BULLETIN DE LA S. M. F.

H. LEBESGUE

Sur les diamètres rectilignes des courbes algébriques planes

Bulletin de la S. M. F., tome 49 (1921), p. 109-150
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1921__49__109_0>

SUR LES DIAMÈTRES RECTILIGNES DES COURBES ALGÉBRIQUES PLANES;

PAR M. HENRI LEBESGUE.

1. J. Bertrand a démontré que les seules courbes algébriques indécomposables qui admettent un diamètre conjugué de chaque direction de cordes sont les coniques (*Journ. de Math.*, 1842).

M. Montel, après m'avoir signalé qu'une légère modification à la démonstration de Bertrand permettait d'affirmer que les coniques sont les seules courbes algébriques indécomposables admettant une infinité de diamètres, posait la question suivante : *Quel est le nombre maximum de diamètres que peut posséder une courbe indécomposable de degré m?*

Le présent travail a été écrit pour répondre à cette question : *Sauf quelques exceptions relatives aux petites valeurs de m, le nombre maximum est m, si m est impair, et* $m+2$, *si m est pair.*

Pour arriver à ce résultat, j'ai cru utile de faire un assez long détour. J'ai tout d'abord cherché *quelles sont les dispositions de diamètres, en nombre fini, que peut posséder une figure plane quelconque.*

Le passage d'un point à celui qui lui correspond, de l'autre côté d'un diamètre, définit une transformation homographique spéciale : une symétrie oblique. La question précédente se ramène facilement à la suivante : quelles sont les dispositions diverses des symétries contenues dans les groupes finis de transformations homographiques du plan ?

On serait ainsi conduit à consulter le tableau de ces groupes finis, tableau qui a été tout d'abord dressé par M. C. Jordan, puis révisé depuis par divers auteurs. Mais, en réalité, la question est de nature plus simple et elle dépend seulement de la connaissance du tableau des groupes finis de transformations homographiques de la droite. Pour rester aussi élémentaire que possible, j'ai tenu à utiliser ces groupes sous leur forme si intuitive de groupes finis de rotations réelles de l'espace.

Cette étude m'a conduit à *cinq dispositions de diamètres, en nombre fini.* Les dispositions I et II, qui sont fournies par les groupes diédraux, contiennent un nombre variable de diamètres; les dispositions III, IV, V, qui proviennent des groupes du cube et de l'icosaèdre, contiennent respectivement 12, 18 et 30 diamètres.

Les diamètres d'une courbe algébrique, ou bien sont en nombre fini et ont l'une des dispositions I *à* V, *ou bien sont en nombre infini; ils se présentent alors suivant cinq autres dispositions* (**a**, **b**, **c**, **d**, **e**), *la courbe algébrique se décompose en droites parallèles ou en coniques ayant, deux à deux, quatre points communs à l'infini.*

Ce résultat obtenu, il suffit de former les équations des courbes algébriques admettant les diamètres des diverses dispositions I à V et de regarder le degré des équations obtenues, pour pouvoir répondre à la question de M. Montel ou pour énumérer les diverses dispositions de diamètres des courbes algébriques d'un degré donné.

Une première rédaction de ce travail a été perdue. Je remercie M. Th. Leconte d'avoir bien voulu préparer cette nouvelle rédaction qui, grâce à lui, est plus détaillée, plus précise et plus claire que la première.

2. Rappelons d'abord quelques définitions.

On dit qu'une figure plane F admet un diamètre rectiligne A conjugué de la direction de cordes D, ou encore que, pour la figure F, la direction de cordes D admet le diamètre A, si, à tout point M de la figure F, correspond le point M′ de la même figure tel que MM′ soit parallèle à D et ait son milieu sur A. On dit encore que les points M et M′ sont symétriques obliquement par rapport à la droite A, pour la direction D. Dans ce qui suivra, nous supprimerons le mot oblique sauf quand il y aura lieu de distinguer entre la symétrie oblique et la symétrie orthogonale ou symétrie vraie au sens de la géométrie élémentaire.

Une symétrie oblique est une transformation homographique S telle que la droite MM′ qui joint deux points homologues passe par le point à l'infini d de la direction donnée D, telle aussi que si E désigne le point d'intersection de MM′ avec la droite fixe A, on ait la relation $(d\mathrm{EMM}') = -1$. Nous représenterons la symétrie définie par A et D à l'aide de la notation $\mathrm{S} = (\mathrm{A}, \mathrm{D})$.

Nous allons compléter cette définition purement géométrique de la symétrie en nous plaçant au point de vue de la géométrie analytique.

Pour définir la symétrie (A, D), prenons A pour axe des x et un axe des y parallèle à la direction D. La transformation homographique (A, D) sera donnée par les formules $X = x$, $Y = -y$. Par définition, la courbe C′ symétrique de la courbe C, dont l'équation sous forme entière est $f(x, y) = 0$, aura ponr équation $f(x, -y) = 0$. On dira que la courbe C admet la symétrie (A, D), si C′ et C sont algébriquement confondues.

On aura alors

$$f(x, y) \equiv kf(x, -y) \quad (k \text{ étant un nombre}).$$

Par le changement de y en $-y$, on tire de cette identité

$$f(x, -y) \equiv kf(x, y)$$

et, en multipliant membre à membre,

$$k^2 = 1;$$

d'où deux cas :

1° $k = 1$, l'équation entière est de la forme $\varphi(x, y^2) = 0$; c'est la symétrie proprement dite, considérée habituellement et que nous appellerons *symétrie de première espèce*.

2° $k = -1$, l'équation entière est de la forme $y\varphi(x, y^2) = 0$. La courbe se compose d'une courbe symétrique de première espèce et de l'axe de symétrie; *la symétrie est de seconde espèce*. Donnons un exemple, que nous retrouverons plus loin, des deux espèces de symétrie. Soient deux droites sécantes. Elles forment une courbe du second degré dont nous cherchons les diamètres rectilignes. A chaque direction de cordes, différente de celle des deux droites, correspond un diamètre (symétrie de première espèce). Si la direction de cordes est celle de l'une des droites, on trouve l'autre droite comme diamètre (symétrie de seconde espèce). Ces deux diamètres de seconde espèce ne se rencontrent pas, sous cette forme, dans la théorie habituelle des courbes du second degré; par contre, on les trouve comme diamètres singuliers de leur propre direction de cordes, notion que nous n'aurons pas, ici, à envisager.

Les paragraphes 2 à 6 traitent de cinq dispositions particulières de diamètres.

On démontrera par la suite que ces cinq dispositions sont, pour les courbes algébriques, les seules qui comprennent une infinité de diamètres.

3. En vertu de la projectivité du rapport anharmonique et de la définition de la symétrie à l'aide d'un rapport anharmonique, une transformation homographique $\mathfrak{T}$ du plan, telle que la droite de l'infini soit sa propre transformée, remplace une symétrie S par une symétrie Σ; Σ est dite la transformée de S par $\mathfrak{T}$.

Nous nous servirons constamment d'un cas particulier de cette propriété : deux symétries $S_1 = (A_1, D_1)$, $S_2 = (A_2, D_2)$ en entraînent une troisième $S_3 = (A_3, D_3)$. En effet, partant du point M de la figure, nous lui faisons correspondre M′ dans la symétrie S_2, puis M″ homologue de M′ dans la symétrie S_1, puis enfin M‴ homologue de M″ dans la symétrie S_2. La droite MM‴ est parallèle à la direction fixe D_3 homologue de D_1 dans la symétrie S_2 et le milieu de MM‴ est sur la droite fixe A_3 homologue de A_1 dans la symétrie S_2. D'où la symétrie S_3, dite transformée de S_1 par S_2; elle est obtenue en effectuant successivement les opérations S_2, S_1, S_2, ce que l'on rappelle par la notation $S_3 = S_2 S_1 S_2$ (1).

Nous considérons de même les symétries

$$S_4 = S_3 S_2 S_3, \qquad S_5 = S_4 S_3 S_4, \qquad \ldots.$$

Ces préliminaires posés, *supposons qu'une même direction de cordes* D *admette deux diamètres rectilignes* A_1 *et* A_2.

Soit une parallèle à D qui coupe A_1 et A_2 en deux points distincts a_1 et a_2. Des deux symétries $S_1 = (A_1, D)$, $S_2 = (A_2, D)$ résultent les symétries S_3, S_4, S_5, ...; les diamètres A_3, A_4, A_5, ... passent par les points a_3, a_4, a_5, ... tels que a_3 soit le symétrique de a_1 par rapport à a_2, a_4 le symétrique de a_2 par rapport à a_3, ...

Donc, la direction D *admet une infinité de diamètres.*

---

(1) La transformation Σ se note $\Sigma = \mathfrak{T}^{-1} S \mathfrak{T}$; ce qui exprime que si l'on prend l'homologue M′ d'un point M dans la transformation inverse de $\mathfrak{T}$, puis l'homologue M″ de M′ dans S, et enfin l'homologue M‴ de M″ dans $\mathfrak{T}$, on obtient, en M‴, l'homologue de M dans la symétrie Σ.

Montrons maintenant qu'une courbe algébrique admettant cette infinité de symétries est formée de droites parallèles.

Soit M un point de la courbe C. Par M, menons la parallèle à D ; supposons, pour préciser, que ce soit la droite $a_1 a_2 a_3 \ldots$ Les symétriques en nombre infini de M par rapport aux points a_1, a_2, a_3, ... sont tous sur C, et par suite cette parallèle fait partie de C. Donc C est formée de parallèles à D. D'où une première disposition des diamètres des courbes algébriques.

a. *Une direction de cordes* D *admet un diamètre de position indéterminée. La courbe est formée de parallèles à* D.

4. *Supposons que deux directions de cordes* D_1 *et* D_2 *admettent deux diamètres parallèles* A_1, A_2, *distincts.*

Des deux symétries $S_1 = (A_1, D_1)$, $S_2 = (A_2, D_2)$ résultent les symétries $S_3 = (A_3, D_3)$, $S_4 = (A_4, D_4)$, ... dont les diamètres sont la droite A_3 symétrique vraie de A_1 par rapport à A_2, la droite A_4 symétrique vraie de A_2 par rapport à A_3, etc.

Il existe donc une infinité de diamètres parallèles.

Montrons maintenant qu'une courbe algébrique C *admettant cette infinité de symétries est composée de paraboles se déduisant les unes des autres par des translations faites parallèlement à l'axe commun de ces paraboles.*

En effet, à une translation près faite parallèlement à la direction des diamètres, il existe une parabole et une seule admettant les symétries S_1, S_2, et par suite les symétries S_3, S_4, ..., qui en résultent.

Soit M un point de la courbe C. Soit P celle des paraboles que nous venons de définir qui passe par M. Les homologues de M dans les symétries S_1, S_2, S_3, ..., qui sont en nombre infini, sont à la fois sur les courbes C et P. Donc la parabole P fait partie de la courbe C. D'où une seconde disposition des diamètres d'une courbe algébrique.

b. *A toute direction, sauf une, correspond un diamètre déterminé. Tous ces diamètres sont parallèles. Les courbes sont formées de paraboles déduites de l'une d'elles par des translations faites parallèlement à son axe.*

b. *Supposons que deux directions de cordes* D_1 *et* D_2 *admettent le même diamètre* A.

Des deux symétries $S_1 = (A, D_1)$, $S_2 = (A, D_2)$ résultent les symétries S_3, S_4, S_5, ... Les homologues M_1, M_2, M_3, ..., d'un point M, dans les symétries S_1, S_2, S_3, ..., sont situés sur une même parallèle à A et l'on a

$$\overline{M_1 M_2} = \overline{M_2 M_3} = \overline{M_3 M_4} = \ldots.$$

Les symétries S_1, S_2, S_3, ... sont donc toutes différentes: *d'où une infinité de symétries.*

D'après ce qui précède, si une courbe algébrique C admet cette infinité de symétries, elle est formée de droites parallèles à A; d'où une troisième disposition de diamètres d'une courbe algébrique.

c. *A toute direction correspond un diamètre. Tous ces diamètres sont confondus avec une même droite* A, *sauf le diamètre de la direction* A, *qui est indéterminé. Les courbes sont formées d'une famille de droites parallèles à* A *qui admet* A *pour axe de symétrie vraie.*

Remarque. — Pour chaque disposition comprenant un nombre infini de symétries, il y a lieu de se poser la question suivante : Est-il possible que des courbes algébriques admettant la disposition de symétries envisagée aient, en plus, d'autres symétries ?

Le lecteur verra facilement qu'en se posant cette question pour les dispositions **a** et **b**, il trouvera seulement la disposition **c**.

Remarquons encore que si l'on avait deux symétries

$$S_1 = (A_1, D_1), \qquad S_2 = (A_2, D_2)$$

telles que D_1 et A_2 soient parallèles, la symétrie $S_3 = (A_3, D_3)$ serait relative à une direction D_3 confondue avec D_1; deux cas se présentent : Ou D_2 et A_1 sont parallèles, et alors A_1 et A_3 sont confondus, S_1 et S_3 sont identiques; S_1 et S_2 sont dites deux symétries conjuguées et A_1 et A_2 deux diamètres conjugués. Ou D_2 et A_1 ne sont pas parallèles, et alors A_1 et A_3 sont différents; la direction D_1 admet deux diamètres, on est dans un cas déjà examiné.

6. Envisageons maintenant le cas de deux symétries

$$S_1 = (A_1, D_1), \qquad S_2 = (A_2, D_2);$$

mais en écartant les cas précédemment étudiés, c'est-à-dire en supposant les quatre directions A_1, A_2, D_1, D_2 distinctes, ou en supposant confondues à la fois les directions A_1 et D_2 et les directions A_2 et D_1.

Nous savons que ces symétries en entraînent d'autres et que les diamètres correspondants concourent au point de rencontre O des diamètres A_1 et A_2. Il sera commode d'appeler *rosace* toute disposition de diamètres concourants obtenue à partir de S_1 et de S_2 comme il a été indiqué dans le paragraphe 1. Les expressions de *rosace finie,* de *rosace infinie* se comprennent aisément.

S'il n'existe aucune particularité entre les données A_1, A_2; D_1, D_2, la rosace correspondante est infinie, cherchons la condition pour que la rosace soit finie.

Appelons a_1, a_2 les points à l'infini des diamètres A_1, A_2; d_1, d_2 les points à l'infini des directions D_1, D_2.

Considérons l'involution définie par les deux couples a_1, d_1; a_2, d_2. Par une homographie transformant en elle-même la droite de l'infini, on peut faire en sorte que les points doubles de cette involution deviennent les ombilics du plan.

D'après une remarque faite au paragraphe 1, les symétries S_1 et S_2 deviennent des symétries S'_1, S'_2, qui sont des symétries vraies, car les couples a'_1, d'_1; a'_2, d'_2 transformés des couples a_1, d_1; a_2, d_2 correspondent cette fois à des directions rectangulaires. Soit V l'angle des deux axes A'_1, A'_2 qui correspondent aux diamètres A_1, A_2. L'opération formée de la symétrie S'_1 suivie de la symétrie S'_2 est une rotation d'angle $2V$ autour du point commun aux axes A'_1, A'_2. Il est clair maintenant que la rosace sera finie si V est de la forme $V = \frac{p\pi}{q}$ (p et q entiers) et que cette condition est nécessaire et suffisante. Elle revient à dire que

$$(a'_1, d'_1; a'_2, d'_2) = -\operatorname{tang}^2 V$$

est de la forme $-\operatorname{tang}^2 \frac{p\pi}{q}$ et, comme le rapport anharmonique est projectif, cette condition s'exprime encore par l'égalité

$$(a_1, d_1; a_2, d_2) = -\operatorname{tang}^2 \frac{p\pi}{q};$$

p et q désignant des entiers quelconques.

7. Nous nous proposons maintenant de chercher les courbes algébriques admettant la disposition formée d'une rosace infinie. Soient deux symétries

$$S_1 = (A_1, D_1); \qquad S_2 = (A_2, D_2)$$

engendrant une rosace infinie. Appelons O le point commun aux deux diamètres A_1 et A_2. Il existe une famille de coniques, homothétiques et de même centre O, admettant A_1 et A_2 pour diamètres conjugués des cordes D_1, D_2. Ces coniques admettent évidemment toutes les symétries S_3, S_4, ... de la rosace.

Soit une courbe algébrique C admettant cette rosace infinie de symétries. Soit M un de ses points. Les symétriques de M dans les symétries de la rosace sont des points en nombre infini qui sont communs à la courbe C et à la conique du faisceau considéré qui passe par le point M. La courbe C contient donc cette conique.

D'où une nouvelle disposition des diamètres des courbes algébriques.

d. *Deux directions x, y, étant exceptées, à toute direction* D *correspond un diamètre* A. *Tous ces diamètres se coupent en* O. *Les directions* A, D *se correspondent dans une involution dont les rayons doubles sont parallèles à x et y.*

Une courbe algébrique C *admettant ces symétries se compose de coniques homothétiques et concentriques admettant Ox et Oy pour asymptotes.*

Comme plus haut, il y a lieu, maintenant, de se poser cette question : Une courbe algébrique correspondant à la disposition **d** peut-elle admettre en plus d'autres diamètres? Un nouveau diamètre ne pourra être que parallèle à Ox ou à Oy, sinon on serait dans l'un des cas **b** ou **c** déjà examinés. Il ne peut correspondre qu'aux directions de cordes Ox, Oy, sinon on serait dans les cas **a** ou **c** déjà examinés.

Le seul cas possible est donc celui de la direction Ox, par exemple, admettant un diamètre parallèle à Oy. D'ailleurs ce diamètre est Oy lui-même et non une autre droite y' simplement parallèle à Oy; car, s'il en était ainsi, les symétries de notre rosace transformées par la symétrie de diamètre y' formeraient les symétries d'une nouvelle rosace. Donc, par chaque point M d'une courbe algébrique C, admettant ces deux rosaces, il passerait une courbe du second degré correspondant à la première rosace, qui ferait partie de C, puis une autre courbe du second degré faisant aussi partie de C et qui correspondrait à la seconde rosace, et cela est absurde puisque le point M est un point absolument quelconque de la courbe C. Par suite, c'est bien Oy qui sera le diamètre conjugué de la direction Ox. Les courbes du second degré qui forment une courbe algébrique C admettant ces symétries sont, si Ox et Oy sont réels, ce que l'on appelle ordinairement des hyperboles deux à deux conjuguées.

Il y a lieu de remarquer que Ox est aussi diamètre conjugué de la direction Oy.

Nous arrivons ainsi à la disposition **e**.

e. *Les diamètres sont les mêmes que dans la disposition* **d**. *De plus*, Ox, Oy *forment un couple de deux diamètres conjugués. Une courbe algébrique* C *admettant cette disposition est formée de couples de coniques conjuguées* (au sens de « hyperboles conjuguées »).

Elle peut admettre en plus le couple de droites Ox, Oy un certain nombre de fois. Le lecteur précisera facilement cet énoncé et celui relatif au cas **c**, comme il le faudrait si l'on voulait que toutes les symétries fussent de première espèce.

8. Nous allons maintenant rattacher la recherche des dispositions de diamètres à la théorie des groupes.

Dire qu'une figure admet A pour diamètre de la direction D revient à dire qu'elle est *invariante* par la transformation homographique $S = (A, D)$. Si une figure est invariante par les transformations $S_1 = (A_1, D_1), \ldots, S_p = (A_p, D_p)$, elle sera également invariante par toutes les transformations du groupe construit à l'aide des symétries $S_1, S_2, \ldots, S_p$ prises comme transformations fondamentales.

Les symétries $S_1, S_2, \ldots, S_p$ définiront en général un groupe G comprenant une infinité de transformations et une infinité de symétries. *Notre but est de déterminer les cas dans lesquels les symétries ainsi obtenues se réduisent aux seules symétries primitives* $S_1, S_2, \ldots, S_p$.

Tout d'abord, montrons que *si les symétries* $S_1, S_2, \ldots, S_p$, *en nombre fini, définissent un groupe ne contenant pas d'autres symétries, ce groupe est fini*, c'est-à-dire qu'il ne contient qu'un nombre fini de transformations. En effet, soit une des transformations du groupe, celle qui s'écrit $S_\alpha S_\beta S_\gamma \ldots S_\lambda$ (cette notation indique les opérations dans l'ordre où elles s'effectuent). On peut, par exemple, faire passer S_α au second rang. En effet, on peut écrire la transformation $S_\alpha S_\beta S_\alpha S_\alpha S_\gamma \ldots S_\lambda$ (on s'est borné à ajouter à deux places consécutives S_α, ce qui ne change rien). Ou encore

$$(S_\alpha S_\beta S_\alpha) S_\alpha S_\gamma \ldots S_\lambda.$$

Or, $(S_\alpha S_\beta S_\alpha)$ est une de nos symétries, soit S_a. Il reste donc le symbole

$$S_a S_\alpha S_\gamma \ldots S_\lambda$$

qui contient le même nombre de symétries et où S_α est à la seconde place.

De proche en proche, on voit que l'une quelconque des symétries de la transformation peut occuper une place quelconque. Si donc S_α se présente deux fois, on amènera ces deux symétries à être consécutives et l'on pourra les supprimer. On peut donc supposer $\alpha, \beta, \ldots, \lambda$ distincts. Notre groupe est, par suite, formé des transformations obtenues en effectuant au plus p symétries dans un ordre quelconque, chacune d'elles n'étant prise qu'une fois. Le nombre total de ces transformations est donc fini et nous nous trouvons ramené à *chercher les systèmes de symétries engendrant des groupes finis de transformations homographiques du plan.*

Après avoir, dans le prochain paragraphe, rappelé quelques propositions relatives à la représentation des imaginaires, nous montrerons que notre problème dépend seulement de la théorie des groupes finis des rotations réelles de l'espace, c'est-à-dire de la théorie des polyèdres réguliers.

9. Considérons le plan (p) dont l'équation, par rapport à des axes rectangulaires ωXYZ, est $Z = 1$, et soit O le point $X = Y = 0$, $Z = 1$. A un nombre complexe $m = x + iy$, faisons correspondre le point (m) de coordonnées $X = x$, $Y = y$, $Z = 1$. Et, du point ω, projetons stéréographiquement en μ le point (m) sur la sphère π de diamètre $O\omega$. Les coordonnées X, Y, Z de μ satisfont aux formules

$$\frac{x}{X} = \frac{y}{Y} = \frac{1}{Z} = \frac{\sqrt{x^2+y^2+1}}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}} = x^2+y^2+1,$$

qui, en convenant d'une façon générale que u et u' désigneront deux imaginaires conjuguées, et en introduisant les coordonnées isotropes $m = x + iy$, $M = X + iY$ s'écrivent

$$(1) \qquad m = \frac{M}{Z}, \qquad m' = \frac{M'}{Z}, \qquad \frac{1}{Z} = mm' + 1.$$

Effectuons sur m la transformation homographique t

$$(2) \qquad m_1 = \frac{am+b}{cm+d} = f(m),$$

qui peut être aussi bien définie par la relation

$$(3) \qquad m'_1 = \frac{a'm'+b'}{c'm'+d'} = f'(m');$$

il en résulte pour π une transformation ***réelle*** θ faisant passer de μ au point μ_1 donné par les formules

$$\frac{M_1}{Z_1} = \frac{am+b}{cm+d}, \qquad \frac{M'_1}{Z_1} = \frac{a'm'+b'}{c'm'+d'},$$
$$\frac{1}{Z_1} = m_1m'_1 + 1 = \frac{am+b}{cm+d}\,\frac{a'm'+b'}{c'm'+d'} + 1,$$

qu'on peut encore écrire

$$(4)\quad \frac{M_1}{(am+b)(c'm'+d')} = \frac{M'_1}{(a'm'+b')(cm+d)} = \frac{Z_1}{(cm+d)(c'm'+d')}$$
$$= \frac{1}{(am+b)(a'm'+b')+(cm+d)(c'm'+d')}.$$

Or, quand on tient compte des formules (1), on a, α, β, γ, δ étant des nombres réels quelconques,

$$(5)\qquad \alpha mm' + \beta m + \gamma m' + \delta = \frac{\alpha(1-Z)+\beta M+\gamma M'+\delta Z}{Z};$$

et les dénominateurs des formules (4) peuvent être remplacés par des fonctions linéaires de M, M′, Z. Donc *la transformation* θ *est une transformation homographique réelle qui change en elle-même la sphère* π; il faut ajouter qu'elle ne modifie pas l'orientation de π, c'est-à-dire qu'elle transforme les génératrices de π, appartenant à l'un des systèmes, en génératrices du même système. En effet, les génératrices de π sont données respectivement par

$$\frac{M}{Z} = \text{const.} \qquad \text{et} \qquad \frac{M'}{Z} = \text{const.},$$

et les formules (2) et (3) s'écrivent

$$\frac{M_1}{Z_1} = f\left(\frac{M}{Z}\right) \qquad \text{et} \qquad \frac{M'_1}{Z_1} = f'\left(\frac{M'}{Z}\right).$$

Réciproquement, toute transformation homographique réelle θ, transformant π en elle-même sans changer son orientation, définit une transformation t, car θ définit alors deux transformations homographiques entre les génératrices de même système

$$\frac{M_1}{Z_1} = \varphi\left(\frac{M}{Z}\right), \qquad \frac{M'_1}{Z_1} = \psi\left(\frac{M'}{Z}\right),$$

et φ et ψ sont imaginaires conjuguées puisque θ est réelle.

Parmi les transformations θ se trouvent donc les rotations de 180° autour des diamètres de π, transformations que nous appellerons, avec Darboux, des renversements. *Que doit-être* t *pour que* θ *soit un tel renversement ?* Un renversement est une transformation réciproque laissant invariantes les deux extrémités de l'axe de renversement, donc t *doit être une involution dont les deux points doubles a et d ont pour image sur la sphère π deux points α et δ diamétralement opposés.* Avant de démontrer la réciproque, nous prouverons que *la condition nécessaire et suffisante pour que le rapport anharmonique de quatre valeurs de m soit réel est que les quatre points correspondants sur la sphère π soient dans un même plan.* En effet, dire que le rapport anharmonique de quatre valeurs de m est réel, c'est dire que ce rapport égale celui des quatre nombres m' correspondants et par suite que les quatre couples m, m' sont liés par une relation à coefficients réels de la forme

$$\alpha mm' + \beta m + \gamma m' + \delta = 0.$$

Or, d'après (5), une telle relation exprime que les quatre points μ correspondants sont dans un même plan. Remarquons de plus que, d'après la première formule (1), le rapport anharmonique de quatre valeurs de m est le rapport anharmonique des quatre génératrices du premier système passant par les quatre points μ; quand ces quatre points sont dans un même plan, le rapport des quatre valeurs de m est donc le rapport des points μ sur la circonférence π qui les contient.

Revenons maintenant au cas où t est une involution dont les points doubles a et d ont pour images, sur π, α et δ. Deux points μ et μ_1 se correspondant dans la transformation θ, image de t, sont sur une circonférence λ de π passant par α et δ, et le rapport anharmonique sur λ des points α, δ; $\mu\,\mu_1$ est égal à -1; donc $\mu\mu_1$ passe par le pôle de $\alpha\delta$ par rapport à λ. Si donc α et δ sont diamétralement opposés, θ est bien un renversement.

Si l'on pose $m = \rho e^{i\eta}$, et si l'on appelle C le centre de π, on voit que η est la longitude de μ, comptée à partir de $Z\omega X$ et que ρ est la tangente de la moitié de la colatitude $OC\mu$. Par suite, pour que α et δ soient diamétralement opposés, il faut que a et d aient des modules inverses et des arguments dont la différence égale π, ce qui s'écrit : $ad' = a'd = -1$. Dans le cas où a et d sont réels, on devra avoir $ad = -1$.

10. Considérons, dans un plan P, des symétries $S = (A, D)$, elles engendrent un groupe G d'homographies T; nous voulons que G soit fini. Effectuons sur P une transformation homographique $\mathfrak{T}$ transformant en elle-même la droite de l'infini p de P. $\mathfrak{T}$ transforme chaque symétrie S en une symétrie S', chaque homographie T en une homographie T'. Les S' engendrent le groupe G' formé par les T'. Si G est fini, G' l'est également; donc si les S répondent à la question, il en est de même des S'. Ainsi, de chaque solution particulière de notre problème, nous déduisons une famille de solutions dépendant des six paramètres qui entrent dans la transformation $\mathfrak{T}$ la plus générale; nous ne considérons pas ces solutions comme différentes et nous ne distinguerons pas G' et G. Au reste, si l'on rapporte les S à un système quelconque de coordonnées cartésiennes, les S' seront définies exactement par les mêmes équ tions si on les rapporte à un système convenable, réel ou imaginaire, de coordonnées cartésiennes, puisqu'on passe des S aux S' par les formules du changement de coordonnées cartésiennes.

Les homographies T transforment toutes p en elle-même; chacune d'elle définit donc sur p une homographie. Ces homographies t forment un groupe g qui admet pour transformations fondamentales les homographies spéciales s correspondant aux S; ces homographies s sont évidemment des involutions dont les points doubles sont les points à l'infini a et d de A et D.

Définissons un point de p par la valeur m de la pente des droites de P passant par ce point, et faisons l'image de p sur π comme il a été dit au paragraphe précédent. Les s, les t, g ont des images σ, θ, γ. Si G est fini, γ l'est aussi. Or nous allons montrer que, *à condition d'avoir effectué au préalable une homographie $\mathfrak{T}$ convenable, si* G *est fini, le groupe γ est formé de rotations autour de diamètres de la sphère π.*

Ceci sera prouvé si l'on montre que toutes les transformations σ sont des renversements. Montrons d'abord que toutes les droites $\alpha\delta$ concourent.

Si G est fini, deux des symétries S qui ne sont pas conjuguées, $S_i = (A_i, D_i)$, $S_j = (A_j, D_j)$ par exemple, fournissent quatre nombres a_i, d_i; a_j, d_j, tous différents et tels que le rapport anharmonique $(a_i, d_i; a_j, d_j)$ soit réel (§ 6). Donc α_i, δ_i; α_j, δ_j sont dans un même plan. Les droites $\alpha\delta$, se rencontrant par suite deux à deux, passent par un même point, ou sont toutes dans un même plan. Montrons que, même dans cette seconde hypothèse, ces droites sont concourantes.

Tous les α et δ étant dans un même plan, une transformation $\mathfrak{C}$ convenable rend réelles toutes les symétries S; on peut de plus supposer (§ 6), que deux d'entre elles sont vraies. Chaque rapport $(a_i, d_i; a_j, d_j)$ est de la forme $-\text{tang}^2\frac{p\pi}{q}$. En supposant $\frac{p}{q}$ irréductible, je choisis i et j de façon que q ait la plus grande valeur possible q'; cela est possible, puisque G est fini, et cela suppose seulement, en réalité, que l'on sache que deux quelconques des symétries S engendrent une rosace d'au plus N symétries, N étant un nombre fixe. Je suppose $\mathfrak{C}$ choisi de façon que S_i et S_j soient vraies. Elles engendrent alors une rosace de q' symétries vraies. Je dis que G ne contient pas d'autres symétries. Supposons, en effet, qu'il en admette une. Soient Oa' et Od' les directions du diamètre et des cordes de cette symétrie menées par un point O du plan. Oa' sera compris entre les parallèles Oa'_i, Oa'_{i+1} aux axes de deux symétries vraies consécutives appartenant à la rosace.

Le rapport anharmonique $(a', d'; a'_i, d'_i)$ est négatif; donc si l'on suppose, comme c'est possible, Od' à l'extérieur de l'angle droit $a'_iOd'_i$, Oa' sera à son intérieur. De même le rapport anharmonique $(a', d'; a'_{i+1}, d'_{i+1})$ est négatif. Aussi pourra-t-on supposer Oa' à l'extérieur de l'angle droit $a'_{i+1}Od'_{i+1}$ et Od' à l'intérieur. Finalement, on pourra choisir, sur les directions des cordes et des diamètres, des demi-droites qui, dans le plan orienté, se rencontreront dans l'ordre suivant : $a'_i, a', a'_{i+1}, d'_i, d'\ d'_{i+1}$, et, par suite, le rapport anharmonique $(a'_i, d'_i; a', d')$ est, en valeur absolue, le produit des tangentes des deux angles a'_iOa', d'_iOd' qui sont plus petits que $\frac{\pi}{q'}$. Il sera donc, en valeur absolue, plus petit que $\text{tang}^2\frac{\pi}{q'}$. Or, il est de la forme

$$-\text{tang}^2\frac{p_1\pi}{q_1}\ \left(\frac{p_1}{q_1}\ \text{irréductible}\right).$$

Donc

$$\frac{p_1}{q_1} < \frac{1}{q'},$$

ce qui exige que q_1 soit supérieur à q'. Nous arrivons ainsi à une contradiction.

Ayant ainsi établi que les droites $\alpha\delta$ concourent toujours, supposons que nous ayons effectué, au préalable, une transformation $\mathfrak{T}$ telle que deux symétries non conjuguées prises parmi les S soient remplacées par des symétries réelles et vraies. Ce choix de $\mathfrak{T}$ est bien possible puisque, quelles que soient S_i et S_j, pourvu qu'elles ne soient pas conjuguées, les quatre points α_i, δ_i; α_j, δ_j sont différents et dans un même plan. Si $\mathfrak{T}$ a rendu les deux symétries S_i et S_j orthogonales et réelles, les quatre nombres a_i, d_i; a_j, d_j sont réels et tels que l'on ait : $a_i d_i = -1$, $a_j d_j = -1$.

Donc σ_i et σ_j sont des renversements, et toutes les droites $\alpha\delta$ concourent au centre C de la sphère π. Le groupe γ est un groupe de rotations.

Énonçons exactement les résultats obtenus : *A condition d'effectuer au préalable une homographie $\mathfrak{T}$ convenable, le groupe γ, correspondant à un groupe G construit à partir de symétries S, en nombre fini ou non, pour transformations fondamentales, est constitué uniquement de rotations; pourvu que chaque couple*

$$S_i = (A_i, D_i), \qquad S_j = (A_j, D_j)$$

de symétries S satisfasse aux conditions suivantes :

1° *Ou bien S_i et S_j sont conjuguées ou les quatre directions A_i, D_i, A_j, D_j sont différentes;*

2° *La rosace construite à partir de S_i, S_j contient au plus N symétries, N étant un nombre fixe indépendant de i et j.*

Cet énoncé ne suppose pas que les symétries S soient toutes les symétries de G; nous allons prouver que : *si, de plus, les symétries S sont toutes les symétries du groupe G, ce groupe est fini.*

Considérons une rosace de symétries appartenant à G, appelons-les

$$S_1, \quad S_2, \quad S_3 = S_2 S_1 S_2, \quad S_4 = S_3 S_2 S_3, \quad \ldots.$$

A ces symétries correspondent dans γ des renversements, qui sont

$$\sigma_1, \quad \sigma_2, \quad \sigma_3 = \sigma_2 \sigma_1 \sigma_2, \quad \sigma_4 = \sigma_3 \sigma_2 \sigma_3, \quad \ldots.$$

et, puisque A_3 et D_3 sont respectivement les homologues, dans S_2, de A_1 et D_1, α_3 et δ_3 sont les symétriques de α_1 et δ_1 par rapport à $\alpha_2\beta_2$. Donc les renversements de γ qui correspondent à des symétries de S, renversements que nous appellerons *les renversements utiles*, se groupent en rosaces comme les symétries S. Mais les rosaces de S contiennent chacune au plus N symétries, donc les rosaces de renversements utiles contiennent au plus N renversements et les axes de ces renversements font entre eux des angles aigus au moins égaux à $\frac{\pi}{N}$. Par suite, les renversements utiles sont en nombre fini, et comme à un renversement utile correspondent au plus deux symétries de G, d'après la condition 1°, G ne contient qu'un nombre fini de symétries. Donc (§ 8), G est fini.

11. Cette proposition nous permet de légitimer une affirmation antérieure : *les seules dispositions de diamètres en nombre infini que puisse admettre une courbe algébrique sont celles des cas* **a**, **b**, **c**, **d**, **e**. En effet, si G n'est pas fini, c'est que l'ensemble des symétries S de G ne vérifie pas l'une ou l'autre des deux conditions de l'énoncé précédent. Si la condition 1° n'est pas satisfaite, c'est que l'on a affaire, nous l'avons vu, aux cas **a**, **b** ou **c**. Si c'est la condition 2°, c'est qu'il est possible de trouver une rosace de symétries S contenant plus de $2m$ symétries, m étant le degré de la courbe algébrique Γ considérée. Or, si A est un point quelconque de Γ, la conique admettant cette rosace de symétries et passant par A aura en commun avec Γ le point A et ses homologues, soit plus de $2m$ points; donc cette conique fait partie de Γ, et l'on est dans l'un des cas **d** ou **e**.

De là résulte aussi que *les seules courbes algébriques indécomposables qui aient une infinité de diamètres sont des coniques* (1).

12. Revenons maintenant au cas où G est fini. Nous pouvons alors supposer que γ est un groupe de rotations; de plus, γ est fini. Or on connaît les groupes finis de rotations; ils sont constitués par les rotations transformant en lui-même un polygone régulier ou un polyèdre régulier.

---

(1) Si l'on veut être tout à fait rigoureux, il faut dire : les droites et les coniques.

Soit choisi l'un de ces groupes; nous pouvons l'orienter autour du point C, centre de π, de bien des façons. Considérons-le dans deux de ses positions γ et γ'. On peut toujours passer du groupe γ au groupe γ' par une transformation θ, homographique, réelle, ne changeant pas l'orientation de la sphère π, et l'on peut trouver une homographie $\mathfrak{E}$ transformant en elle-même la droite de l'infini p de P à laquelle θ corresponde. Or si à γ correspond un groupe de symétries G, à γ' correspondra le groupe G' transformé de G par $\mathfrak{E}$. Et comme nous considérons G et G' comme identiques, il n'y a pas lieu de distinguer entre les deux groupes γ et γ'.

Donc nous orientons le groupe choisi d'une façon particulière, arbitraire, autour de C. Il faut ensuite choisir les axes des renversements utiles. Une première condition nous guidera dans ce choix : les renversements utiles doivent suffire à engendrer γ, puisque les symétries S suffisent à engendrer G.

Pour énoncer une seconde condition, convenons de dire que deux points ou deux diamètres de π sont *congruents*, si l'on peut passer de l'un à l'autre par une rotation de γ; c'est-à-dire par une suite de renversements utiles.

En étudiant, au paragraphe précédent, la relation entre les trois renversements σ_1, σ_2, σ_3 nous avons vu que les symétriques, dans un renversement utile, d'un axe de renversement utile et d'un point α sont un axe utile et un point α. Ceci nous conduit à partager les axes de renversements de γ en familles d'axes congruents; les axes utiles seront tous ceux d'une de ces familles ou de plusieurs de ces familles. Nous partagerons ensuite les extrémités des axes utiles en familles d'extrémités congruentes. Les points α seront tous les points d'une de ces familles ou de plusieurs d'entre elles : avec cette condition que chaque axe utile doit contenir au moins un point α.

Les points α étant choisis, les points δ, qui sont diamétralement opposés aux α, sont aussi choisis. Donc on connaît les directions dans P des cordes D et des diamètres A. Reste à placer les diamètres A; on y arrivera de suite, pour chaque groupe γ, en utilisant ce fait que les symétries S et les renversements utiles σ se groupent en rosaces correspondantes. Et cela nous conduira à un résultat général que je formule dès maintenant : *Dans toute dis-*

position de diamètres en nombre fini, ces diamètres sont concourants.

Nous allons maintenant appliquer cette méthode aux différents groupes finis de rotations.

13. *Groupes diédraux.* — Ce sont les groupes de rotations qui laissent invariant, sur la sphère π, un polygone régulier. Le seul cas intéressant ici est celui d'un polygone inscrit dans un grand cercle de π. Pour le cas où le polygone ne comprendrait qu'un sommet qui sera un seul point du cercle ou seulement deux sommets qui seront diamétralement opposés, il faut ajouter que les rotations doivent transformer le grand cercle en lui-même; soient $A_1, A_2, \ldots, A_n$ les sommets du polygone régulier considéré, soit C le centre de la sphère. Le groupe des rotations comprendra les renversements autour de $CA_1, CA_2, \ldots, CA_n$, puis les renversements dont les axes sont les rayons perpendiculaires aux milieux de $A_1A_2, A_2A_3, \ldots$ et enfin les rotations autour du diamètre $C\zeta$ perpendiculaire au plan du polygone. Ces rotations ne comprennent un renversement que si n est pair; on l'appelle *le renversement axial*. Les renversements dont les axes sont dans le plan du polygone sont appelés *renversements diédraux. Si n est impair, les renversements diédraux des deux espèces sont confondus, il y en a n; chacun d'eux contient un sommet et un seul; il n'y a pas de renversement axial. Si n est pair, il y a n axes de renversements diédraux;* $\frac{n}{2}$ *d'entre eux contiennent deux sommets; les* $\frac{n}{2}$ *autres n'en contiennent pas; le renversement axial existe.*

Envisageons successivement ces deux cas :

n impair. — Nécessairement, l'un des n axes de renversement est utile. Or, on passe des uns aux autres par des rotations du groupe autour de $C\zeta$; donc il sont congruents et par suite tous utiles.

Les n extrémités sommets sont congruentes; les n autres extrémités le sont aussi; les n premières seront utiles en étant toutes des points α ou toutes des points δ; de même pour les n autres. Évidemment, il n'y a pas lieu de distinguer entre les deux espèces d'extrémités; passer des uns aux autres revient à remplacer le polygone par son symétrique par rapport à C, ce qui donne le même groupe γ. Donc, le cas de n impair donne seulement deux dispositions de points α.

1° *Les extrémités sommets sont seules des points* α; *les n autres sont seules des points* δ. *Il y correspond dans le plan* P *une rosace de n diamètres*, puisque les axes de renversements utiles forment une rosace.

2° *Les extrémités sommets sont à la fois des points* α *et des points* δ; *de même pour les n autres. Chaque axe de renversement donne un système de deux diamètres conjugués. Il y correspond* $2n$ *symétries du plan* P, *deux à deux conjuguées, formant une rosace.*

Dans les deux cas, si l'on suppose que les renversements correspondent à des symétries réelles, ce sont des symétries vraies formant des rosaces régulières.

n pair. — Les $\frac{n}{2}$ axes de renversement diédraux, contenant chacun deux sommets, sont congruents entre eux; de même pour les $\frac{n}{2}$ autres, ainsi que le montrent les rotations autour de $C\zeta$. Nous avons donc ici deux sortes d'axes de renversements diédraux à considérer; ils ne sont pas essentiellement différents; on passe des uns aux autres en faisant tourner le polygone primitif de l'angle $\frac{\pi}{n}$ autour de $C\zeta$, ce qui ne change pas γ. Le renversement axial ne suffisant évidemment pas pour engendrer le groupe γ, nécessairement il y a un renversement diédral utile. Nous pouvons supposer que c'est un axe contenant deux sommets. Toutes les extrémités des $\frac{n}{2}$ axes analogues sont congruentes. Donc ce sont toutes des points α.

A priori, deux cas sont possibles : ou bien, les extrémités qui ne sont pas sommets (et qui sont congruentes) ne sont pas des points α, ou elles sont toutes des points α.

Elles pourront ne pas être des points α si l'on peut engendrer γ sans utiliser les renversements correspondants. Dans quel cas ceci peut-il se produire?

Considérons le groupe γ' admettant les $\frac{n}{2}$ axes de renversement utiles contenant les sommets et qui serait défini par la considération du polygone de $\frac{n}{2}$ côtés obtenu en joignant les sommets de deux à deux.

Peut-on engendrer γ en partant de γ' et du renversement axial? si $\frac{n}{2}$ est pair, le renversement axial fait partie de γ' et nous ne parviendrons pas au résultat demandé. Si $\frac{n}{2}$ est impair, le renversement axial ne fait pas partie de γ'. Ajoutons-le à γ', on engendrera γ. (Remarquer en effet qu'en effectuant l'opération formée d'un renversement diédral de γ' suivi du renversement axial, on obtient un des $\frac{n}{2}$ renversements diédraux n'appartenant pas à γ'.)

En résumé, nous avons une rosace de renversements utiles en nombre n ou $\frac{n}{2}$. Chaque extrémité de chaque renversement utile est un point α. Donc chaque renversement correspond à deux diamètres conjugués. En plus, il se peut que le renversement axial soit utile; s'il en est ainsi, il correspond à deux diamètres conjugués, car ses extrémités sont congruentes par tout renversement diédral.

A la rosace de renversements diédraux correspond une rosace de n ou de $2n$ diamètres, deux à deux conjugués.

Si le renversement axial est utile, son axe forme avec l'axe d'un renversement diédral utile une rosace à laquelle correspond une rosace de quatre diamètres deux à deux conjugués. Deux de ces diamètres appartiennent à la rosace de diamètres d'origine diédrale. Donc les diamètres provenant du renversement axial passent aussi par le centre de cette rosace. Si, en particulier, le polygone est celui qui correspond aux symétries réelles, la rosace d'origine diédrale est formée de symétries vraies. Les extrémités de l'axe du renversement axial correspondent aux pentes $\pm i$ pour les diamètres correspondants. Donc ces nouveaux diamètres conjugués sont les droites isotropes.

Finalement, l'étude des groupes diédraux nous a conduit à deux dispositions de diamètres en nombre fini.

I. *Une rosace de p diamètres concourants. Si p est impair, il n'existe pas de diamètres conjugués. Si p est pair, les diamètres sont deux à deux conjugués.*

II. *Une rosace de p couples de diamètres conjugués concourants et, en plus, un couple de diamètres conjugués divisant harmoniquement tous les couples de la rosace.*

Si l'on fait croître p indéfiniment, on retrouve les dispositions **d** et **e**.

14. *Groupe du tétraèdre.* — Le groupe du tétraèdre régulier se compose des rotations $\frac{2k\pi}{3}$ (k entier) autour des hauteurs et des renversements autour des perpendiculaires communes aux couples d'arêtes opposées. Donc, le groupe ne comprend que trois renversements autour de trois droites formant un trièdre trirectangle. Ces trois renversements, pris comme opérations fondamentales, n'engendrent pas le groupe du tétraèdre, mais seulement le groupe diédral correspondant à un polygone à deux sommets inscrit dans un cercle donné. Il ne correspondra donc, au groupe du tétraèdre, aucune disposition de diamètres.

15. *Groupe de l'hexaèdre et de l'octaèdre.* — Il comprend :

1° Des rotations $\frac{2k\pi}{4}$ autour des trois axes quaternaires perpendiculaires aux faces du cube; ces axes quaternaires sont des axes de renversement;

2° Des rotations $\frac{2k\pi}{3}$ autour de quatre axes ternaires qui sont les diagonales du cube;

3° Des renversements autour de six axes binaires qui joignent les milieux des arêtes opposées du cube.

Deux axes de même espèce sont congruents; deux extrémités quelconques de deux axes de même espèce sont congruentes.

Les renversements autour des trois axes quaternaires ne suffisent pas en engendrer le groupe.

Les renversements autour des six axes binaires suffisent au contraire à engendrer le groupe.

Il résulte de là que nécessairement un axe binaire sera utile et que, par suite, ils le seront tous; et aussi que, si l'un des axes quaternaires est utile, ils le sont tous. Il en résulte enfin que toutes les extrémités des axes utiles sont des points α.

Les axes binaires donneront donc toujours 12 symétries deux à deux conjuguées.

Les axes quaternaires pourront donner 6 symétries deux à deux conjuguées.

Les six premiers couples de diamètres conjugués s'associent deux à deux pour former trois rosaces de 4 diamètres et trois à trois pour former quatre rosaces de 6 diamètres. Chaque couple appartient à une rosace de 4 diamètres et à deux rosaces de 6 diamètres.

Les trois autres couples de diamètres conjugués, s'ils existent, s'associent deux à deux et se joignent aux trois rosaces de 4 diamètres que nous venons de rencontrer pour former des rosaces de 8 diamètres. Chacun de ces trois nouveaux couples appartient à deux rosaces de 8 diamètres.

Il est clair, par suite, que tous ces diamètres sont concourants.

En résumé, le groupe de l'hexaèdre et de l'octaèdre nous fournit deux dispositions de diamètres.

III. *Six couples de diamètres conjugués concourants formant trois rosaces de* 4 *diamètres et quatre rosaces de* 6 *diamètres.*

IV. *Les diamètres de la disposition* III *et en plus trois couples de diamètres conjugués concourants avec les premiers et remplaçant les trois rosaces de* 4 *diamètres par trois rosaces de* 8 *diamètres.*

16. *Groupe du dodécaèdre et de l'icosaèdre.* — L'icosaèdre a 12 sommets, 20 faces, 30 arêtes. Le groupe des rotations comprend :

1° Des rotations $\frac{2k\pi}{5}$ autour de 6 axes d'ordre 5 passant par les couples de sommets opposés de l'icosaèdre;

2° Des rotations $\frac{2k\pi}{3}$ autour de 10 axes ternaires perpendiculaires à deux faces opposées;

3° Des renversements autour de 15 axes binaires obtenus en joignant les milieux de deux arêtes opposées.

Comme il existe une rotation du groupe transformant une arête dirigée quelconque en une arête dirigée quelconque, toutes les extrémités des axes binaires sont des points α.

A chaque axe binaire correspondent deux diamètres conjugués.

Nous arrivons ainsi à la disposition V: 15 *couples de diamètres conjugués qui s'associent pour former six rosaces de* 10 *diamètres, dix rosaces de* 6 *diamètres, quinze rosaces de* 4 *diamètres. Un couple quelconque appartient à deux rosaces de chaque espèce.*

17. Nous avons trouvé les cinq dispositions possibles de diamètres en nombre fini.

Notre but est maintenant de chercher l'équation générale des courbes algébriques admettant chacune de ces dispositions.

L'origine des coordonnées est prise au point de rencontre des diamètres et les axes sont choisis dans une position simple par rapport aux diamètres. Il suffit de se borner à la considération des symétries de première espèce, car si, dans cette hypothèse, nous trouvons pour la courbe la plus générale l'équation $f = 0$ et si $\varphi = 0$ est l'équation d'un système de diamètres homologues par les symétries de G, $f\varphi = 0$ sera l'équation d'une courbe admettant les diamètres de $\varphi = 0$ pour diamètres de première espèce et les autres diamètres, s'il en existe, pour diamètres de seconde espèce (§ 2).

Supposons que, par un procédé quelconque, on ait trouvé deux formes $f_q(x, y)$, $f_r(x, y)$ de degrés q et r qui se reproduisent identiquement quand on effectue sur x, y les substitutions homogènes correspondant aux transformations homographiques du groupe G, pour la disposition D de diamètres envisagée. Si P est un polynome à deux variables, $P(f_q, f_r) = 0$ est une courbe admettant les symétries de la disposition D. Soit x_0, y_0 un point quelconque du plan. Les équations

$$f_q(x, y) = f_q(x_0, y_0),$$
$$f_r(x, y) = f_r(x_0, y_0)$$

définissent qr points x, y à distance finie si, comme nous le supposons, f_q et f_r n'ont pas de facteur linéaire commun. Tous les homologues de x_0, y_0 dans le groupe G, dont nous supposons l'ordre égal à G_0, font partie de ces qr points, et ces qr points se partagent en un certain nombre de systèmes ; chaque système comprenant un groupe de points homologues en nombre G_0. Donc qr est multiple de G_0; $qr = mG_0$. Supposons qu'on ait pu trouver q et r assez petits pour que $qr = G_0$; *dans ces conditions*, $P(f_q, f_r) = 0$ *représentera l'équation générale des courbes algébriques cherchées*.

En effet, soit $F(x, y) = 0$ l'équation d'une quelconque de ces courbes algébriques admettant les symétries de la disposition D comme symétries de première espèce. Résolvons les équations

$$f_q(x, y) = f_q,$$
$$f_r(x, y) = f_r,$$

en x et y et portons dans F, nous aurons

$$F(x, y) \equiv \Phi(f_q, f_r).$$

Mais la fonction Φ de deux variables est une fonction algébrique qui n'est jamais infinie pour des valeurs finies de f_q et de f_r et qui est à détermination unique, car, se donner f_q et f_r, c'est se donner un système unique de points homologues pour lesquels Φ reprend la même valeur. Φ est donc un polynome.

Nous sommes ainsi amenés à chercher f_q et f_r de degrés aussi petits que possible.

Soit la symétrie de diamètre Ox; Oy étant la direction des cordes. La substitution correspondante est $x' = x$, $y' = -y$. Les formes x et y^2 sont invariantes. La forme x correspond au point à l'infini d de la direction de cordes; la forme y^2 au point à l'infini a du diamètre pris deux fois.

La forme la plus générale invariante par cette symétrie est

$$\varphi(x, y^2) = x^k y^{2k'}(ax^2 + by^2)(a'x^2 + b'y^2)(\ldots),$$

car si φ contient un facteur du premier degré $\lambda x + \mu y$ pour lequel le produit $\lambda\mu$ est différent de zéro, φ devra aussi contenir la forme homologue $\lambda x - \mu y$, donc le produit

$$(\lambda x + \mu y)(\lambda x - \mu y) = \lambda^2 x^2 - \mu^2 y^2.$$

D'après cela, une forme invariante par toutes les symétries d'un groupe G sera le produit de formes élémentaires, chacune d'elles correspondant à un point de la droite de l'infini et à tous ses homologues; avec cette exception que si le point choisi est le point à l'infini a d'un diamètre, la forme devra contenir deux fois a et par suite deux fois ses homologues. Nous savons donc écrire les formes invariantes.

Pour chercher celles de plus petit degré, il sera commode, au lieu de raisonner sur le groupe G, de raisonner sur le groupe γ de la sphère π. Soit un point μ de la sphère. La forme qui correspond à ce point et à ses homologues a un degré en général égal à l'ordre γ_0 du groupe γ, c'est-à-dire à l'ordre g_0 du groupe g. S'il arrive que k opérations du groupe γ, et k seulement, laissent le point μ invariant, c'est-à-dire si le point μ est extrémité d'un axe de rotation d'ordre k, il en sera de même pour chacun des congruents de μ. μ n'aura plus que $\frac{\gamma_0}{k} - 1$ congruents et la forme ne sera plus que de degré $\frac{\gamma_0}{k}$.

En pratique, quand nous aurons choisi au mieux q et r grâce à ces considérations, nous arriverons à $qr = G_0$, ce que nous vérifierons à l'aide des remarques suivantes :

1° $g_0 = \gamma_0$ *est une limite inférieure de* G_0, *dans tous les cas.*
2° *Si les symétries du groupe* G *sont deux à deux conjuguées, on peut affirmer que* $2g_0 = 2\gamma_0$ *est une limite inférieure de* G_0.

En effet, l'ensemble de quatre points homologues à distance finie obtenus par deux symétries conjuguées se réduit à deux points s'il s'agit de points à l'infini.

3° *Si les axes des renversements du groupe* γ *s'associent trois par trois pour former des trièdres trirectangles conduisant à des symétries deux à deux conjuguées, on peut affirmer que* $4g_0 = 4\gamma_0$ *est une limite inférieure de* G_0.

En effet, supposons, comme c'est possible, que trois axes de renversement formant un trièdre trirectangle correspondent aux pentes $0, \infty$; $+1, -1$; $+i, -i$; les deux premières donnent deux symétries conjuguées vraies par rapport aux axes de coordonnées; les deux suivantes, deux symétries vraies par rapport aux bissectrices de ces axes; les deux dernières deux symétries conjuguées par rapport aux droites isotropes passant par l'origine; il est facile de voir que les substitutions qui correspondent à l'une de ces deux dernières symétries sont $x = -iy'$, $y = ix'$, c'est-à-dire qu'on passe de M à M′ par une rotation de 90° autour du centre O qui transforme M en M_1, puis par une homothétie de centre O et de rapport i qui transforme M_1 en M′. Mais la rotation de 90° autour de O s'obtient aussi en composant une symétrie par rapport à un axe de coordonnées avec une symétrie par rapport à une bissectrice, puisque ces deux axes de symétrie font un angle de 45°. Donc si l'on prend un système de seize points homologues dans les six symétries considérées, il est constitué par quatre systèmes de quatre points en ligne droite avec O analogue au système formé par M_1, M′ et leurs symétriques par rapport à O. Pour un point à l'infini, il n'y a plus que quatre homologués au lieu de seize; $4g_0$ est bien une limite inférieure de G_0.

18. *Disposition I.* — Il existe une rosace de p diamètres concourants. Si p est impair, il n'existe pas de diamètres conjugués; si p est pair, ils sont deux à deux conjugués.

Nous supposerons que les renversements diédraux correspondent à des symétries réelles, donc vraies. Nous supposerons aussi que l'un des axes de renversement donne les coefficients angulaires o, ∞, le premier de ces nombres correspondant au point a de la symétrie. Ox sera donc axe de symétrie. Sur la sphère, tous les points α ont pour collatitudes o, $\frac{2\pi}{p}$, $\frac{4\pi}{p}$, ... Prenons comme formes invariantes : 1° celle qui correspond aux extrémités du diamètre de la sphère perpendiculaire au plan du polygone. Ces extrémités ne sont pas des points α; la forme sera $f_q = \chi_2 = x^2 + y^2$; 2° celle qui correspond aux points de la sphère qui, dans le plan du polygone, ont pour colatitudes $\frac{\pi}{p}$, $\frac{3\pi}{p}$, ... Ces points sont milieux de points α et ne sont jamais des points α. Ils donnent dans le plan sur lequel on considère les symétries les pentes

$$\operatorname{tang}\frac{\pi}{2p}, \quad \operatorname{tang}\frac{3\pi}{2p}, \quad \ldots;$$

la forme s'écrit donc

$$\begin{aligned} f_r = \psi_p &= \mathrm{A}\prod\left[y - x \operatorname{tang}(2k+1)\frac{\pi}{2p}\right] \\ &= \mathrm{B}\prod\left[y\cos(2k+1)\frac{\pi}{2p} - x\sin(2k+1)\frac{\pi}{2p}\right] \end{aligned}$$

ou, en coordonnées polaires,

$$B\rho^p \prod \sin\left[\theta - (2k+1)\frac{\pi}{2p}\right].$$

A un facteur constant près, la forme ψ_p s'écrit

$$\psi_p = x^p - C_p^2 x^{p-2} y^2 + C_p^4 x^{p-4} y^4 - \ldots,$$

car les racines en $\frac{y}{x}$ de cette forme sont

$$\operatorname{tang}\frac{\frac{\pi}{2}}{p}, \quad \operatorname{tang}\frac{\frac{\pi}{2}+\pi}{p}, \quad \ldots.$$

On voit que $qr = 2p$; mais, si p est impair,

$$\gamma_0 = 2p, \qquad G_0 \geqq \gamma_0 = 2p;$$

donc $qr = G_0$; et si p est pair,

$$\gamma_0 = p, \qquad G_0 \geqq 2\gamma_0 = 2p;$$

donc, on a encore $qr = G_0$. Dans tous les cas, $P(\chi_2, \psi_p) = 0$ est l'équation cherchée, en se bornant, ainsi que nous l'avons dit dans le paragraphe précédent, aux symétries de première espèce.

Introduisons les symétries de seconde espèce : 1° p impair. Tous les axes de renversement sont congruents. Si une symétrie est de seconde espèce, elles le sont toutes. Or, les pentes des axes de symétrie sont

$$\operatorname{tang} 0, \quad \operatorname{tang}\frac{\pi}{p}, \quad \operatorname{tang}\frac{2\pi}{p}, \quad \ldots$$

et l'équation du faisceau des axes est

$$\varphi_p(x, y) = C_p^1 x^{p-1} y - C_p^3 x^{p-3} y^3, \ldots.$$

L'équation cherchée des courbes admettant ces droites comme axes de symétrie de seconde espèce est donc

$$\varphi_p(x, y).P(\chi_2, \psi_p) = 0.$$

2° p pair. Les axes de renversement sont de deux en deux congruents. De même les axes de symétrie. En posant

$$p = 2p',$$

les uns ont pour pentes

$$\operatorname{tang} o, \quad \operatorname{tang}\frac{\pi}{p'}, \quad \operatorname{tang}\frac{2\pi}{p'}, \quad \ldots,$$

les autres

$$\operatorname{tang}\frac{\pi}{2p'}, \quad \operatorname{tang}\frac{3\pi}{2p'}, \quad \ldots.$$

Les équations des faisceaux de ces deux systèmes d'axes sont, avec les mêmes notations que plus haut,

$$\varphi_{p'}(x, y) = 0 \qquad \text{et} \qquad \psi_{p'}(x, y) = 0.$$

Trois hypothèses sont à faire suivant que l'un de ces systèmes seulement est de seconde espèce ou que tous les axes sont de seconde espèce. Les équations cherchées des courbes admettant ces axes pour axes de seconde espèce sont donc

$$\begin{gathered}\varphi_{p'}\mathrm{P}(\chi_2, \psi_p) = 0,\\ \psi_{p'}\mathrm{P}(\chi_2, \psi_p) = 0,\\ \varphi_{p'}\psi_{p'}\mathrm{P}(\chi_2, f_p) = 0.\end{gathered}$$

En remarquant que

$$\psi_p + i\varphi_p = (x + iy)^p, \qquad \psi_p - i\varphi_p = (x - iy)^p,$$

on voit que

$$\psi_p^2 + \varphi_p^2 = (x^2 + y^2)^p = \chi_2^p.$$

Ainsi φ_p^2 est un polynome en χ_2 et en ψ_p; cela était certain *a priori*, car la courbe $\varphi_p^2 = 0$ admet tous les diamètres de la disposition I pour diamètres de première espèce.

Pour le cas où $p = 2p'$, les identités

$$\psi_{p'}^2 - \varphi_{p'}^2 = \psi_p, \qquad \psi_{p'}^2 + \varphi_{p'}^2 = (x^2 + y^2)^{p'} = \chi_2^{p'}$$

fournissent en fonction de ψ_p et de χ_2 les équations des carrés des faisceaux des diamètres des deux familles.

19. *Disposition II.* — Nous placerons les $2p$ axes de renversement diédraux comme dans la disposition I. Les deux points de la sphère représentés par la forme χ_2 sont des points α; il est donc nécessaire de prendre

$$f_q = \chi_4 = (x^2 + y^2)^2.$$

La forme f_r formée par le même procédé qu'au paragraphe précédent sera ψ_{2p}.

Nous aurons $qr = 8p$. Si p est impair,

$$\gamma_0 = 4p, \qquad G_0 \geqq 2\gamma_0 = 8p;$$

donc $G_0 = 8p$. L'équation cherchée est

$$P(\chi_4, \psi_{2p}) = 0.$$

Si p est pair, $\gamma_0 = 2p$, mais les axes de renversement forment des trièdres trirectangles; donc

$$G_0 \geqq 4\gamma_0 = 8p;$$

par suite, $G_0 = 8p$ et l'équation s'écrit encore

$$P(\chi_4, \psi_{2p}) = 0.$$

Occupons-nous maintenant des symétries de seconde espèce.

1° p impair. Tous les axes de renversement diédraux sont congruents. Les axes de symétrie qui leur correspondent le sont aussi. Mais il convient de mettre à part les diamètres qui correspondent au renversement axial, d'où les trois équations possibles :

$$\begin{aligned} \varphi_{2p}(x, y) P(\chi_4, \psi_{2p}) &= 0, \\ (x^2+y^2) P(\chi_4, \psi_{2p}) &= 0, \\ (x^2+y^2)\varphi_{2p}(x, y) P(\chi_4, \psi_{2p}) &= 0. \end{aligned}$$

2° p pair. Écrivons, sans insister, les sept équations possibles en introduisant les symétries de seconde espèce. Nous gardons les mêmes notations que dans la disposition I :

$$\begin{aligned} (x^2+y^2) P(\chi_4, \psi_{2p}) &= 0, \\ \varphi_p P(\chi_4, \psi_{2p}) &= 0, \\ \psi_p P(\chi_4, \psi_{2p}) &= 0, \\ \varphi_p \psi_p P(\chi_4, \psi_{2p}) &= 0, \\ (x^2+y^2) \varphi_p P(\chi_4, \psi_{2p}) &= 0, \\ (x^2+y^2) \psi_p P(\chi_4, \psi_{2p}) &= 0, \\ (x^2+y^2) \varphi_p \psi_p P(\chi_4, \psi_{2p}) &= 0. \end{aligned}$$

20. *Disposition III.* — Les axes quaternaires correspondront aux pentes $0, \infty; 1, -1; i - i$. Les extrémités de ces axes ne sont pas des points α. La forme correspondante est

$$f_q = f_6 = xy(x^2 - y^2)(x^2 + y^2).$$

Prenons les extrémités des axes ternaires (les diagonales du cube). Leurs longitudes sont les multiples impairs de $\frac{\pi}{4}$. Leurs colatitudes se réduisent à λ et $\pi - \lambda$, avec $\operatorname{tang}\lambda = \sqrt{2}$.

Les huit coefficients angulaires correspondants dans le plan P sont

$$\operatorname{tang}\frac{\lambda}{2}\, e^{(2p+1)\frac{\pi}{4}}, \quad -\cot\frac{\lambda}{2}\, e^{(2p+1)\frac{\pi}{4}},$$

p prenant les valeurs 0, 1, 2, 3, de sorte que la forme correspondante est

$$\begin{aligned} f_8 &= \left(y^4 + \operatorname{tang}^4\frac{\lambda}{2}\, x^4\right)\left(y^4 + \cot^4\frac{\lambda}{2}\, x^4\right) \\ &= y^8 + \left(\operatorname{tang}^4\frac{\lambda}{2} + \cot^4\frac{\lambda}{2}\right) x^4 y^4 + x^8. \end{aligned}$$

Or, puisque $\operatorname{tang}\lambda = \sqrt{2}$ et que l'on a

$$\operatorname{tang}\frac{\lambda}{2} - \cot\frac{\lambda}{2} = \frac{\operatorname{tang}^2\frac{\lambda}{2} - 1}{\operatorname{tang}\frac{\lambda}{2}} = \frac{-2}{\operatorname{tang}\lambda},$$

$\operatorname{tang}\frac{\lambda}{2}$ et $-\cot\frac{\lambda}{2}$ sont racines de l'équation

$$\rho^2 + \frac{2}{\operatorname{tang}\lambda}\rho - 1 = \rho^2 + \sqrt{2}\rho - 1 = 0.$$

La somme des quatrièmes puissances s'obtient immédiatement par les formules de Newton. Elle est égale à 14. On a donc

$$f_p = f_8 = x^8 + 14x^4y^4 + y^8.$$

Or

$$qr = 48, \qquad \gamma_0 = 24, \qquad G_0 \geqq 2\gamma_0 = 48.$$

Donc

$$G_0 = 48.$$

L'équation générale cherchée, les symétries étant toutes de première espèce, est donc

$$P(f_6, f_8) = 0.$$

Tous les axes binaires qui correspondent sur la sphère aux diamètres sont congruents. Si une symétrie est de seconde espèce, elles le seront toutes, nous avons donc à chercher l'équation du faisceau de l'ensemble des 12 diamètres. Nous les associons pour cela en trois groupes de 4, le module de la pente correspondante étant le même dans chaque groupe; c'est-à-dire que sur la sphère nous associons les extrémités des axes binaires ayant même colatitude. Quand la colatitude est $\frac{\pi}{2}$, les longitudes sont les multiples impairs de $\frac{\pi}{4}$. Quand la colatitude est $\frac{\pi}{4}$ ou $\frac{3\pi}{4}$, la longitude est multiple de $\frac{\pi}{2}$.

Le faisceau des diamètres est donc

$$Q = (x^4 + y^4)\left(x^4 \operatorname{tang}^4\frac{\pi}{8} - y^4\right)\left(x^4 \cot^4\frac{\pi}{8} - y^4\right) = 0$$

ou encore

$$Q = (x^4 + y^4)\left[x^8 - \left(\operatorname{tang}^4\frac{\pi}{8} + \cot^4\frac{\pi}{8}\right)x^4y^4 + y^8\right] = 0,$$

$\operatorname{tang}\frac{\pi}{8}$ et $-\cot\frac{\pi}{8}$ sont racines de l'équation

$$\rho^2 + \frac{2}{\operatorname{tang}\frac{\pi}{4}}\rho - 1 = \rho^2 + 2\rho - 1 = 0.$$

On trouve immédiatement que

$$\operatorname{tang}^4\frac{\pi}{8} + \cot^4\frac{\pi}{8} = 34.$$

Donc

$$\varphi = (x^4 + y^4)(x^8 - 34x^4y^4 + y^8) = x^{12} - 33x^8y^4 - 33x^4y^8 + y^{12} = 0.$$

Les courbes algébriques admettant ces symétries comme symétries de seconde espèce auront donc une équation de la forme

$$\varphi . P(f_6, f_8) = 0.$$

A titre de vérification, on peut remarquer que φ^2 doit être un polynome en f_6 et en f_8. On trouve en effet que

$$\varphi^2 = (f_8)^3 - 108(f_6)^4.$$

21. *Disposition IV.* — Les points de la sphère qui correspondent à la forme f_6 sont des points α. Nous remplacerons donc f_6 par son carré

$$f_{12} = x^2y^2(x^4 - y^4)^2,$$

et nous conserverons f_8.

Nous aurons donc

$$qr = 96, \qquad \gamma_0 = 24, \qquad G_0 \geqq 4\gamma_0; \qquad \text{donc} \qquad G_0 = 96.$$

L'équation générale cherchée, les symétries étant toutes de première espèce, est donc

$$P(f_8, f_{12}) = 0.$$

Si l'on introduit les symétries de seconde espèce, les équations possibles sont

$$\varphi . P(f_8, f_{12}) = 0,$$
$$f_6 P(f_8, f_{12}) = 0,$$
$$\varphi . f_6 P(f_8, f_{12}) = 0.$$

On remarquera les formes simples que prennent, en coordonnées polaires, les polynomes f_6, f_8 et, par suite, celles des équations des courbes avec les dispositions III et IV,

$$f_6 = \frac{1}{4}\rho^6 \sin 4\theta,$$
$$f_8 = \rho^8 \left[1 - \frac{1}{4}\sin^2 4\theta\right].$$

22. *Disposition V*. — Nous prendrons, comme première forme, celle du 12^e degré, f_{12} qui correspond aux extrémités des six axes d'ordre 5; pour deuxième forme, celle du 20^e degré, f_{20} qui correspond aux extrémités des dix axes ternaires. Ces extrémités ne sont jamais des points α. Nous avons ici

$$qr = 240, \qquad \gamma_0 = 60;$$

mais, ainsi que nous le verrons dans un instant, les symétries correspondent à des trièdres trirectangles formés par les axes de renversement, et $G_0 \geqq 4\gamma_0 = 240$. Donc $G_0 = 240$. L'équation générale cherchée, en supposant que les symétries soient toutes de première espèce, est

$$P(f_{12}, f_{20}) = 0.$$

Comme tous les axes binaires sont congruents, si l'une des symétries est de seconde espèce, elles sont toutes de seconde espèce.

Soit $\varphi = 0$ le faisceau des 30 diamètres, l'équation cherchée, en supposant les symétries de seconde espèce, est

$$\varphi . P(f_{12}, f_{20}) = 0.$$

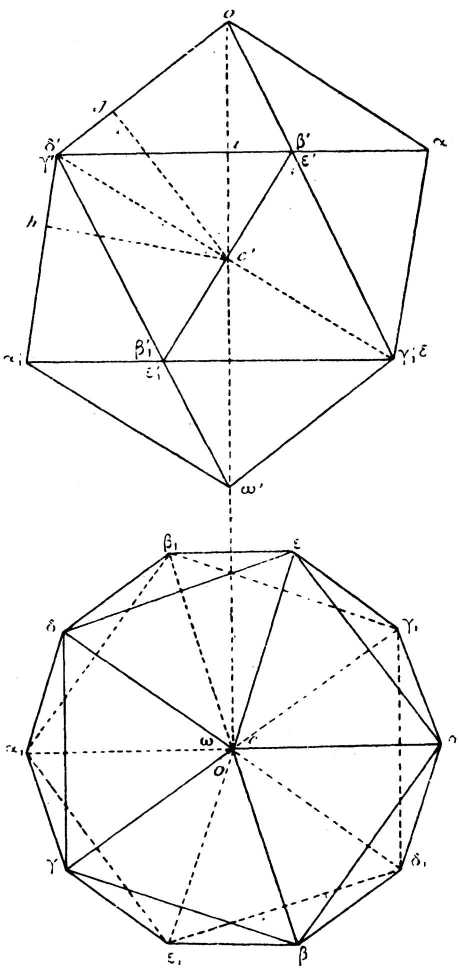
Il nous reste à calculer f_{12}, f_{20} et φ.

Pour cela, nous orientons l'icosaèdre par rapport à la sphère π et aux axes ωXYZ de la manière suivante :

Deux sommets opposés de l'icosaèdre sont au point de contact O de π et du plan (p) et au point diamétralement opposé ω, centre de la projection stéréographique. Ces sommets correspondent aux coefficients angulaires 0 et ∞; un sommet A de l'icosaèdre, consécutif au sommet O, est dans le plan du grand cercle qui correspond aux coefficients angulaires réels, et ce point A correspond à un coefficient angulaire positif. L'icosaèdre se trouve ainsi placé et nous sommes conduits à la figure classique donnant les projections de l'icosaèdre sur un plan perpendiculaire à une diagonale et sur un plan de symétrie passant par une diagonale.

Soient o, o'; α, α' les projections de O et de A. L'arête $O\alpha, O'\alpha'$ est de front; donc le plan perpendiculaire au milieu de cette arête, qui est un plan de symétrie de l'icosaèdre, est debout et est par suite plan de symétrie de la projection verticale. La projection verticale admet c' pour centre de symétrie, elle a un axe de symétrie, perpendiculaire à $o'\alpha'$, donc elle en a un aussi qui est parallèle à $o'\alpha'$. Plaçons ces axes; pour cela, remarquons que du sommet A on déduit, par des rotations autres de l'axe vertical $O\omega$, quatre autres sommets, ce qui donne en projection horizontale le pentagone $\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon$ et en projection verticale la ligne horizontale $\alpha'\beta'\gamma'$; de même, de O, par des rotations autour de $c\alpha$, $c'\alpha'$, on déduit les sommets o, o'; β, β'; δ_1, δ'_1; γ_1, γ'_1; $\varepsilon, \varepsilon'$, dont les projections verticales sont en ligne droite. Par suite, l'axe perpendiculaire à $c'\alpha'$ passe au point de rencontre β' des droites $\alpha'\beta'\gamma'$, $o'\beta'\gamma'_1$; cet axe est $\beta'c'\varepsilon'_1$. Nous venons de trouver, de plus, deux arêtes $\gamma\delta$, $\gamma'\delta'$; $\gamma_1\delta_1$, $\gamma'_1\delta'_1$ debout et non situées dans le plan de symétrie perpendiculaire à $o\alpha$, $o'\alpha'$; donc ces deux arêtes sont symétriques par rapport à ce plan et, comme elles sont aussi symétriques par rapport à C, le plan debout $\gamma'c'\gamma'_1$ est un plan de symétrie de l'icosaèdre et de sa projection verticale.

Avant d'aller plus loin, remarquons que nous avons mis en évidence trois arêtes $o\alpha$, $o'\alpha'$; $\beta\varepsilon_1$, $\beta'\varepsilon'_1$; $\gamma\delta$, $\gamma'\delta'$ dont les directions forment un trièdre trirectangle; les axes de renversement perpendiculaires aux milieux de ces arêtes forment l'un de ces systèmes trirectangles d'axes de renversement dont il a été parlé plus haut.



Fixons maintenant les dimensions de la figure. Les arêtes $o\alpha$, $o'\alpha'$; $\beta\varepsilon_1$, $\beta'\varepsilon'_1$ sont de front, donc

$$o'\alpha' = \beta'\varepsilon'_1 = 2\beta'c'.$$

Et comme les triangles $o'\alpha' i$, $\beta' c' i$ sont semblables, $\alpha' i = 2 i c'$; d'où la construction suivante : on prend $\alpha' i = 2 c' i$; puis $c' o' = c'\alpha'$. Enfin $c'\gamma'$ parallèle à $o'\alpha'$ et $c'\beta'$ perpendiculaire à $o'\alpha'$. On a la projection verticale. La projection horizontale s'en déduit puisque le rayon de la circonférence circonscrite au contour apparent horizontal est égal à $i'\alpha'$.

Ceci va nous servir à trouver les tangentes des colatitudes des divers axes de l'icosaèdre. Ces colatitudes sont égales aux angles

$$o'c'\alpha' = \lambda, \qquad o'c'\beta' = \frac{\lambda}{2}, \qquad o'c'\gamma' = \lambda_1, \qquad o'c'j = \mu, \qquad o'c'h = \nu,$$

ou à leurs suppléments; en appelant $c'j$ et $c'h$ les perpendiculaires à $o'\gamma'$ et $\gamma'\alpha'_1$, on a de suite

$$\operatorname{tang}\lambda = 2, \qquad \frac{2}{\operatorname{tang}\lambda} = 1;$$

on en déduit par le calcul classique

$$\operatorname{tang}\frac{\lambda}{2} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}, \qquad \frac{2}{\operatorname{tang}\frac{\lambda}{2}} = \sqrt{5}+1.$$

Puis, comme

$$\beta'c'\gamma' = \frac{\pi}{2}, \qquad \lambda_1 = \frac{\pi}{2} - \frac{\lambda}{2}, \qquad \frac{2}{\operatorname{tang}\lambda_1} = \sqrt{5}-1.$$

Comme $j o' = 2 j\gamma'$, on a

$$\operatorname{tang}\mu = 2\operatorname{tang}(\lambda_1 - \mu) = 2\,\frac{\operatorname{tang}\lambda_1 - \operatorname{tang}\mu}{1 + \operatorname{tang}\lambda_1 \operatorname{tang}\mu};$$

la racine positive de cette équation en $\operatorname{tang}\mu$ donne

$$\operatorname{tang}\mu = 3 - \sqrt{5}, \qquad \frac{2}{\operatorname{tang}\mu} = \frac{3+\sqrt{5}}{2}.$$

Enfin on a

$$\mu + \nu = 2\gamma_1 = \pi - \gamma,$$

ce qui conduit à

$$\frac{2}{\operatorname{tang}\nu} = \frac{3-\sqrt{5}}{2}.$$

Calculons f_{12}; o et ω donnent respectivement les pentes o et ∞ et les formes y et x. Les sommets α, α'; β, β'; γ, γ'; δ, δ';

ε, ε' ont une colatitude λ et des longitudes multiples de $\frac{2\pi}{5}$, d'où les pentes

$$\tang\frac{\lambda}{2}\, e^{\frac{2K\pi i}{5}}$$

et la forme

$$y^5 - \tang^5\frac{\lambda}{2}\, x^5.$$

Les sommets opposés donnent les pentes

$$-\cot\frac{\lambda}{2}\, e^{\frac{2K\pi i}{5}}$$

et la forme

$$y^5 + \cot^5\frac{\lambda}{2}\, x^5$$

et l'on a

$$\begin{aligned} f_{12} &= xy\left[y^5 - \tang^5\frac{\lambda}{2}\, x^5\right]\left[y^5 + \cot^5\frac{\lambda}{2}\, x^5\right] \\ &= xy\left[y^{10} - \left(\tang^5\frac{\lambda}{2} - \cot^5\frac{\lambda}{2}\right)x^5y^5 - x^{10}\right], \end{aligned}$$

et nous sommes ramenés à calculer la somme des puissances cinquièmes des racines de l'équation

$$\rho^2 + \frac{2}{\tang\lambda}\,\rho - 1 = 0 \qquad \text{ou} \qquad \rho^2 + \rho - 1 = 0.$$

On trouve

$$f_{12} = xy[y^{10} + 10x^5y^5 - x^{10}].$$

Calculons f_{20}. Les faces se déduisant de $o\gamma\delta$, $o'\gamma'\delta'$ par des rotations autour de $O\omega$ donnent la forme

$$y^5 + \tang^5\frac{\mu}{2}\, x^5.$$

Celles qui se déduisent de même de $\alpha_1\gamma\delta$, $\alpha'_1\gamma'\delta'$ donnent

$$y^5 + \tang^5\frac{\nu}{2}\, x^5.$$

Enfin les deux systèmes de faces opposées donnent

$$y^5 - \cot^5\frac{\mu}{2}\, x^5 \quad \text{et} \quad y^5 - \cot^5\frac{\nu}{2}\, x^5.$$

Donc

$$f_{20} = \left[y^{10} + \left(\operatorname{tang}^5\frac{\mu}{2} - \cot^5\frac{\mu}{2}\right)x^5y^5 - x^{10}\right]$$
$$\times\left[y^{10} - \left(\operatorname{tang}^5\frac{\nu}{2} - \cot^5\frac{\nu}{2}\right)x^5y^5 - x^{10}\right]$$

et l'on a à calculer la somme des puissances cinquièmes des racines pour les deux équations conjuguées

$$\rho^2 + \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}\rho - 1 = 0.$$

On trouve

$$f_{20} = [y^{10} - (114 + 50\sqrt{5})x^5y^5 - x^{10}][y^{10} - (114 - 50\sqrt{5})x^5y^5 - x^{10}],$$
$$f_{20} = [y^{10} - 114x^5y^5 - x^{10}]^2 - 5.\overline{50}^2.x^{10}y^{10}$$
$$= y^{20} - 228x^5y^{15} + 494x^{10}y^{10} + 228x^{15}y^5 + x^{20}.$$

Les axes binaires se partagent en trois familles : ceux qui se déduisent de l'axe perpendiculaire au milieu de $o\alpha$, $o'\alpha'$, ils donnent la forme

$$\left(y^5 - \operatorname{tang}^5\frac{\lambda}{4}x^5\right)\left(y^5 + \cot^5\frac{\lambda}{4}x^5\right);$$

ceux qui se déduisent de l'axe perpendiculaire au milieu de $\gamma\delta$, $\gamma'\delta'$, ils donnent la forme

$$\left(y^5 + \operatorname{tang}^5\frac{\lambda_1}{4}x^5\right)\left(y^5 - \cot^5\frac{\lambda_1}{4}x^5\right);$$

ceux qui sont dans le plan diamétral perpendiculaire à $O\omega$, ils donnent $y^{10} + x^{10}$.

Donc

$$\varphi = (y^{10} + x^{10})\left[y^{10} - \left(\operatorname{tang}^5\frac{\lambda}{4} - \cot^5\frac{\lambda}{4}\right)x^5y^5 - x^{10}\right]$$
$$\times\left[y^{10} - \left\{\left(-\operatorname{tang}\frac{\lambda_2}{4}\right)^5 + \left(\cot\frac{\lambda_2}{4}\right)^5\right\}x^5y^5 - x^{10}\right],$$

et, à cause de la précaution prise dans l'écriture du second crochet, nous avons à calculer la somme des puissances cinquièmes des racines des équations conjuguées

$$\rho^2+(1\pm\sqrt{5})\rho-1=0.$$

On trouve

$$\varphi=(y^{10}+x^{10})[y^{10}+(261+125\sqrt{5})x^5y^5-x^{10}]$$
$$\times[y^{10}+(261-125\sqrt{5})x^5y^5-x^{10}],$$
$$\varphi=(y^{10}+x^{10})\{(y^{10}+261x^5y^5-x^{10})^2-5.\overline{125}^2x^{10}y^{10}\},$$
$$\varphi=y^{30}+522x^5y^{25}-10005x^{10}y^{20}-10005x^{20}y^{10}-522x^{25}y^5+x^{30}.$$

Comme vérification de ces calculs, on a

$$\varphi^2=(f_{20})^3+1728(f_{12})^5.$$

Bien entendu, dans ce cas, comme dans les précédents, l'association entre un diamètre de pente a et la direction conjuguée de pente d se fait de suite quand on tient compte de la relation

$$ad'=-1.$$

23. On peut également se proposer de trouver les équations tangentielles des courbes admettant les diamètres des dispositions I à V; on y arrive sans nouveaux calculs grâce à la remarque suivante : toute symétrie est susceptible de deux définitions corrélatives. En effet, la symétrie (A, D) est la transformation ponctuelle qui fait correspondre, à tout point M, un point M′ tel que la droite MM′ passe par le point fixe à l'infini d et que le conjugué de d par rapport à MM′ soit sur A; mais c'est aussi la transformation tangentielle qui fait correspondre à toute droite Δ une droite Δ' tel que le point commun à $\Delta\Delta'$ soit sur A et que la conjuguée de A par rapport à $\Delta\Delta'$ passe par le point d.

Donc, si l'on transforme la symétrie (A, D) par la transformation par polaires réciproques par rapport à une conique C ayant son centre sur A, on trouve une symétrie (A_1, D_1), A_1 étant la polaire par rapport à C du point à l'infini d et d_1 étant le pôle, à l'infini, du diamètre A de C.

Si donc l'équation $f(x, y)=0$ représente une courbe admettant la symétrie (A, D); $f(u, v)=0$ représente une courbe admettant la symétrie (A_1, D_1) dans laquelle

$$a_1 = -\frac{1}{d}, \qquad d_1 = -\frac{1}{a}.$$

Donc, *si dans les équations trouvées aux paragraphes précédents, on remplace x par u et y par v, on a les équations tangentielles cherchées.* En effet, à la symétrie (A, D) de la courbe ponctuelle correspond (A_1, D_1) de la courbe tangentielle telle que $a_1 d = -1$, $ad_1 = -1$; mais $ad' = -1$, $a'd = -1$ et par suite $d_1 = d'$, $a_1 = a'$ et, étant donnés les axes que nous avons choisis, a' et d' sont relatifs à une symétrie (A', D') de la courbe ponctuelle.

Il n'y a pas lieu de chercher les équations tangentielles des courbes admettant des symétries de deuxième espèce, puisque ces courbes renferment des droites, lesquelles n'ont pas d'équations tangentielles. Le changement indiqué de x en u et y en v dans les équations des courbes admettant des symétries de deuxième espèce donne des courbes qui sont formées, en tout ou en partie, par des points à l'infini. Une courbe qui admet une symétrie de deuxième espèce ne peut pas être considérée comme une courbe, à la fois du point de vue ponctuel et du point de vue tangentiel.

24. Nous pouvons maintenant traiter la question posée au paragraphe **1**. Pour cela, remarquons que si, pour l'une des dispositions, l'équation générale des courbes correspondantes est

$$F(f_q, f_r) = 0,$$

le degré m de ces courbes est nécessairement de la forme $\lambda q + \mu r$; λ et μ étant deux entiers positifs ou nuls. Il suit de là que les courbes admettant pour diamètres de première espèce les diamètres des dispositions étudiées ont un degré m donné par le Tableau suivant :

Pour p diamètres de la disposition I :

1° p impair, m quelconque au moins égal à p;

2° p pair, m pair au moins égal à p.

De plus, dans les deux cas, m pair et inférieur à p donne des courbes décomposables ou des coniques.

Pour $2p+2$ diamètres de la disposition II :

1° p impair, m pair au moins égal à $2p$;
2° p pair, m multiple de 4 et au moins égal à $2p$.

De plus, dans les deux cas, m multiple de 4 et inférieur à $2p$ donne des courbes décomposables.

Pour les 12 diamètres de la disposition III : m pair, au moins égal à 6, et différent de 10.

Pour les 18 diamètres de la disposition IV : m multiple de 4 et au moins égal à 8.

Pour les 30 diamètres de la disposition V : m multiple de 4, au moins égal à 12, et différant de 16 et 28.

On pourrait dresser un Tableau analogue relatif au cas des symétries de deuxième espèce; nous ne le ferons pas, notre but étant de nous occuper des courbes indécomposables de degré supérieur à deux. En regardant le Tableau précédent, on voit de suite les diverses dispositions de diamètres que peut présenter une telle courbe. Par exemple, on trouve :

Pour $m=22$: p diamètres (Disp. I), p quelconque au plus égal à 22;
ou $2p+2$ diamètres (Disp. II), p impair au plus égal à 11;
ou 12 diamètres (Disp. III).

Pour $m=20$: p diamètres (Disp. I), p quelconqne au plus égal à 20;
ou $2p+2$ diamètres (Disp. II), p quelconque au plus égal à 10;
ou 12 diamètres (Disp. III);
ou 18 diamètres (Disp. IV);
ou 30 diamètres (Disp. V).

Ce Tableau fournit de suite, en particulier, le nombre maximum de diamètres pour chaque degré. Énonçons le résultat :

Le nombre maximum des diamètres de première espèce d'une courbe algébrique indécomposable de degré $m (m \geqq 3)$ est égal à m, si m est impair, et les diamètres ont alors la disposition I;

Il est égal à $m+2$, si m est pair, et les diamètres ont alors la disposition II.

Il y a exception pour $m=6, 8, 12, 16, 20, 24$.

Pour $m = 6$, *le maximum est fourni par les* 12 *diamètres de la disposition III.*

Pour $m = 8$, *le maximum est fourni par les* 18 *diamètres de la disposition IV.*

Pour $m = 12$, 20, 24, *le maximum est fourni par les* 30 *diamètres de la disposition V.*

Pour $m = 16$, *le maximum est* 18; *mais ces diamètres peuvent avoir les dispositions II ou IV.*