ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

PAUL VINCENSINI

Recherches sur la déformation des surfaces

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3^e série, tome 63 (1946), p. 255-288

<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1946_3_63__255_0>

© Gauthier-Villars (Éditions scientifiques et médicales Elsevier), 1946, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales scientifiques de l'É.N.S. » (http://www.elsevier.com/locate/ansens) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

RECHERCHES

SUR

LA DÉFORMATION DES SURFACES

PAR M. PAUL VINCENSINI.

Introduction. — Le présent travail, en grande partie consacré à l'étude des circonstances géométriques qui accompagnent la déformation d'une famille étendue de congruences rectilignes (congruences C_2 du Mémoire), tire son origine d'un problème résolu par L. Bianchi se rattachant à la méthode proposée par Weingarten pour résoudre le problème de la déformation des surfaces, et se développe conformément au plan que j'indique dans cette introduction.

Weingarten a montré, comme l'on sait, que si l'on connaît une surface Σ_1 admettant un ds^2 donné, la recherche de la famille de toutes les surfaces Σ admettant ce même ds^2 équivaut à celle d'une autre famille de surfaces Θ. Ces surfaces Θ sont définies par une équation aux dérivées partielles du deuxième ordre, établissant une relation, entre les rayons de courbure principaux en un point quelconque et les distances d'un point fixe de l'espace au plan tangent correspondant.

Le cas particulier où les caractéristiques de l'équation aux dérivées partielles des surfaces Θ ainsi associées à un ds^2 donné ont pour images sphériques les génératrices rectilignes de la sphère unitaire est particulièrement intéressant. Les ds^2 correspondant à ce cas peuvent être mis sous la forme

$$ds^2 = du^2 + (u + \mathrm{V})\, dv^2. \tag{1}$$

V étant une fonction arbitraire du paramètre v, et cette forme donne, pour des particularisations bien connues de la fonction V, les différents types d'éléments linéaires (au nombre de *cinq*) pour lesquels le problème de la déformation peut être résolu complètement.

(1) est l'élément linéaire de toutes les surfaces réglées *admettant un plan directeur isotrope*. Parmi ces surfaces, celles qui correspondent à la forme

$$ds^2 = du^2 + \left(u - \frac{v}{2} + c\,e^{-2v}\right) dv^2 \tag{2}$$

sont les surfaces applicables sur un paraboloïde dont une génératrice rectiligne est tangente au cercle de l'infini, et la forme (2) de leur ds^2 est précisément l'une de celles pour lesquelles le problème de la déformation peut être résolu complètement.

Ces dernières surfaces ont été rencontrées par L. Bianchi dans un problème relatif à la déformation des congruences rectilignes. Ce problème est le suivant :

Supposons les différents rayons d'une congruence rectiligne normale C situés dans les différents plans tangents d'une surface Σ et invariablement liés à ces plans tangents. On sait, d'une part que C reste normale au cours d'une déformation arbitraire de Σ dans laquelle Σ entraîne ses différents plans tangents, et d'autre part que, si l'on considère une surface quelconque S orthogonale aux rayons de C et si l'on suppose les différents points de S invariablement liés aux rayons correspondants de C, l'ensemble de ces points ne cesse, au cours d'une déformation arbitraire de Σ, de constituer une surface normale à C. Cela étant, le problème traité par L. Bianchi, auquel il a été fait allusion plus haut, consiste à déterminer la surface Σ et la congruence C associée, de façon que, dans la déformation arbitraire dont il vient d'être question, l'une des surfaces normales à C *reste constamment minima*.

Si l'on exclut le cas évident où Σ est une développée de surface minima, les surfaces Σ fournissant les différentes solutions du problème sont celles dont l'élément linéaire a la forme (2) de Weingarten, et, pour chaque valeur du paramètre c, la congruence déformable C est déterminée de façon unique.

Les surfaces complètement déformables d'élément linéaire (2), applicables comme nous l'avons déjà dit sur les paraboloïdes dont une génératrice rectiligne est tangente au cercle de l'infini, se trouvent ainsi géométriquement rattachées aux surfaces minima. On peut se demander s'il ne serait pas possible de généraliser la question, et de relier *l'ensemble de toutes les surfaces d'élément linéaire* (1) applicables sur les surfaces réglées générales à plan directeur isotrope, à quelque problème de déformation analogue à celui envisagé par Bianchi.

Il se trouve, qu'en modifiant convenablement l'énoncé du problème de Bianchi, on peut lui donner une forme se prêtant aisément à la généralisation en question. J'ai été conduit à cette généralisation en partant de la remarque que voici :

Dire qu'une congruence normale C dont les rayons sont situés dans les plans tangents d'une surface Σ et invariablement liés à ces plans tangents, reste constamment normale à une surface minima au cours d'une déformation arbitraire de Σ, c'est dire que le *point central* (milieu du segment focal) sur chaque rayon D *reste invariablement lié au plan tangent à* Σ *contenant* D, et que dans une configuration quelconque de Σ *le lieu des points centraux relatifs aux différents rayons* D *est une surface normale à* C.

Si l'on néglige la dernière condition énoncée, et si l'on exige seulement que la congruence C *reste normale au cours d'une déformation arbitraire de* Σ *et que le point central sur chaque rayon reste invariablement lié au plan tangent correspondant de* Σ, on obtient un problème généralisant celui de Bianchi, et dont la solution (donnée au n° 6) est précisément fournie *par les surfaces* Σ *applicables sur les surfaces réglées générales à plan directeur isotrope*.

Si, des deux conditions ci-dessus imposées à C, on néglige la condition relative à l'orthogonalité de la congruence, et si l'on ne retient que celle relative à la *fixité*, dans chaque plan tangent de la surface Σ soumise à la déformation, du point central porté par le rayon situé dans le plan tangent envisagé, la surface Σ peut être choisie *arbitrairement*, et les congruences C associées jouissent de la propriété suivante :

Il existe sur Σ un réseau *invariant* (constamment constitué par les deux mêmes familles de courbes au cours de la déformation de Σ), tel que les droites MF_1, MF_2 joignant un point quelconque M de Σ aux deux foyers F_1, F_2 du rayon D de C situé dans le plan tangent en M, restent conjuguées harmoniques par rapport aux tangentes en M du réseau invariant.

Cette remarque faite, il était naturel de rechercher les congruences C les plus générales, formées de droites situées dans les plans tangents d'une surface Σ et invariablement liées à ces plans tangents, jouissant de la propriété que les couples de directions MF_1, MF_2 relatifs aux différents rayons ne cessent, au cours d'une déformation arbitraire de Σ, de diviser harmoniquement les tangentes d'un réseau invariant de Σ. Ce problème, résolu au n° 7 du Mémoire, comporte, pour une surface Σ arbitraire, deux types distincts de solutions que je désigne respectivement par (C_1) et (C_2). Les congruences (C_1) ne sont autres que les congruences (déterminées par Ribaucour) dont les développables correspondent à un réseau conjugué de Σ; pour ces congruences le réseau invariant correspondant est *en général* formé de deux familles *distinctes* de courbes. Pour les congruences du nouveau type (C_2) les deux familles de courbes du réseau invariant sont *toujours confondues*, et ces congruences peuvent être *caractérisées* par la circonstance suivante : Au cours d'une déformation arbitraire de Σ, l'*un* des deux foyers situés sur un rayon quelconque D de la congruence *conserve, sur* D, *une position invariable*.

Cette remarque est le point de départ d'une étude, faite aux n^os 8, 9 et 10, des propriétés de déformation des congruences C_2.

Dans cette Introduction nous nous bornerons à signaler la propriété suivant laquelle la fixité, sur leurs rayons respectifs, des foyers situés sur l'*une* des deux nappes focales d'une congruence C_2, entraîne la conservation des développables ayant leurs arêtes de rebroussement sur l'*autre* nappe.

M. Finikoff, dans un important Mémoire dont il sera question dans la suite, a résolu complètement le problème de la déformation *continue à un paramètre* d'une congruence avec persistance des *deux* familles de développables, et a abordé le problème de la déformation *arbitraire* avec persistance de l'*une* des deux familles de développables. Il a signalé, pour ce deuxième problème, l'existence d'une famille de solutions (dépendant de deux fonctions arbitraires) constituée par des congruences dont les rayons sont perpendiculaires aux plans tangents de la surface déformée Σ. Cette solution n'est pas la seule. L'ensemble des congruences C_2 étudiées dans le Mémoire actuel, fournit la totalité des congruences jouissant de la propriété de permanence envisagée par M. Finikoff dont les rayons sont situés dans les plans tangents de la surface soumise à la déformation.

Il est remarquable que la déformation de ces congruences C_2 réalise *deux permanences simultanées :* celle des *foyers* sur l'une des deux nappes focales et celle des *développables* relatives à l'autre nappe.

L'une quelconque des deux permanences précédentes entraîne d'ailleurs la deuxième, et suffit à classer une congruence dans la catégorie des congruences C_2.

Certains des résultats obtenus dans ce Mémoire ont été succinctement indiqués dans deux Notes présentées à l'Académie des Sciences (*Comptes rendus*, t. 222, 1946, pp. 630-632 et 1326-1328).

1. *Points centraux d'une congruence* C. — Nous rapporterons la surface Σ dont les plans tangents contiennent les rayons D de C à un système orthogonal (u, v) choisi de la façon suivante.

Soit I le pied de la perpendiculaire abaissée du point $M(x, y, z)$ de Σ sur le rayon D situé dans le plan tangent en M; les courbes $u = \text{const.}$ seront les courbes enveloppées, sur la surface, par les différentes droites MI; les courbes $v = \text{const.}$ seront les trajectoires orthogonales des précédentes.

Désignons par X_i, Y_i, Z_i $(i = 1, 2, 3)$ les cosinus directeurs de la tangente à la courbe $v = \text{const.}$ $(i = 1)$, de la tangente à la courbe $u = \text{const.}$ $(i = 2)$, et de la normale en M à Σ $(i = 3)$. Les coordonnées du point I du rayon D de C, de cosinus directeurs X_1, Y_1, Z_1 sont

$$\xi = x + aX_1, \qquad \eta = y + aY_1, \qquad \zeta = z + aZ_1. \tag{1}$$

D'autre part, si

$$ds^2 = \mathrm{E}\,du^2 + \mathrm{G}\,dv^2,$$
$$\mathrm{D}\,du^2 + 2\,\mathrm{D}'\,du\,dv + \mathrm{D}''\,dv^2$$

sont les deux formes quadratiques fondamentales de la surface Σ, celles de la congruence C seront

$$\mathrm{S}\,dX_1\,d\xi = e\,du^2 + (f+f')\,du\,dv + g\,dv^2,$$
$$d\sigma^2 = \mathrm{S}\,dX_1^2 = \mathrm{E}'\,du^2 + 2\,\mathrm{F}'\,du\,dv + \mathrm{G}'\,dv^2,$$

où l'on a

$$e = \mathrm{S}\frac{\partial X_1}{\partial u}\frac{\partial \xi}{\partial u}, \qquad f = \mathrm{S}\frac{\partial X_1}{\partial u}\frac{\partial \xi}{\partial v}, \qquad f' = \mathrm{S}\frac{\partial X_1}{\partial v}\frac{\partial \xi}{\partial u}, \qquad g = \mathrm{S}\frac{\partial X_1}{\partial v}\frac{\partial \xi}{\partial v},$$
$$\mathrm{E}' = \mathrm{S}\left(\frac{\partial X_1}{\partial u}\right)^2, \qquad \mathrm{F}' = \mathrm{S}\frac{\partial X_1}{\partial u}\frac{\partial X_1}{\partial v}, \qquad \mathrm{G}' = \mathrm{S}\left(\frac{\partial X_1}{\partial v}\right)^2.$$

Moyennant les relations exprimant les dérivées des coordonnées du point M et celles des cosinus directeurs X_i, Y_i, Z_i

$$(2)\quad \left\{\begin{array}{ll}
\dfrac{\partial x}{\partial u} = \sqrt{\mathrm{E}}\,X_1, & \dfrac{\partial x}{\partial v} = \sqrt{\mathrm{G}}\,X_2,\\[2ex]
\dfrac{\partial X_1}{\partial u} = -\dfrac{1}{\sqrt{\mathrm{G}}}\dfrac{\partial\sqrt{\mathrm{E}}}{\partial v}X_2 + \dfrac{\mathrm{D}}{\sqrt{\mathrm{E}}}X_3, & \dfrac{\partial X_1}{\partial v} = \dfrac{1}{\sqrt{\mathrm{E}}}\dfrac{\partial\sqrt{\mathrm{G}}}{\partial u}X_2 + \dfrac{\mathrm{D}'}{\sqrt{\mathrm{E}}}X_3,\\[2ex]
\dfrac{\partial X_2}{\partial u} = \dfrac{1}{\sqrt{\mathrm{G}}}\dfrac{\partial\sqrt{\mathrm{E}}}{\partial v}X_1 + \dfrac{\mathrm{D}'}{\sqrt{\mathrm{G}}}X_3, & \dfrac{\partial X_2}{\partial v} = -\dfrac{1}{\sqrt{\mathrm{E}}}\dfrac{\partial\sqrt{\mathrm{G}}}{\partial u}X_1 + \dfrac{\mathrm{D}''}{\sqrt{\mathrm{G}}}X_3,\\[2ex]
\dfrac{\partial X_3}{\partial u} = -\dfrac{\mathrm{D}}{\sqrt{\mathrm{E}}}X_1 - \dfrac{\mathrm{D}'}{\sqrt{\mathrm{G}}}X_2, & \dfrac{\partial X_3}{\partial v} = -\dfrac{\mathrm{D}'}{\sqrt{\mathrm{E}}}X_1 - \dfrac{\mathrm{D}''}{\sqrt{\mathrm{G}}}X_2,
\end{array}\right.$$

et les analogues en Y et Z, on obtient pour les coefficients e, f, f', g, E', F', G' les expressions suivantes :

$$(3)\quad \left\{\begin{array}{l}
e = -\dfrac{1}{\sqrt{\mathrm{G}}}\dfrac{\partial\sqrt{\mathrm{E}}}{\partial v}\dfrac{\partial a}{\partial u} + \dfrac{a}{\sqrt{\mathrm{EG}}}\mathrm{DD}',\\[2ex]
f = -\dfrac{1}{\sqrt{\mathrm{G}}}\dfrac{\partial\sqrt{\mathrm{E}}}{\partial v}\left(\sqrt{\mathrm{G}} + \dfrac{\partial a}{\partial v}\right) + \dfrac{a}{\sqrt{\mathrm{EG}}}\mathrm{DD}'',\\[2ex]
f' = \dfrac{1}{\sqrt{\mathrm{E}}}\dfrac{\partial\sqrt{\mathrm{G}}}{\partial u}\dfrac{\partial a}{\partial u} + \dfrac{a}{\sqrt{\mathrm{EG}}}\mathrm{D}'^2,\\[2ex]
g = \dfrac{1}{\sqrt{\mathrm{E}}}\dfrac{\partial\sqrt{\mathrm{G}}}{\partial u}\left(\sqrt{\mathrm{G}} + \dfrac{\partial a}{\partial v}\right) + \dfrac{a}{\sqrt{\mathrm{EG}}}\mathrm{D}'\mathrm{D}''\\[2ex]
\mathrm{E}' = \left(\dfrac{1}{\sqrt{\mathrm{G}}}\dfrac{\partial\sqrt{\mathrm{E}}}{\partial v}\right)^2 + \dfrac{\mathrm{D}^2}{\mathrm{E}},\\[2ex]
\mathrm{F}' = -\dfrac{1}{\sqrt{\mathrm{EG}}}\dfrac{\partial\sqrt{\mathrm{G}}}{\partial u}\dfrac{\partial\sqrt{\mathrm{E}}}{\partial v} + \dfrac{\mathrm{DD}'}{\mathrm{E}},\\[2ex]
\mathrm{G}' = \left(\dfrac{1}{\sqrt{\mathrm{E}}}\dfrac{\partial\sqrt{\mathrm{G}}}{\partial u}\right)^2 + \dfrac{\mathrm{D}'^2}{\mathrm{E}}.
\end{array}\right.$$

L'équation aux abscisses ρ_1 et ρ_2 des foyers situés sur D, comptées à partir du point I, est

$$(4)\qquad (E'G'-F'^2)\rho^2+[E'g+G'e-F'(f+f')]\rho+eg-ff'=0,$$

et celle des développables

$$(5)\qquad (E'f'-F'e)\,du^2+[E'g-G'e+F'(f'-f)]\,du\,dv+(F'g-G'f)\,dv^2=0.$$

Explicitons les coefficients de l'équation (4). Compte tenu des relations (3), on obtient

$$E'G'-F'^2=\frac{1}{4E^2G}\left[\frac{\partial G}{\partial u}D+\frac{\partial E}{\partial v}D'\right]^2,$$

$$E'g+G'e-F'(f+f')=\frac{1}{2EG}\left[\frac{\partial G}{\partial u}D+\frac{\partial E}{\partial v}D'\right]$$
$$\times\left[\frac{a}{\sqrt{G}}\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}D''+\frac{1}{\sqrt{E}}\left(a\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}-\sqrt{G}\frac{\partial a}{\partial u}\right)D'+\frac{\sqrt{G}}{\sqrt{E}}\left(\sqrt{G}+\frac{\partial a}{\partial v}\right)D\right],$$

$$eg-ff'=\frac{a}{2EG}\left[\frac{\partial G}{\partial u}D+\frac{\partial E}{\partial v}D'\right]\left[\left(\sqrt{G}+\frac{\partial a}{\partial v}\right)D'-\frac{\partial a}{\partial u}D''\right],$$

et l'on voit que le point central ω sur le rayon D est défini par

$$(6)\qquad \overline{I\omega}=\frac{\rho_1+\rho_2}{2}=-\frac{\sqrt{EG}\left(\sqrt{G}+\frac{\partial a}{\partial v}\right)D+\sqrt{E}\left(a\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}-\sqrt{G}\frac{\partial a}{\partial u}\right)D'+\frac{aE}{\sqrt{G}}\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}D''}{\frac{\partial G}{\partial u}D+\frac{\partial E}{\partial v}D'}.$$

Donnons aussi l'expression du produit $\rho_1\rho_2$ qui nous sera utile plus loin

$$(6')\qquad \rho_1\rho_2=2aE\frac{\left(\sqrt{G}+\frac{\partial a}{\partial v}\right)D'-\frac{\partial a}{\partial u}D''}{\frac{\partial G}{\partial u}D+\frac{\partial E}{\partial v}D'}.$$

2. *Congruences* C *à points centraux invariablement liés aux plans tangents de* Σ. — Demandons-nous comment il convient de choisir la surface Σ et la congruence C associée pour que, dans toute déformation de Σ, les différents points centraux de C, supposés invariablement liés aux plans tangents de Σ, *restent points centraux pour les différentes congruences* C *déformées*.

Il faut et il suffit pour cela, que l'on puisse choisir la fonction $\overline{MI}=a(u,v)$ qui fixe dans chaque plan tangent à Σ le rayon correspondant de C, de façon que la distance $\overline{I\omega}$, qui détermine le point central, soit une fonction des deux variables u et v *restant la même fonction de* u, v lorsqu'on déforme Σ arbitrairement.

Si l'on a égard à l'expression (6) de $\overline{I\omega}$, on voit aussitôt que le coefficient de D'' doit être nul. Cela exige que l'on ait, soit $a=0$, soit $\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}=0$.

Si $a = 0$, l'expression de $\overline{I\omega}$ s'écrit

$$\overline{I\omega} = -\frac{G\sqrt{E}\,D}{\frac{\partial G}{\partial u}D + \frac{\partial E}{\partial v}D'},$$

et l'on voit que pour que $\overline{I\omega}$ ne dépende que de u, v, et non des configurations particulières que peut prendre la surface Σ en se déformant, il faut et il suffit que $\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v} = 0$.

La première hypothèse $a = 0$ rentre donc dans la deuxième $\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v} = 0$. E est une fonction de la seule variable u, que l'on peut réduire à l'unité moyennant un changement du paramètre u, et la surface Σ est seulement assujettie à avoir un élément linéaire de la forme

$$ds^2 = du^2 + G\,dv^2.$$

Σ est, comme l'on voit, une surface arbitraire rapportée à un système de ∞^1 géodésiques ($v = \text{const.}$) et à leurs trajectoires orthogonales ($u = \text{const.}$), et C est la congruence normale formée par les tangentes aux géodésiques $v = \text{const.}$ Le point central ω sur le rayon de C issu d'un point quelconque M de Σ, défini par $\overline{M\omega} = -\frac{G}{\frac{\partial G}{\partial u}}$, reste ici à une distance invariable du point M égale à la moitié du rayon de courbure géodésique de la trajectoire orthogonale des géodésiques $v = \text{const.}$ issue de M.

Plaçons-nous dans l'hypothèse générale $\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v} = 0$, $a \neq 0$.

L'élément linéaire de Σ pourra, comme il a été dit, être mis sous la forme

$$ds^2 = du^2 + G\,dv^2,$$

et les rayons D de C devront être parallèles aux tangentes d'une famille de géodésiques ($v = \text{const.}$) de Σ.

L'expression (6) de $\overline{I\omega}$ s'écrit ici

$$\overline{I\omega} = -\frac{\sqrt{G}\left(\sqrt{G} + \frac{\partial u}{\partial v}\right)D + \left(a\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u} - \sqrt{G}\frac{\partial u}{\partial u}\right)D'}{\frac{\partial G}{\partial u}D}, \tag{7}$$

et l'on voit que, pour que $\overline{I\omega}$ ne dépende pas de la configuration de Σ, il faut et il suffit que l'on ait

$$a\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u} - \sqrt{G}\frac{\partial u}{\partial u} = 0, \tag{8}$$

d'où l'on déduit

$$a = V\sqrt{G}, \tag{9}$$

V étant une fonction arbitraire du seul paramètre v.

A toute surface Σ on peut donc associer une infinité de congruences C arbitrairement déformables avec invariance des points centraux sur leurs rayons respectifs. Chaque système de ∞^1 géodésiques de Σ fournit une famille, dépendant d'une fonction arbitraire d'un argument, de telles congruences. Si $ds^2 = du^2 + G\,dv^2$ est l'élément linéaire de Σ rapporté aux ∞^1 géodésiques ($v = \text{const.}$) et leurs trajectoires orthogonales ($u = \text{const.}$), les congruences C correspondantes s'obtiennent comme il suit.

On porte, sur la tangente à la trajectoire orthogonale des géodésiques issue d'un point quelconque $M(u, v)$ *de* Σ, *une longueur* $\overline{MI} = V\sqrt{G}$ (V *étant une fonction arbitraire de* v) *et l'on mène, par le point* I *ainsi obtenu, la parallèle* D *à la tangente à la géodésique issue de* M.

En faisant varier la famille de géodésiques considérée, on obtient toutes les congruences C dont les points centraux restent invariablement liés aux plans tangents correspondants de Σ lorsqu'on déforme Σ arbitrairement.

Le point central ω sur un rayon quelconque, D, de l'une quelconque des congruences C envisagées, est défini par la relation (7) qui, compte tenu de (8) et de l'expression (9) de a, donne

$$\overline{I\omega} = -\frac{G}{\dfrac{\partial G}{\partial u}}(1 + V') - \frac{V}{2}\left(\frac{\dfrac{\partial G}{\partial v}}{\dfrac{\partial G}{\partial u}}\right), \tag{7'}$$

V' étant la dérivée de V.

3. *Propriétés des foyers et des développables des congruences* C. — Au cours d'une déformation arbitraire de Σ les congruences C qui viennent d'être déterminées jouissent de la propriété suivante : *Leurs développables ne cessent de correspondre à un réseau conjugué de* Σ.

Cette propriété de la déformation de Σ est d'une vérification directe aisée. On peut la rattacher au problème, résolu par Ribaucour (1), de la détermination de toutes les congruences C dont les rayons sont situés dans les plans tangents d'une surface Σ et invariablement liés à ces plans tangents, les développables des congruences C ne cessant de correspondre à un réseau conjugué de la surface Σ lorsque celle-ci se déforme arbitrairement.

Ribaucour a établi que les congruences C jouissant de la propriété énoncée sont caractérisées par le fait que deux foyers associés quelconques sont situés sur deux tangentes conjuguées de la surface Σ (qui sont précisément les tangentes du réseau conjugué de Σ correspondant aux développables de C), et qu'en outre, il suffit que la correspondance des développables de C et d'un

(1) A. Ribaucour, *Mémoire sur la théorie générale des surfaces courbes* (*Journ. de Math.*, 4e série, t. VII, 1891).

réseau conjugué de Σ ait lieu pour une configuration déterminée de Σ pour qu'elle subsiste dans toute autre configuration. Il a d'ailleurs montré que les congruences en question ne sont autres que les congruences des polaires des cordes de contact des différentes enveloppes de sphères centrées sur Σ.

Les congruences C déterminées par Ribaucour peuvent se déduire de l'équation (5) des développables donnée au n° 1. Explicitons cette équation que nous aurons à utiliser dans la suite. Posons

$$\begin{aligned}\Delta &= \mathrm{E}'f' - \mathrm{F}'e,\\ \Delta' &= \mathrm{E}'g - \mathrm{G}'e + \mathrm{F}'(f' - f),\\ \Delta'' &= \mathrm{F}'g - \mathrm{G}'f;\end{aligned}$$

l'équation des développables est

$$\Delta\, du^2 + \Delta'\, du\, dv + \Delta''\, dv^2 = 0,$$

où Δ, Δ', Δ'', calculés au moyen des relations (3), ont les expressions suivantes où K désigne la courbure totale de Σ :

$$\Delta = \frac{a}{\mathrm{G}\sqrt{\mathrm{EG}}}\left(\frac{\partial\sqrt{\mathrm{E}}}{\partial v}\right)^2 \mathrm{D}'^2 + \frac{1}{\mathrm{E}\sqrt{\mathrm{E}}}\frac{\partial\sqrt{\mathrm{G}}}{\partial u}\frac{\partial a}{\partial u}\mathrm{D}^2 + \frac{1}{\mathrm{EG}}\frac{\partial\sqrt{\mathrm{E}}}{\partial v}\left(a\frac{\partial\sqrt{\mathrm{G}}}{\partial u} + \sqrt{\mathrm{G}}\frac{\partial a}{\partial u}\right)\mathrm{DD}',$$

$$\begin{aligned}\Delta' = {}& \frac{a}{\mathrm{G}\sqrt{\mathrm{EG}}}\left(\frac{\partial\sqrt{\mathrm{E}}}{\partial v}\right)^2 \mathrm{D}'\mathrm{D}'' + \frac{1}{\mathrm{E}\sqrt{\mathrm{E}}}\frac{\partial\sqrt{\mathrm{G}}}{\partial u}\left(\sqrt{\mathrm{G}} + \frac{\partial a}{\partial v}\right)\mathrm{D}^2 + \frac{1}{\mathrm{E}\sqrt{\mathrm{G}}}\frac{\partial\sqrt{\mathrm{E}}}{\partial v}\frac{\partial a}{\partial u}\mathrm{D}'^2\\ &+ \frac{a}{\mathrm{E}^2}\left[\sqrt{\mathrm{E}}\frac{\partial\sqrt{\mathrm{E}}}{\partial v}\left(\sqrt{\mathrm{G}} + \frac{\partial a}{\partial v}\right) + \sqrt{\mathrm{G}}\frac{\partial\sqrt{\mathrm{G}}}{\partial u}\frac{\partial a}{\partial u} - \frac{\sqrt{\mathrm{EG}}}{\mathrm{G}}\left(\frac{\partial\sqrt{\mathrm{G}}}{\partial u}\right)^2\right]\mathrm{DD}' + a\mathrm{K}\frac{\partial\sqrt{\mathrm{G}}}{\partial u}\frac{\partial\sqrt{\mathrm{E}}}{\partial v},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Delta'' = {}& \frac{1}{\mathrm{E}\sqrt{\mathrm{E}}}\frac{\partial\sqrt{\mathrm{G}}}{\partial u}\left(\sqrt{\mathrm{G}} + \frac{\partial a}{\partial v}\right)\mathrm{DD}' - \frac{a}{\mathrm{EG}}\frac{\partial\sqrt{\mathrm{G}}}{\partial u}\frac{\partial\sqrt{\mathrm{E}}}{\partial v}\mathrm{D}'\mathrm{D}'' - \frac{a}{\mathrm{E}\sqrt{\mathrm{EG}}}\left(\frac{\partial\sqrt{\mathrm{G}}}{\partial u}\right)^2\mathrm{D}'\mathrm{D}''\\ &+ \frac{1}{\mathrm{E}\sqrt{\mathrm{G}}}\frac{\partial\sqrt{\mathrm{E}}}{\partial v}\left(\sqrt{\mathrm{G}} + \frac{\partial a}{\partial v}\right)\mathrm{D}'^2.\end{aligned}$$

Si, à partir des expressions précédentes de Δ, Δ', Δ'', on forme la condition pour que les développables d'une congruence C correspondent à un réseau conjugué de Σ, à savoir

$$\mathrm{D}\Delta'' - \mathrm{D}'\Delta' + \mathrm{D}''\Delta = 0,$$

on obtient sans peine

$$\mathrm{K}\left(\frac{\partial\mathrm{G}}{\partial u}\mathrm{D} + \frac{\partial\mathrm{E}}{\partial v}\mathrm{D}'\right)\left(\sqrt{\mathrm{G}}\frac{\partial a}{\partial u} - a\frac{\partial\sqrt{\mathrm{G}}}{\partial u}\right) = 0.$$

La nullité du premier facteur exprime que la surface Σ est développable, et correspond à un cas d'indétermination évident que nous exclurons dans la suite. Le second facteur $\left(\frac{\partial\mathrm{G}}{\partial u}\mathrm{D} + \frac{\partial\mathrm{E}}{\partial v}\mathrm{D}'\right)$ ne peut être nul pour toute déformation de Σ que si l'on a

$$\frac{\partial\mathrm{G}}{\partial u} = \frac{\partial\mathrm{E}}{\partial v} = 0,$$

soit

$$E = f(u), \qquad G = \varphi(v),$$

ce qui ramène au cas exclu où Σ est développable.

La condition pour que les développables de C correspondent à un réseau conjugué de Σ se réduit donc en définitive à

$$\sqrt{G}\frac{\partial a}{\partial u} - a\frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u} = 0,$$

d'où l'on déduit

$$a = V\sqrt{G} \qquad (\overset{\circ}{V} = \text{fonction arbitraire de } v),$$

A toute surface Σ on peut donc associer, conformément au résultat de Ribaucour, une infinité de congruences C dont les développables ne cessent de correspondre à un réseau conjugué de Σ lorsque Σ se déforme arbitrairement. On voit en outre qu'à partir de tout système orthogonal de $\Sigma(ds^2 = Edu^2 + Gdv^2)$, on peut construire une infinité de congruences C en portant, sur la tangente à la courbe $u = \text{const.}$ issue d'un point quelconque M, une longueur $\overline{MI} = V\sqrt{G}$, et en menant par I la parallèle à la tangente à la courbe $v = \text{const.}$

La construction générale précédente est précisément (*voir* le n° 2) celle qui, appliquée au cas où Σ est rapportée à une famille de géodésiques et à leurs trajectoires orthogonales ($ds^2 = du^2 + G\,dv^2$), fournit les congruences C, arbitrairement déformables avec Σ, dont les points centraux restent invariablement liés aux plans tangents contenant les différents rayons, lorsque Σ se déforme arbitrairement. Ces congruences jouissent donc bien, comme on l'avait annoncé, de la propriété que leurs développables ne cessent, au cours d'une déformation arbitraire de Σ, de correspondre à un réseau conjugué de Σ. Et la proposition générale de Ribaucour montre en outre que, pour chaque position du point M sur Σ, les tangentes conjuguées du réseau correspondant aux développables d'une congruence C sont les droites MF_1, MF_2, F_1 et F_2 étant les foyers du rayon de C situé dans le plan tangent en M à Σ.

Considérons dès lors la droite $M\omega$, joignant un point quelconque M de Σ au point central, ω, du rayon D d'une congruence C associée à Σ situé dans le plan tangent en M. Cette droite reste invariablement liée au plan tangent en M à Σ lorsque Σ se déforme puisqu'il en est ainsi du point ω, et l'ensemble des droites $M\omega$ enveloppe sur Σ une famille de courbes qui, avec les géodésiques $v = \text{const.}$, constitue un réseau (évidemment non conjugué) *invariant* au cours d'une déformation arbitraire de Σ. Ici et dans toute la suite nous entendons, par *réseau invariant de* Σ, un réseau dont les courbes des deux familles sont constamment constituées par les mêmes points de Σ lorsque Σ se déforme.

Le parallélisme du rayon D et de la tangente à la géodésique $v = \text{const.}$ issue de M, et la symétrie des deux foyers F_1, F_2 portés par D par rapport au point central ω, montrent que les deux tangentes conjuguées MF_1, MF_2 de Σ, sont

conjuguées harmoniques par rapport aux tangentes du réseau invariant qui vient d'être mis en évidence. Il en résulte que, pour les congruences C que nous étudions, le réseau de Σ qui correspond aux développables (de tangentes MF_1, MF_2) conserve, au cours d'une déformation arbitraire de Σ, la double propriété de *rester conjugué* (au sens de Dupin), et *de partager harmoniquement un réseau invariant de* Σ, à savoir le réseau déterminé par les géodésiques $v = \text{const.}$ et par les enveloppes des droites $M\omega$.

Nous étudierons plus loin en détail (n° 6) les liens qui existent entre les deux propriétés précédentes. Pour l'instant nous nous bornerons à noter la définition géométrique suivante, résultant de ce qui précède, des congruences C à points centraux invariants par déformation arbitraire de la surface associée Σ.

Envisageons l'une quelconque C de ces congruences; c'est, comme nous l'avons dit, la congruence des polaires des cordes de contact d'une enveloppe de sphères centrées aux différents points M de Σ.

Les courbes décrites par le centre de la sphère enveloppée lorsque son rayon conserve une valeur constante constituent une famille de courbes qui, pour une enveloppe de sphère arbitraire, est une famille arbitraire de ∞^1 courbes de Σ. Pour les enveloppes de sphères donnant lieu aux congruences C actuelles, cette famille de courbes est une *famille quelconque de* ∞^1 *géodésiques de* Σ. Cette propriété est caractéristique des congruences C, et permet d'énoncer ainsi la construction géométrique de ces congruences :

Étant donnée une surface quelconque Σ, considérons sur cette surface un système quelconque de ∞^1 géodésiques; centrons aux différents points d'une même géodésique quelconque ∞^1 sphères de même rayon R, la loi de variation de R lorsqu'on passe d'une géodésique aux autres étant choisie arbitrairement; *la congruence des polaires des cordes de contact des enveloppes de sphères ainsi obtenues est la congruence* C *la plus générale*.

ρ_1 et ρ_2 étant les distances des deux foyers situés sur un rayon quelconque D de C au pied I de la perpendiculaire menée du point M sur D, la somme $(\rho_1 + \rho_2)$ reste constante par déformation arbitraire de Σ et a l'expression $2\overline{I\omega}$ fournie par la relation $(7')$ du n° 2. D'autre part, si l'on envisage la congruence des cordes de contact (Δ), congruence dont les rayons Δ sont les polaires des rayons D de (C), on sait (propriété générale des congruences des cordes de contact des enveloppes de sphères) que le produit $(r_1 r_2)$ des distances des foyers situés sur un rayon quelconque Δ au plan tangent au point correspondant M de Σ (ou à la perpendiculaire commune MI de D et Δ) reste constant sur chaque rayon lorsque Σ se déforme. Les enveloppes de sphères centrées aux différents points d'une famille quelconque de ∞^1 géodésiques d'une surface quelconque, le rayon de la sphère génératrice étant le même sur une même géodésique et variant d'une géodésique à l'autre suivant une loi arbitraire, jouissent donc de la propriété suivante :

Au cours d'une déformation arbitraire de la déférente, l'une des deux fonctions symétriques élémentaires des abscisses des foyers sur deux rayons homologues quelconques de la congruence des cordes de contact et de celle de leurs polaires (comptées à partir de la perpendiculaire commune) reste invariable, à savoir, le produit pour la congruence des cordes de contact, et la somme pour la congruence de leurs polaires.

4. *Caractérisation de certains types de surfaces par des propriétés métriques invariantes de congruences associées.* — La considération des fonctions symétriques élémentaires des abscisses ρ_1 et ρ_2 des foyers dans une congruence formée de droites situées dans les plans tangents d'une surface ou perpendiculaires à ces plans tangents, les abscisses étant comptées, dans le premier cas à partir de la projection orthogonale I du point de contact M du plan tangent contenant un rayon quelconque D de la congruence sur ce rayon, et dans le second cas à partir de la trace du rayon sur le plan tangent correspondant, permet de caractériser des types intéressants de surfaces.

En ce qui concerne les congruences à rayons orthogonaux aux différents plans tangents d'une surface S et invariablement liés à ces plans, congruences pour lesquelles le produit $\rho_1\rho_2$ reste invariant sur chaque rayon lorsqu'on déforme S arbitrairement, j'ai montré (1) qu'il n'existe, en dehors des fonctions de la forme $f[u, v, (\rho_1\rho_2)]$ (u et v étant les coordonnées curvilignes sur S) où ρ_1 et ρ_2 ne figurent que par leur produit, aucune autre fonction de la forme $f(u, v, \rho_1, \rho_2)$ restant invariante par déformation arbitraire de S, *à moins que cette fonction ne se réduise à* $\rho_1+\rho_2$, La valeur invariante de $\rho_1+\rho_2$ est alors *zéro*, et la surface S est *une déformée de surface spirale quelconque*.

Le cas où les rayons de la congruence envisagée sont dans les plans tangents aux différents points M d'une surface S (ρ_1 et ρ_2 étant alors les distances algébriques de deux foyers associés quelconques à la projection orthogonale I du point M sur le rayon qui les porte) donne lieu à la remarque suivante. Alors que, comme on l'a vu, les congruences pour lesquelles la *somme* $(\rho_1+\rho_2)$ reste invariante par déformation arbitraire de S *ont leurs rayons parallèles aux tangentes d'une famille quelconque de* ∞^1 *géodésiques de* S, celles pour lesquelles le *produit* $\rho_1\rho_2$ reste invariant ont leurs rayons *perpendiculaires aux tangentes d'une telle famille de géodésiques de* S (on laisse de côté le cas banal fourni par les congruences admettant S pour nappe focale, pour lesquelles le produit $\rho_1\rho_2$ reste évidemment nul dans toute déformation de S).

Considérons en effet l'expression (6′) [n° 1] du produit $\rho_1\rho_2$ et exprimons que cette expression conserve, dans toute déformation de S, sur chaque rayon (u, v), une valeur $f(u, v)$ ne dépendant que du rayon envisagé. Il faut et

(1) P. VINCENSINI, *Sur la déformation des surfaces et sur quelques propriétés des surfaces spirales* (*Bull. Soc. Math. de France*, t. LIX, 1931, p. 211-228).

il suffit pour cela que l'on ait, au cours d'une déformation arbitraire de S,

$$f(u, v)\frac{\partial G}{\partial u}D + \left[f(u, v)\frac{\partial E}{\partial v} - 2aE\left(\sqrt{G} + \frac{\partial a}{\partial v}\right)\right]D' + 2aE\frac{\partial a}{\partial u}D'' = 0,$$

ce qui exige, le cas $f(u, v) = 0$ ayant été exclu,

$$(\alpha)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial G}{\partial u} = 0, \qquad \dfrac{\partial a}{\partial u} = 0, \\ \dfrac{\partial \log E}{\partial v} = \dfrac{2a}{f(u, v)}\left(\sqrt{G} + \dfrac{\partial a}{\partial v}\right). \end{cases}$$

Les deux premières équations du système précédent expriment, l'une que G est une fonction de v (que nous supposerons réduite à l'unité) et que par suite les courbes $u =$ const. de S sont des géodésiques, et l'autre que a ne dépend lui aussi que de v, c'est-à-dire de la distance géodésique du point M à une trajectoire orthogonale fixe des géodésiques précédentes. Ainsi

Étant données une surface quelconque S *et une famille arbitraire de* ∞^1 *géodésiques sur cette surface; si, dans le plan tangent en un point quelconque* M *de* S, *on mène la perpendiculaire à la tangente à la géodésique issue de* M, *au point* I *de cette tangente tel que* $\overline{MI} = a$ *soit une fonction, arbitrairement choisie, de la distance géodésique de* M *à une trajectoire orthogonale fixe des géodésiques envisagées, l'ensemble des droites obtenues constitue la congruence la plus générale se déformant avec invariance du produit* $\rho_1\rho_2$ *lorsqu'on soumet* S *à une déformation arbitraire.*

La dernière équation du système (α) fait connaître le produit $\rho_1\rho_2 = f(u, v)$ constant sur chaque rayon au cours de la déformation.

Particularisons les congruences que nous venons d'obtenir, et cherchons celles pour lesquelles il existe, au cours d'une déformation arbitraire de S, une relation donnée (quelconque) entre $\rho_1\rho_2$ et a. Il s'agit donc des congruences pour lesquelles, F_1 et F_2 étant les foyers du rayon D situé dans le plan tangent en M à S et I la projection de M sur D, $\overline{IF_1} \times \overline{IF_2}$ est une fonction déterminée de $\overline{MI}$ restant la même fonction de $\overline{MI}$ lorsqu'on déforme S arbitrairement.

La dernière équation du système (α) s'écrit (avec $G = 1$)

$$(\beta)\qquad \frac{\partial \log E}{\partial v} = \frac{2a}{f(a)}\left(1 + \frac{\partial a}{\partial v}\right).$$

Le second membre étant uniquement fonction de v puisqu'on a vu qu'il en est ainsi de a, on en déduit

$$E = UV,$$

U et V étant respectivement fonctions de u et de v.

En changeant le paramètre u on peut poser $U = 1$, et l'on voit que l'élément linéaire de S a la forme

$$ds^2 = V\,du^2 + dv^2,$$

caractéristique des surfaces applicables sur les surfaces de révolution, les courbes $u = \text{const.}$ et $v = \text{const.}$ étant respectivement les déformées des méridiens et des parallèles.

A toute surface applicable sur une surface de révolution, on peut d'ailleurs attacher une infinité de congruences du type actuel, obtenues en intégrant l'équation différentielle du premier ordre (β) après s'être donné arbitrairement la fonction $f(a)$.

Si l'on exige que a et $f(a)$ soient des *constantes*, l'équation (β) s'écrit

$$\frac{\partial \log E}{\partial v} = k\,(\text{constante}).$$

E est donc de la forme

$$E = e^{kv+c}, \qquad c = \text{const.},$$

et S est une surface *pseudosphérique*.

L'existence, pour une surface pseudosphérique S, de congruences associées pour lesquelles les deux quantités $\overline{IF_1} \times \overline{IF_2}$ et $\overline{MI}$ sont l'une et l'autre constantes et le restent au cours d'une déformation arbitraire de S, était assurée *a priori* : toute congruence formée par les normales à la deuxième nappe focale d'une congruence pseudosphérique normale quelconque admettant S pour première nappe focale jouit évidemment de la propriété d'invariance indiquée. Mais ce qui précède montre que l'existence, pour une surface S, de congruences associées jouissant de la propriété d'invariance en question est *caractéristique des surfaces pseudosphériques*.

Il convient de remarquer que les congruences générales associées à une surface quelconque S applicable sur une surface de révolution pour lesquelles $\overline{IF_1} \times \overline{IF_2} = f(\overline{MI})$, sont des congruences (de Ribaucour) particulières *à couples de foyers associés situés sur deux tangentes conjuguées de* S.

Si $\frac{du}{dv}$ définit la direction MF_1 on a, en effet,

$$\sqrt{E}\,\frac{du}{dv} = \frac{\overline{IF_1}}{\overline{MI}} = \frac{\rho_1}{a},$$

et de même, pour la direction MF_2

$$\sqrt{E}\,\frac{du}{dv} = \frac{\rho_2}{a}.$$

L'équation quadratique du faisceau (MF_1, MF_2) est

$$a^2 E\,du^2 - a\sqrt{E}(\rho_1 + \rho_2)\,du\,dv + \rho_1\rho_2\,dv^2 = 0.$$

Les directions MF_1, MF_2 sont conjuguées sur S si l'on a

$$a^2 E D'' + a\sqrt{E}(\rho_1 + \rho_2) D' + \rho_1\rho_2 D = 0,$$

et cette dernière équation est vérifiée pour les congruences actuelles, comme le montrent les expressions (6) et (6′) du n° 2 de $\rho_1+\rho_2$ et de $\rho_1\rho_2$ où, conformément aux équations (α), on remplace G par 1 et $\frac{\partial a}{\partial u}$ par zéro.

Nous pouvons en définitive énoncer le résultat général suivant :

Les surfaces S *auxquelles on peut associer des congruences, formées de droites situées dans leurs plans tangents et invariablement liées à ces plans, telles que, si* I *est la projection orthogonale de chaque point* M *de* S *sur le rayon* D *situé dans le plan tangent en* M *et si* F_1, F_2 *sont les foyers de* D, *le produit* $\overline{IF_1}\times\overline{IF_2}$ *soit une fonction déterminée (quelconque) de* $\overline{MI}$ *et reste la même fonction* $f(\overline{MI})$ *lorsque* S *se déforme arbitrairement, sont les surfaces applicables sur les surfaces de révolution.*

A chaque surface S *applicable sur une surface de révolution on peut associer une infinité de familles de* ∞^1 *congruences du type considéré; chaque forme de la fonction* $f(\overline{MI})$ *donne l'une de ces familles, et les* ∞^1 *congruences qui la constituent ont leurs rayons perpendiculaires aux tangentes aux déformées des méridiens, les positions de ces rayons dans les différents plans tangents étant fournies par l'intégration de l'équation différentielle du premier ordre* (β).

En outre, toutes les congruences du type actuel ont leurs couples de foyers associés situés sur deux tangentes conjuguées de S (*sont des congruences de Ribaucour*).

Parmi les congruences précédentes attachées à une surface quelconque S applicable sur une surface de révolution, figurent évidemment les congruences (cycliques) formées par les axes des cercles des systèmes cycliques arbitrairement déformables avec S, pour lesquelles les cercles sont orthogonaux aux plans tangents à S, leurs plans passant par les points de contact correspondants. Ces congruences spéciales, que j'ai étudiées dans un Mémoire antérieur (1), dépendent de deux constantes arbitraires. Elles sont loin, comme l'on voit, d'épuiser la famille complète qui vient d'être déterminée, dont le degré de généralité est celui d'une fonction arbitraire d'un argument.

5. *Nouvelles propriétés caractéristiques des surfaces applicables sur les surfaces de révolution et sur les développées de surfaces minima.* — Revenons aux congruences C à points centraux ω invariants déterminées au n° 2, et envisageons spécialement le cas où le réseau invariant formé par les géodésiques $v=$ const. et les enveloppes des droites $M\omega$ est *orthogonal*. Les foyers F_1, F_2 portés par un rayon quelconque D de C sont alors symétriques par rapport à la droite $M\omega$, et restent, au cours d'une déformation arbitraire de la surface Σ, équidistants du point M correspondant de Σ.

(1) P. VINCENSINI, *Sur la formation des systèmes cycliques* (*Ann. Éc. Norm.*, 1930).

Le milieu ω de F_1F_2 est constamment confondu avec le point I où D coupe la tangente à la trajectoire orthogonale des géodésiques $v = \text{const.}$, et l'on a, sur toute déformée de Σ, $\overline{I\omega} = 0$.

L'expression (7) de $\overline{I\omega}$, où l'on a tenu compte de la relation (8) qui définit les congruences C, est

$$\overline{I\omega} = \frac{-\sqrt{G}\left(\sqrt{G} + \frac{\partial a}{\partial v}\right)}{\frac{\partial G}{\partial u}},$$

et l'on voit que, pour les congruences jouissant de la propriété indiquée, on a

$$\sqrt{G} + \frac{\partial a}{\partial v} = 0. \tag{10}$$

Si, en changeant la fonction V dans l'expression (9) de a, nous donnons à la fonction arbitraire V de v la forme $-\frac{V}{V'}$ (V' étant la dérivée de V), de sorte que

$$a = -\frac{V}{V'}\sqrt{G}, \tag{11}$$

et si nous portons l'expression de $\sqrt{G}$ déduite de (11) dans (10), nous obtenons

$$\frac{1}{a}\frac{\partial a}{\partial v} = \frac{V'}{V},$$

d'où

$$a = UV, \tag{12}$$

U étant une fonction arbitraire de u.

Dès lors, (11) donne

$$\sqrt{G} = -UV', \tag{13}$$

et le ds^2 de la surface Σ affecte la forme

$$ds^2 = du^2 + U^2V'^2\,dv^2,$$

soit en prenant pour paramètre v la fonction V [ce qui donne pour l'expression (12) de a : $a = Uv$]

$$ds^2 = du^2 + U^2\,dv^2, \tag{14}$$

forme qui caractérise les surfaces applicables sur les surfaces de révolution, rapportées aux géodésiques transformées des méridiens et aux transformées des parallèles. Nous pouvons donc énoncer ce résultat :

Si une congruence C *dont les rayons sont situés dans les plans tangents d'une surface* Σ *se déforme, par déformation arbitraire de* Σ, *de façon que les couples de foyers associés soient constamment équidistants du point de contact correspondant de* Σ, *les points centraux restant invariablement liés aux plans tangents,* Σ *est nécessairement applicable sur une surface de révolution.*

A toute surface Σ applicable sur une surface de révolution sont d'ailleurs associées ∞^1 congruences C jouissant des propriétés indiquées, correspondant aux ∞^1 mises possibles du ds^2 sous la forme (14).

Nous avons vu qu'avec le choix fait pour le paramètre v, l'expression (12) de a définissant une congruence C attachée à Σ est

$$a = \mathrm{U}v.$$

Si l'on observe que le choix en question ($v = \mathrm{V}$) entraîne [d'après (13)] que U soit négatif, on constate que, pour avoir le point I (défini par $\overline{\mathrm{MI}} = a = \mathrm{U}v$), où le rayon D d'une congruence C relatif à un point quelconque M de Σ, coupe la tangente MT en M à la déformée de parallèle, *il suffit de prendre le point où* MT *coupe, normalement, la développante de la déformée de parallèle ayant son point de rebroussement sur la déformée d'un méridien fixe.*

En faisant varier le méridien fixe de la construction précédente, on obtient les ∞^1 congruences C solutions du problème.

Si Σ a la forme révolutive, les développantes dont il vient d'être question sont des développantes de cercle, et la construction des congruences C affecte une forme particulièrement simple.

Si Σ est à courbure totale constante, le nombre des congruences C associées est ∞^3 au lieu de ∞^1. Supposons Σ à courbure totale constante *positive*, et appliquons-la sur la sphère Σ_0 de même courbure. Les congruences C se déforment, et se transforment en des congruences qui, ayant leurs couples de foyers associés équidistants du point où le plan tangent à Σ_0 qui les contient touche la sphère, donc du centre O de celle-ci, *sont des congruences admettant pour enveloppée moyenne le point* O. D'ailleurs, les différents segments focaux des congruences C à enveloppée moyenne point relatives à la sphère Σ_0 *sont vus des points correspondants* M *de* Σ_0 *sous des angles droits*, car les directions MF_1, MF_2 étant celles de deux tangentes conjuguées de la sphère, sont orthogonales.

Dans le cas où Σ est de révolution, à la propriété des couples de foyers associés des congruences C d'être *équidistants des points correspondants* M *de* Σ, s'ajoute une propriété en quelque sorte duale des plans focaux : *les plans focaux relatifs à deux foyers associés sont symétriques par rapport au plan tangent au point correspondant* M *de* Σ.

Pour établir cette nouvelle propriété, il suffit de montrer que les directions des tangentes aux images sphériques des développables, sont bissectées, par la direction $(\mathrm{X}_2, \mathrm{Y}_2, \mathrm{Z}_2)$ de la perpendiculaire MI au rayon (u, v) de C, et par la direction $(\mathrm{X}_3, \mathrm{Y}_3, \mathrm{Z}_3)$ de la normale en M à la surface Σ.

Le calcul [au moyen des relations (3)] des coefficients de l'équation (5), qui définit ces développables moyennant les hypothèses

$$\mathrm{E} = 1, \qquad \sqrt{\mathrm{G}}\frac{\partial a}{\partial u} - a\frac{\partial \sqrt{\mathrm{G}}}{\partial u} = 0, \qquad \sqrt{\mathrm{G}} + \frac{\partial a}{\partial v} = 0$$

relatives aux congruences particulières actuelles, fournit sans difficulté l'équation

$$D\,du^2 - D''\,dv^2 = 0. \tag{15}$$

(15) définit les développables de C *quelle que soit la forme prise par* Σ au cours d'une déformation de celle-ci. Mais le cas qui nous intéresse actuellement où Σ a la forme de révolution permet, notons-le, de faire la remarque suivante. On a alors $DD'' = KG$ (K étant la courbure totale de Σ), et l'on voit que *les développables de* C *ne sont réelles* ($DD'' > 0$) *que dans les régions de* C *correspondant aux zones de* Σ *pour lesquelles la courbure* K *est positive*. Ainsi, si Σ est une sphère ou l'une quelconque de ses déformées révolutives, toutes les congruences C associées ont leurs développables réelles; si Σ est une surface pseudosphérique de révolution, les congruences C ont toutes leurs développables imaginaires.

Cela étant, les paramètres directeurs des tangentes aux images sphériques des développables issues du rayon $D(u, v)$ de C sont dX_1, dY_1, dZ_1, les différentielles étant prises successivement dans les deux directions définies par (15), soit

$$\frac{du}{dv} = \sqrt{\frac{D''}{D}}, \qquad \frac{du}{dv} = -\sqrt{\frac{D''}{D}}. \tag{16}$$

On a

$$dX_1 = \frac{\partial X_1}{\partial u}\,du + \frac{\partial X_1}{\partial v}\,dv, \qquad dY_1 = \ldots, \qquad dZ_1 = \ldots,$$

soit en tenant compte des relations (2) du n° 1 où l'on a remplacé E par 1 et, puisque le réseau coordonné (parallèles et méridiens) est conjugué, D' par zéro

$$dX_1 = DX_3\,du + \frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}X_2\,dv, \qquad dY_1 = \ldots, \qquad dZ_1 = \ldots.$$

Les relations (16) montrent alors que l'on peut prendre, pour paramètres directeurs des tangentes aux images sphériques des développables de C, les quantités (α, β, γ), $(\alpha', \beta', \gamma')$ ayant les expressions

$$\begin{cases} \alpha = \sqrt{DD''}X_3 + \dfrac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}X_2, & \alpha' = \sqrt{DD''}X_3 - \dfrac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}X_2, \\ \beta = \sqrt{DD''}Y_3 + \ldots\ldots, & \beta' = \sqrt{DD''}Y_3 - \ldots\ldots, \\ \gamma = \ldots\ldots\ldots\ldots, & \gamma' = \ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases} \tag{17}$$

On déduit des relations (17) que l'angle des directions (α, β, γ), $(\alpha', \beta', \gamma')$ est bissecté par les directions (X_2, Y_2, Z_2), (X_3, Y_3, Z_3). Il en résulte, comme on l'avait annoncé, que les plans focaux issus d'un rayon quelconque D de C sont *symétriques* par rapport au plan tangent correspondant de Σ.

Si θ est l'angle que chacun des plans focaux fait avec le plan tangent, on voit d'ailleurs que

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{\dfrac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}}{\sqrt{DD''}},$$

soit, en remplaçant $\sqrt{G}$ par U conformément à la forme (14) du ds^2 de Σ, et en introduisant la courbure totale de Σ $\left(K = -\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial^2\sqrt{G}}{\partial u^2} = -\frac{U''}{U}\right)$

$$\text{tg}\theta = \frac{U'}{\sqrt{-UU''}}. \tag{18}$$

L'angle 2θ des plans focaux ne dépend que de u; il est le même pour tous les rayons de C relatifs aux points d'un même parallèle de Σ.

L'expression (18) de $\text{tg}\theta$ permet aussitôt de déterminer les surfaces Σ de révolution pour lesquelles les congruences C associées sont *à angle des plans focaux constants*. Si l'on pose

$$\text{tg}\theta = \frac{1}{m} = \text{const.},$$

on a pour ces surfaces

$$\frac{U'}{\sqrt{-UU''}} = \frac{1}{m}.$$

L'intégration est immédiate et donne

$$U = (cu + d)^{\frac{1}{m^2+1}}.$$

En changeant les paramètres u, v sur Σ on peut prendre $U = u^{\frac{1}{m^2+1}}$, de sorte que les surfaces de révolution Σ donnant des congruences C à angle des plans focaux constant sont les surfaces d'élément linéaire

$$ds^2 = du^2 + U^2 dv^2 = du^2 + u^\alpha dv^2,$$

où α est un nombre arbitraire (compris entre 0 et 2 pour la réalité des plans focaux). L'angle des plans focaux est défini par

$$\text{tg}\theta = \frac{1}{m} = \sqrt{\frac{\alpha}{2-\alpha}}.$$

Un cas particulier intéressant est celui où $\alpha = 1$. On a alors

$$ds^2 = du^2 + u\,dv^2,$$

et la surface Σ est *une forme révolutive des développées de surfaces minima*.

L'angle 2θ des plans focaux des congruences C associées à ces surfaces particulières est droit, et, réciproquement, l'orthogonalité des plans focaux dans une congruence C du type actuel, exige que la surface de révolution correspondante Σ soit une forme révolutive des développées de surfaces minima.

Les congruences C sont donc ici normales, et par suite, comme on l'a rappelé dans l'Introduction, *restent normales au cours d'une déformation arbitraire de* Σ. On est ainsi conduit à énoncer le résultat suivant qui fournit une propriété *caractéristique* des développées de surfaces minima.

Les surfaces Σ *auxquelles on peut associer des congruences normales, formées de droites situées dans leurs plans tangents et invariablement liées à ces plans, telles qu'au cours d'une déformation arbitraire de* Σ :

a. les points centraux restent fixes sur leurs rayons respectifs;

b. deux foyers associés quelconques restent équidistants du point correspondant M de Σ, *sont les surfaces* Σ *applicables sur les développées de surface minima.*

A chaque surface Σ applicable sur une développée de surface minima, on peut attacher ∞^1 congruences jouissant des deux propriétés *a* et *b*, et l'on a vu plus haut par quelle construction géométrique on pouvait les obtenir.

Sur les surfaces normales à l'une quelconque des ∞^1 congruences précédentes, les lignes de courbure, qui correspondent au réseau conjugué de Σ d'équation (15), se correspondent entre elles, et les surfaces ont même représentation sphérique de leurs lignes de courbure.

6. *Congruences normales C arbitrairement déformables avec invariance des points centraux sur les rayons correspondants.* — Nous allons maintenant envisager le problème général de la recherche des congruences normales, dont les rayons sont situés dans les plans tangents d'une surface Σ (à déterminer) et invariablement liés à ces plans tangents, les points centraux relatifs aux différents rayons ne cessant, comme dans les congruences C dont il a été question dans les numéros qui précèdent, de rester invariablement liés aux plans tangents dans une déformation arbitraire de Σ.

Les congruences répondant à la question seront des congruences C spéciales (que nous continuerons à appeler C); leurs rayons D seront parallèles aux tangentes à une famille de géodésiques ($v = \text{const.}$) de la surface Σ (d'élément linéaire $ds^2 = du^2 + G\,dv^2$); ces rayons seront définis, comme on l'a vu, par l'expression

$$\overline{MI} = a = V\sqrt{G} \qquad (V = \text{fonction arbitraire de } v)$$

de la distance du point M de Σ au point où le rayon correspondant D coupe la tangente à la courbe $u = \text{const.}$, et, pour obtenir les congruences cherchées, il suffira d'exprimer la condition d'orthogonalité des plans focaux.

Cette condition se traduit par l'égalité des coefficients f et f' donnés par les formules (3) du n° 1. Si, dans les expressions de f et f', on remplace E par 1 et a par $V\sqrt{G}$, et si l'on forme l'équation $f - f' = 0$, on obtient, K étant la courbure totale de Σ

$$V\left(KG - \frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}\right) = 0.$$

$V = 0$ correspond aux congruences normales admettant Σ pour nappe focale.

En annulant le second facteur après avoir remplacé K par son expression $\left(K = -\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial^2\sqrt{G}}{\partial u^2}\right)$, on obtient l'équation définissant les surfaces Σ dont les

plans tangents portent les rayons des congruences cherchées. Cette équation est

$$\sqrt{G}\frac{\partial^2\sqrt{G}}{\partial u^2}+\left(\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}\right)^2=0,$$

soit

$$\frac{\partial^2 G}{\partial u^2}=0,$$

et l'on en déduit

$$G=\varphi(v)u+\psi(v).$$

$\varphi(v)$ et $\psi(v)$ étant des fonctions arbitraires de v.

Le ds^2 des surfaces Σ est donc

$$ds^2=du^2+[\varphi(v)u+\psi(v)]\,dv^2,$$

en changeant le paramètre v, ce ds^2 prend la forme

$$ds^2=du^2+[u+\psi(v)]\,dv^2, \tag{19}$$

caractéristique des surfaces applicables sur les surfaces réglées à plan directeur isotrope.

Toute surface de cette espèce fournit une infinité de congruences C que l'on obtient, une fois l'élément linéaire mis sous la forme (19) en menant, dans le plan tangent en chaque point M, la parallèle à la tangente à la géodésique $v=$ const. issue de M par le point I de la tangente à la courbe $u=$ const. tel que $\overline{MI}=a=V\sqrt{u+\psi(v)}$; V est une fonction arbitraire de v.

Pour $\psi(v)=$ const., on obtient les congruences normales C attachées aux surfaces applicables sur les développées de surfaces minima, dont il a été question au numéro précédent.

Le problème que nous nous étions posé est complètement résolu, et sa solution nous conduit à énoncer cette propriété caractéristique des surfaces applicables sur les surfaces réglées à plan directeur isotrope :

Abstraction faite de la déformation d'une congruence normale quelconque par déformation de l'une ou l'autre de ses nappes focales, les surfaces applicables sur les surfaces réglées à plan directeur isotrope sont les seules auxquelles on peut associer des congruences normales C, *formées de droites situées dans leurs plans tangents et invariablement liées à ces plans, jouissant de la propriété que les points centraux relatifs à leurs différents rayons restent invariablement liés aux plans tangents correspondants au cours d'une déformation arbitraire de la surface.*

En tant que congruences arbitrairement déformables avec invariance des points centraux sur leurs rayons respectifs, les congruences normales C qui viennent d'être déterminées jouissent de la propriété générale signalée au n° 3, suivant laquelle leurs développables ne cessent, au cours d'une déformation arbitraire de la surface Σ dont les plans tangents contiennent les différents

rayons, de correspondre à un réseau conjugué de Σ. Les surfaces S orthogonales aux rayons d'une congruence C attachée à Σ (dont les points supposés fixés sur les rayons correspondants ne cessent, comme l'on sait, d'être distribués sur une surface normale à C quand Σ se déforme) sont donc telles que *leurs lignes de courbure correspondent à un réseau conjugué de* Σ, *la propriété subsistant dans une déformation arbitraire de* Σ.

Si le ds^2 de Σ a la forme particulière envisagée par Bianchi signalée dans l'Introduction

$$ds^2 = du^2 + \left(u - \frac{v}{2} + c\,e^{-2v}\right) dv^2,$$

il suffit, comme on le constate sans peine, de prendre, dans la formule qui fixe les rayons d'une congruence C associée à $\Sigma\left[\overline{MI} = a = V\sqrt{u + \psi(v)}\right]$, la fonction V égale à l'unité $\left(\overline{MI} = a = \sqrt{G} = \sqrt{u - \frac{v}{2} + ce^{-2v}}\right)$, pour que parmi les surfaces orthogonales aux rayons de C figure une surface minima $(\mathfrak{M})$ restant minima dans toute déformation de Σ. $(\mathfrak{M})$ est le lieu des points centraux ω sur les différents rayons de C. Sur un rayon quelconque $D(u, v)$ ω est défini par la formule $(7')$ du n° 2 qui, avec les formes actuelles de V et de G, donne

$$\overline{I\omega} = -u + \frac{v}{2} + \frac{1}{4}.$$

Dans ce cas, on a cette circonstance particulière que *les différents réseaux conjugués de* $(\mathfrak{M})$ *correspondent aux différents réseaux conjugués de* Σ, *la correspondance subsistant dans toute déformation de* Σ.

7. *Congruences générales arbitrairement déformables avec réseau invariant associé.* — Les congruences C dont les rayons sont situés dans les plans tangents d'une surface Σ et invariablement liés à ces plans tangents, pour lesquelles les points centraux restent fixes dans les plans tangents correspondants lorsque Σ se déforme arbitrairement, sont telles, comme nous l'avons vu au n° 3, d'une part que les droites joignant le point de contact M d'un plan tangent quelconque de Σ aux foyers F_1, F_2 du rayon de C situé dans ce plan soient constamment conjuguées sur Σ au cours d'une déformation arbitraire de la surface, et d'autre part que ces mêmes droites MF_1, MF_2 partagent harmoniquement, dans n'importe quelle configuration de Σ déformée, les tangentes en M d'un réseau invariant de Σ.

Nous allons étudier maintenant, d'une façon générale, le problème de la recherche des congruences C, dont les rayons sont situés dans les plans tangents d'une surface Σ et invariablement liés à ces plans tangents, les droites MF_1, MF_2 joignant un point quelconque M de Σ aux foyers F_1, F_2 du rayon correspondant de C *ne cessant, au cours d'une déformation arbitraire de* Σ, *de partager harmoniquement les tangentes en* M *d'un réseau invariant de* Σ.

Le résultat auquel nous allons parvenir est assez remarquable.

Quelle que soit la surface Σ, il existe *deux* familles de congruences C (C_1 et C_2) répondant à la question. L'une des familles, C_1, est constituée par les congruences générales déterminées par Ribaucour et signalées au n° 3. L'autre famille, C_2, peut être caractérisée par une circonstance géométrique analogue à celle qui définit les congruences étudiées dans les numéros précédents (fixité du point central sur chaque rayon). Pour les congruences C_2, la fixité affecte l'*un* des deux foyers F_1, F_2 (à l'exclusion de l'autre) : *l'une des nappes focales de* C_2 *est toujours constituée par les mêmes points des plans tangents de* Σ *lorsque* Σ *se déforme arbitrairement.*

En ce qui concerne les congruences C_1, M. J. Drach, dans un travail antérieur (1), a établi l'existence d'un réseau invariant, harmonique au réseau conjugué de Σ de tangentes MF_1, MF_2. M. Drach a remarqué que si M se déplace sur l'une ou l'autre des deux courbes du réseau invariant relatif à une congruence C_1, le déplacement du point où la tangente en M à la courbe envisagée coupe le rayon D de C_1 situé dans le plan tangent en M à Σ, s'effectue normalement à la perpendiculaire MI menée de M à D. Cette remarque fournit, pour les congruences C_1, une définition géométrique très simple du réseau invariant associé.

Il restait à se demander dans quelle mesure l'existence du réseau invariant de M. Drach caractérisait les congruences C_1; c'est ce que la suite va nous montrer.

Nous continuerons à employer les mêmes notations : Σ est rapportée à un système orthogonal $(u, v)[ds^2 = E\,du^2 + G\,dv^2]$, le rayon D de la congruence C situé dans le plan tangent en M à Σ est perpendiculaire à la tangente à la courbe $u = \text{const.}$ au point I dont on désigne par $a(u, v)$ la distance au point $M(\overline{MI} = a)$, et les abscisses $\overline{IF_1}$, $\overline{IF_2}$ des foyers de D sont désignées respectivement par ρ_1 et ρ_2.

Les directions MF_1, MF_2 sont déterminées respectivement par

$$\frac{du}{dv} = \frac{\sqrt{G}}{\sqrt{E}}\,\frac{\rho_1}{a}; \qquad \frac{du}{dv} = \frac{\sqrt{G}}{\sqrt{E}}\,\frac{\rho_2}{a},$$

et leur ensemble est défini par l'équation

$$a^2 E\,du^2 - a\sqrt{EG}\,(\rho_1 + \rho_2)\,du\,dv + G\rho_1\rho_2\,dv^2 = 0,$$

qui, en tenant compte des expressions (6) et (6′) de $\rho_1 + \rho_2$ et de $\rho_1\rho_2$ données au n° 1, s'écrit

$$(20)\quad a\left(\sqrt{G}\,\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}\,D + \sqrt{E}\,\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}\,D'\right)du^2 + \left[G\left(\sqrt{G} + \frac{\partial a}{\partial v}\right)D + a\sqrt{E}\,\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}\,D'' + \sqrt{G}\left(a\,\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u} - \sqrt{G}\,\frac{\partial a}{\partial u}\right)D'\right]du\,dv + G\left[\left(\sqrt{G} + \frac{\partial a}{\partial v}\right)D' - \frac{\partial a}{\partial u}\,D''\right]dv^2 = 0.$$

(1) J. Drach, *Sur les surfaces enveloppes de sphères et la déformation des surfaces* [*C. R. Cong. Soc. sav.*, 1925 (Sciences)].

Donnons-nous un réseau invariant dans une déformation arbitraire de Σ par son équation quadratique

$$A\,du^2 + 2B\,du\,dv + C\,dv^2 = 0, \tag{21}$$

où A, B, C ne dépendent que de u et v.

Exprimons que les réseaux (20) et (21) se divisent harmoniquement.

Si nous désignons par Δ, Δ', Δ'' les coefficients de (20), la condition pour qu'il en soit ainsi est

$$\Delta C - \Delta' B + \Delta'' A = 0,$$

soit

$$\begin{aligned} &a\left(\sqrt{G}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}D + \sqrt{E}\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}D'\right)C \\ &- \left[G\left(\sqrt{G}+\frac{\partial a}{\partial v}\right)D + a\sqrt{E}\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}D'' + \sqrt{G}\left(a\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u} - \sqrt{G}\frac{\partial a}{\partial u}\right)D'\right]B \\ &+ G\left[\left(\sqrt{G}+\frac{\partial a}{\partial v}\right)D' - \frac{\partial a}{\partial u}D''\right]A = 0. \end{aligned}$$

La relation précédente est linéaire et homogène en D, D′, D″. Pour qu'elle subsiste dans toute déformation de la surface Σ, il faut et il suffit que les coefficients de D, D′, D″ soient identiquement nuls. Ceci nous conduit, pour la détermination des congruences cherchées, au système

$$\left\{\begin{aligned} G\left(\sqrt{G}+\frac{\partial a}{\partial v}\right)B - a\sqrt{G}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}C &= 0, \\ G\left(\sqrt{G}+\frac{\partial a}{\partial v}\right)A - \sqrt{G}\left(a\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u} - \sqrt{G}\frac{\partial a}{\partial u}\right)B + a\sqrt{E}\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}C &= 0, \\ G\frac{\partial a}{\partial u}A + a\sqrt{E}\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}B &= 0, \end{aligned}\right. \tag{22}$$

dans lequel, pour une surface Σ donnée (E et G connus), la fonction $a(u, v)$ doit être choisie de manière à assurer la compatibilité en A, B, C. Cette compatibilité s'exprime par l'équation

$$\begin{vmatrix} 0 & \sqrt{G}\left(\sqrt{G}+\dfrac{\partial a}{\partial v}\right) & -\dfrac{\partial\sqrt{G}}{\partial u} \\ \sqrt{G}+\dfrac{\partial a}{\partial v} & -\sqrt{G}\left(a\dfrac{\partial\sqrt{G}}{\partial u} - \sqrt{G}\dfrac{\partial a}{\partial u}\right) & \sqrt{E}\dfrac{\partial\sqrt{E}}{\partial v} \\ \dfrac{\partial a}{\partial u} & a\sqrt{E}\dfrac{\partial\sqrt{E}}{\partial v} & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

qui, développée, s'écrit

$$\left(\sqrt{G}\frac{\partial a}{\partial u} - a\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}\right)\left[\sqrt{E}\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}\left(\sqrt{G}+\frac{\partial a}{\partial v}\right) + \sqrt{G}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}\frac{\partial a}{\partial u}\right] = 0. \tag{23}$$

Les deux familles C_1, C_2 solutions du problème, annoncées au début de ce numéro, correspondent à la nullité de l'un ou l'autre des deux facteurs du premier membre de l'équation (23).

CONGRUENCES C_1. — Elles sont déterminées par l'équation

$$a\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}-\sqrt{G}\frac{\partial a}{\partial u}=0, \tag{24}$$

qui n'est autre que l'équation obtenue au n° 3, définissant les congruences de Ribaucour pour lesquelles MF_1 et MF_2 sont des couples de directions conjuguées de Σ. Le réseau invariant, auquel le réseau conjugué de tangentes MF_1, MF_2 reste constamment harmonique au cours de la déformation de Σ, est défini par l'équation (21) où A, B, C ont les expressions données par la résolution du système compatible (22).

CONGRUENCES C_2. — Elles sont déterminées par l'équation

$$\sqrt{E}\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}\left(\sqrt{G}+\frac{\partial a}{\partial v}\right)+\sqrt{G}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}\frac{\partial a}{\partial u}=0, \tag{25}$$

qui, pour une surface Σ donnée rapportée à un système orthogonal quelconque (u, v), définit a par l'intégration d'une équation aux dérivées partielles linéaire du premier ordre.

Au sujet de l'équation (25) nous pouvons faire la remarque suivante qui nous sera utile plus loin. Considérons les coefficients f et f' de la première forme fondamentale d'une congruence quelconque, dont les rayons sont disposés dans les plans tangents de Σ perpendiculairement aux tangentes aux courbes $u=\text{const}$. Ces coefficients sont définis par les formules (3) du n° 1; formons la différence $f'-f$; nous obtenons

$$f'-f=\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}\left(\sqrt{G}+\frac{\partial a}{\partial v}\right)+\frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}\frac{\partial a}{\partial u}-aK\sqrt{EG},$$

K étant la courbure totale de Σ.

On déduit de là que l'équation (25) peut s'écrire

$$f'-f=aK\sqrt{EG}. \tag{26}$$

On voit sous cette forme que si l'on exclut les surfaces Σ développables ($K=0$), et, pour les surfaces quelconques, le cas où $a=0$ qui correspond aux congruences normales admettant Σ pour nappe focale, on ne pourra jamais avoir, pour une congruence C_2, $f'-f=0$. Autrement dit la famille des congruences C_2 *ne renferme aucune congruence normale*. Les congruences C_1 de Ribaucour, au contraire, peuvent être normales, et il résulte de ce qui vient d'être dit que :

Pour qu'une congruence *normale* dont les rayons sont situés dans les plans tangents d'une surface Σ soit du type de Ribaucour, *il faut et il suffit, que le*

réseau de Σ *dont les tangentes en chaque point* M *sont les droites joignant* M *aux foyers du rayon situé dans le plan tangent en* M, *divise harmoniquement un réseau invariant dans une déformation arbitraire de* Σ.

Il est clair que pour certains ds^2 spéciaux il peut y avoir des congruences C (nécessairement non normales d'après ce qui précède) appartenant à la fois aux deux familles C_1 et C_2. La détermination de ces ds^2, qui résulte de l'intégration du système [(24), (25)], n'exige qu'une quadrature. On peut se donner arbitrairement G, et E se trouve défini par

$$E = -\int \frac{2V\sqrt{G}\left(\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}\right)^2}{\sqrt{G}(1+V')+V\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial v}}\,dv,$$

où V est une fonction arbitraire de v.

L'expression $a = V\sqrt{G}$ définit alors une congruence C attachée au ds^2 obtenu, et appartenant à la fois aux deux types C_1 et C_2.

8. *Propriétés des congruences* C_2. — Si l'on résout le système (22) dans l'hypothèse (25) relative aux congruences C_2, on obtient pour les coefficients de l'équation

$$A\,du^2 + 2B\,du\,dv + C\,dv^2 = 0$$

définissant le réseau invariant attaché à ces congruences

$$\frac{A}{a^2\sqrt{E}\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}} = \frac{B}{-aG\frac{\partial a}{\partial u}} = \frac{C}{\frac{1}{\sqrt{E}\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}}G^2\left(\frac{\partial a}{\partial u}\right)^2}. \tag{27}$$

Les relations (27) montrent que l'on a

$$B^2 - AC = 0,$$

et que, par suite, pour les congruences C_2 *les deux familles de courbes du réseau invariant de* Σ *sont confondues*.

Sur la surface Σ relative à une congruence C_2, la tangente MT en un point quelconque M, aux deux courbes confondues du réseau invariant passant par ce point, est définie par

$$\frac{du}{dv} = -\frac{B}{A},$$

soit d'après (27)

$$\frac{du}{dv} = \frac{G\frac{\partial a}{\partial u}}{a\sqrt{E}\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}}.$$

MT coupe le rayon D de C_2 situé dans le plan tangent en M à Σ, en un point P dont la position est définie, dans le plan tangent, par ses coordonnées (ξ, η)

relatives aux axes constitués par les tangentes aux courbes $v = \text{const.}$, $u = \text{const.}$, qui sont respectivement

$$(P)\begin{cases} \xi = \dfrac{\sqrt{G}\dfrac{\partial \alpha}{\partial u}}{\dfrac{\partial \sqrt{E}}{\partial v}}, \\ \eta = \alpha. \end{cases}$$

P reste *fixe* dans le plan tangent en M lorsque Σ se déforme arbitrairement.

De là résulte aussitôt la circonstance annoncée au numéro précédent relative à la fixité, sur chaque rayon d'une congruence C_2, de l'*un* des deux foyers F_1, F_2 portés par ce rayon, au cours d'une déformation arbitraire de Σ. Les deux droites MF_1, MF_2 divisant harmoniquement la droite double MT, l'une de ces droites, soit MF_1, est confondue avec MT, et le foyer F_1, intersection de MT et de D, est le point P ci-dessus dont la position reste invariable, dans le plan tangent en M, par déformation arbitraire de Σ. La position du foyer fixe F_1 sur chaque rayon D est définie, au moyen de sa distance au point I où D coupe la tangente à la courbe $u = \text{const.}$, par la formule

$$\overline{IF_1} = \rho_1 = \frac{\sqrt{G}\dfrac{\partial \alpha}{\partial u}}{\dfrac{\partial \sqrt{E}}{\partial v}}.$$

Les congruences du type C_2 jouissent, comme l'on voit, de la propriété que si, dans une configuration particulière de Σ, on fixe dans leurs plans tangents les points constituant l'*une* des deux nappes focales, *la surface formée par l'ensemble de ces points ne cesse d'être l'une des deux nappes focales de* C_2 *lorsqu'on soumet* Σ *à une déformation arbitraire*.

Cette propriété est caractéristique des congruences C_2, et ne saurait évidemment avoir lieu pour les deux nappes focales simultanément.

Pour les congruences C appartenant à la fois aux types C_1 et C_2 signalées au n° 7, MF_1 et MF_2 sont deux tangentes conjuguées de Σ, et l'on voit que le réseau conjugué de Σ (de tangentes MF_1, MF_2) correspondant aux développables de C, est tel que l'*une des deux familles de courbes qui le constituent est invariante sur* Σ *au cours d'une déformation arbitraire de cette surface*.

On peut dire, si l'on veut, que les congruences C appartenant à la fois aux deux types C_1 et C_2 (que nous désignerons par C_{12}) jouissent de la propriété suivante : Si l'on envisage les ∞^1 rayons constituant l'une quelconque des développables de l'*une* des deux familles d'une congruence C_{12}, *ces* ∞^1 *rayons, supposés invariablement liés aux plans tangents correspondants de la surface* Σ *attachée à* C_{12}, *ne cessent, au cours d'une déformation arbitraire de* Σ, *de former dans chaque configuration une surface développable*.

Suivant une terminologie bien connue, les congruences C_{12} mises en évi-

dence dans ce travail sont *arbitrairement déformables avec une famille de développables persistantes*.

Dans un Mémoire publié au *Bulletin des Sciences mathématiques* (¹), reproduisant à peu de choses près le contenu du Chapitre II de sa thèse : *Le problème général de la déformation avec réseau conjugué persistant*, M. S. Finikoff a fait une étude très détaillée des congruences susceptibles d'une déformation continue à un paramètre au cours de laquelle les deux familles de développables se conservent. Il n'existe pas de congruences dont les *deux* familles se conservent dans *toutes* les déformations d'une surface aux plans tangents de laquelle leurs rayons seraient invariablement liés. En ce qui concerne le problème de la déformation *arbitraire* avec persistance de l'*une* des deux familles de développables, M. Finikoff a établi, qu'en dehors des congruences admettant une surface quelconque Σ pour surface focale, qui se déforment évidemment par déformation arbitraire de Σ avec conservation de l'une des deux familles de développables, il existe une solution du problème formée de congruences dont les rayons sont perpendiculaires aux plans tangents d'une surface arbitraire Σ, la généralité de la solution, pour Σ donnée, étant celle de deux fonctions arbitraires d'un argument.

La considération des congruences C_{12} du Mémoire actuel nous montre qu'il y a lieu de compléter le résultat précédent. En dehors des congruences à développables persistantes dans une série dont les rayons *sont perpendiculaires aux plans tangents de la surface déformée*, il existe des congruences arbitrairement déformables avec persistance de l'*une* des deux familles de développables dont les rayons *sont situés dans les plans tangents de la surface déformée :* les congruences C_{12} nous offrent un exemple de ce nouveau type de solution.

Les surfaces Σ, dont les plans tangents contiennent les rayons des congruences arbitrairement déformables avec persistance d'une série de développables du type C_{12} ont un ds^2 de la forme

$$ds^2 = E\,du^2 + G\,dv^2,$$

où G est une fonction arbitraire de u, v, et où E est donné par la quadrature indiquée au n° 7

$$E = -\int \frac{2V\sqrt{G}\left(\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}\right)^2}{\sqrt{G}(1+V') + V\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial v}}\,dv,$$

V étant une fonction arbitraire de la seule variable v.

A chaque surface Σ admettant un ds^2 de la forme précédente est attachée une famille de congruences dépendant d'un paramètre, arbitrairement déformables avec conservation de l'une des deux familles de développables, formées de

(¹) S. Finikoff, *Déformation d'une congruence rectiligne avec développables persistantes* (*Bull. Sc. math.*, 2e série, t. LIII, 1929).

droites situées dans les plans tangents de Σ. Ces congruences sont les congruences C_{12}, dont les rayons sont perpendiculaires aux tangentes aux courbes $u = \text{const.}$, aux points I dont les distances aux points de contact sont définies par

$$\overline{MI} = \mathcal{V}\sqrt{G},$$

$\mathcal{V}$ étant une solution quelconqne de l'équation différentielle du premier ordre

$$\frac{\partial E}{\partial v} = -\frac{2\mathcal{V}\sqrt{G}\left(\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}\right)^2}{\sqrt{G}(1+\mathcal{V}') + \mathcal{V}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial v}},$$

E ayant l'expression ci-dessus rappelée.

L'équation différentielle précédente, qui s'écrit

$$\frac{1+\mathcal{V}'}{\mathcal{V}} = \frac{1+V'}{V},$$

donne pour $\mathcal{V}$ l'expression

$$\mathcal{V} = V\left[c\,e^{\int\frac{dv}{V}} + 1\right] \quad (c = \text{const. arbitraire}),$$

et les valeurs de $\overline{MI}$, définissant par rapport à Σ les ∞^1 congruences C_{12} à développables d'une famille persistantes, sont

$$\overline{MI} = V\sqrt{G}\left[c\,e^{\int\frac{dv}{V}} + 1\right].$$

9. *Congruences générales à rayons situés dans les plans tangents d'une surface arbitrairement déformables avec persistance d'une famille de développables.* — Il convient de se demander si le problème de la détermination des congruences arbitrairement déformables (à rayons situés dans les plans tangents de la surface Σ déformée) avec permanence des développables de l'une des deux familles, admet d'autres solutions que celle constituée par les congruences C_{12} dont il vient d'être question. La recherche est intéressante; le problème peut être résolu complètement, et sa solution générale est, comme on va le voir, constituée *par l'ensemble des congruences* C_2 *attachées à une surface* Σ *arbitraire*. Ainsi se trouvera établie, pour ces congruences, une nouvelle et remarquable propriété caractéristique.

Reportons-nous à l'équation définissant les développables d'une congruence C dont les rayons sont situés dans les plans tangents d'une surface quelconque Σ

$$\Delta\,du^2 + \Delta'\,du\,dv + \Delta''\,dv^2 = 0, \tag{28}$$

où Δ, Δ' et Δ'' ont les expressions données au n° 3.

Il s'agit d'exprimer qu'il existe deux fonctions A et B des variables u et v, telles que l'une des deux familles de développables de la congruence C soit définie, quelle que soit la configuration obtenue en déformant Σ, par l'équation différentielle

$$\frac{du}{A} = \frac{dv}{B}. \tag{29}$$

Écrivons que l'équation (28) [où $\Delta, \Delta', \Delta''$ ont les expressions données au n° 3] admet la solution (29). Nous obtenons ainsi une relation finie entre les coefficients D, D', D'' de la deuxième forme fondamentale de Σ. Si dans cette relation on remplace D'' par sa valeur déduite de l'équation de Gauss

$$D'' = \frac{KEG + D'^2}{D},$$

on obtient une relation entre D et D' qui, pour que la congruence C admette constamment l'équation (29) pour l'une de ses deux familles de développables, et soit par suite à développables persistantes dans une déformation arbitraire de Σ, devra être une identité en D, D'. Cette relation, que l'on forme sans difficulté, est la suivante

$$\begin{aligned}(30)\quad & \frac{A}{E\sqrt{E}}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}\left[A\frac{\partial\alpha}{\partial u}+B\left(\sqrt{G}+\frac{\partial\alpha}{\partial v}\right)\right]D^3 \\ & +\left\{\frac{A^2}{EG}\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}\left(\alpha\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}+\sqrt{G}\frac{\partial\alpha}{\partial u}\right)\right. \\ & \quad +\frac{AB\alpha}{E^2}\left[\sqrt{E}\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}\left(\sqrt{G}+\frac{\partial\alpha}{\partial v}\right)\right. \\ & \qquad \left.\left.+\sqrt{G}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}\frac{\partial\alpha}{\partial u}-\frac{\sqrt{EG}}{G}\left(\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}\right)^2\right]+\frac{B^2}{E\sqrt{E}}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}\left(\sqrt{G}+\frac{\partial\alpha}{\partial v}\right)\right\}D^2D' \\ & +\left[\frac{A^2\alpha}{G\sqrt{EG}}\left(\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}\right)^2+\frac{AB}{E\sqrt{G}}\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}\frac{\partial\alpha}{\partial u}-\frac{B^2\alpha}{E\sqrt{EG}}\left(\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}\right)^2+\frac{B^2}{E\sqrt{G}}\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}\left(\sqrt{G}+\frac{\partial\alpha}{\partial v}\right)\right]DD'^2 \\ & \qquad +\frac{\alpha B}{EG\sqrt{G}}\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}\left[A\sqrt{E}\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}-B\sqrt{G}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}\right]D'^3 \\ & \qquad +\frac{\alpha BK}{\sqrt{E}}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}\left[A\sqrt{E}\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}-B\sqrt{G}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}\right]D \\ & \qquad +\frac{\alpha BK}{\sqrt{G}}\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}\left[A\sqrt{E}\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}-B\sqrt{G}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}\right]D'=0.\end{aligned}$$

Pour alléger la discussion nous supposerons $K \neq 0$ (surface Σ non développable) : les résultats généraux auxquels nous parviendrons en supposant Σ quelconque s'appliquent d'ailleurs, comme on le constate aussitôt, au cas où Σ est développable. Nous négligerons en outre l'hypothèse où l'on aurait

$$\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}=\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}=0,$$

qui ramène au cas où Σ est développable. Enfin nous exclurons le cas banal où $a=0$, qui correspond à la déformation de l'une des nappes focales de la congruence, déformation qui a lieu avec persistance de celle des deux familles de développables dont les arêtes de rebroussement sont sur la nappe focale déformée.

Cela étant, commençons par envisager les cas où l'on aurait soit $A=0$, soit $B=0$.

Si $A = o$, l'expression du coefficient de D montre que l'on a nécessairement $\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u} = o$. G est donc une fonction de v, que l'on peut supposer réduite à l'unité, le ds^2 de Σ ayant alors la forme géodésique $ds^2 = E\,du^2 + dv^2$. On constate que dans ce cas tous les coefficients de la relation (30) sont nuls sous la seule condition $\frac{\partial a}{\partial v} = -1$, soit $a = -v + \varphi(u)$. On obtient ainsi une première famille de solutions du problème posé, dont la construction géométrique est la suivante :

Donnons-nous sur une surface quelconque Σ une famille de ∞^1 géodésiques, et envisageons les ∞^1 surfaces développantes de Σ suivant cette famille de géodésiques. Associons à chaque géodésique γ de la famille considérée une développante Δ de Σ, et cela d'après une loi arbitraire. Les tangentes de γ déterminent une ligne de courbure sur Δ, et si l'on considère les tangentes D à Δ normales à cette ligne de courbure, ces droites (qui sont évidemment situées dans les plans tangents à Σ le long de γ) engendrent une développable (δ). L'ensemble des développables (δ) relatives aux ∞^1 développantes Δ envisagées, constitue une congruence C qui fournit précisément la solution annoncée. Il est clair que la famille des développables (δ) de C persiste dans une déformation arbitraire de Σ.

La condition

$$\Theta = \sqrt{E}\,\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}\left(\sqrt{G} + \frac{\partial a}{\partial v}\right) + \sqrt{G}\,\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}\,\frac{\partial a}{\partial u} = o \tag{31}$$

qui définit [équation (25) du n° 7] les congruences du type C_2 étant vérifiée pour les congruences C que l'on vient d'obtenir, ces congruences appartiennent au type C_2. Le foyer, dont la fixité sur chaque rayon au cours d'une déformation arbitraire de Σ caractérise le type C_2, est d'ailleurs le point d'intersection du rayon avec la tangente à la géodésique $u = \text{const}$.

Supposons maintenant $B = o$. Le coefficient de DD'^2 dans (30) montre que l'on a $\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v} = o$, et que par suite les rayons de C sont parallèles aux tangentes d'une famille de géodésiques de Σ. Tous les coefficients de (30) sont alors nuls sauf celui de D^3. Pour que ce dernier coefficient soit nul, il faut et il suffit que l'on ait, soit $\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u} = o$, ce qui ramène aux surfaces Σ développables, soit $\frac{\partial a}{\partial u} = o$, c'est-à-dire $a = \varphi(v)$. On obtient ainsi une solution formée de droites D parallèles aux tangentes d'une famille de géodésiques de Σ, les droites D parallèles aux tangentes d'une même géodésique étant à la même distance de ces tangentes, cette distance variant d'après une loi arbitraire quand on passe d'une géodésique à une autre. Les congruences C ainsi obtenues vérifient la condition (31); ce sont encore des congruences du type C_2; le foyer fixe sur chaque rayon est encore ici situé sur la tangente à la courbe $u = \text{const}$.

Les cas précédents, conduisant tous à des congruences particulières arbi-

trairement déformables avec permanence d'une série de développables du type C_2, étant écartés, plaçons-nous dans le cas général $A \neq 0$, $B \neq 0$. La nullité simultanée des coefficients de D'^3, D, D' dans (30) exige que l'on ait

$$A\sqrt{E}\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v} - B\sqrt{G}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u} = 0. \tag{32}$$

$\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}$ n'étant pas nul (car alors $\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}$ le serait aussi et l'on tomberait dans le cas exclu plus haut des surfaces Σ développables), en annulant le coefficient de D^3 on obtient la condition

$$A\frac{\partial\alpha}{\partial u} + B\left(\sqrt{G} + \frac{\partial\alpha}{\partial v}\right) = 0, \tag{33}$$

dont la compatibilité en A et B avec (32) s'exprime par la relation

$$\Theta \equiv \sqrt{E}\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}\left(\sqrt{G} + \frac{\partial\alpha}{\partial v}\right) + \sqrt{G}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}\frac{\partial\alpha}{\partial u} = 0, \tag{31}$$

qui nous montre déjà que, si le problème admet des solutions, ces solutions *sont nécessairement des congruences du type* C_2, tout comme dans les cas particuliers précédemment examinés.

Moyennant (31) les coefficients des deux derniers termes restant à considérer dans la relation (30), à savoir les termes en D^2D' et DD'^2, sont nuls.

En définitive, la seule condition à laquelle doive satisfaire une congruence C pour être arbitrairement déformable avec persistance d'une famille de développables est la condition (31) [$\Theta \equiv 0$] qui exprime que *la congruence est une congruence* C_2.

Il résulte de l'étude qui précède que, pour une congruence dont les rayons sont situés dans les plans tangents d'une surface arbitraire Σ et invariablement liés à ces plans tangents, *la fixité de l'un des foyers sur chaque rayon au cours d'une déformation arbitraire de* Σ *entraîne la persistance de l'une des deux familles de développables et inversement.*

Les congruences jouissant de la double propriété précédente sont les congruences C_2 du n° 7; en ce qui concerne la famille de développables persistantes d'une telle congruence C_2, il y a lieu de faire la remarque suivante. Cette famille est constituée par les développables ayant leurs arêtes de rebroussement sur la nappe focale de C_2 portant les foyers *mobiles* sur les différents rayons. Il est en effet bien connu que, si le plan tangent en un point M de Σ se déplace de façon que le rayon D de C_2 situé dans ce plan décrive, soit l'élément de développable relatif au foyer F_1 de D, soit l'élément de développable relatif au second foyer F_2, les déplacements correspondants du point M ont lieu dans les directions MT_1, MT_2 respectivement conjuguées de MF_1, MF_2. Or, si F_1 est le foyer *fixe* sur D au cours de la déformation de Σ, il est clair que l'élément de développable persistant ne saurait être celui relatif à F_1, sans quoi MF_1

et MT_1 seraient deux directions conjuguées *invariables dans le plan tangent en* M *au cours de la déformation de* Σ, et les différents couples de directions MF_1, MT_1 relatifs aux différents points de Σ *définiraient un réseau conjugué persistant dans toute déformation de* Σ, ce que l'on sait être impossible. Les développables persistantes de C_2 sont donc bien, comme on l'a dit plus haut, celles dont les arêtes de rebroussement sont situées sur la nappe focale lieu des foyers mobiles F_2 de C_2.

Ces foyers mobiles F_2 peuvent d'ailleurs se déterminer très simplement pour chaque configuration de Σ, en exprimant que la direction MF_2, et la direction MT_2 invariante dans le plan tangent et définie [*voir*, par exemple, la relation (32)] par

$$\frac{du}{dv} = \frac{A}{B} = \frac{\dfrac{\partial G}{\partial u}}{\dfrac{\partial E}{\partial v}}$$

sont conjuguées.

On obtient ainsi pour la direction MF_2

$$\frac{\delta u}{\delta v} = -\frac{D' du + D'' dv}{D du + D' dv} = -\frac{D' \dfrac{\partial G}{\partial u} + D'' \dfrac{\partial E}{\partial v}}{D \dfrac{\partial G}{\partial u} + D' \dfrac{\partial E}{\partial v}},$$

et l'on en déduit pour la distance $\rho_2 = \overline{IF_2}$ du point $I(\overline{MI} = a)$ où D coupe la tangente à la courbe $u = \text{const.}$, l'expression

$$\rho_2 = -\frac{a\sqrt{E}\left(D' \dfrac{\partial G}{\partial u} + D'' \dfrac{\partial E}{\partial v}\right)}{\sqrt{G}\left(D \dfrac{\partial G}{\partial u} + D' \dfrac{\partial E}{\partial v}\right)}.$$

A titre de vérification on peut observer que cette valeur de ρ_2 est précisément celle que donnerait l'expression générale (6′) du produit $\rho_1 \rho_2$ donnée au n° 1, où l'on aurait tenu compte de la relation (31) définissant les congruences du type C_2, et où l'on aurait remplacé l'abscisse ρ_1 du foyer fixe F_1 par son expression

$$\rho_1 = \frac{\sqrt{G} \dfrac{\partial a}{\partial u}}{\dfrac{\partial \sqrt{E}}{\partial v}}$$

obtenue au n° 3.

Ayant ainsi précisé les rôles respectifs des deux nappes focales (F_1), (F_2) d'une congruence C_2 au cours d'une déformation arbitraire de la surface Σ associée, nous voyons que les congruences C_2 offrent un exemple curieux de déformation s'effectuant *avec persistance simultanée, des foyers portés par l'une des deux nappes focales, et des développables relatives à l'autre nappe focale.*

10. *Nouveaux invariants de déformation d'une surface arbitraire, attachés aux congruences* C_2. — Nous signalerons, pour terminer ce travail, une propriété relative à des éléments métriques invariants au cours d'une déformation

arbitraire d'une surface quelconque Σ, déduits de la considération des congruences C_2 attachées à Σ.

Envisageons l'expression du *paramètre moyen*, p, relatif au rayon générateur $D(u, v)$ d'une congruence quelconque, expression qui est comme l'on sait

$$p = \frac{f' - f}{\sqrt{E'G' - F'^2}},$$

où f, f' sont les coefficients habituels de la première forme fondamentale de la congruence, et E', F', G' les coefficients de sa deuxième forme (du ds^2 de sa représentation sphérique).

Pour une congruence du type C_2, on a, compte tenu de la relation (26) du n° 7,

$$p = \frac{a K \sqrt{EG}}{\sqrt{E'G' - F'^2}}.$$

Considérons dès lors, dans la famille des congruences C_2 attachées à une surface quelconque Σ, deux congruences quelconques C_2' et C_2'' relatives à un même réseau orthogonal de Σ (à rayons homologues parallèles), définies par deux valeurs différentes a' et a'' de la quantité a [solution de l'équation aux dérivées partielles (25) du n° 7] qui fixe les différents rayons dans les plans tangents de Σ.

Soient p' et p'' les paramètres moyens sur deux rayons homologues quelconques D' et D'' (relatifs à un même point M de Σ) de C_2' et de C_2''. Les différents couples de rayons homologues des deux congruences étant parallèles, C_2' et C_2'' ont la même représentation sphérique, et l'expression $\sqrt{E'G' - F'^2}$ a la même valeur pour D' et D''. L'expression (28) de p montre alors que, pour deux rayons homologues quelconques D' et D'' des congruences C_2', C_2'', on a

$$\frac{p'}{p''} = \frac{a'}{a''}, \tag{34}$$

d'où ce premier résultat :

Étant donnée une surface quelconque Σ *et une famille quelconque de congruences* C_2 *à rayons homologues parallèles attachées à* Σ, *les paramètres moyens des rayons homologues situés dans un même plan tangent à* Σ *sont proportionnels aux distances de ces rayons au point de contact du plan tangent.*

Si l'on observe maintenant que le second membre de (34), qui est le rapport de deux solutions quelconques de l'équation aux dérivées partielles du premier ordre (25) du n° 7, ne dépend pas de la deuxième forme fondamentale de Σ, on peut compléter le résultat précédent par le suivant :

Le rapport des paramètres moyens de deux rayons homologues dans deux congruences quelconques C_2 (*à rayons homologues parallèles*) *attachées à* Σ, *est un invariant de déformation pour* Σ.