qquad v_{02} = \pm \frac{1}{2\pi} \left| \int\int_D \left(v_{01} \frac{\partial v_{12}}{\partial k} + v_{12} \frac{\partial v_{01}}{\partial h} \right) dx_1 \, dy_1 \right|.$$

Cette intégrale devra être étendue au domaine D formé des points intérieurs à la fois à C_1 et à C_2. Mais ce domaine n'aura pas toujours la même forme, puisque les cercles C_1 et C_2 seront tantôt intérieurs l'un à l'autre — ce qui représente déjà deux cas possibles — ou sécants.

Malgré cela, l'intégrale correspondante a toujours la valeur v_{02}.

Pourrait-on constater autrement que cette intégrale donne toujours la même fonction analytique de x_0, y_0, x_2, y_2, h, k?

C'est ce qu'on pourrait aisément établir par une méthode analogue à celle que j'ai indiquée précédemment (*V*, n° 94, p. 149) en ce qui concerne une intégrale double analogue, à savoir celle qui serait étendue à la région D_1 formée des points intérieurs à l'un des cercles et extérieurs à l'autre : il suffirait de considérer x_1, par exemple, comme une quantité complexe $x_1 + ix'_1$, dont la partie imaginaire x'_1 serait prise comme troisième coordonnée, et d'intégrer, dans l'espace ainsi constitué, le long d'un ellipsoïde de

révolution infiniment aplati qui ait pour équateur un cercle Γ comprenant C_1 et C_2 à son intérieur.

Pour transporter cette argumentation au cas qui nous intéresse, il faudrait prendre le cercle Γ constamment intérieur à la région D et, pour cela, dans le cas de deux cercles sécants, le faire passer par les points d'intersection. Il n'est nullement évident que l'intégrale ainsi calculée doit rester une fonction analytique unique soit que les cercles C_1, C_2 soient sécants, soit qu'ils soient intérieurs l'un à l'autre, et une étude spéciale serait nécessaire à cet égard.

Quant au calcul direct de l'intégrale, il ne faudrait pas croire qu'il soit exempt de difficulté. Les systèmes de variables auxquels on est le plus naturellement tenté de songer conduisent tous à faire intervenir des intégrales elliptiques.

L'intégrale (22) est liée à l'intégrale

$$(23)\qquad I = \int\int_D v_{01}\, v_{12}\, dx_1\, dy_1 = \int\int_D \frac{1}{\sqrt{h^2-(x_0-x_1)^2-(y_0-y_1)^2}} \times \frac{1}{\sqrt{k^2-(x_1-x_2)^2-(y_1-y_2)^2}}\, dx_1\, dy_1$$

par la relation

$$(24)\qquad v_{02} = \frac{\partial I}{\partial h} + \frac{\partial I}{\partial k},$$

et, v_{02} étant connu, ceci peut être considéré comme une équation aux dérivées partielles qui déterminera I si l'on y joint la condition que I s'annule, d'une part, lorsque l'un des cercles se réduit à un point et, de l'autre, lorsqu'ils sont tangents extérieurement. On voit ainsi que I a une expression différente suivant que les cercles sont intérieurs ou sécants. Ce n'est que pour la combinaison (24) qu'il en est autrement.

Ici encore, de même que dans les cas précédemment cités de l'équation des télégraphistes ou de l'équation d'Euler-Poisson, notre principe conduit à des identités qui resteraient assez cachées sans son usage.