ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

HENRI MILLOUX

Les dérivées des fonctions méromorphes et la théorie des défauts

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3^e série, tome 63 (1946), p. 289-316

<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1946_3_63__289_0>

© Gauthier-Villars (Éditions scientifiques et médicales Elsevier), 1946, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales scientifiques de l'É.N.S. » (http://www.elsevier.com/locate/ansens) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

LES DÉRIVÉES
DES FONCTIONS MÉROMORPHES
ET LA
THÉORIE DES DÉFAUTS

PAR M. HENRI MILLOUX.

INTRODUCTION.

L'attention a été attirée, il y a quelques années, sur les valeurs prises par les fonctions holomorphes ou méromorphes et leurs dérivées. Une propriété, pressentie par M. Montel, a été démontrée par M. Miranda. Sous sa forme la plus simple, cette propriété est la suivante :

Une famille de fonctions holomorphes dans un domaine où elles ne prennent pas la valeur 0 *et dont les dérivées ne prennent pas la valeur* 1, *est normale dans ce domaine.*

Peu après M. Miranda, M. Valiron (1) démontra à nouveau cette proposition et la compléta dans divers domaines, ainsi qu'un de ses disciples, M. Chi-Tai-Chuang.

Les méthodes employées par ces divers auteurs sont d'une nature un peu particulière; il ne semble pas qu'elles puissent être créatrices de propositions aussi précises que celles qui découlent, dans la théorie des fonctions méromorphes, de l'instrument très puissant que constitue la deuxième inégalité

(1) G. VALIRON, *Sur les valeurs exceptionnelles des fonctions méromorphes et de leurs dérivées* (*Actualités scientifiques et industrielles*, n° 570, Hermann, édit., Paris, 1937).

fondamentale de R. Nevanlinna : on sait combien cette inégalité a rajeuni, rénové la théorie des fonctions méromorphes, et fait faire de nouveaux et importants progrès à cette théorie.

Or, il est parfaitement possible de donner une base du même genre à la théorie des fonctions méromorphes et de leurs dérivées. Dans un Mémoire récent (1), j'ai établi l'inégalité

$$(A) \qquad T(r,f) < 2N(r,f) + N\left(r, \frac{1}{f}\right) + N\left(r, \frac{1}{f'-1}\right) + S(r),$$

où le terme complémentaire $S(r)$ jouit des mêmes propriétés que celui de la deuxième inégalité de R. Nevanlinna; $f(x)$ est une fonction méromorphe au voisinage de l'origine.

Le Mémoire cité contient des extensions de l'inégalité (A) au cas où la fonction dérivée $f'(x)$ est remplacée par une combinaison linéaire et homogène de la fonction $f(x)$, et de ses dérivées successives, avec coefficients holomorphes, Je montre, en outre le parti que l'on peut tirer d'inégalités telles que (A), notamment dans l'étude d'une fonction méromorphe dans le cercle unité, n'y prenant pas plus de n fois la valeur o, pas plus de p fois la valeur infini, et dont la dérivée ne prend pas plus de q fois la valeur 1.

L'inégalité (A) permet de majorer l'indice caractéristique $T(r,f)$, connaissant trois indices de densité, dont deux relatifs à la fonction $f(x)$ et un à la dérivée $f'(x)$. Elle est l'homologue de la forme la plus simple et la plus usitée de l'inégalité de R. Nevanlinna.

Le premier but du présent Mémoire est de donner une inégalité homologue de la forme la plus générale de la deuxième inégalité fondamentale de R. Nevanlinna; c'est-à-dire d'arriver à majorer l'indice caractéristique $T(r,f)$, connaissant un nombre quelconque d'indices de densité relatifs à la fonction $f(x)$, et un nombre quelconque d'indices de densité relatifs à la dérivée $f'(x)$. Nous trouverons notamment l'inégalité suivante :

$$(B) \qquad pqT(r,f) < \overline{N}(r,f) + q\sum_{i=1}^{p} N\left(r, \frac{1}{f-a_i}\right) + \sum_{i=1}^{q} N\left(r, \frac{1}{f'-b_j}\right) + S(r),$$

où $S(r)$ est en général négligeable devant $T(r,f)$, au même titre que dans la théorie de R. Nevanlinna. $\overline{N}(r,f)$ est l'indice *réduit* des pôles (c'est-à-dire compté comme si aucun de ceux-ci n'était multiple). Les constantes a_i sont finies et distinctes entre elles; les constantes b_j satisfont à la même propriété, et, de plus, aucune d'elles n'est nulle.

---

(1) H. MILLOUX, *Les fonctions méromorphes et leurs dérivées. Extension d'un théorème de R. Nevanlinna. Applications* (*Actualités scientifiques et industrielles*, n° 888, Hermann, édit., Paris, 1940).

On remarquera en passant que si l'on fait $p=1$, $a_i=0$, $q=1$, $b_1=1$, on retrouve l'inégalité (A), améliorée notamment du fait de la suppression du coefficient 2 devant l'indice de densité relatif aux pôles de la fonction $f(x)$.

L'inégalité (B) et les inégalités dont elle est issue sont particulièrement favorables pour introduire les *défauts*. $f(x)$ étant une fonction méromorphe dans le plan, rappelons que le défaut de la constante a, pour la fonction $f(x)$, est la quantité

$$\text{(C)} \qquad \delta(a)=1-\overline{\lim}\frac{N\left(r,\frac{1}{f-a}\right)}{T(r,f)},$$

lorsque r augmente indéfiniment. Si cette quantité n'est pas nulle, on dit que a est une valeur *exceptionnelle* au sens de R. Nevanlinna (1). De l'inégalité fondamentale de R. Nevanlinna, sous sa forme la plus générale, résulte que la somme des défauts, pour toutes les valeurs exceptionnelles, finies ou non, est au plus égale à 2.

Dans ce présent Mémoire, nous serons amenés à introduire non seulement les défauts des constantes a, pour la fonction $f(x)$, mais encore les défauts des constantes b, pour la fonction $f'(x)$. Mais comment calculer ces derniers défauts ? En appliquant la définition (C), où l'on remplace a par b, et f par f', nous avons le défaut au sens de R. Nevanlinna : ce sera, pour nous, le défaut *absolu*.

Il est aussi utile d'introduire une autre notion, celle de défaut *relatif*. Il s'agit de la quantité

$$1-\overline{\lim}\frac{N\left(r,\frac{1}{f'-b}\right)}{T(r,f)}.$$

On compare donc ici l'indice de densité $N\left(r,\frac{1}{f'-b}\right)$ non plus à l'indice caractéristique de la fonction dérivée $f'(x)$, mais à celui de la fonction génératrice $f(x)$. Ce défaut relatif n'est plus nécessairement compris entre 0 et 1 comme l'est tout défaut absolu. Nous étudions comparativement les deux défauts, et montrons qu'ils sont identiques dans certains cas.

Ces notions une fois précisées, on arrive tout naturellement au deuxième but de ce Mémoire : comparer la somme des défauts des valeurs a exceptionnelles pour la fonction $f(x)$, et la somme des défauts (absolus ou relatifs) des valeurs b exceptionnelles pour la fonction $f'(x)$.

Cette comparaison conduit à un certain nombre d'énoncés, de caractère simple. Citons, pour leur simplicité, deux d'entre eux; ils résultent d'énoncés plus généraux :

---

(1) Dans tout ce Mémoire, quand il s'agira de valeurs exceptionnelles, il sera sous-entendu : au sens de Nevenlinna.

1. *Si la fonction $f(x)$ admet l'infini comme valeur exceptionnelle à défaut maximum (donc égal à 1) et si elle admet au moins une autre valeur exceptionnelle finie (avec défaut quelconque), alors la fonction dérivée $f'(x)$ ne peut admettre de valeurs exceptionnelles finies, différentes de zéro, que si la somme de leurs défauts (absolus) est inférieure à 1.*

2. *Soit δ la somme des défauts de toutes les valeurs exceptionnelles, finies ou non, pour la fonction $f(x)$. Étant donnée une constante b, finie et différente de zéro, son défaut relatif vaut au maximum $2-\delta$,*

Les méthodes employées dans ce Mémoire peuvent s'appliquer à des études plus générales, par exemple au cas où l'on substitue, à la dérivée $f'(x)$, une combinaison linéaire et homogène de la fonction et de ses dérivées.

Une partie des résultats obtenus ici a été résumée dans une Note récente (1).

CHAPITRE I.

MAJORATION DE L'INDICE CARACTÉRISTIQUE D'UNE FONCTION MÉROMORPHE CONNAISSANT DES INDICES DE DENSITÉ RELATIFS A LA FONCTION ET A SA DÉRIVÉE.

I. — Inégalités préliminaires.

1. Soit $f(x)$ une fonction méromorphe de la variable x, dans un certain domaine (D) entourant l'origine. Donnons-nous p quantités complexes $a_1, a_2, \ldots, a_p$ distinctes et finies. Représentons-les sur la sphère de Riemann. Nous désignerons par d une quantité inférieure ou égale à toutes les distances sphériques des images sphériques des $p+1$ quantités $a_1, a_2, \ldots, a_p, \infty$, prises deux à deux; par exemple, d pourra désigner la plus petite d'entre ces distances.

Posons, d'autre part :

$$F(x)=[f(x)-a_1][f(x)-a_2]\ldots[f(x)-a_p].$$

Nous nous proposons d'abord de *donner deux limites, l'une inférieure, l'autre supérieure, de l'indice $m(r, F)$*, où r désigne une quantité assez petite pour que le domaine (D) contienne le cercle de centre O et de rayon r.

2. Effectuons d'abord une première étude, très élémentaire, de correspondance entre certains points et leurs images sphériques.

Désignons par N le pôle nord de la sphère de Riemann, c'est-à-dire le point correspondant au point à l'infini du plan complexe. Soit m un point de ce plan

(1) H. MILLOUX, *Sur la théorie des défauts* (*C. R. Acad. Sc.*, 3 janvier 1940, p. 38).

complexe; M son image sphérique; u la distance sphérique qui sépare M de N, c'est-à-dire l'arc de grand cercle, compris entre o et $\frac{\pi}{2}$, qui joint M et N. D'après la position de la sphère de Riemann, tangente au plan complexe en son origine O et de rayon égal à $\frac{1}{2}$, u est encore égal à l'angle MON. Entre la longueur du segment Om dans le plan complexe, et la distance sphérique u, on a la relation $Om = \operatorname{cotg} u$.

Soit v une constante comprise entre o et $\frac{2}{\pi}$. Désignons par (C) le cercle lieu des points Q de la sphère de Riemann, dont les distances sphériques au point M sont égales à v; et par Q′ et Q″ les points du cercle (C) situés sur le grand cercle passant par N et M; on choisira pour Q′ celui de ces deux points qu'on obtient en portant, à partir de M et dans le sens vers N, la distance sphérique v.

Le cercle (C) est l'image sphérique d'un cercle (c) du plan complexe. (c) est centré sur Om, qu'il coupe aux points q' et q'', homologues de Q′ et Q″. Orientons la droite Om dans le sens de O vers m. Sur cette droite orientée, d'origine O, les points q' et q'' ont pour abscisses, respectivement $\operatorname{cotg}(u - v)$ et $\operatorname{cotg}(u + v)$. Nous distinguerons ensuite deux cas de figure :

Premier cas. — *v est inférieur à u.* — Le cercle (c) contient alors m à son intérieur. Un point quelconque intérieur à ce cercle est à une distance du point m inférieure à mq', c'est-à-dire $\operatorname{cotg}(u - v) - \operatorname{cotg} u$, et supérieure à mq'', c'est-à-dire $\operatorname{cotg} u - \operatorname{cotg}(u + v)$.

Le maximum de cette distance peut encore s'écrire $\frac{1 + Om^2}{\operatorname{cotg} v + Om}$, et le minimum $\frac{1 + Om^2}{\operatorname{cotg} v + Om}$.

En particulier, un point extérieur au cercle (c) est à une distance de m qui vaut au minimum $\frac{1 + Om^2}{\operatorname{cotg} v + Om}$.

L'*extérieur* du cercle (c), dans le plan complexe, correspond, sur la sphère de Riemann, à l'*extérieur* du cercle (C), dont le centre est M et dont le rayon sphérique est v.

Deuxième cas. — *v est supérieur à u.* — Alors le cercle (c) laisse *m à son extérieur*. Un point quelconque intérieur à ce cercle est à une distance de m comprise entre $\operatorname{cotg} u - \operatorname{cotg}(u - v)$, ou encore $\frac{1 + Om^2}{Om - \operatorname{cotg} v}$ qui est le maximum, et $\operatorname{cotg} u - \operatorname{cotg}(u + v)$, ou encore $\frac{1 + Om^2}{\operatorname{cotg} v + Om}$, qui est le minimum.

Notons que, dans ce deuxième cas, c'est l'*intérieur* du cercle (c), dans le plan complexe qui correspond, sur la sphère de Riemann, à l'*extérieur* du cercle (C).

De l'examen de ces deux cas résulte notamment que si R est un point de la sphère de Riemann, dont la distance sphérique à M surpasse $v \left(0 < v < \frac{\pi}{2}\right)$,

alors le point r correspondant dans le plan complexe est à une distance du point m homologue de M, supérieure à $\frac{1+Om^2}{\operatorname{cotg}\rho+Om}$.

3. *Recherche d'une limite inférieure de* $m(r, F)$. — Désignons par (γ_i) les arcs de la circonférence de centre O et de rayon r, sur lesquels la distance sphérique de $f(x)$ à a_i est au plus égale à $\frac{d}{2}$. Par suite de la définition de d, ces arcs (γ_i) ne chevauchent pas les uns sur les autres, lorsque i varie de 1 à p. Soit (Γ) l'ensemble de tous les arcs (γ_i), i variant de 1 à p; désignons par $2\pi\alpha r$ la mesure de l'ensemble des arcs composant (Γ). Enfin, soit (Γ') l'ensemble des arcs complémentaires de (Γ) sur la circonférence de centre O et de rayon r.

Supposons x situé sur cet ensemble (Γ'). Quelle que soit la valeur de l'indice i, la distance sphérique qui sépare $f(x)$ de a_i est supérieure à $\frac{d}{2}$. On peut appliquer la conclusion du numéro précédent; il vient ainsi l'inégalité :

$$|f(x)-a_i|>\frac{1+|f(x)|^2}{|f(x)|+\operatorname{cotg}\frac{d}{2}}.$$

Posons $|f(x)|=\operatorname{cotg}u$. L'inégalité précédente peut s'écrire :

$$\left|\frac{f(x)-a_i}{f(x)}\right|>\frac{\sin\frac{d}{2}}{\cos u\sin\left(u+\frac{d}{2}\right)}=\frac{2\sin\frac{d}{2}}{\sin\frac{d}{2}+\sin\left(2u+\frac{d}{2}\right)},$$

u étant compris entre o et $\frac{\pi}{2}$, le dénominateur de la dernière fraction est toujours positif ou nul; son maximum est $1+\sin\frac{d}{2}$ lorsque u varie. On en déduit que $\left|\frac{f(x)-a_i}{f(x)}\right|$ est supérieur à $\frac{2\sin\frac{d}{2}}{1+\sin\frac{d}{2}}$; un calcul élémentaire prouve, du fait que d inférieur à $\frac{\pi}{2}$, que la dernière fraction écrite est supérieure à la quantité plus simple $\frac{d}{2}$.

Appliquons ce résultat à la fonction $F(x)$: lorsque x est sur l'ensemble (Γ'), on a donc l'inégalité :

$$\log|F(x)|>p\log|f(x)|+p\log\frac{d}{2}.$$

D'où l'on déduit, *a fortiori*,

$$\overset{+}{\log}|F(x)|>p\overset{+}{\log}|f(x)|-p\log\frac{2}{d}$$

(le dernier log est positif). Intégrons sur l'ensemble (Γ'). Il vient l'inégalité

$$(1) \qquad \frac{1}{2\pi}\int_{(\Gamma')} \overset{+}{\log}|F(re^{i\theta})|\,d\theta > \frac{p}{2\pi}\int_{(\Gamma')} \overset{+}{\log}|f(re^{i\theta})|\,d\theta - (1-\alpha)p\log\frac{2}{d}.$$

4. Pour compléter l'établissement d'une limite inférieure de $m(r, F)$, étudions la fonction $F(x)$ sur l'ensemble (Γ).

Lorsque x est situé sur un arc (γ_i), $f(x)-a_i$ est relativement petit; la distance sphérique qui sépare a_i de l'infini est, rappelons-le, au moins égale à d, et celle qui sépare $f(x)$ de a_i vaut au plus $\frac{d}{2}$. On peut donc appliquer les résultats obtenus dans l'étude du premier cas du n° 2; m, u et v étant ici respectivement a_i, une quantité supérieure à d, et $\frac{d}{2}$; ainsi, tous les points dont la distance sphérique à a_i ne surpasse pas $\frac{d}{2}$ sont à une distance euclidienne de a_i au plus égale à $\frac{1+|a_i|^2}{\operatorname{cotg}\frac{\delta}{2}-|a_i|}$, quantité qui peut donc servir de limite supérieure pour $|f(x)-a_i|$. Ce qui entraîne l'inégalité

$$|f(x)| < \frac{1+|a_i|\operatorname{cotg}\frac{d}{2}}{\operatorname{cotg}\frac{d}{2}-|a_i|}.$$

Le second membre de cette inégalité est une fonction croissante de $|a_i|$, lorsque $|a_i|$ croît, de o jusqu'à $\operatorname{cotg} d$, qui est son maximum. D'où l'on déduit :

$$|f(x)| < \operatorname{cotg}\frac{d}{2} < \frac{2}{d}.$$

Ou encore

$$\overset{+}{\log}|f(x)| < \log\frac{2}{d},$$

valable lorsque x est sur un arc (γ_i) quelconque, donc sur l'ensemble (Γ). En intégrant sur cet ensemble, il vient l'inégalité

$$\frac{1}{2\pi}\int_{(\Gamma)} \overset{+}{\log}|f(re^{i\theta})|\,d\theta < \alpha\log\frac{2}{d}.$$

Il en résulte donc que l'on a l'inégalité

$$(2) \qquad \frac{1}{2\pi}\int_{(\Gamma)} \overset{+}{\log}|F(re^{i\theta})|\,d\theta > \frac{p}{2\pi}\int_{(\Gamma)} \overset{+}{\log}|f(re^{i\theta})|\,d\theta - p\alpha\log\frac{2}{d},$$

puisque le premier membre de cette inégalité est positif ou nul, et le second membre négatif.

5. Les ensembles (Γ) et (Γ') étant complémentaires sur la circonférence de centre O et de rayon r, l'addition des inégalités (1) et (2) fournit l'inégalité

$$m(r, \mathrm{F}) > pm(r, f) - p \log \frac{2}{d}. \tag{3}$$

6. *Recherche d'une limite supérieure de* $m(r, \mathrm{F})$. — Pour éviter des longueurs, dues à l'examen de cas spéciaux dépourvus d'intérêt, nous serons amenés à faire quelques hypothèses sur le comportement de la fonction $f(x)$ à l'origine, le cas général étant le seul retenu. Dès maintenant, *nous éliminons les cas où l'origine est un zéro de* $f(x)$, *ou de* $f(x) - a_i$ (*quelle que soit la valeur de l'indice* i) *ou de* $f'(x)$, *ou de* $\frac{1}{f(x)}$. Ajoutons que l'examen spécial de ces cas n'offre aucune difficulté.

L'obtention d'une limite supérieure de $m(r, \mathrm{F})$ est basée sur l'utilisation de l'identité

$$\mathrm{F} = \frac{\mathrm{F}}{f'} f',$$

de laquelle on déduit, en prenant les log des modules des deux membres et en intégrant sur la circonférence de centre O et de rayon r

$$m(r, \mathrm{F}) \leq m\left(r, \frac{\mathrm{F}}{f'}\right) + m(r, f') = \mathrm{T}\left(r, \frac{\mathrm{F}}{f'}\right) + \mathrm{T}(r, f') - \left[\mathrm{N}\left(r, \frac{\mathrm{F}}{f'}\right) + \mathrm{N}(r, f')\right]. \tag{4}$$

Avec nos éliminations de cas spéciaux, la fonction $\frac{\mathrm{F}(x)}{f'(x)}$ est finie et différente de zéro à l'origine. Appliquons-lui la formule de Jensen-Nevanlinna :

$$\mathrm{T}\left(r, \frac{\mathrm{F}}{f'}\right) = \mathrm{T}\left(r, \frac{f'}{\mathrm{F}}\right) + \log \left|\frac{\mathrm{F}(0)}{f'(0)}\right|.$$

L'inégalité (4) conduit ainsi à la limite supérieure suivante de $m(r, \mathrm{F})$

$$m(r, \mathrm{F}) \leq \mathrm{T}(r, f') + \left[\mathrm{N}\left(r, \frac{f'}{\mathrm{F}}\right) - \mathrm{N}\left(r, \frac{\mathrm{F}}{f'}\right) - \mathrm{N}(r, f')\right] + m\left(r, \frac{f'}{\mathrm{F}}\right) + \log \left|\frac{\mathrm{F}(0)}{f'(0)}\right|. \tag{5}$$

Étude de la quantité entre crochets, de l'inégalité (5). — Les points du plan x qui interviennent dans ces différents indices de densité, doivent être pris parmi les pôles de $\frac{f'}{\mathrm{F}}$, ceux de $\frac{\mathrm{F}}{f'}$, et les pôles de f, donc parmi les pôles de f, les zéros de F (c'est-à-dire les points a_i) et les zéros de f' : nous avons donc trois sortes de points à étudier ; il est bien évident que les points qui nous intéressent sont à une distance de l'origine inférieure à r.

1° *Pôles de* $f(x)$. — Soient b un tel pôle, et q son ordre de multiplicité pour la fonction $f(x)$; pour $f'(x)$, son ordre de multiplicité est $q+1$; pour $\mathrm{F}(x)$, il est pq.

Supposons d'abord p égal à 1. Alors b est un pôle simple pour $\frac{f'}{F}$, de sorte que ce point figure une fois dans la composition de $N\left(r, \frac{f'}{F}\right)$, et que $(q+1)$ fois dans celle de $N(r, f')$. Il ne figure pas dans la composition de $N\left(r, \frac{F}{f'}\right)$. Dans la composition du crochet, il entre donc au même titre que dans l'expression $-pN(r, f)$.

Supposons maintenant p supérieur à 1. Alors b ne figure plus parmi les pôles de $\frac{f'}{F}$; par contre, il figure dans les pôles de $\frac{F}{f'}$, avec un ordre de multiplicité égal à $pq-q-1$ (dans le cas où $p=2$ et $q=1$, il ne figure pas, mais ce qui précède est encore vrai). Ce point b figure encore $(q+1)$ fois dans la composition de $N(r, f')$, de sorte que dans le crochet, il entre pq fois avec changement de signe, c'est-à-dire au même titre que dans l'expression $-pN(r, f)$.

En résumé, *si l'on ne tient compte, dans le crochet, que des pôles de la fonction* $f(x)$, *on trouve l'expression* $-pN(r, f)$.

2° *Zéros de* $f(x)-a_i$. — Quelle que soit la valeur de l'ordre de multiplicité d'un tel point, $\frac{f'}{F}$ admet le point étudié comme *pôle simple*.

En outre, le point étudié n'intervient dans aucun des deux autres indices de densité du crochet. De la sorte, *tous les points de ce genre entrent dans la composition du crochet au même titre que dans l'expression*

$$\sum_{i=1}^{p} \overline{N}\left(r, \frac{1}{f-a_i}\right)$$

faisant intervenir les indices *réduits* de densité, c'est-à-dire comptés comme si les points considérés intervenaient comme points simples.

On peut remplacer ces indices réduits par les indices complets de la façon suivante : désignons par $N_0\left(r, \frac{1}{f'}\right)$ l'indice de densité relatif à ceux des zéros de $f'(x)$ qui sont aussi des zéros pour l'une quelconque des fonctions $f(x)-a_i$. Alors, un calcul immédiat montre que l'on a

$$\sum_{i=1}^{p} \overline{N}\left(r, \frac{1}{f-a_i}\right) = \sum_{i=1}^{p} N\left(r, \frac{1}{f-a_i}\right) - N_0\left(r, \frac{1}{f'}\right).$$

3° *Zéros de* $f'(x)$. — Il n'y a pas lieu de tenir compte, dans cette catégorie, des points où $f(x)-a_i$ est nul, c'est-à-dire des zéros multiples de $f(x)-a_i$, puisque ces points ont été catalogués dans la catégorie précédente.

Les autres zéros de $f'(x)$, qui ne sont donc pas des zéros de $F(x)$, entrent avec leur ordre de multiplicité, dans la composition de $N\left(r, \frac{F}{f'}\right)$; d'autre part,

ils n'interviennent pas dans les deux autres indices de densité. *Donc, dans le crochet, ils interviennent au même titre dans l'expression*

$$-\left[N\left(r,\frac{1}{f'}\right)-N_0\left(r,\frac{1}{f'}\right)\right].$$

CONCLUSION. — *La quantité entre crochets, dans l'expression* (5), *vaut*

$$-pN(r,f)+\sum_{i=1}^{p}N\left(r,\frac{1}{f-a_i}\right)-N\left(r,\frac{1}{f'}\right).$$

7. *Comparaison des deux limites de* $m(r, F)$. — Il résulte de cette comparaison que le deuxième membre de l'inégalité (3) est majoré par le deuxième membre de l'inégalité (5). En tenant compte de la transformation précédente du crochet, cette comparaison donne naissance à l'inégalité :

$$(6)\qquad pT(r,f)<T(r,f')+\sum_{i=1}^{p}N\left(r,\frac{1}{f-a_i}\right)-N\left(r,\frac{1}{f'}\right)+m\left(r,\frac{f'}{F}\right)+\log\left|\frac{F(0)}{f'(0)}\right|+p\log\frac{2}{d}.$$

Rappelons que $F(x)$ est la fonction $[f(x)-a_1][f(x)-a_2]\dots[f(x)-a_p]$, et que l'inégalité (6) suppose que l'origine du plan complexe n'est pas un zéro de $f(x)$, ni de $f(x)-a_i$, ni de $f'(x)$, et n'est pas un pôle de $f(x)$. L'inégalité analogue relative à l'un quelconque de ces cas particuliers ne diffère de l'inégalité (6) que par la forme de la constante qui figure, en avant-dernier lieu, dans le deuxième membre de cette inégalité.

II. — Inégalité fondamentale,

8. Considérons maintenant q quantités complexes $b_1, b_2, \dots, b_j, \dots, b_q$ $(q\geq 1)$ distinctes entre elles, finies et non nulles.

Appliquons à la fonction méromorphe $f'(x)$ la deuxième inégalité fondamentale de R. Nevanlinna (1) majorant l'indice caractéristique de la fonction $f'(x)$, connaissant les indices de densité relatifs aux $q+2$ valeurs $b_1, b_2, \dots, b_q$, 0 et ∞. Cette inégalité s'écrit ainsi

$$qT(r,f')<N(r,f')+N\left(r,\frac{1}{f'}\right)+\sum_{i=1}^{p}N\left(r,\frac{1}{f'-b_j}\right)-N_1(r,f')+S(r),$$

où $S(r)$ est ce que l'on appelle le *terme complémentaire*, et dont la valeur sera ultérieurement précisée. Quant à $N_1(r, f')$, c'est l'*indice des valeurs multiples de*

(1) *Voir* R. NEVANLINNA, *Le théorème de Picard-Borel et la théorie des fonctions méromorphes* (*Collection Borel*, Gauthier-Villars, édit., 1929, *voir* p. 69).

la fonction $f'(x)$; entrent dans la composition de cet indice tous les points x pour lesquels $f'(x)-c$ a un zéro multiple de ces points, c étant une constante finie quelconque, et tous les pôles de la fonction $f'(x)$, lesquels sont multiples. Ces points x interviennent dans l'indice étudié, autant de fois moins une qu'il existe d'unités dans l'ordre de multiplicité du zéro de $f'(x)-c$, ou du pôle de $f'(x)$. On constate de suite que l'on a

$$N_1(r, f') = N\left(r, \frac{1}{f''}\right) + N(r, f).$$

On voit ainsi se former, dans le deuxième membre de l'inégalité étudiée, la quantité $N(r, f') - N(r, f)$, où les pôles de la fonction $f(x)$ interviennent, privés de leur ordre éventuel de multiplicité : cette différence est donc l'*indice réduit des pôles de la fonction* $f(x)$, qu'on désigne par $\overline{N}(r, f)$.

Ces quelques remarques permettent de simplifier la deuxième inégalité de R. Nevanlinna, dans le cas de $f'(x)$, et de l'écrire

$$(7) \qquad qT(r, f') < \overline{N}(r, f) + N\left(r, \frac{1}{f'}\right) + \sum_{i=1}^{q} N\left(r, \frac{1}{f'-b_j}\right) - N\left(r, \frac{1}{f''}\right) + S(r).$$

Le rapprochement des inégalités (6) et (7) fournit de suite l'inégalité suivante, que nous considérerons ici comme fondamentale :

$$(8) \qquad pqT(r, f) < \overline{N}(r, f) + q\sum_{i=1}^{p} N\left(r, \frac{1}{f-a_i}\right) + \sum_{j=1}^{q} N\left(r, \frac{1}{f'-b_j}\right) - \left[(q-1)N\left(r, \frac{1}{f'}\right) + N\left(r, \frac{1}{f''}\right)\right] + S_1(r)$$

avec

$$(8') \qquad S_1(r) = S(r) + qm\left(r, \frac{f'}{F}\right) + q\log\left|\frac{F(0)}{f'(0)}\right| + pq\log\frac{2}{d}.$$

Pour compléter cette inégalité, il ne nous reste plus qu'à préciser la nature du terme $S(r)$, et par majorer $m\left(r, \frac{f'}{F}\right)$. Nous allons procéder à cette étude d'une façon précise; cependant, l'essentiel est de savoir que, pour une fonction $f(x)$ méromorphe dans le plan, et lorsque les a_i et les b_j sont connus, le rapport de $S_1(r)$ à $T(r, f)$ tend vers zéro pour les fonctions méromorphes dépourvues d'intervalles extraordinaires (comme le sont notamment les fonctions d'ordre fini); pour les autres, le même rapport tend aussi vers zéro, en dehors de ces intervalles extraordinaires (1). Ce résultat qualitatif est déjà évident d'après les propriétés du terme complémentaire $S(r)$ étudié par R. Nevanlinna, et celles de $m\left(r, \frac{f'}{f-a_i}\right)$. Il ne nous semble pas superflu de

(1) Pour ces intervalles extraordinaires, *voir* R. NEVANLINNA, *loc. cit.*, pp. 61-62.

donner ici une forme précise au terme $S_1(r)$, pouvant être utile ultérieurement à des études où la connaissance de cette forme est indispensable.

9. *Valeur du terme complémentaire* $S(r)$. — Rappelons qu'il figure dans la deuxième inégatité de R. Nevanlinna, appliquée sous la forme (7), à la fonction $f'(x)$.

Dans un article antérieur (1), je précise, dans tous les cas qui peuvent se présenter, la valeur du terme complémentaire de la deuxième inégalité de R. Nevanlinna; je ne rappellerai ici que le cas général.

Soit $\varphi(x)$ une fonction méromorphe dans un domaine comprenant le cercle de centre O et de rayon r. On suppose qu'en O, $\varphi(x)$ est fini et diffèrent de zéro. On désigne par β_k le premier coefficient différent de zéro, dans le développement en série de Taylor de la fonction $\varphi(x)$ au voisinage de l'origine.

Soit $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n$, n constantes distinctes finies ou non ($n \geq 3$). On désigne par d_i la plus petite distance sphérique entre ζ_i d'une part, et les autres constantes ζ d'autre part; puis par d la moyenne géométrique des d_i, lorsque l'on donne à i toutes les valeurs de 1 à n. On supposera que l'origine O n'est pas un zéro des fonctions $\varphi(x) - \zeta_i$.

L'inégalité de R. Nevanlinna

$$(n-2)T(r, \varphi) < \sum_{i=1}^{n} N(r, \zeta_i) - N_1(r, \varphi) + S(r),$$

où $N_1(r, \varphi)$ est l'indice de densité relatif aux valeurs multiples de $\varphi(x)$ [c'est-à-dire aux pôles multiples et aux points où $\varphi'(x)$ s'annule], se précise par la forme suivante de $S(r)$:

$$(9)\quad S(r) = 8 \overset{+}{\log} T(\rho, \varphi) + 6 \log \frac{\rho}{\rho - r} + 5 \log \frac{\rho}{r} + 4 \overset{+}{\log} \frac{1}{\rho} + 9n \log \frac{4}{d} + n \overset{+}{\log} |\varphi(0)| + \log \frac{1}{k|\beta_k|} + 88;$$

ρ est une quantité quelconque supérieure à r, telle cependant que le cercle de centre O et de rayon ρ est intérieur au domaine de méromorphie de la fonction $\varphi(x)$ (2).

10. Appliquons à préciser le terme $S(r)$ qui figure dans l'inégalité (7), et qu'on retrouve dans l'égalité (8').

Pour simplifier, nous supposerons $f'''(0)$ différent de zéro, et nous désignerons par d' une quantité quelconque au plus égale à la plus petite des distances sphériques, prises deux à deux, des constantes $b_1, b_2, \ldots, b_q$, 0 et ∞.

---

(1) H. MILLOUX, *Sur une inégalité de R. Nevanlinna* (*Revista de Ciencias*, 1945, n° 453).

(2) Le Mémoire qui vient d'être rappelé examine aussi tous les cas particuliers qui sont systématiquement écartés ici, pour plus de brièveté.

La formule (9) montre alors que l'on peut prendre pour $S(r)$ la quantité suivante :

$$(10)\quad 8\overset{+}{\log}T(\rho, f') + 6\log\frac{\rho}{\rho - r} + 5\log\frac{\rho}{r} + 4\overset{+}{\log}\frac{1}{\rho} + 9(q+2)\log\frac{4}{d'} + (q+2)\overset{+}{\log}|f'(0)| + \log\frac{1}{|f''(0)|} + 88,$$

ou *a fortiori* toute autre quantité supérieure.

Il est bien entendu que $f'(0)$ diffère de $b_1, b_2, \ldots b_q$, 0 et ∞.

Cherchons à substituer au premier terme de l'expression (10), une quantité plus simple. En précisant quelque peu (1) une majoration donnée par R. Nevanlinna, on établit l'inégalité suivante, valable lorsque $f(0)$ n'est ni nul, ni infini :

$$(11)\quad m\left(\rho, \frac{f'}{f}\right) < 4\overset{+}{\log}T(R, f) + 4\overset{+}{\log}\overset{+}{\log}\frac{1}{|f(0)|} + 3\log\frac{R}{R-\rho} + 2\log\frac{R}{\rho} + \overset{+}{\log}\frac{1}{R} + 16,$$

où R est une quantité quelconque supérieure à ρ, mais telle cependant que le cercle de centre O et de rayon R est intérieur au domaine de méromorphie considéré.

Or, on a

$$T(\rho, f') = m(\rho, f') + N(\rho, f') \leq 2N(\rho, f) + m(\rho, f) + m\left(\rho, \frac{f'}{f}\right) \leq 2T(\rho, f) + m\left(\rho, \frac{f'}{f}\right),$$

d'où en utilisant la majoration (11) et en notant que $4\overset{+}{\log}T(R, f)$ est majoré par $T(R, f) + 4\log 4 - 4$, donc *a fortiori* par $T(R, f) + 2$, et que $T(\rho, f)$ est majoré par $T(R, f)$, il vient l'inégalité

$$T(\rho, f') < 3T(R, f) + 4\overset{+}{\log}\overset{+}{\log}\frac{1}{|f(0)|} + 3\log\frac{R}{R-\rho} + 2\log\frac{R}{\rho} + \overset{+}{\log}\frac{1}{R} + 18.$$

Prenons les $\overset{+}{\log}$ des deux membres de cette inégalité; en utilisant les deux inégalités suivantes :

$$\overset{+}{\log}(a_1 + a_2 + \ldots + a_p) < \overset{+}{\log}a_1 + \overset{+}{\log}a_2 + \ldots + \overset{+}{\log}a_p + \log(p+1)$$

et

$$\overset{+}{\log}b < b + \log 2 - 2,$$

il vient, après un calcul numérique simple, l'inégalité :

$$\overset{+}{\log}T(\rho, f') < \overset{+}{\log}T(R, f) + \overset{+}{\log}\overset{+}{\log}\overset{+}{\log}\frac{1}{|f(0)|} + \log\frac{R}{R-\rho} + \log\frac{R}{\rho} + \overset{+}{\log}\frac{1}{R} + 6.$$

---

(1) H. MILLOUX, *Les fonctions méromorphes et leurs dérivées* (*Actualités scientifiques et industrielles*, Hermann, édit., Paris, n° 888, 1940). *Voir* p. 8, inégalité (1).

Reportons dans la quantité (10), et choisissons pour ρ la moyenne géométrique entre r et R. *Nous pouvons ainsi prendre, pour valeur du terme complémentaire* $S(r)$ *figurant dans* (7) *et dans* (8'), *l'expression suivante :*

$$(12)\quad S(r)=8\overset{+}{\log}T(R,f)+14\log\frac{R}{R-r}+7\log\frac{R}{r}+12\overset{+}{\log}\frac{1}{r}+9(q+2)\log\frac{4}{d'}$$
$$+8\overset{+}{\log}\overset{+}{\log}\overset{+}{\log}\frac{1}{|f(0)|}+(q+2)\overset{+}{\log}|f'(0)|+\log\frac{1}{|f''(0)|}+146.$$

Rappelons que nous avons fait les hypothèse suivantes :

$f(0)$ n'est ni nul ni infini;
$f'(0)$, qui est fini, est différent de 0, $b_1, b_2, \ldots, b_q$;
$f''(0)$ est différent de zéro.

Rappelons encore que d' désigne une quantité quelconque, inférieure ou égale à la plus petite des distances sphériques de $b_1, b_2, \ldots, b_q$, 0 et ∞.

11. *Majoration de* $m\left(r,\frac{f'}{F}\right)+\log|F(0)|$. — Ce sont des termes figurant dans l'égalité (8').

Rappelons que les distances sphériques de $a_1, a_2, \ldots, a_p$ prises deux à deux, sont supérieures ou égales à d; en particulier, il en résulte que la distance euclidienne qui sépare a_i de a_j est toujours supérieure à d.

Écrivons

$$\frac{f'}{F}=\sum_{i=1}^{p}A_i\frac{f'}{f-a_i}.$$

Le coefficient A_i vaut l'inverse du produit des différences de a_i aux a_j, où j prend toutes les valeurs de 1 à n, sauf i. Donc $|A_i|$ est inférieur à $\frac{1}{d^{p-1}}$.

On en déduit l'inégalité

$$(13)\qquad m\left(r,\frac{f'}{F}\right)<(p-1)\log\frac{1}{d}+\sum_{i=1}^{p}m\left(r,\frac{f'}{f-a_i}\right)+\log p.$$

Appliquons l'inégalité (11) en changeant ρ en r et $f(x)$ en $f(x)-a_i$, en notant que $f(0)$ est différent de a_i (c'est une hypothèse faite au début du n° 6). Il vient ainsi l'inégalité

$$(11')\qquad m\left(r,\frac{f'}{f-a_i}\right)<4\overset{+}{\log}T(R,f-a_i)+3\log\frac{R}{R-r}+2\log\frac{R}{r}+\overset{+}{\log}\frac{1}{R}$$
$$+4\overset{+}{\log}\overset{+}{\log}\frac{1}{|f(0)-a_i|}+16.$$

On sait que $T(R,f-a_i)$ est majoré par $T(R,f)+\overset{+}{\log}|a_i|+\log 2$; d'autre part, la distance sphérique qui sépare a_i de l'infini valant au moins d, $|a_i|$ est

majoré par $\cot g d$, donc *a fortiori* par $\frac{1}{d}$. On constate ainsi que $\log T(R, f-a_i)$ est majoré par $\overset{+}{\log} T(R, f) + \overset{+}{\log}\log\frac{1}{d} + \log 3$.

Appliquons cette majoration à l'inégalité (11'), puis reportons dans l'inégalité (13). Après un un calcul numérique simple, il vient l'inégalité :

$$(14)\quad m\left(r, \frac{f'}{F}\right) + \log|F(0)| < 4p \overset{+}{\log} T(R, f) + 3p \log\frac{R}{R-r} + 2p\log\frac{R}{r} + p\overset{+}{\log}\frac{1}{R} + 2p\log\frac{1}{d} + 23p + 4\sum_{i=1}^{p}\overset{+}{\log}\log\frac{1}{|f(0)-a_i|} + \log|F(0)|.$$

La somme des deux derniers termes de cette inégalité peut être remplacée par une expression plus simple. On a, en effet,

$$\log|F(0)| = \sum_{i=1}^{p}\overset{+}{\log}|f(0)-a_i| - \sum_{i=1}^{p}\overset{+}{\log}\frac{1}{|f(0)-a_i|}.$$

Tenons compte de ce que $4\log u - u$ est majoré par $4\log 4 - 4$, et que $\overset{+}{\log}|f(0)-a_i|$ est majoré par $\overset{+}{\log}|f(0)| + \overset{+}{\log}|a_i| + \log 2$, donc *a fortiori* par $\overset{+}{\log}|f(0)| + \log\frac{1}{d} + \log 2$. Nous constatons ainsi que la somme des deux derniers termes de l'inégalité (14) peut être remplacée par l'expression

$$p\overset{+}{\log}|f(0)| + p\log\frac{1}{d} + 3p.$$

12. Résumons les résultats obtenus jusqu'ici :

THÉORÈME I. — *Soit $f(x)$ une fonction méromorphe au voisinage de l'origine. Soit p quantités complexes a_i distinctes et finies, et q quantités complexes b_j distinctes, finies et différentes de zéro. On a l'inégalité suivante :*

$$(8)\quad pqT(r, f) < \overline{N}(r, f) + q\sum_{i=1}^{p}N\left(r, \frac{1}{f-a_i}\right) + \sum_{j=1}^{q}N\left(r, \frac{1}{f'-b_j}\right) - \left[(q-1)N\left(r, \frac{1}{f'}\right) + N\left(r, \frac{1}{f''}\right)\right] + S_1(r),$$

où $\overline{N}(r, f)$ désigne l'indice réduit des pôles de la fonction $f(x)$ et où l'on peut donner à $S_1(r)$ la forme suivante :

$$(15)\quad S_1(r) = 4(pq+2)\overset{+}{\log} T(R, f) + (3pq+14)\log\frac{R}{R-r} + (2pq+7)\log\frac{R}{r} + (pq+12)\overset{+}{\log}\frac{1}{r} + 9(q+2)\log\frac{4}{d'} + 4pq\log\frac{1}{d} + pq\overset{+}{\log}|f(0)| + 8\overset{+}{\log}\log\frac{1}{|f(0)|} + 2\overset{+}{\log}|f'(0)| + q\overset{+}{\log}\frac{1}{|f'(0)|} + \log\frac{1}{|f''(0)|} + 27pq + 146,$$

à condition toutefois :

que $f(0)$ *soit distinct de* 0, *de* ∞ *et des* a_i;
que $f'(0)$ *soit distinct de* 0 *et des* b_j;
que $f''(0)$ *soit distinct de* 0 (1).

Enfin, dans la formule de $S_1(r)$ *interviennent d, qui est une quantité quelconque inférieure ou égale à la plus petite des distances sphériques de* $a_1, a_2, \ldots, a_p$, *prises deux à deux et d', qui est une quantité quelconque inférieure ou égale à la plus petite des distances sphériques de* $b_1, b_2, \ldots b_q$, 0, ∞, *prises deux à deux.*

R *est une quantité quelconque supérieure à r, mais telle cependant que la fonction* $f(x)$ *soit méromorphe dans le cercle de centre* O *et de rayon* R.

13. *Comparaison avec des résultats antérieurs.* — Supposons en particulier p et q égaux à 1, et, pour fixer les idées, $a = 0$ et $b = 1$. Il vient l'inégalité

$$(16) \qquad T(r, f) < \overline{N}(r, f) + N\left(r, \frac{1}{f}\right) + N\left(r, \frac{1}{f'-1}\right) - N\left(r, \frac{1}{f''}\right) + S_1(r)$$

dont l'analogie avec l'une des formes habituelles de la deuxième inégalité de R. Nevanlinna est frappante ; cette forme est la suivante :

$$(16') \qquad T(r, f) < \overline{N}(r, f) + N\left(r, \frac{1}{f}\right) + N\left(r, \frac{1}{f-1}\right) - N\left(r, \frac{1}{f'}\right) + S(r).$$

Rappelons, ce qui a été dit dans l'introduction, qu'une inégalité, un peu moins précise que l'inégalité (16), avait déjà été obtenue; le Mémoire qui contient cette inégalité (voir la référence dans l'introduction) traite de questions plus générales; on substitue, à la dérivée $f'(x)$, une combinaison linéaire et homogène $\varphi(x)$ quelconque de la fonction initiale $f(x)$ et de quelques-unes de ses dérivées successives, avec coefficients holomorphes, et l'on majore $T(r, f)$ en fonction de $N(r, f)$, de $N\left(r, \frac{1}{f}\right)$ et de $N\left(r, \frac{1}{\varphi - 1}\right)$.

La substitution de la fonction $\varphi(x)$ à la dérivée $f'(x)$ dans l'étude actuelle pourrait se faire aussi; mais une telle extension exigerait de longs calculs.

14. La majoration de l'indice caractéristique $T(r, f)$ résumée dans l'inégalité (8), s'opère en fonction des indices de densité suivants : un premier groupe, concernant la fonction $f(x)$, contient obligatoirement l'indice (réduit) des pôles $\overline{N}(r, f)$; le deuxième groupe, concernant la dérivée $f'(x)$, élimine obligatoirement l'indice de densité des zéros de cette dérivée.

Il est possible d'obtenir des inégalités analogues à (8), mais où le deuxième membre ne contient plus l'indice relatif aux pôles de la fonction.

---

(1) Ces trois groupes de conditions n'ont rien de fondamental. Dans le cas où l'une d'elles, ou plusieurs, ne sont pas réalisées, seuls les termes de $S_1(r)$ du septième au onzième rang changent; ils sont remplacés par d'autres constantes issues des trois premiers coefficients de la série de Laurent, développement de la fonction $f(x)$ au voisinage de l'origine.

Une première méthode, pour aboutir à ce but, consisterait à noter que $\overline{N}(r, f)$ est majoré par $T(r, f)$; le premier membre deviendrait alors $(pq-1)T(r, f)$ et le deuxième ne contiendrait plus l'indice des pôles.

Une seconde méthode va nous permettre de substituer à l'indice $\overline{N}(r, f)$ des indices de densité relatifs à la dérivée $f'(x)$.

Soient α et β deux constantes distinctes et finies. D'après la deuxième inégalité fondamentale de R. Nevanlinna, on a [*voir* inégalité (7)] :

$$T(r, f') < \overline{N}(r; f) + N\left(r, \frac{1}{f'-\alpha}\right) + N\left(r, \frac{1}{f'-\beta}\right) - N\left(r, \frac{1}{f''}\right) + S_2(r),$$

où $S_2(r)$ pourrait être précisé, en utilisant les résultats rappelés au n° 9. Or, $T(r, f')$ est supérieur ou égal à $N(r, f')$, qui vaut $N(r, f) + \overline{N}(r, f)$. D'où l'inégalité

$$N(r, f) < N\left(r, \frac{1}{f'-\alpha}\right) + N\left(r, \frac{1}{f'-\beta}\right) - N\left(r, \frac{1}{f''}\right) + S_2(r).$$

A fortiori, $\overline{N}(r, f)$ est majoré par le second membre précédent.

En reportant dans (8), il vient l'inégalité

$$(17)\quad pqT(r, f) < q\sum_{i=1}^{p} N\left(r, \frac{1}{f-a_i}\right) + \sum_{j=1}^{q} N\left(r, \frac{1}{f'-b_j}\right) + N\left(r, \frac{1}{f'-\alpha}\right) + N\left(r, \frac{1}{f'-\beta}\right) - \left[(q-1)N\left(r, \frac{1}{f'}\right) + 2N\left(r, \frac{1}{f''}\right)\right] + S_3(r).$$

Rappelons que dans cette inégalité :

les a_i sont finis et distincts;
les b_j sont finis, distincts et différents de zéro;
α et β sont finis et distincts.

Enfin, $S_3(r)$ a une forme analogue à la forme (15), et en général négligeable devant $T(r, f)$.

Remarquons que l'on peut prendre l'une des quantités α ou β égale à zéro. Dans ce cas, on reportera l'indice de densité à l'intérieur du crochet, qui contient déjà cet indice (sauf dans le cas où $q = 1$).

CHAPITRE II.

APPLICATIONS A LA THÉORIE DES DÉFAUTS.

15. *Définitions.* — Soit $f(x)$ une fonction méromorphe dans le plan. Rappelons que M. R. Nevanlinna appelle *défaut* de la valeur a, l'expression

$$\delta(f, a) = \underline{\lim} \frac{m\left(r, \frac{1}{f-a}\right)}{T(r, f)} = 1 - \overline{\lim} \frac{N\left(r, \frac{1}{f-a}\right)}{T(r, f)},$$

les limites étant prises lorsque r augmente indéfiniment.

Tout défaut est compris entre 0 et 1. En général, le défaut est nul : il ne peut être différent de zéro que pour une suite finie, ou un ensemble dénombrable de valeurs a; ces valeurs sont alors dites *exceptionnelles au sens de* R. Nevanlinna (nous dirons ici, plus brièvement, exceptionnelles); la somme de leurs défauts est au plus égale à 2. Par exemple, si la fonction $f(x)$ est entière, l'infini est une valeur exceptionnelle à défaut égal à 1; pour les autres valeurs exceptionnelles, il restera donc une somme de défauts au plus égale à 1.

Les résultats qui viennent d'être rappelés ne peuvent être améliorés. Ils s'étendent à la théorie des fonctions méromorphes dans un cercle (1).

Défaut absolu et défaut relatif d'une valeur prise par la dérivée $f'(x)$. — Lorsque, dans une étude, s'introduisent à la fois une fonction méromorphe $f(x)$ et sa dérivée, il peut y avoir intérêt à comparer l'indice de densité $N\left(r, \frac{1}{f'-b}\right)$ non pas seulement à $T(r, f')$, mais aussi à l'indice caractéristique $T(r, f)$ de la fonction génératrice. Nous appellerons *défaut absolu* et *défaut relatif* respectivement les expressions suivantes :

$$\delta'_a(f', b) = 1 - \overline{\lim} \frac{N\left(r, \frac{1}{f'-b}\right)}{T(r, f')}$$

et

$$\delta'_r(f', b) = 1 - \overline{\lim} \frac{N\left(r, \frac{1}{f'-b}\right)}{T(r, f)}.$$

Notons que le défaut absolu n'est autre que le défaut au sens de R. Nevanlinna.

16. Le défaut *absolu* est, bien entendu, compris entre 0 et 1. Il peut ne pas en être de même du défaut *relatif*. Dans certains cas assez généraux, on peut fixer une liaison d'inégalité entre les deux défauts; de cette liaison résulte que dans ces cas, *le défaut relatif est compris entre* -1 *et* $+1$; nous verrons sur des exemples que *ces limites peuvent être atteintes*.

A cet effet considérons l'indice caractéristique $T(r, f')$. Égal à

$$N(r, f) + \overline{N}(r, f) + m(r, f'),$$

il est majoré par

$$2N(r, f) + m(r, f) + m\left(r, \frac{f'}{f}\right) \leq 2T(r, f) + m\left(r, \frac{f'}{f}\right).$$

Or, on sait que le rapport $\frac{m\left(r, \frac{f'}{f}\right)}{T(r, f)}$ tend en général vers 0 lorsque r augmente

(1) *Voir* R. NEVANLINNA, *Le théorème de Picard-Borel et la théorie des fonctions méromorphes* (Gauthier-Villars, édit., Paris 1929. *Collection Borel*). *Voir* notamment pp. 78–96 et p. 150.

indéfiniment. Il tend toujours vers o lorsque la fonction $f(x)$ est d'ordre fini ou nul; lorsque la fonction $f(x)$ est d'ordre infini, il se peut qu'il existe une suite d'intervalles de valeurs de r, s'éloignant indéfiniment sur lesquels le rapport étudié ne tend pas vers o; à l'intérieur de ces intervalles que l'on nomme *extraordinaires*, la croissance de $T(r, f)$ est exceptionnellement brusque; de plus, la somme des longueurs de tous ces intervalles extraordinaires est finie (1).

Ne retenons pour le moment *que le cas des fonctions méromorphes dépourvues d'intervalles extraordinaires*. De la majoration précédente de $T(r, f')$, il résulte que l'on a

$$\overline{\lim}\frac{T(r, f')}{T(r, f)} \leqq 2.$$

D'où

$$\overline{\lim}\frac{N\left(r, \frac{1}{f'-b}\right)}{T(r, f)} \leqq 2\,\overline{\lim}\frac{N\left(r, \frac{1}{f'-b}\right)}{T(r, f')}$$

et par suite, on a l'inégalité

$$\delta'_r(f', b) \geqq -1 + 2\,\delta'_a(f', b), \tag{18}$$

de laquelle résulte en particulier que *le défaut relatif vaut au moins* -1.

D'autre part, du fait de sa définition, *il vaut au plus* $+1$, et ceci, dans tous les cas.

17. *Exemples.* — 1° La fonction $f(x) = e^x$ étant d'ordre fini, il n'y a pas d'intervalles extraordinaires. La dérivée étant identique à la fonction, les défauts relatif et absolu sont égaux; en particulier, le défaut relatif, pour $b = 0$, vaut 1.

2° Considérons maintenant la fonction

$$f(x) = \frac{e^x}{e^x - 1}$$

qui est une fonction méromorphe d'ordre 1.

Le nombre des pôles de $f(x)$ contenus dans le cercle de centre O et de rayon r vaut $2E\left(\frac{r}{2\pi}\right) + 1$, où $E(a)$ est le plus grand entier contenu dans a. Il en résulte que l'indice de densité des pôles vaut $\frac{r}{\pi} + O(\log r)$. A l'extérieur de petits cercles les entourant, et de rayon fixe, on constate que la fonction (qui est périodique) reste bornée : l'indice $m(r, f)$ reste donc borné quand r augmente indéfiniment (2).

---

(1) *Voir* R. NEVANLINNA, *Le théorème de Picard-Borel ...*, (*loc. cit.*, pp. 62-63).

(2) La même fonction est utilisée dans un autre but par R. Nevanlinna (*Le théorème de Picard-Borel ..., loc. cit., voir* pp. 91-92).

Tous les pôles de $f(x)$ étant simples, $N(r, f')$ vaut $2N(r, f)$.

Étudions l'indice $m(r, f')$. Il est majoré par $m(r, f) + m\left(r, \frac{f'}{f}\right)$. La première partie de cette somme reste bornée; quant à la deuxième partie, on constate, en lui appliquant la majoration (11), où l'on remplace ρ par r et par R par $2r$, qu'elle est tout au plus de l'ordre de grandeur de $\log r$; en effet, $M(2r, f)$ est de l'ordre de grandeur de r, $f(x)$ étant d'ordre 1.

Donc $m(r, f')$ est au plus de l'ordre de grandeur de $\log r$. Son rapport à $N(r, f')$ tend par suite vers 0 lorsque r augmente indéfiniment. L'indice caractéristique $T(r, f')$ et l'indice de densité $N(r, f')$ sont donc asymptotiquement égaux; il en est de même des indices $T(r, f)$ et $N(r, f)$. D'où résulte le fait que $\frac{T(r, f')}{T(r, f)}$ tend vers 2 lorsque r augmente indéfiniment. Si b est une constante quelconque, on a donc :

$$\overline{\lim} \frac{N\left(r, \frac{1}{f'-b}\right)}{T(r, f)} = 2 \overline{\lim} \frac{N\left(r, \frac{1}{f'-b}\right)}{T(r, f')}$$

ou

$$\delta'_a(f', b) = 2\,\delta'_r(f', b) - 1.$$

L'inégalité (18) s'est transformée ici en égalité.

Il suffit maintenant de choisir pour b une valeur à défaut absolu nul (il existe une infinité non dénombrable de telles valeurs b) pour obtenir une valeur à défaut relatif égal à -1.

18. Dans certains cas particuliers, les relations entre les défauts relatif et absolu deviennent plus étroites.

Considérons d'abord une fonction $f(x)$ méromorphe dans le plan, *sans intervalles extraordinaires, et telle que l'infini a un défaut égal à* 1.

On a alors l'inégalité

$$T(r, f') < [1 + \varepsilon(r)]T(r, f),$$

où $\varepsilon(r)$ tend vers zéro lorsque r tend vers l'infini. Cette inégalité entraîne de suite le fait que *le défaut relatif est supérieur ou égal au défaut absolu.*

Supposons en outre que *notre fonction $f(x)$ admette une valeur finie a comme valeur exceptionnelle à défaut égal à* 1 [notons que $f(x)$ n'aura plus d'autre valeur d'exception].

Appliquons alors l'inégalité (6) en faisant $p = 1$; $a_1 = a$. Comme $m\left(r, \frac{f'}{f}\right)$ est négligeable devant $T(r, f)$, on voit que le rapport de $T(r, f')$ à $T(r, f)$ a pour limite inférieure une quantité supérieure ou égale à 1, lorsque r augmente indéfiniment. Or, d'après ce qui précède, la limite supérieure vaut au plus 1. Donc le rapport étudié tend vers 1.

Plus généralement, il en est de même lorsque *la fonction $f(x)$ admet un nombre fini ou une infinité dénombrable de valeurs exceptionnelles finies, avec*

somme des défauts égale à 1 ; il suffit de prendre p d'entre elles, de façon que la somme de leurs défauts soit aussi voisine de 1 que l'on désire, et d'appliquer à nouveau l'inégalité (6), pour constater que la limite inférieure du rapport $\frac{T(r, f')}{T(r, f)}$ est une quantité supérieure ou égale à une quantité aussi voisine de 1 que l'on veut; d'où résultera le fait que ce rapport tend vers 1.

Enfin, en revenant à la définition des deux défauts relatif ou absolu, on voit que *ceux-ci sont identiques*. Résumons les conditions (suffisantes mais pas nécessaires) pour que cette conclusion soit vérifiée :

La fonction $f(x)$ est dépourvue d'intervalles extraordinaires; l'infini a pour défaut 1 ; *il existe une suite de valeurs finies à somme de défauts égale à* 1.

19. *Première application : étude des défauts absolus.* — Soit q constantes finies b_j; désignons par δ'_a la sómme de leurs défauts *absolus* pour la dérivée $f'(x)$. De la définition de ces défauts résulte l'inégalité suivante

$$\sum_{j=1}^{q} N\left(r, \frac{1}{f'-b_j}\right) < [q - \delta'_a + \varepsilon(r)]T(r, f'),$$

où $\varepsilon(r)$ est une fonction positive ou nulle de r, tendant vers zéro lorsque r augmente indéfiniment.

Reportons l'inégalité qui précède dans l'inégalité (7); on obtient *a fortiori* l'inégalité :

$$(19) \qquad [\delta'_a - \varepsilon(r)]T(r, f') - N\left(r, \frac{1}{f'}\right) < \overline{N}(r, f) - N\left(r, \frac{1}{f''}\right) + S(r),$$

où $S(r)$ a la valeur précisée par l'égalité (12), dans le cas général, et une valeur analogue, dans les cas particuliers éliminés dans l'étude conduisant à l'égalité (12).

Désignons par $\delta'_a(0)$ le défaut absolu de zéro pour la fonction $f'(x)$; de la définition du défaut résulte que l'on a l'inégalité :

$$(20) \qquad N\left(r, \frac{1}{f'}\right) < [1 - \delta'_a(0) + \varepsilon_1(r)]T(r, f'),$$

où $\varepsilon_1(r)$ est une fonction du même type que $\varepsilon(r)$.

Ceci posé, introduisons un paramètre λ tel que $0 < \lambda \leq 1$. Dans l'inégalité (19), nous séparons $N\left(r, \frac{1}{f'}\right)$ en $\lambda N\left(r, \frac{1}{f'}\right) + (1-\lambda) N\left(r, \frac{1}{f'}\right)$, et nous appliquons seulement à la deuxième partie de la dernière somme l'inégalité (20). En reportant dans (19) on constate que ces opérations entraînent l'inégalité

$$(21) \qquad \left[\delta'_a - (1-\lambda)[1 - \delta'_a(0)] - \varepsilon(r) - (1-\lambda)\varepsilon_1(r)\right]T(r, f') - \lambda N\left(r, \frac{1}{f'}\right) < \overline{N}(r, f) - N\left(r, \frac{1}{f''}\right) + S(r).$$

Ceci posé, pouvons-nous choisir le paramètre λ de façon que la partie du coefficient de $T(r, f')$, indépendante de $\varepsilon(r)$ et de $\varepsilon_1(r)$ dans l'inégalité précédente, soit égale à λ ? Oui, si l'on peut prendre

$$\lambda = \frac{\delta'_a + \delta'_a(0) - 1}{\delta'_a(0)}. \tag{22}$$

Comme λ doit satisfaire aux conditions $0 < \lambda \leq 1$, le choix (22) peut avoir lieu, mais ne peut avoir lieu que si les conditions suivantes sont réalisées :

$$\delta'_a \leq 1, \qquad \delta'_a + \delta'_a(0) > 1. \tag{23}$$

Nous examinerons plus tard des cas où ces conditions ne se trouvent pas réalisées. Pour le moment, supposons les conditions (23) vérifiées. L'inégalité (21) s'écrit alors, une fois choisi λ comme l'indique la formule (22) :

$$\begin{aligned} &\lambda\left[T(r, f') - N\left(r, \frac{1}{f'}\right)\right] \\ &\quad < [\varepsilon(r) + (1-\lambda)\varepsilon_1(r)]T(r, f') + \overline{N}(r, f) - N\left(r, \frac{1}{f''}\right) + S(r), \end{aligned} \tag{24}$$

et il est bien facile de minorer l'expression entre crochets du premier membre de cette inégalité, en utilisant l'inégalité (6) : l'inégalité (24) sera *a fortiori* vérifiée si l'on remplace l'expression étudiée par

$$pT(r, f) - \sum_{i=1}^{p} N\left(r, \frac{1}{f - a_i}\right) - m\left(r, \frac{f'}{F}\right) - \log\left|\frac{F(0)}{f'(0)}\right| - p\log\frac{2}{d}.$$

Rappelons que $F(x)$ est le produit des fonctions $f(x) - a_i$, et que d est le minimum de la distance sphérique des a_i pris deux à deux.

Introduisons la somme des défauts des quantités a_i; soit δ cette somme. D'après la définition des défauts, on a l'inégalité

$$pT(r, f) - \sum_{i=1}^{p} N\left(r, \frac{1}{f - a_i}\right) > [\delta - \varepsilon_2(r)]T(r, f),$$

où $\varepsilon_2(r)$ est une fonction du même type que $\varepsilon(r)$.

Enfin, désignons par $\delta(\infty)$ le défaut de l'infini pour la fonction $f(x)$. On a l'inégalité

$$\overline{N}(r, f) < [1 - \delta(\infty) + \varepsilon_3(r)]T(r, f).$$

Les différentes remarques développées à partir de l'inégalité (24) montrent que celle-ci entraîne *a fortiori* l'inégalité suivante

$$\begin{aligned} [\lambda\delta + \delta(\infty) - 1]T(r, f) < &- N\left(r, \frac{1}{f''}\right) + S(r) + [\varepsilon(r) + (1-\lambda)\varepsilon_1(r)]T(r, f') \\ &+ [\lambda\varepsilon_2(r) + \varepsilon_3(r)]T(r, f) \\ &+ \lambda\left[m\left(r, \frac{f'}{F}\right) + \log\left|\frac{F(0)}{f'(0)}\right| + p\log\frac{2}{d}\right]. \end{aligned} \tag{25}$$

Dans l'inégalité (25), on peut *a fortiori* supprimer le premier terme du second membre. Cette suppression effectuée, divisons les deux membres par $T(r, f)$ et faisons tendre r vers l'infini *en évitant les intervalles extraordinaires si ceux-ci existent*. Étudions ce que donne alors le deuxième membre.

Le premier terme est supprimé.

Le deuxième devient $\frac{S(r)}{T(r, f)}$, donc tend vers zéro.

Le troisième est un produit de deux facteurs; le premier facteur tend vers zéro; le deuxième, devenu $\frac{T(r, f')}{T(r, f)}$, a ses valeurs limites majorées par 2 (*voir* n° 16).

Le quatrième tend vers zéro.

Le cinquième tend aussi vers zéro, car $\frac{m\left(r, \frac{f'}{F}\right)}{T(r, f)}$ tend vers zéro; on s'en aperçoit en utilisant l'inégalité (14) pour l'étude du numérateur de cette fraction.

En résumé, ce qu'est devenu le deuxième membre de (25) tend vers zéro. D'où résulte que $\lambda\delta + \delta(\infty) - 1$ ne peut être que négatif ou nul.

Résumons dans l'énoncé suivant :

THÉORÈME II. — *Soit $f(x)$ une fonction méromorphe dans le plan, et possédant des valeurs finies exceptionnelles au sens de Nevanlinna; on désigne par δ la somme de leurs défauts, et par $\delta(\infty)$ le défaut (éventuel) de l'infini* (1).

On suppose que la dérivée $f'(x)$ admet zéro, et d'autres valeurs finies comme valeurs exceptionnelles. On désigne par $\delta'_a(0)$ le défaut absolu de zéro, et par δ'_a la somme des défauts absolus des autres valeurs finies.

Si δ'_a est inférieur ou égal à 1, et si $\delta'_a + \delta'_a(0)$ est supérieur à 1, alors on a l'inégalité

$$\delta[\delta'_a + \delta'_a(0) - 1] \leq [1 - \delta(\infty)]\delta'_a(0). \tag{26}$$

20. *Cas particulier.* — Supposons $\delta(\infty)$ égal à 1 (ce qui, par exemple, est le cas des fonctions entières). Les conditions du théorème précédent sont inapplicables, puisque l'inégalité (26) ne peut être vérifiée. D'où la propriété suivante :

THÉORÈME III. — *Soit $f(x)$ une fonction méromorphe telle que le défaut de l'infini est égal à 1.*

L'une au moins des circonstances suivantes se présente obligatoirerement :

Ou bien la fonction $f(x)$ n'a aucune valeur exceptionnelle finie (au sens de Nevainnan);

---

(1) En examinant de plus près le passage où $\delta(\infty)$ s'introduit dans la démonstration, on constate que l'on peut tenir compte des pôles comme s'ils étaient tous simples; on pourrait donc ici désigner par $\delta(\infty)$ ce qu'on pourrait appeler le *défaut réduit* de l'infini.

Ou bien sa dérivée $f'(x)$ n'admet pas zéro comme valeur exceptionnelle ;

Ou bien la somme des défauts (absolus) des valeurs exceptionnelles finies de $f'(x)$ ne surpasse pas 1.

Remarquons que si $f(x)$ est une fonction entière, cette dernière conclusion est évidente ; en effet, pour $f'(x)$ aussi, l'infini aurait pour défaut l'unité : il en résulterait la dernière conclusion, comme application du théorème de Nevanlinna sur la limitation à 2 de la somme des défauts.

21. Dans le théorème du n° 19, nous formulons deux hypothèses sur δ'_a et $\delta'_a(o)$. Plaçons-nous maintenant dans l'un des cas non examinés, *celui où δ'_a est supérieur à* 1. On peut aussi supposer δ'_a égal à 1 dans les raisonnements qui vont suivre.

Nous ne pouvons plus employer la méthode du n° 19. Étudions à nouveau l'inégalité (19).

Dans son premier membre, nous pouvons *a fortiori* remplacer $N\left(r, \frac{1}{f'}\right)$ par $\delta'_a N\left(r, \frac{1}{f'}\right)$; dans son deuxième membre, nous pouvons aussi substituer à $\overline{N}(r, f)$ l'expression majorante $[1 - \delta(\infty) + \varepsilon_3(r)]T(r, f)$, nous pouvons encore supprimer le deuxième terme, négatif ou nul, $-N\left(r, \frac{1}{f''}\right)$. D'où finalement l'inégalité simplifiée suivante :

$$\delta'_a\left[T(r, f') - N\left(r, \frac{1}{f'}\right)\right] - [1 - \delta(\infty)]T(r, f) < \varepsilon(r)T(r, f') + \varepsilon_3(r)T(r, f) + S(r).$$

Introduisons, comme plus haut, l'inégalité (6) : dans le premier membre de l'inégalité précédente, nous pouvons *a fortiori* remplacer le coefficient de δ'_a par

$$[\delta - \varepsilon_2(r)]T(r, f) - m\left(r, \frac{f'}{F}\right) - \log\left|\frac{F(o)}{f'(o)}\right| - p\log\frac{2}{d},$$

en conservant les notations du n° 19.

D'où finalement l'inégalité suivante :

$$[\delta\delta'_a + \delta(\infty) - 1]T(r, f) < S_2(r),$$

où $S_2(r)$ est négligeable devant $T(r, f)$, pour les grandes valeurs de r, sauf peut-être pour les intervalles extraordinaires, en cas d'existence de ceux-ci.

Il en résulte immédiatement que le coefficient de $T(r, f)$ dans l'inégalité précédente est négatif ou nul. D'où le

THÉORÈME IV. — *Soit $f(x)$ une fonction méromorphe dans le plan, et telle qu'il existe des valeurs exceptionnelles finies ; on désigne par δ la somme de leurs défauts, et par $\delta(\infty)$ le défaut de l'infini (ce défaut peut être nul).*

On suppose en outre que la dérivée $f'(x)$ possède des valeurs finies et différentes de zéro comme valeurs exceptionnelles, et que la somme δ'_a de leurs défauts (absolus) est au moins égale à 1. *Alors, entre δ, $\delta(\infty)$ et δ'_a on a l'inégalité*

$$\delta\delta'_a + \delta(\infty) \leq 1. \tag{27}$$

22. En particulier, on a le théorème suivant :

THÉORÈME V. — *Soit $f(x)$ une fonction méromorphe dans le plan, et telle que l'infini a pour défaut* 1. *L'une au moins des circonstances suivantes est obligatoire :*

Ou bien la fonction $f(x)$ n'a pas de valeur finie exceptionnelle;

Ou bien, si l'on considère les valeurs finies et différentes de zéro, qui sont exceptionnelles pour la dérivée $f'(x)$, la somme de leurs défauts (absolus) est inférieure à 1.

23. *Remarque.* — Dans l'étude faite au n° 21, nous avons utilisé l'inégalité (19) en remplaçant, dans son premier membre, $N\left(r, \frac{1}{f'}\right)$ par l'expression $\delta'_a N\left(r, \frac{1}{f'}\right)$, qui lui est supérieure ou égale.

On peut améliorer le résultat, obtenu sous forme de l'inégalité (27), en conservant à $N\left(r, \frac{1}{f'}\right)$ son coefficient. On écrit alors

$$\delta'_a\left[T(r, f') - N\left(r, \frac{1}{f'}\right)\right] + (\delta'_a - 1)N\left(r, \frac{1}{f'}\right) < \varepsilon(r)T(r, f') + \overline{N}(r, f) + S(r),$$

en supprimant toujours l'indice $N\left(r, \frac{1}{f''}\right)$.

Ceci posé introduisons la quantité :

$$\omega = \underline{\lim} \frac{N\left(r, \frac{1}{f'}\right)}{T(r, f)},$$

de sorte que l'on a

$$N\left(r, \frac{1}{f'}\right) > [\omega - \varepsilon_4(r)]T(r, f),$$

où $\varepsilon_4(r)$ tend vers zéro lorsque r augmente indéfiniment.

En terminant comme au n° 19, c'est-à-dire en faisant tendre r vers l'infini en dehors des intervalles extraordinaires, on obtient l'inégalité suivante :

$$\delta\delta'_a + \delta(\infty) + \omega(\delta'_a - 1) \leq 1 \tag{27'}$$

plus précise que l'inégalité (27), lorsque δ'_a est supérieur à 1, et ω différent de zéro.

Cette nouvelle inégalité peut être, à son tour, améliorée dans le cas où les intervalles extraordinaires n'existent pas, comme par exemple dans le cas des fonctions d'ordre fini.

En effet, au lieu de faire tendre r vers l'infini d'une façon quelconque en dehors des intervalles extraordinaires, on peut faire choix d'une suite de valeurs de r pour lesquelle le rapport $\frac{N\left(r, \frac{1}{f'}\right)}{T(r, f)}$ tend vers sa limite maxima, qui est précisément $1 - \delta'_r(0)$, d'après la notation des défauts relatifs. D'où, dans ce cas, l'inégalité

$$\delta\delta'_a + \delta(\infty) + (\delta'_a - 1)[1 - \delta'_r(0)] \leqq 1. \tag{27''}$$

24. *Deuxième application : étude des défauts relatifs.* — Sauf dans les toutes dernières lignes qui précèdent, les défauts relatifs ne se sont pas introduits dans les applications des inégalités obtenues dans le premier chapitre de ce Mémoire. Nous sommes tout naturellement amenés à cette introduction, si nous utilisons directement l'inégalité (8) du théorème I.

Désignons par $\delta(\infty)$ le défaut de l'infini pour la fonction $f(x)$, par δ la somme des défauts des quantités a_i pour $f(x)$, et par δ'_r la somme des défauts *relatifs* des quantités b_j (qui, rappelons-le, sont finies et différentes de o) pour la dérivée $f'(x)$.

Si, dans l'inégalité (8) nous supprimons, par simplification, l'expression entre crochets du second membre, laquelle est positive ou nulle, nous obtenons l'inégalité suivante :

$$[\delta(\infty) - 1 + q\delta - q + \delta'_r]T(r, f) < \varepsilon(r)T(r, f) + S_1(r),$$

où $\varepsilon(r)$ tend vers zéro quand r tend vers l'infini, et où $S_1(r)$ donné par la formule (15), est en général négligeable devant $T(r, f)$.

Faisant tendre r vers l'infini en dehors des intervalles extraordinaires, on obtient le théorème suivant :

THÉORÈME VI. — *Soit $f(x)$ une fonction méromorphe dans le plan, et possédant des valeurs exceptionnelles finies; on désigne par δ la somme de leurs défauts, et par $\delta(\infty)$ le défaut (qui peut être nul) de l'infini.*

Si l'on considère q quantités finies et différentes de o, la somme δ'_r de leurs défauts relatifs satisfait à l'inégalité

$$\delta'_r \leqq q(1 - \delta) + 1 - \delta(\infty). \tag{28}$$

En particulier, tout défaut relatif est majoré par $2 - \delta(\infty)$.

25. *Cas particulier.* — Supposons que $\delta(\infty)$ et δ soient égaux à 1 (ce qui est le maximum). Alors *tout défaut relatif est négatif ou nul.* Nous avons vu plus haut (n° 17) qu'un défaut relatif peut être négatif.

Supposons en outre que notre fonction $f(x)$ est dépourvue d'intervalles extraordinaires. Au n° 18, nous avons vu que par suite de cet ensemble d'hypothèses, les défauts relatif et absolu sont identiques.

D'où le théorème suivant :

THÉORÈME VII. — *Soit $f(x)$ une fonction méromorphe dans le plan, et dépourvue d'intervalles extraordinaires. On suppose que l'infini a pour défaut* 1, *et qu'il existe un ensemble de quantités finies pour lesquelles la somme des défauts vaut* 1.

Dans ces conditions, la dérivée $f'(x)$ ne peut pas avoir de valeur finie autre que zéro, comme valeur exceptionnelle au sens de Nevanlinna.

C'est par exemple le cas de la fonction exponentielle.

26. L'inégalité (28) a été obtenue par utilisation de l'inégalité (8), simplifiée au préalable par la suppression, dans son second membre, de l'expression entre crochets. On pourrait aussi tenir compte de cette expression lorsque q surpasse 1.

Il est également possible d'obtenir d'autres propriétés, en utilisant plus directement les inégalités (6) et (7), qui sont à l'origine de l'inégalité (8); pour terminer, indiquons l'une de ces utilisations.

Soit b une constante finie différente de zéro. L'inégalité (7) donne en particulier

$$T(r, f') < \overline{N}(r, f) + N\left(r, \frac{1}{f'}\right) + N\left(r, \frac{1}{f'-b}\right) - N\left(r, \frac{1}{f''}\right) + S(r),$$

d'où, d'après la notation des défauts absolus :

$$[1-\varepsilon(r)]\,\delta'_a(b)\,T(r, f') < \overline{N}(r, f) + N\left(r, \frac{1}{f'}\right) - N\left(r, \frac{1}{f''}\right) + S(r)$$

[qui est, en somme, un cas particulier de l'inégalité (19)].

Utilisons maintenant l'inégalité (6) : dans le premier membre de l'inégalité qui précède, nous pouvons *a fortiori*, d'après (6), remplacer $T(r, f')$ par l'expression :

$$[\delta - \varepsilon_1(r)]\,T(r, f) + N\left(r, \frac{1}{f'}\right) - S_1(r),$$

où δ désigne la somme des défauts des quantités finies a_i pour la fonction $f(x)$. On en déduit l'inégalité :

$$[\delta\delta'_a(b) + \delta(\infty) - 1]\,T(r, f) < \left[1 - \delta'_a(b)\,[1-\varepsilon(r)]\right] N\left(r, \frac{1}{f'}\right) - N\left(r, \frac{1}{f''}\right) + S_2(r),$$

dans laquelle $\varepsilon(r)$ tend vers zéro lorsque r tend vers l'infini, ainsi qu'en général le rapport $\frac{S_2(r)}{T(r, f)}$.

On simplifie l'inégalité précédente par la suppression de l'indice $N\left(r, \frac{1}{f''}\right)$; en outre, on majore $N\left(r, \frac{1}{f'}\right)$ en le remplaçant par $[1 - \delta'_r(0) + \varepsilon_1(r)]\,T(r, f)$.

Finalement, en faisant tendre r vers l'infini en dehors des intervalles extraordinaires, il vient l'inégalité suivante :

$$(29) \qquad (1+\delta)\,\delta'_a(b) + \delta'_r(0)\,[1-\delta'_a(b)] + \delta(\infty) \leqq 2,$$

faisant intervenir, pour la dérivée $f'(x)$, le défaut absolu de la constante b différente de zéro, et le défaut relatif de zéro.

27. Signalons encore d'autres possibilités : jusqu'ici l'infini intervient par son défaut, dans les inégalités obtenues. Ceci provient notamment de ce que l'inégalité (8) comporte l'indice $\overline{N}(r, f)$.

Ce n'est pas le cas de l'inégalité analogue (17), qui donnera donc naissance à une relation d'inégalité faisant intervenir la somme des défauts des quantités finies a_i pour la fonction $f(x)$, la somme des défauts relatifs des quantités b_j finies et différentes de zéro pour la dérivée $f'(x)$, ainsi que deux autres défauts de qaantités finies, pour cette même dérivée.

28. Enfin, comme il a été indiqué dans l'introduction, toute la théorie développée dans ce Mémoire peut être reprise, en substituant à la dérivée première $f'(x)$ une combinaison linéaire et homogène quelconque de la fonction $f(x)$ et de quelques-unes de ses dérivées successives (1).

(1) *Voir* un résultat particulier, utilisant la notion de défaut relatif, dans A. RAUCH, *Deux remarques sur les fonctions entières d'ordre fini* (*Bull. Soc. Math.*, t. LXXII, 1944, pp. 93-96).