ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

ERNEST VESSIOT

Sur une théorie générale de la réductibilité des équations et systèmes d'équations finies ou différentielles

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3^e série, tome 63 (1946), p. 1-22

<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1946_3_63__1_0>

© Gauthier-Villars (Éditions scientifiques et médicales Elsevier), 1946, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales scientifiques de l'É.N.S. » (http://www.elsevier.com/locate/ansens) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

ANNALES

SCIENTIFIQUES

DE

L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE

SUR UNE THÉORIE GÉNÉRALE

DE

LA RÉDUCTIBILITÉ DES ÉQUATIONS

ET

SYSTÈMES D'ÉQUATIONS FINIES OU DIFFÉRENTIELLES

PAR M. ERNEST VESSIOT.

Introduction.

Les deux Mémoires que j'ai publiés en 1941 et 1942, sur la réductibilité de certains systèmes de Lie et sur celle des équations algébriques (1), procèdent, en fait, d'une même théorie générale de la réductibilité des équations et systèmes d'équations, finies ou différentielles. Celle-ci redonne, et même, le cas échéant, dans des conditions plus larges (2), les généralisations de la théorie des équations algébriques de Galois déjà obtenues par diverses méthodes. Elle peut en donner de nouvelles. C'est cette théorie générale qui fait l'objet du présent Mémoire. Celui-ci comprend deux parties : La première est consacrée à un exposé succinct de la théorie; la seconde en donne trois applications importantes : elles concernent, en effet, respectivement, les systèmes de n équations différentielles ordinaires du 1er ordre à n inconnues, les équations

(1) *Annales sientifiques de l'École Normale Supérieure*, (3), t. 57, p. 1-60 et t. 58, p. 1-36. Ces deux Mémoires seront cités ici sous les rubriques respectives M_1 et M_2.

(2) *Cf.* M_1, Introduction, p. 1 et suiv.

différentielles ordinaires d'ordre n à une inconnue et les équations aux dérivées partielles du 1er ordre, à $n+1$ variables indépendantes et à une fonction inconnue.

La théorie générale en question concerne toute famille de systèmes, d'une ou plusieurs équations, satisfaisant aux conditions suivantes :

1° Chaque système $\mathcal{S}$ de la famille possède des solutions complètes, c'est-à-dire des familles de solutions telles que de chacune d'elles se déduisent, rationnellement, des formules aptes à représenter, par un choix approprié de certains éléments arbitraires, les diverses solutions particulières de $\mathcal{S}$.

La résolution complète de $\mathcal{S}$ sera considérée, en conséquence, comme consistant à trouver une solution particulière quelconque du système S dont dépendront ces solutions complètes, et qui sera dit l'*associé* de $\mathcal{S}$.

2° La famille de systèmes considérée constitue une *classe* vis-à-vis d'une famille de transformations, dites *auxiliaires*, portant sur les inconnues et, le cas échéant, sur les variables indépendantes qui figurent dans ces systèmes. On supposera que cela a lieu de telle manière que, si $\mathcal{F}_1$ et $\mathcal{F}_2$ sont des solutions complètes quelconques de deux systèmes quelconques de la classe, distincts ou confondus, il existe une de ces transformations auxiliaires qui change $\mathcal{F}_1$ en $\mathcal{F}_2$ et une seule. Il en résulte, en particulier, que chaque système $\mathcal{S}$ de la classe demeure invariant par certaines de ces transformations auxiliaires, qui seront dites ses *auto-transformations*, et l'on se bornera aux cas où celles-ci constituent un *groupe*, ou un *pseudo-groupe*, *modulo* $\mathcal{S}$ ([3]).

On appellera *réduit de la classe* le système $\mathcal{S}_0$ de la classe défini par la condition d'avoir une solution complète $\mathcal{F}_0$ arbitrairement choisie une fois pour toutes dans le domaine de rationalité $\mathcal{D}$ considéré. Résoudre un système $\mathcal{S}$ de la classe équivaudra alors à trouver une transformation auxiliaire qui change $\mathcal{S}$ en $\mathcal{S}_0$: c'est ce qu'on nommera une *transformation réductrice* de $\mathcal{S}$. Ces transformations réductrices jouent un rôle essentiel dans notre analyse de la notion de réductibilité, dont voici les points principaux.

Dans tout domaine de rationalité $\mathcal{D}$ un système $\mathcal{S}$ de la classe considérée sera dit *réductible* si son associé S est réductible au sens de J. Drach, c'est-à-dire si un sous-système Σ de S est rationnel; et le mode spécial de réductibilité de $\mathcal{S}$ sera caractérisé par la structure du groupe, ou pseudo-groupe, $\mathcal{G}$, composé de toutes les auto-transformations de $\mathcal{S}$ qui laissent invariant tout sous-système rationnel de S; et $\mathcal{G}$ sera dit, en conséquence, le groupe ou pseudo-groupe, *spécifique* de $\mathcal{S}$.

Si l'on appelle *conjuguées* deux solutions complètes de $\mathcal{S}$ qui dérivent l'une de l'autre par deux auto-transformations de $\mathcal{G}$, tout sous-système rationnel de S qui admettra une solution complète $\mathcal{F}$ de $\mathcal{S}$ admettra aussi ses conjuguées :

([3]) Sur la notion de *pseudo-groupe*, *voir* M_2, Introduction, n° 1, p. 2 et § 3, p. 10.

de sorte que $\mathcal{F}$ sera inséparable de ses conjuguées quant à sa détermination par des équations rationnelles.

On dira que $\mathcal{F}$ est une solution complète *primitive* de $\mathcal{S}$ s'il existe un sous-système rationnel de S, soit H, qui admette pour solutions $\mathcal{F}$ et ses conjuguées seulement. Pour un tel sous-système H, le groupe ou pseudo-groupe spécifique $\mathcal{G}$ de $\mathcal{S}$ jouera le rôle d'un groupe d'automorphie. C'est donc la structure de $\mathcal{G}$ qui déterminera la nature des opérations à faire pour résoudre ce *sous-système résolvant* H de S; et, par conséquent, qui caractérisera le mode spécial de réductibilité de $\mathcal{S}$, si celui-ci a effectivement des solutions complètes primitives.

Si l'on se place au point de vue qui fut celui de Galois dans sa théorie des équations algébriques, on conclut de ce qui précède que, pour qu'une fonction rationnelle d'une solution complète primitive de $\mathcal{S}$ ait une valeur rationnelle (dans $\mathcal{D}$), il faut et il suffit que cette valeur demeure invariante par les transformations du groupe, ou du pseudo-groupe spécifique de $\mathcal{S}$, effectuées sur cette solution complète dans cette fonction.

On peut enfin modifier cet énoncé de manière à obtenir une généralisation plus complète du théorème fondamental de Galois, en y substituant au groupe, ou pseudo-groupe, spécifique de $\mathcal{S}$, le groupe des *permutations* que ses transformations opèrent sur les solutions de $\mathcal{S}$ considérées comme des objets distincts, en nombre fini ou infini; ou encore le groupe de celles qu'elles opèrent, de même, sur les solutions complètes de $\mathcal{S}$: groupes que nous appellerons, respectivement, *groupe de Galois* et *groupe de réductibilité* de $\mathcal{S}$. On pourra encore remplacer ce dernier par une quelconque de ses représentations analytiques, qui jouera le rôle de *groupe de rationalité*. Ces divers groupes, ayant la même structure que le groupe, ou pseudo-groupe, spécifique $\mathcal{G}$, caractériseront, comme lui, le mode spécial de réductibilité de $\mathcal{S}$.

PREMIÈRE PARTIE

EXPOSÉ DE LA THÉORIE.

1. On considère une famille $(\mathcal{S})$ de systèmes $\mathcal{S}$, ayant une même forme générale, composée d'une ou plusieurs équations, algébriques ou différentielles. On suppose que ces systèmes $\mathcal{S}$ possèdent des *solutions complètes*. Nous entendons par là des familles $\mathcal{F}$ de solutions particulières, à définir pour chaque famille $(\mathcal{S})$ considérée, telles que l'on puisse, soit extraire de chacune d'elles, par la particularisation de certains éléments arbitraires toutes les solutions particulières, soit en déduire, pour celles-ci, par des opérations rationnelles, — pouvant comprendre des éliminations et des dérivations —, des formules aptes à les définir, individuellement, en termes finis, explicitement ou implicitement. On pourra, du reste, remonter de chacune de ces

solutions complètes, par des calculs rationnels, au système $\mathfrak{S}$ dont elle donne ainsi les solutions particulières ([4]).

Les solutions complètes de chaque système $\mathfrak{S}$ seront les solutions particulières d'un certain système S, qui en sera dit l'*associé* ([5]), et le problème de l'intégration ou de la résolution de $\mathfrak{S}$ sera considéré comme consistant à trouver une solution particulière quelconque de son associé S.

2. Dans tout domaine de rationalité $\mathcal{D}$ où un système $\mathfrak{S}$ est rationnel, ce système sera dit *réductible* si l'un quelconque des *sous-sytèmes* Σ de son associé S est rationnel dans $\mathcal{D}$.

On se propose de caractériser, pour chaque domaine $\mathcal{D}$ donné, le mode de réductibilité propre à chacun des systèmes $\mathfrak{S}$ réductibles dans $\mathcal{D}$. On en trouvera les moyens en étudiant d'abord, indépendamment de toute question de réductibilité, les propriétés des sous-systèmes Σ de l'associé S d'un système $\mathfrak{S}$ quelconque.

On supposera, pour cette étude, que la famille $(\mathfrak{S})$ constitue une *classe*, vis-à-vis d'une certaine famille $(\mathfrak{T})$ de transformations $\mathfrak{T}$, ponctuelles ou différentielles, portant sur l'inconnue ou les inconnues, et, le cas échéant, sur la ou les variables indépendantes ([6]).

Ces transformations $\mathfrak{T}$, qui seront dites les *transformations auxiliaires* de la classe $(\mathfrak{S})$, devront comprendre la transformation identique de leur espèce.

([4]) Voici, par exemple, ce que sera, par définition, une solution complète dans quatre cas importants. — *a*. Famille des équations algébriques, de degré n, à une inconnue x, sans racines multiples : ce sera un système quelconque $x = x_1, \ldots, x = x_n$ de n racines différentes. — *b*. Famille des équations différentielles ordinaires d'ordre n, à une inconnue x : ce sera une *intégrale générale* quelconque. — *c*. Il en sera de même pour la famille $(\mathfrak{S})$ formée par les systèmes de n équations différentielles ordinaires du 1er ordre à n inconnues, $x_1, \ldots, x_n$. — *d*. Famille des équations aux dérivées partielles du 1er ordre, à $n+1$ variables indépendantes t, $x_1, \ldots, x_n$ et une fonction inconnue z : ce sera une *intégrale complète*, au sens de Lagrange.

([5]) Voici ce qu'est, dans les exemples de la Note précédente, l'*associé* S d'un système $\mathfrak{S}$. — *a*. C'est le système d'équations en $x_1, \ldots, x_n$ donné par les relations entre les racines et les coefficients de l'équation algébrique qui constitue $\mathfrak{S}$. — *b*. et *c*. S se déduit de $\mathfrak{S}$ en y considérant respectivement, x et $x_1, \ldots, x_n$ comme des fonctions de la variable indépendante t et des constantes arbitraires d'intégration, $c_1, \ldots, c_n$. — *d*. S se déduit, de même, de $\mathfrak{S}$ en y considérant z comme une fonction des variables indépendantes $t, x_1, \ldots, x_n$, et des constantes arbitraires, $a_1, \ldots, a_n$, c dont les intégrales complètes sont supposées dépendre.

([6]) Voici ce que pourront être, par exemple, les transformations de classe $\mathfrak{T}$ dans les cas de la note ([4]). — *a*. On pourra prendre les transformations $\bar{x} = \varphi(x)$, ou φ est entier, de degré $n-1$, — *b*. On pourra prendre les transformations différentielles $\bar{x} = \varphi\left(t; x, \frac{dx}{dt}, \ldots, \frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}\right)$, d'ordre $n-1$: φ sera une fonction arbitraire de ses arguments. — *c*. On pourra prendre les transformations ponctuelles de l'espace $(t, x_1, \ldots, x_n)$ qui laissent t invariant. — *d*. On pourra prendre les transformations de contact de l'espace $(t, x_1, \ldots, x_n; z)$ relatives à l'équation de Pfaff, $dz = q\,dt + p_1 dx_1 + \ldots + p_n dx_n$, qui laissent t invariant. — Remarquons que l'on a affaire à un groupe de transformations, pour les familles $(\mathfrak{T})$ ainsi choisies, dans les cas *c*. et *d*., mais non dans les cas *a*. et *b*. (*Cf.* M_2, § 2, p. 8).

Elles laisseront invariant l'ensemble $((\mathfrak{F}))$ de toutes solutions complètes $\mathfrak{F}$ de tous les systèmes $\mathfrak{S}$ de la classe $(\mathfrak{S})$. On supposera que, pour tout couple d'éléments de cet ensemble, il y a une transformation $\mathfrak{T}$ et une seule qui change le premier en le second (ce couple pouvant, du reste, être formé de deux solutions complètes d'un même système $\mathfrak{S}$, et ses éléments pouvant même être identiques). Ce qu'on exprimera en disant que les transformations $\mathfrak{T}$ opèrent sur l'ensemble des solutions complètes des systèmes de la classe $(\mathfrak{S})$ *suivant un mode simplement transitif*.

Il résulte, en particulier, de cette hypothèse que, pour chaque système $\mathfrak{S}$ de la classe, il y a, dans la famille $(\mathfrak{T})$ des transformations auxiliaires $\mathfrak{T}$, une sous-famille (t) de transformations t (que nous appellerons les *auto-transformations* de $\mathfrak{S}$), qui laissent invariant $\mathfrak{S}$ et qui opèrent sur ses solutions complètes suivant un mode simplement transitif. Nous supposerons que cette sous-famille (t) est un groupe, ou un pseudo-groupe, *modulo* $\mathfrak{S}$ (7), que nous appellerons le *groupe d'invariance* ou le *pseudo-groupe d'invariance* de $\mathfrak{S}$ [Cf. M_1, n° 5 et M_2, § 3].

3. Relativement au domaine de rationalité $\mathfrak{D}$ donné, nous appellerons *réduit* de la classe $(\mathfrak{S})$, un système particulier s de cette classe, défini par la condition d'avoir une solution complète rationnelle donnée f, choisie une fois pour toutes. Pour tout système $\mathfrak{S}$ de la classe, toute transformation auxiliaire $\mathfrak{T}$ qui changera $\mathfrak{S}$ en ce réduit s sera dite une *transformation réductrice*, et celle qui changera en f une solution complète particulière $\mathfrak{F}$ quelconque de $\mathfrak{S}$ sera dite avoir $\mathfrak{F}$ pour *génératrice*. Chaque transformation réductrice de $\mathfrak{S}$ changera l'associé S de $\mathfrak{S}$ en l'associé S de s, et S sera dit *le réduit* de S; elle changera tout sous-système Σ de S en un sous-système σ du réduit S, et σ sera dit *un réduit* de Σ. Le sous-système A de S, dont les solutions sont les génératrices des diverses transformations réductrices de $\mathfrak{S}$ qui changent Σ en un même réduit σ, sera dit *l'adjoint* de Σ relatif à ce réduit, ou à l'une quelconque de ces génératrices.

Toute solution complète $\mathfrak{F}$ de $\mathfrak{S}$ est solution d'un adjoint A de Σ et d'un seul. On reconnaît que, pour que celui-ci ait pour solution une autre solution $\mathfrak{F}'$ de $\mathfrak{S}$, il faut et il suffit que l'auto-transformation de $\mathfrak{S}$ qui change $\mathfrak{F}$ en $\mathfrak{F}'$ laisse invariant Σ. Dès lors, pour toute solution $\mathfrak{F}$ d'un adjoint quelconque A de Σ les auto-transformations de $\mathfrak{S}$ qui changent $\mathfrak{F}$ en les diverses solutions de A sont les auto-transformations θ de $\mathfrak{S}$ qui laissent Σ invariant. L'ensemble (θ) de celles-ci, qui sera, en même temps que celui de toutes les auto-transformations de $\mathfrak{S}$, un groupe ou un pseudo-groupe, sera dit *le groupe* ou *le pseudo-groupe d'invariance* de Σ. Il sera aussi pour A, un groupe, ou pseudo-groupe d'invariance [*Cf.* M_1, n° 13; M_2, § 8].

L'ensemble de tous les adjoints de tous les sous-systèmes de S ne diffère pas

(7) Sur la notion de *pseudo-groupe*, *voir* M_2, Introduction, n° 1, p. 2 et § 3, p. 10.

de celui de tous ses sous-systèmes (que nous appellerons *principaux*) pour chacun desquels les diverses solutions se déduisent de l'une quelconque d'entre elles par une même famille (groupe ou pseudo-groupe) d'auto-transformations de $\mathcal{S}$, jouant ainsi pour lui le rôle d'un groupe ou pseudo-groupe d'*automorphie* [*Cf.* M_1, n° 14; M_2, § 9].

4. Nous supposerons, pour l'étude du mode de réductibilité d'un système $\mathcal{S}$ donné, dans un domaine de rationalité $\mathcal{D}$ donné, que parmi ses solutions complètes il en est (que nous dirons *distinguées*) pour lesquelles tous les adjoints des sous-systèmes rationnels de son associé S qui leur sont relatifs sont aussi rationnels (8). Soit $\mathcal{F}$ l'une d'elles, et soit Φ_0 celui des sous-systèmes de S rationnels auxquels elle satisfait et qui est un sous-système de tous les autres : ce que nous exprimerons en disant que Φ_0 est pour $\mathcal{F}_0$ un sous-système de S *fondamental* (9). Si $\mathcal{F}_0$ est la seule solution, elle est rationnelle. Ce cas écarté, on voit sans peine que Φ_0 sera son propre adjoint relativement à $\mathcal{F}_0$. Il le sera par suite, aussi pour toute autre de ces solutions : ce qui entraîne qu'il est *fondamental* aussi pour elle et, par suite, que Φ_0 est *irréductible* (c'est-à-dire qu'il n'a pas de sous-système rationnel).

Soient Σ un sous-système rationnel quelconque de S et A_0 son adjoint relatif à $\mathcal{F}_0$. Comme $\mathcal{F}_0$ est distinguée, A_0 est rationnel et Φ_0 en est un sous-système. Le groupe (ou pseudo-groupe) d'invariance de Σ, composé des auto-transformations de $\mathcal{S}$ qui changent $\mathcal{F}_0$ en les diverses solutions de A_0, contient les auto-transformations de $\mathcal{S}$ qui changent $\mathcal{F}_0$ en les diverses solutions de Φ_0, c'est-à-dire les transformations Θ du groupe (ou pseudo-groupe) d'invariance (Θ) de Φ_0. Celui-ci peut donc être défini comme le groupe (ou pseudo-groupe) des auto-transformations de $\mathcal{S}$ qui laissent invariants tous les sous-systèmes rationnels de S. Il est donc indépendant de la solution complète distinguée $\mathcal{F}_0$ qui a servi à en démontrer l'existence. Nous l'appellerons le groupe (ou pseudo-groupe) *spécifique* de $\mathcal{S}$, relatif au domaine de rationalité $\mathcal{D}$ donné. C'est, en effet, sa structure qui caractérise, comme nous le verrons, le mode *spécial* de réductibilité de $\mathcal{S}$ dans $\mathcal{D}$.

5. Nous dirons que deux solutions complètes de $\mathcal{S}$ sont *conjuguées* si elles sont homologues vis-à-vis de son groupe (ou pseudo-groupe) spécifique (Θ). Tout sous-système rationnel Σ de S admettant les transformations Θ, ses solutions se répartissent en familles de solutions complètes de $\mathcal{S}$ deux à deux

(8) Il existe des *solutions distinguées* dans tous les cas classiques, ainsi que dans les exemples *b.* et *c.* de la note (4). La démonstration de leur existence est, dans toute application de la présente théorie, le point capital.

(9) La démonstration de l'existence d'un tel *sous-système fondamental* par toute solution d'un sous-système rationnel de S se ferait en thèse générale, par un raisonnement analogue à ceux par lesquels elle se trouve établie, dans M_1, n° 17 et M_2, paragraphe 10, pour les systèmes qui y sont considérés.

conjuguées. Il en résulte que toute solution complète de $\mathcal{S}$ est inséparable de ses conjuguées quant à sa détermination par des équations rationnelles.

Si un sous-système Σ de S, rationnel, n'a pour solutions qu'une seule famille de solutions complètes de $\mathcal{S}$ deux à deux conjuguées, ce sera un sous-système principal de S dont le groupe (ou pseudo-groupe) d'invariance sera le groupe (ou pseudo-groupe) spécifique (Θ) de $\mathcal{S}$ et nous dirons que c'est un sous-système *spécifique* de S ([10]).

Une solution complète $\mathcal{F}$ de $\mathcal{S}$ sera dite *primitive* si elle est solution d'un sous-système spécifique Φ de S : celui-ci est alors fondamental pour $\mathcal{F}$, ainsi que pour ses conjuguées (lesquelles sont aussi primitives), et il est irréductible.

Les solutions distinguées sont un cas particulier des solutions primitives; les conjuguées d'une solution complète distinguée sont, du reste, aussi des solutions complètes distinguées.

Il y a des cas où les solutions complètes de tout système $\mathcal{S}$ réductible sont primitives : tel est celui des équations algébriques à une inconnue [*Cf.* M_2, § 11]. Mais c'est une circonstance exceptionnelle [*Cf.* M_1, n^{os} 5 et 6 de l'introduction et III, n° 24].

Quoi qu'il en soit, la résolution de $\mathcal{S}$, supposé réductible, reviendra à chercher une de ses solutions complètes primitives, c'est-à-dire, celle-ci étant inséparable de ses conjuguées, à résoudre le sous-système spécifique Φ de l'associé S de $\mathcal{S}$ auquel elle satisfait. Celui-ci pouvant être considéré comme un système automorphe pour lequel le groupe (ou pseudo-groupe) spécifique de $\mathcal{S}$ joue le rôle de groupe (ou pseudo-groupe) d'automorphie, c'est la structure de ce dernier qui déterminera le choix et la nature des systèmes résolvants à employer. C'est donc bien, en définitive, comme nous l'avions annoncé, cette structure qui caractérise le mode spécial de réductibilité du système $\mathcal{S}$ considéré.

6. Plaçons-nous maintenant au point de vue de Galois. Soit $\mathcal{F}$ une solution complète de $\mathcal{S}$, laissée indéterminée et soit $R(\mathcal{F})$ une fonction de $\mathcal{F}$, rationnelle dans $\mathcal{D}$, c'est-à-dire une fonction rationnelle dans $\mathcal{D}$ de ses éléments constitutifs, numériques ou fonctionnels et, le cas échéant, des variables indépendantes dont ils dépendront et de leurs dérivées par rapport à celles-ci. Étant donnée une solution complète particulière quelconque $\mathcal{F}_0$ de $\mathcal{S}$, on dira que $R(\mathcal{F}_0)$ est la *valeur* de R pour $\mathcal{F}_0$. Il s'agit de voir dans quel cas cette valeur appartiendra à $\mathcal{D}$. Nous remarquerons, à cet effet, que s'il en est ainsi, le sous-système de S obtenu en adjoignant à S l'équation $R(\mathcal{F}) = R(\mathcal{F}_0)$ sera rationnel : de sorte que, ayant la solution $\mathcal{F}_0$, il admettra aussi pour solutions toutes les conjuguées $\mathcal{F}'_0$ de $\mathcal{F}_0$. On aura donc, pour chacune

([10]) Dans notre Mémoire M_1 nous avons appelé *spécifique* tout sous-système principal ayant le groupe spécifique pour groupe d'invariance (*Cf.*, M_1, n° 20). Nous réservons ici cette appellation, comme nous l'avons fait dans M_2, à des sous-systèmes rationnels (*Cf.* M_2, § 11).

d'elles, $R(\mathcal{F}_0) = R(\mathcal{F}'_0)$. Si, réciproquement, il en est ainsi, l'équation $R(\mathcal{F}) = V$ sera, pour l'unique valeur $V = R(\mathcal{F}_0) = R_0$, une conséquence du sous-système principal Π_0 de S dont les solutions sont $\mathcal{F}_0$ et ses conjuguées $\mathcal{F}'_0$. *Si $\mathcal{F}_0$ est primitive,* Π_0 sera un sous-système spécifique de S : il sera donc rationnel, et, en exprimant que $R(\mathcal{F}) = V$, où V sera considérée comme une inconnue, est une conséquence de Π_0, on obtiendra, comme conditions, un système en V, rationnel, ayant R_0 pour unique solution. Celle-ci, c'est-à-dire $R(\mathcal{F}_0)$, sera donc rationnelle (dans $\mathcal{D}$).

Comme l'on passe de $\mathcal{F}_0$ à ses conjuguées $\mathcal{F}'_0$ par les diverses transformations du groupe (ou pseudo-groupe) spécifique (Θ) de $\mathcal{S}$, on pourra traduire les égalités $R(\mathcal{F}_0) = R(\mathcal{F}'_0)$ en disant que la valeur de $R(\mathcal{F})$ pour $\mathcal{F} = \mathcal{F}_0$ admet (*numériquement*) ce groupe (ou pseudo-groupe). D'où, pour la généralisation du théorème fondamental de Galois, l'énoncé abrégé, où le mot *rationnelle* signifie rationnelle dans $\mathcal{D}$.

Théorème fondamental de Galois. — *Pour qu'une fonction rationnelle d'une solution complète du système considéré ait une valeur rationnelle, il faut qu'elle demeure invariante, numériquement, par les transformations du groupe (ou pseudo-groupe) spécifique de ce système; cette condition est suffisante, si cette solution complète est primitive.*

7. Pour rattacher ce résultat, d'une manière complète, aux idées de Galois, il nous suffira de remarquer que toute auto-transformation t de $\mathcal{S}$ opère sur ses solutions, considérées comme des objets distincts, en nombre fini ou infini, une *permutation p*, d'où résulte pour ses solutions complètes, envisagées de même, une *permutation* P; et que les correspondances ainsi établies entre les transformations t et les *permutations p* comme entre les premières et les *permutations* P, sont biunivoques, du fait qu'il y a une auto-transformation t et une seule qui change une solution complète de $\mathcal{S}$, donnée, en une autre, donnée aussi.

L'ensemble (p) des permutations p, comme l'ensemble (P) des permutations P, constituera manifestement un groupe holoédriquement isomorphe au groupe (ou pseudo-groupe) d'invariance (t) de $\mathcal{S}$; et aux transformations Θ du groupe (ou pseudo-groupe) spécifique de $\mathcal{S}$ correspondront, dans ces deux groupes respectivement, les permutations, γ et Γ, de deux groupes (γ) et (Γ), que nous appellerons *groupe de Galois* et *groupe de réductibilité* de $\mathcal{S}$.

On pourra, dès lors, remplacer les transformations du groupe (ou pseudo-groupe) spécifique de $\mathcal{S}$, dans l'énoncé du théorème fondamental de Galois, par les permutations de ce groupe de Galois, ou de ce groupe de réductibilité.

8. Les *permutations p* et P ont un caractère concret, et, par conséquent, *synthétique,* qui nous paraît en accord avec la pensée de Galois. Mais les permutations P pourront se traduire *analytiquement* par des *transformations*

portant sur les arbitraires dont dépend la solution complète générale du système $\mathfrak{S}$ considéré. Au *groupe de réductibilité* (Γ) de $\mathfrak{S}$ correspondra ainsi un groupe de transformations que nous appellerons (par extension de la terminologie employée couramment dans les cas classiques), *groupe de rationalité* de $\mathfrak{S}$, et qui pourra, au même titre que le groupe de Galois ou le groupe de réductibilité, remplacer le groupe (ou pseudo-groupe) spécifique dans l'énoncé du théorème fondamental de Galois.

DEUXIÈME PARTIE.

APPLICATIONS.

I. — Sur la réductibilité des systèmes de n équations différentielles ordinaires du premier ordre à n inconnues.

1. Les systèmes en question seront pris sous la forme résolue

$$x'_\alpha = \theta_\alpha(t, x_1, \ldots, x_n) \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, n). \tag{1}$$

Les systèmes $\mathfrak{S}$ de la théorie générale seront alors les divers systèmes (1), relatifs à une même valeur de n donnée.

Les *solutions complètes* de l'un d'eux seront ses *intégrales générales*

$$x_\alpha = \varphi_\alpha(t; c_1, \ldots, c_n) \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, n). \tag{2}$$

Pour chacune d'elles, $\mathfrak{F}$, en effet, les équations (2) sont aptes à représenter, par un choix approprié des valeurs des constantes arbitraires $c_1, \ldots, c_n$, toute solution particulière du système $\mathfrak{S}$ considéré.

Le système S, *associé* à un système $\mathfrak{S}$ [d'équations (1) données], dont dépendent les solutions complètes de ce système $\mathfrak{S}$, a aussi pour équations ces mêmes équations (1) à condition d'y considérer les inconnues $x_1, \ldots, x_n$ comme des fonctions des variables $t, c_1, \ldots, c_n$, indépendantes relativement à $c_1, \ldots, c_n$, et les x'_α comme les dérivées partielles des x_α par rapport à t. Chaque solution complète $\mathfrak{F}$ de $\mathfrak{S}$ sera définie par des *conditions initiales* de la forme

$$\varphi_\alpha(t_0; c_1, \ldots, c_n) = \gamma_\alpha(c_1, \ldots, c_n) \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, n), \tag{3}$$

relatives à une valeur initiale $t = t_0$ arbitraire.

Il y a un système $\mathfrak{S}$ et un seul admettant une solution complète (2) donnée. C'est

$$x'_\alpha = \varphi'_\alpha(t; \xi_1, \ldots, \xi_n) \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, n), \tag{4}$$

les ξ_α étant définis par la résolution du système (2) sous la forme

$$c_\alpha = \xi_\alpha(t; x_1, \ldots, x_n) \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, n), \tag{5}$$

Ces ξ_α sont les éléments de l'un quelconque des *systèmes fondamentaux d'invariants* de la transformation infinitésimale

$$\mathrm{D}f = \frac{\partial f}{\partial t} + \theta_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \ldots + \theta_n \frac{\partial f}{\partial x_n}, \tag{6}$$

lesquels sont, comme l'on sait, les *systèmes fondamentaux de solutions* de $\mathrm{D}f = 0$.

2. Pour les *transformations auxiliaires* $\mathfrak{C}$ de la théorie générale, nous prendrons les transformations ponctuelles de l'espace $t, x_1, \ldots, x_n$,

$$y_\alpha = \mathrm{F}_\alpha(t;\ x_1, \ldots, x_n) \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, n), \tag{7}$$

qui laissent t invariant. Elles forment un groupe infini.

Pour que la transformation (7) change la solution complète (2) d'un système $\mathfrak{S}$ en une autre, donnée,

$$y_\alpha = \psi_\alpha(t;\ c_1, \ldots, c_n) \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, n), \tag{8}$$

appartenant au même système de la famille $(\mathfrak{S})$ ou à un autre, il faut et il suffit que les équations

$$\mathrm{F}_\alpha(t;\ \varphi_1, \ldots, \varphi_n) = \psi_\alpha(t;\ c_1, \ldots, c_n) \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, n) \tag{9}$$

soient des identités par rapport à $t, c_1, \ldots, c_n$; et, par conséquent que les équations

$$\mathrm{F}_\alpha(t;\ x_1, \ldots, x_n) = \psi_\alpha(t;\ \xi_1, \ldots, \xi_n) \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, n), \tag{10}$$

qui en résultent par le changement de variables (5), soient des identités par rapport à $t, x_1, \ldots, x_n$.

Il existe donc une transformation $\mathfrak{C}$ et une seule, à savoir

$$y_\alpha = \psi_\alpha(t;\ \xi_1, \ldots, \xi_n) \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, n), \tag{11}$$

qui change (2) en (8). Conformément aux hypothèses de la théorie générale, les systèmes $\mathfrak{S}$ forment donc une *classe* vis-à-vis des transformations $\mathfrak{C}$, et les solutions complètes $\mathfrak{F}$ de tous ces systèmes sont permutées par ces transformations suivant un mode *simplement transitif*.

3. Comme système *réduit* $\mathfrak{S}_0$ de la classe $(\mathfrak{S})$, nous choisirons le système

$$y'_\alpha = 0 \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, n), \tag{12}$$

et nous prendrons sa solution complète

$$y_\alpha = c_\alpha \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, n), \tag{13}$$

pour *solution complète de référence* $\mathfrak{F}_0$. La transformation

$$y_\alpha = \xi_\alpha(t;\ x_1, \ldots, x_n) \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, n), \tag{14}$$

qui a pour inverse

$$x_\alpha = \varphi_\alpha(t;\ y_1, \ldots, y_n) \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, n), \tag{15}$$

sera ainsi la *transformation réductrice* $\mathcal{R}$ de $\mathcal{S}$ [d'équations (1)], qui a pour *génératrice* la solution complète $\mathcal{F}$, d'équations (2), de ce système.

4. Tout *sous-système* Σ du système S associé à un système $\mathcal{S}$ donné peut être défini par l'adjonction, aux équations (1) de $\mathcal{S}$, d'un système complémentaire Ω, de la forme

$$\Pi_\omega(t;\ x_1, \ldots, x_n;\ \ldots,\ x_\alpha^{(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)}, \ldots) = 0 \qquad (\omega = 1, 2, \ldots, s), \tag{16}$$

les indices $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ étant des indices de dérivation par rapport à $c_1, \ldots, c_n$ respectivement. On peut, en effet, en se servant des équations (1), faire disparaître des autres équations de Σ toute dérivation par rapport à t. D'autre part, on ne change pas l'ensemble des solutions de Σ en lui adjoignant les dérivées, par rapport à t, des équations (16) [après en avoir fait disparaître, au moyen des équations (1), les dérivées x'_α et $(x'_\alpha)^{(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)}$], c'est-à-dire les équations obtenues en appliquant aux équations (16) la transformation infinitésimale Df, convenablement prolongée. On pourra donc supposer que Ω est invariant par Df. Nous dirons, dans ces conditions, que Ω est le *noyau* de Σ.

5. Cela posé, le *réduit* Σ_0 de Σ par la transformation réductrice (14) sera formé de S_0 [d'équations (12)], et du *noyau réduit* Ω_0, qui s'obtiendra en portant dans les équations (16) les expressions (15) des x_α et leurs dérivées $x_\alpha^{(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)}$. Celles-ci seront des fonctions linéaires homogènes des dérivées $\varphi_\alpha^{(\omega_1, \ldots, \omega_n)}$ des $\varphi_\alpha(t; y_1, \ldots, y_n)$, prises par rapport aux y_β, avec des coefficients entiers par rapport aux dérivées $y_\beta^{(\beta_1, \ldots, \beta_n)}$ des y_β par rapport aux c_ν. Soit

$$\Pi_\omega(t;\ y_1, \ldots, y_n;\ \ldots, y_\beta^{(\omega_1, \ldots, \omega_n)}, \ldots;\ \ldots, \varphi_\alpha^{(\varpi_1, \ldots, \varpi_n)}, \ldots) = 0 \qquad (\omega = 1, 2, \ldots, s) \tag{17}$$

le système ainsi obtenu. Il admettra la transformation infinitésimale $\dfrac{\partial f}{\partial t}$, qui est associée à $\mathcal{S}_0$ comme Df l'est à $\mathcal{S}$, et qui est, par suite la transformée de Df par toute transformation réductrice de $\mathcal{S}$.

On obtiendra donc un système $\overline{\Omega_0}$ équivalent à Ω_0 en faisant $t = t_0$ dans (17). Ce sera le système

$$\Pi_\omega(t_0;\ y_1, \ldots, y_n;\ \ldots, y_\beta^{(\omega_1, \ldots, \omega_n)}, \ldots;\ \ldots, \gamma_\alpha^{(\varpi_1, \ldots, \varpi_n)}, \ldots) = 0 \qquad (\omega = 1, 2, \ldots, s), \tag{18}$$

où les γ_α seront les données initiales (3) de la solution complète génératrice considérée $\mathcal{F}$.

En identifiant alors, par rapport aux $y_\beta^{(\beta_1, \ldots, \beta_n)}$, les systèmes (17) et (18), on obtiendra un système différentiel relatif aux φ_α, qui sera le *système adjoint* A de Σ admettant pour l'une de ses solutions cette génératrice $\mathcal{F}$.

6. Les opérations indiquées ci-dessus pour la construction de l'adjoint A sont de nature rationnelle. Si donc Σ est rationnel, et si t_0 et les $\gamma_\alpha(c_1, \ldots, c_n)$ le sont, A sera rationnel. On en conclut que, si une solution complète $\mathfrak{F}$ de $\mathfrak{S}$ est rationnelle pour une valeur particulière de t quelconque, elle est, pour tout sous-système Σ de $\mathfrak{S}$ rationnel, solution d'un adjoint rationnel de ce sous-svstème.

Toutes les conditions voulues pour l'application de notre théorie générale de la réductibilité sont, dès lors, remplies pour les systèmes $\mathfrak{S}$ considérés.

II. — Sur la réductibilité des équations différentielles ordinaires d'ordre n à une inconnue.

L'étude de la réductibilité des équations différentielles ordinaires d'ordre n, à une inconnue, a été, jusqu'ici, rattachée, comme un cas particulier, à la théorie de l'intégration logique des équations aux dérivées partielles du premier ordre, linéaires et homogènes,

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \theta_1(t; x_1, \ldots, x_n)\frac{\partial f}{\partial x_1} + \ldots + \theta_n(t; x_1, \ldots, x_n)\frac{\partial f}{\partial x_n} = 0.$$

Il y aurait cependant un intérêt théorique et pratique à en avoir une théorie directe.

On montrera ici comment on en peut fonder une sur la théorie générale de la réductibilité du présent Mémoire.

1. Les équations à considérer, supposées d'un même ordre donné n, seront prises sous la forme résolue

$$x^{(n)} = \theta(t; x, x', x'', \ldots, x^{(n-1)}), \tag{1}$$

x étant l'inconnue et $x', x'', \ldots, x^{(n-1)}$ étant ses dérivées successives par rapport à la variable indépendante t.

Ce seront les systèmes $\mathfrak{S}$ de la théorie générale. Une *solution complète* $\mathfrak{F}$ d'un tel système $\mathfrak{S}$ sera une solution de $\mathfrak{S}$ dépendant de n indéterminées $c_1, \ldots, c_n$,

$$x = \varphi(t; c_1, \ldots, c_n), \tag{2}$$

et formant avec ses $n-1$ premières dérivées par rapport à t, $\varphi', \varphi'', \ldots, \varphi^{(n-1)}$, n fonctions de $c_1, \ldots, c_n$ indépendantes. L'équation (2) est, en effet, apte à représenter, pour des valeurs convenables des c_α, toute solution particulière de $\mathfrak{S}$, puisque φ est, par définition, une intégrale générale de (1). Cette solution complète $\mathfrak{F}$ sera déterminée par des conditions initiales de la forme

$$\varphi^{(\alpha)}(t_0; c_1, \ldots, c_n) = \gamma_\alpha(c_1, \ldots, c_n) \qquad (\alpha = 0, 1, 2, \ldots, n-1), \tag{3}$$

avec la convention que la dérivée d'indice zéro d'une fonction est cette fonction même. Elle sera dite *principale, relativement à* $t = t_0$, si $\gamma_\alpha = c_{\alpha+1}$.

Le système d'équations

$$x^{(\alpha)} = \varphi^{(\alpha)}(t; c_1, \ldots, c_n) \qquad (\alpha = 0, 1, 2, \ldots, n-1) \tag{4}$$

sera résoluble sous la forme

$$c_\alpha = \xi_\alpha(t; x, x', \ldots, x^{(n-1)}) \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, n), \tag{5}$$

et les ξ_α formeront un système fondamental d'invariants de la transformation infinitésimale

$$Df = \frac{\partial f}{\partial t} + x' \frac{\partial f}{\partial x} + \ldots + x^{(n-1)} \frac{\partial f}{\partial x^{(n-2)}} + \theta \frac{\partial f}{\partial x^{(n-1)}}, \tag{6}$$

c'est-à-dire de solutions de $Df = 0$. Si $\mathfrak{F}$ est principale, par rapport à $t = t_0$, on aura

$$\xi_\alpha(t_0; x, x', \ldots, x^{(n-1)}) = x^{(\alpha-1)} \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, n),$$

de sorte que ce système fondamental sera aussi principal, relativement à $t = t_0$.

Il y a un système $\mathfrak{S}$ et un seul ayant une solution complète (2), arbitrairement donnée, à savoir :

$$x^{(n)} = \varphi^{(n)}(t; \xi_1, \ldots, \xi_n). \tag{7}$$

L'ensemble $(\mathfrak{F})$ des solutions complètes de tous les systèmes $\mathfrak{S}$ considérés est donc représenté par (2), φ étant une fonction arbitraire de ses arguments; et le système S, *associé* à un système $\mathfrak{S}$, qui en définit les solutions complètes, est représenté par la même équation (1) que lui, dès que l'on considère x comme une fonction des variables indépendantes t, $c_1, \ldots, c_n$, et les $x^{(\alpha)}$, comme on l'a fait pour les $\varphi^{(\alpha)}$, comme des dérivées partielles.

2. Pour les *transformations auxiliaires* $\mathfrak{C}$ de la théorie générale, nous prendrons les transformations différentielles d'ordre $(n-1)$,

$$y = F(t; x, x', \ldots, x^{(n-1)}), \tag{8}$$

qui, laissant t invariant, changent toute fonction x de t en une autre fonction, y. Si x est solution du système $\mathfrak{S}$ d'équation (1), on a de proche en proche, *modulo* $\mathfrak{S}$, pour les dérivées de y, au moyen de l'opérateur Df défini par (6),

$$y' = DF = F_1(t; x, x', \ldots, x^{(n-1)}), \quad \ldots, \quad y^{(\alpha)} = DF_{\alpha-1} = F_\alpha(t; x, x', \ldots, x^{(n-1)}), \quad \ldots. \tag{9}$$

En résolvant (11) ensuite le système formé par (8) et les $(n-1)$ premières équations (9), on aura des formules de la forme

$$x = G(t; y, y', \ldots, y^{(n-1)}), \tag{10}$$

$$x^{(\alpha)} = G_\alpha(t; y, y', \ldots, y^{(n-1)}) \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, n-1); \tag{11}$$

(11) Nous excluons dans cette Note, tous les cas d'exception.

et le transformé $\mathcal{S}'$ de $\mathcal{S}$ sera

$$(12) \qquad y^{(n)} = F_n(t;\ G,\ G_1,\ \ldots,\ G_{n-1}) = \overline{\theta}(t;\ y,\ y',\ \ldots,\ y^{(n-1)}).$$

Soit, *inversement*, la transformation auxiliaire $\mathcal{C}'$, de y en x, d'équation (10), et appliquons-la à une solution y de $\mathcal{S}'$. Si nous considérons $x', \ldots, x^{(n-1)}$, pour un moment, comme les fonctions de t définies par les formules (11), les équations (8) et les n premières équations (9) seront vérifiées, et l'on en déduira, par des dérivations, les identités

$$(13) \quad \frac{\partial F_\alpha}{\partial x}\left(\frac{dx}{dt} - x'\right) + \ldots + \frac{\partial F_\alpha}{\partial x^{(n-2)}}\left(\frac{dx^{(n-2)}}{dt} - x^{(n-1)}\right) + \frac{\partial F_\alpha}{\partial x^{(n-1)}}\left(\frac{dx^{(n-1)}}{dt} - \theta\right) = 0,$$

pour $\alpha = 0, 1, 2, \ldots, n-1$ (en faisant $F_0 = F$). Par suite, $x', \ldots, x^{(n-1)}$ sont les $n-1$ premières dérivées de x, et $\mathcal{C}'$ change $\mathcal{S}'$ en $\mathcal{S}$. Donc $\mathcal{C}'$ est *pseudo-inverse* de $\mathcal{C}$, *modulo* $\mathcal{S}$; et $\mathcal{C}$ est *pseudo-inverse* de $\mathcal{C}$, *modulo* $\mathcal{S}'$. On voit, de plus, que $G_\alpha = D'G_{\alpha-1}$ ($\alpha = 1, 2, \ldots, n-1$; $G_0 = G$), avec

$$(14) \qquad D'f = \frac{\partial f}{\partial t} + y'\frac{\partial f}{\partial y} + \ldots + y^{(n-1)}\frac{\partial f}{\partial y^{(n-2)}} + \overline{\theta}\frac{\partial f}{\partial y^{(n-1)}}.$$

3. Conformément aux hypothèses de la théorie générale, l'ensemble $(\mathcal{S})$ des systèmes $\mathcal{S}$ considérés est une *classe* vis-à-vis des transformations auxiliaires $\mathcal{C}$ que nous venons d'introduire, et l'ensemble $(\mathcal{C})$ de celles-ci est *simplement transitif* relativement à l'ensemble $(\mathcal{F})$ des solutions complètes $\mathcal{F}$ de tous les systèmes de cette classe $(\mathcal{S})$. Cela résulte de ce qu'il y a une transformation $\mathcal{C}$, et une seule, qui change la solution complète $\mathcal{F}$, d'équation (2) donnée, en une autre solution complète donnée $\mathcal{F}'$,

$$(15) \qquad y = \psi(t;\ c_1,\ \ldots,\ c_n).$$

En effet, pour qu'il en soit ainsi de la transformation (8), il faut et il suffit que l'on ait l'identité en $t, c_1, \ldots, c_n$

$$(16) \qquad F(t;\ \varphi,\ \varphi',\ \ldots,\ \varphi^{(n-1)}) = \psi(t;\ c_1,\ \ldots,\ c_n),$$

qui devient, par le changement de variables défini par (5), ou par le système équivalent (4), l'identité en $t, x, x', \ldots, x^{(n-1)}$

$$(17) \qquad F(t;\ x,\ x',\ \ldots,\ x^{(n-1)}) = \psi(t;\ \xi_1,\ \ldots,\ \xi_n).$$

La transformation $\mathcal{C}$, unique, annoncée est donc

$$(18) \qquad y = \psi(t;\ \xi_1,\ \ldots,\ \xi_n).$$

On remarquera que, les ξ_α étant des invariants de Df, elle se complète, *modulo* $\mathcal{S}$, par les formules

$$(19) \qquad y^{(\alpha)} = \psi^{(\alpha)}(t;\ \xi_1,\ \ldots,\ \xi_n) \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, n-1).$$

Sa pseudo-inverse, *modulo* $\mathfrak{S}$, $\mathfrak{C}'$, est, de même,

$$x = \varphi(t;\ \eta_1, \ldots, \eta_n), \tag{20}$$

les η_α étant définis par la résolution, sous la forme

$$c_\alpha = \eta_\alpha(t;\ y, y', \ldots, y^{(n-1)}) \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, n), \tag{21}$$

du système

$$y^{(\alpha)} = \psi^{(\alpha)}(t;\ c_1, \ldots, c_n) \qquad (\alpha = 0, 1, 2, \ldots, n-1); \tag{22}$$

et les η_α étant des invariants de $\mathrm{D}'f$, on peut lui adjoindre, *modulo* $\mathfrak{S}'$, les formules

$$x^{(\alpha)} = \varphi^{(\alpha)}(t;\ \eta_1, \ldots, \eta_\alpha) \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, n-1). \tag{23}$$

Remarquons que $\mathfrak{F}$ et $\mathfrak{F}'$ sont liées, symétriquement, par les relations

$$\xi_\alpha(t;\ x, x', \ldots, x^{(n-1)}) = \eta_\alpha(t;\ y, y', \ldots, y^{(n-1)}) \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, n), \tag{24}$$

que l'on obtient en résolvant les systèmes (18), (19) et (20), (23) par rapport aux ξ_α et aux η_α respectivement.

Par ailleurs, l'existence d'une transformation $\mathfrak{C}$, unique, changeant $\mathfrak{F}$ en $\mathfrak{F}'$ entraîne que la famille $(\mathfrak{C})$ des transformations auxiliaires est un *pseudo-groupe modulo* $(\mathfrak{S})$: ce qu'il est facile, du reste, de vérifier directement.

4. Nous prendrons comme *réduit* de la classe $(\mathfrak{S})$ le système $\mathfrak{S}_0$ dont l'équation est $y^{(n)} = 0$. Sa solution complète principale $\mathfrak{F}_0$, relative à $t = t_0$ est

$$y = c_1 + \frac{t - t_0}{1} c_2 + \ldots + \frac{(t - t_0)^{n-1}}{(n-1)!} c_n, \tag{25}$$

et satisfait aux équations (21) si l'on pose

$$\left\{\begin{aligned}
&\eta_1 = y + \frac{t_0 - t}{1} y' + \ldots + \frac{(t_0 - t)^{n-2}}{(n-2)!} y^{(n-2)} + \frac{(t_0 - t)^{n-1}}{(n-1)!} y^{(n-1)},\\
&\eta_2 = y' + \frac{t_0 - t}{1} y'' + \ldots + \frac{(t_0 - t)^{n-2}}{(n-2)!} y^{(n-1)},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
&\eta_{n-1} = y^{(n-2)} + \frac{t_0 - t}{1} y^{(n-1)},\\
&\eta_n = y^{(n-1)}.
\end{aligned}\right. \tag{26}$$

Pour le système $(\mathfrak{S})$ d'équation (1), la *transformation réductrice* $\mathfrak{R}$ qui a pour *génératrice* la solution complète $\mathfrak{F}$ d'équation (2), c'est-à-dire qui change $\mathfrak{F}$ en $\mathfrak{F}_0$ est dès lors, en application de (18),

$$y = \xi_1 + \frac{t - t_0}{1} \xi_2 + \ldots + \frac{(t - t_0)^{n-1}}{(n-1)!} \xi_n; \tag{27}$$

et sa pseudo-inverse *modulo* $\mathfrak{S}$, est, avec les notations (26), la transformation $\mathfrak{R}'$ définie par (20).

5. On peut définir tout *sous-système* Σ du système S associé à un système $\mathfrak{S}$, donné, en adjoignant à l'équation (1) de $\mathfrak{S}$ (et de S), un système Ω de la forme

$$(28)\quad H_\omega(t;\ x,\ x',\ \ldots,\ x^{(n-1)};\ \ldots,\ x^{(\alpha)}_{\alpha_1,\ldots,\alpha_n},\ \ldots)=0 \qquad (0\leq\alpha<n;\ \omega=1,\ 2,\ \ldots,\ s),$$

où les indices inférieurs $\alpha_1,\ \ldots,\ \alpha_n$ sont des indices de dérivation par rapport à $c_1,\ \ldots,\ c_n$ respectivement. Or, toute solution de ce système $\Sigma=(S,\ \Omega)$ satisfera aussi aux équations obtenues en dérivant par rapport à t les équations (28) et en se servant de (1) pour éliminer $x^{(n)}$ et les $x^{(n)}_{\alpha_1,\ldots,\alpha_n}$, c'est-à-dire en leur appliquant la transformation Df (convenablement prolongée). On pourra donc adjoindre à Ω toute équation ainsi obtenue qui n'en serait pas une conséquence algébrique; et cela permet de supposer que Ω sera, vis-à-vis de Df, un système invariant. Nous dirons, dans ces conditions, que Ω est le *noyau* de Σ.

Cela posé, le *réduit* de Σ par une transformation réductrice $\mathfrak{R}$ quelconque, d'équation (27) sera $\Sigma_0=(S_0,\ \Omega_0)$, Ω_0 étant le transformé de Ω, que nous appellerons son *réduit*.

Ce *noyau réduit* s'obtiendra en remplaçant dans les H_ω, conformément aux résultats du n° 4, les $x^{(\alpha)}$ ($\alpha=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n-1$) par les $\varphi^{(\alpha)}(t;\ \eta_1,\ \ldots,\ \eta_n)$, et les $x^{(\alpha)}_{\alpha_1,\ldots,\alpha_n}$ par les dérivées, d'indices $\alpha_1,\ \ldots,\ \alpha_n$, de ces fonctions composées de $c_1,\ \ldots,\ c_n$, calculées en se servant des formules (26) qui définissent les η_α. Ces expressions des $x^{(\alpha)}_{\alpha_1,\ldots,\alpha_n}$ seront linéaires homogènes par rapport aux dérivées $\varphi^{(\alpha)}_{\omega_1,\ldots,\omega_n}$ des fonctions $\varphi^{(\alpha)}(t;\ c_1,\ \ldots,\ c_n)$, (avec $c_\alpha=\eta_\alpha$) et les coefficients seront des polynomes entiers par rapport aux dérivées $\eta_{\alpha;\varpi_1,\ldots,\varpi_n}$, calculées au moyen des formules (26) en fonction linéaire et homogène des $y^{(\varpi)}_{\varpi_1,\ldots,\varpi_n}$.

Le système Ω_0 se présentera ainsi sous la forme

$$(29)\quad \Pi_\omega\left[t;\ \ldots,\ \varphi^{(\alpha)}_{\alpha_1,\ldots,\alpha_n}(t;\ \eta_1,\ \ldots,\ \eta_n),\ \ldots;\ \ldots,\ \eta_{\alpha;\varpi_1,\ldots,\varpi_n},\ \ldots\right]=0 \qquad (\omega=1,\ 2,\ \ldots,\ s),$$

avec les expressions (26) pour les η_α et leurs conséquences

$$(30)\qquad \eta_{\alpha;\varpi_1,\ldots,\varpi_n}=y^{(\alpha-1)}_{\varpi_1,\ldots,\varpi_n}+\frac{t_0-t}{1}\,y^{(\alpha)}_{\varpi_1,\ldots,\varpi_n}+\ldots.$$

Remarquons que Ω admettant Df, Ω_0 admettra

$$(31)\qquad D_0 f=\frac{\partial f}{\partial t}+y'\frac{\partial f}{\partial y}+\ldots+y^{(n-1)}\frac{\partial f}{\partial y^{(n-2)}};$$

car $\mathfrak{R}$, transformant $\mathfrak{S}$ en $\mathfrak{S}_0$, change Df en D$_0f$.

Or, les η_α et leurs dérivées $\eta_{\alpha;\varpi_1,\ldots,\varpi_n}$ étant des invariants de D$_0f$, l'invariance de (29) par D$_0f$ équivaudra à son invariance par $\frac{\partial f}{\partial t}$, et l'on obtiendra, en y faisant $t=t_0$ (sans modifier les η_α, ni les $\eta_{\alpha;\varpi_1,\ldots,\varpi_n}$), le système équivalent $\overline{\Omega}_0$, dont les équations seront

$$(32)\quad \Pi_\omega\left[t_0;\ \ldots,\ \gamma_{\alpha;\alpha_1,\ldots,\alpha_n}(\eta_1,\ \ldots,\ \eta_n),\ \ldots;\ \ldots,\ \eta_{\alpha;\varpi_1,\ldots,\varpi_n},\ \ldots\right)=0 \qquad (\omega=1,\ 2,\ \ldots,\ s),$$

compte tenu des équations (3).

On conclut donc que l'on connaît le *réduit* de Σ par $\mathcal{R}$, si l'on connaît les données initiales qui définissent la solution complète $\mathcal{F}$, génératrice de $\mathcal{R}$.

6. En identifiant les deux systèmes (29) et (32) par rapport aux $\eta_{|\alpha;\varpi_1,\ldots,\varpi_n}$, on obtiendra, en considérant t et $\eta_1, \ldots, \eta_n$ comme des variables indépendantes, un système différentiel, où φ sera l'inconnue. Ce sera l'*adjoint* de Σ dont l'une des solutions est la solution complète de $\mathcal{S}$ qui satisfait aux conditions initiales (3), pour $t = t_0$.

Les calculs qui y auront conduit étant de nature rationnelle, cet adjoint sera rationnel si Σ l'est, et si t_0 et les $\gamma_\alpha(c_1, \ldots, c_n)$ sont pris dans le domaine de rationalité Δ considéré.

La théorie générale s'appliquera donc, et les solutions *à point rationnel* seront *primitives*.

III. — Sur la réductibilité des équations aux dérivées partielles du premier ordre à une inconnue (12).

1. Les équations en question seront prises sous la forme résolue

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \theta\left(t;\ x_1, \ldots, x_n;\ z;\ \frac{\partial z}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial z}{\partial x_n}\right), \tag{1}$$

et l'on considérera les dérivées partielles $\frac{\partial z}{\partial t}, \frac{\partial z}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial z}{\partial x_n}$ comme des inconnues auxiliaires. Les systèmes $\mathcal{S}$ de la théorie générale seront ainsi les systèmes mixtes

$$\frac{\partial z}{\partial t} = q, \qquad \frac{\partial z}{\partial x_1} = p_1, \qquad \ldots, \qquad \frac{\partial z}{\partial x_n} = p_n, \qquad q = \theta(t; x_1, \ldots, x_n; z; p_1, \ldots, p_n) \tag{2}$$

correspondant à une même valeur de n donnée.

Les *solutions complètes* $\mathcal{F}$ de la théorie générale seront les *intégrales complètes* au sens de Lagrange, des équations (1), c'est-à-dire les familles de solutions

$$z = \varphi(t; x_1, \ldots, x_n; a_1, \ldots, a_n; c), \qquad q = \frac{\partial \varphi}{\partial t}, \qquad p_1 = \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}, \qquad \ldots, \qquad p_n = \frac{\partial \varphi}{\partial x_n} \tag{3}$$

dépendant de $n+1$ constantes arbitraires $a_1, \ldots, a_n, c$ pour lesquelles φ, $\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial \varphi}{\partial x_n}$ sont, relativement à ces arguments, des fonctions indépendantes. De chacune d'elles on déduit, en effet, toute solution particulière de $\mathcal{S}$ (comme il est bien connu) sous la forme

$$z = \varphi[t; x_1, \ldots, x_n; a_1, \ldots, a_n; \gamma(a_1, \ldots, a_n)], \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial a_\alpha} + \frac{\partial \varphi}{\partial \gamma}\frac{\partial \gamma}{\partial a_\alpha} = 0 \quad (\alpha = 1, 2, \ldots, n), \tag{4}$$

(12) J'ai donné autrefois (*Annales de l'École Normale Supérieure*, 3e série, t. 32, 1915) une théorie directe de la réductibilité de ces équations. Mais elle aurait besoin d'être révisée sur certains points.

où $a_1, \ldots, a_n$ sont des indéterminées auxiliaires, et $\gamma(a_1, \ldots, a_n)$ une fonction de ces indéterminées convenablement choisie.

Tout système (3) définit, du reste $\left(\text{si } \varphi, \frac{\partial\varphi}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial\varphi}{\partial x_n} \text{ sont des fonctions de } a_1, \ldots, a_n, c \text{ indépendantes}\right)$, une solution complète $\mathfrak{F}$ d'un système $\mathfrak{S}$ et d'un seul, que l'on obtiendrait en éliminant $a_1, \ldots, a_n, c$ entre les équations (3).

On sait aussi que tout système $\mathfrak{S}$ a une solution complète et une seule satisfaisant à une *condition initiale* de la forme

$$\varphi(t_0;\ x_1, \ldots, x_n;\ a_1, \ldots, a_n;\ c) = \xi(x_1, \ldots, x_n;\ a_1, \ldots, a_n;\ c), \tag{5}$$

où t_0 est une valeur initiale arbitraire de t, et où ξ est une fonction de ses arguments arbitrairement donnée, sous réserve de l'indépendance, relativement à $a_1, \ldots, a_n, c$, de $\xi, \frac{\partial\xi}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial\xi}{\partial x_n}$.

Le système S de la théorie générale, *associé* au système $\mathfrak{S}$, d'équations (2) (qui en définit les solutions complètes) est formé de ces même équations, où l'on interprétera $z, q, p_1, \ldots, p_n$ comme des fonctions des $2n+2$ variables t, $x_1, \ldots, x_n, a_1, \ldots, a_n, c$.

2. Pour les *transformations auxiliaires* $\mathfrak{C}$ de la théorie générale, nous prendrons les transformations de contact de l'espace $(t, x_1, \ldots, x_n, z)$ qui laissent invariante la coordonnée t. Leur ensemble $(\mathfrak{C})$ est un groupe. Chacune a au moins deux équations directrices. Nous appellerons *normales* et nous désignerons par la lettre $\mathfrak{N}$ celles qui n'en ont que deux. Ces équations directrices étant alors mises sous la forme

$$t = t', \qquad z = \mathrm{V}(t;\ x_1, \ldots, x_n;\ x'_1, \ldots, x'_n;\ z'), \tag{6}$$

on dira que la transformation $\mathfrak{N}$ ainsi définie a pour *génératrice* la solution complète

$$z = \mathrm{V}(t;\ x_1, \ldots, x_n;\ a_1, \ldots, a_n;\ c). \tag{7}$$

Ce sera celle des transformations $\mathfrak{C}$ qui change les surfaces constituant cette solution complète en la famille $\overline{\mathfrak{F}}_0$ des droites $x'_1 = a_1, \ldots, x'_n = a_n, z' = c$. Le système de ses équations se composera des équations (6) et des équations

$$q - \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial t} = q' \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial z'}, \qquad p_\alpha = \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial x_\alpha}, \qquad \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial x'_\alpha} + p'_\alpha \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial z'} = 0 \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, n). \tag{8}$$

Il en résulte qu'elle change en $q' = 0$ une équation (1) lorsque celle-ci résulte de l'élimination de $x'_1, \ldots, x'_n, z'$ entre les équations

$$z = \mathrm{V}; \qquad p_\alpha = \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial x_\alpha} \quad (\alpha = 1, 2, \ldots, n); \qquad q = \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial t}, \tag{9}$$

c'est-à-dire lorsque sa génératrice (7) est solution complète du système $\mathfrak{S}$ qui a les équations (2) pour équations.

On conclut de ces observations que l'ensemble $(\mathfrak{S})$ des systèmes $\mathfrak{S}$ est une *classe* vis-à-vis du groupe $(\mathfrak{G})$, et que $q=0$, $\frac{\partial z}{\partial x_\alpha}=p_\alpha(\alpha=1, 2, \ldots, n)$, que nous désignerons par $\mathfrak{S}_0$, peut être pris pour *réduit* de cette classe.

D'une manière plus précise, soient $\mathfrak{F}_1$ et $\mathfrak{F}_2$ deux solutions complètes (d'un même système $\mathfrak{S}$ ou de deux); $\mathfrak{N}_1$ et $\mathfrak{N}_2$ les transformations auxiliaires normales dont elles sont génératrices; et $\mathfrak{N}'_1$, $\mathfrak{N}'_2$ les inverses de celles-ci. La transformation produit $\mathfrak{G}=\mathfrak{N}_1\mathfrak{N}'_2$, où $\mathfrak{N}_1$ change $\mathfrak{F}_1$ en $\overline{\mathfrak{F}}_0$, et où $\mathfrak{N}'_2$ change $\overline{\mathfrak{F}}_0$ en $\mathfrak{F}_2$, change $\mathfrak{F}_1$ en $\mathfrak{F}_2$. Et réciproquement, si une transformation $\mathfrak{G}$ change $\mathfrak{F}_1$ en $\mathfrak{F}_2$, le produit $\mathfrak{G}\mathfrak{N}_2$ change $\mathfrak{F}_1$ en $\overline{\mathfrak{F}}_0$, de sorte que l'on a $\mathfrak{G}\mathfrak{N}_2=\mathfrak{N}_1$, d'où $\mathfrak{G}=\mathfrak{N}_1\mathfrak{N}'_2$.

Il y a donc, conformément aux hypothèses de la théorie générale, une transformation $\mathfrak{G}$ et une seule qui change $\mathfrak{F}_1$ en $\mathfrak{F}_2$, à savoir $\mathfrak{G}=\mathfrak{N}_1\mathfrak{N}'_2$. On remarquera qu'il résulte de là que toute transformation, normale ou non, peut être mise sous cette forme d'une infinité de manières.

2 *bis*. Pour chaque système $\mathfrak{S}$ seront dites *réductrices* les transformations $\mathfrak{G}$ *normales* qui le changent en le *réduit* $\mathfrak{S}_0$, c'est-à-dire les transformations $\mathfrak{N}$ qui ont pour génératrices les diverses solutions complètes de $\mathfrak{S}$. Si cependant, $\mathfrak{S}$ est *semi-linéaire*, chacune de ses intégrales complètes (au sens de Sophus Lie) *à moins de* $(n+1)$ *dimensions* donne naissance à une transformation $\mathfrak{G}$, *à plus de deux équations directrices*, qui réduit $\mathfrak{S}$ à $\mathfrak{S}_0$. Mais, comme nous n'avons ici en vue que la recherche des solutions complètes, au sens strict de Lagrange, nous ferons abstraction de ces transformations $\mathfrak{G}$ non-normales, et nous réserverons le nom de *réductrices* à celles qui sont à la fois réductrices et normales.

3. Soit maintenant Σ un *sous-système* du type S *associé* à un système $\mathfrak{S}$ donné, d'équations (2). On pourra le supposer formé de S et d'un système complémentaire Σ d'où l'on aura fait disparaître, en se servant de S, l'inconnue q et toutes les dérivées partielles de $z, p_1, \ldots, p_n$ comportant une dérivation par rapport à t. On pourra aussi supposer que Ω demeure invariant par la transformation infinitésimale de contact

$$\mathrm{C}f=[\mathrm{W}, f]-\mathrm{W}\frac{\partial f}{\partial z}, \qquad \text{où } \mathrm{W}=q-0. \tag{10}$$

On sait, en effet, que toute intégrale de $\mathfrak{S}$ est engendrée par des trajectoires (*caractéristiques*), de $\mathrm{C}f$; de sorte que toute solution de Σ satisfera aux équations obtenues en appliquant $\mathrm{C}f$ aux équations de Ω, et qu'il sera, dès lors, loisible d'adjoindre à Ω, sans changer les solutions de Σ, toutes celles qui ne seraient pas des conséquences algébriques de Ω. Le système Ω, étant ainsi supposé ne dépendre de t que comme d'un paramètre, ne pas faire intervenir l'inconnue g et admettre $\mathrm{C}f$, sera dit le *noyau* de Σ.

4. Cela posé, appliquons à Σ la transformation réductrice $\mathcal{R}$ qui a pour génératrice une solution complète $\mathcal{F}$ de $\mathcal{S}$, d'équation (7) : elle changera S en son *réduit* S_0, associé de $\mathcal{S}_0$, et Ω en un *réduit* Ω_0 ; et, par suite, changera $\Sigma = (S, \Omega)$ en son *réduit* $\Sigma_0 = (S_0, \Omega_0)$. Le *noyau réduit* Ω_0 ne dépendra pas de q', et t n'y sera qu'un paramètre. De plus, les équations (6) et (8) de $\mathcal{R}$ ayant pour conséquences

$$(11)\quad dz - q\,dt - p_1\,dx_1 - \ldots - p_n\,dx_n = \frac{\partial V}{\partial z'}(dz' - q'\,dt' - p'_1\,dx'_1 - \ldots - p'_n\,dx'_n),$$

et

$$(12)\qquad W = q'\frac{\partial V}{\partial z'},$$

$\mathcal{R}$ changera Cf en $C_0 f = [q', f] - q'\frac{\partial f}{\partial z'} = \frac{\partial f}{\partial t'}$, de sorte que Ω_0 admettra $\frac{\partial f}{\partial t}$, c'est-à-dire sera indépendant de t. On pourra donc, pour l'obtenir, donner à t, dans tout le calcul, (où il ne joue que le rôle d'une constante arbitraire) une valeur arbitraire t_0 : c'est-à-dire effectuer dans le système $\Omega^{(0)}$, déduit de Ω en faisant $t = t_0$, la transformation auxiliaire $\mathcal{R}^{(0)}$ qui a pour génératrice la fonction $\zeta(x_1, \ldots, x_n; a_1, \ldots, a_n; c)$ qui est la valeur initiale pour $t = t_0$ de la génératrice $V(t; x_1, \ldots, x_n; a_1, \ldots, a_n; c)$ de $\mathcal{R}$.

Les règles classiques des changements de variables donneront, pour $\mathcal{R}^{(0)}$, des expressions explicites de $z, p_1, \ldots, p_n$ et de leurs dérivées (par rapport à $x_1, \ldots, x_n, a_1, \ldots, a_n, c$) en fonction de $\zeta(x_1, \ldots, x_n; x'_1, \ldots, x'_n; z')$ et de ses dérivées, et des dérivées de $z', p'_1, \ldots, p'_n$ (par rapport à $x'_1, \ldots, x'_n, a_1, \ldots, a_n, c$). On les portera dans $\Omega^{(0)}$, et il ne restera plus qu'à remplacer $x_1, \ldots, x_n$, dans le système $\overline{\Omega}^{(0)}$ ainsi obtenu, par leurs valeurs tirées des équations

$$(13)\qquad \frac{\partial \zeta}{\partial x'} + p'_\alpha \frac{\partial \zeta}{\partial z'} = 0 \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, n).$$

Il y aura des solutions complètes V de $\mathcal{S}$ pour lesquelles cette dernière partie du calcul se fera rationnellement. Telle sera celle qui se réduira, pour une valeur initiale $t = t_0$ donnée, à $a_1 x_1 + \ldots + a_n x_n - c$: nous l'appellerons la solution complète *principale*, relative à cette valeur t_0. La transformation $\mathcal{R}^{(0)}$ sera, pour elle, la transformation de contact involutive d'Ampère

$$(14)\qquad \begin{cases} x'_\alpha = p_\alpha, \quad p'_\alpha = x_\alpha \quad (\alpha = 1, 2, \ldots, n); \\ t' = t, \quad q' = -q, \quad z' = x_1 x'_1 + \ldots + x_n x'_n - z. \end{cases}$$

5. Reprenons maintenant le calcul du noyau réduit Ω_0 en laissant indéterminée la génératrice V de $\mathcal{R}$. On aura encore des formules explicites donnant $z, p_1, \ldots, p_n$ et leurs dérivées, au moyen de la fonction indéterminée $V(t; x_1, \ldots, x_n; x'_1, \ldots, x'_n; z')$ et de ses dérivées, en fonction de $t', x_1, \ldots, x_n, x'_1, \ldots, x'_n, z'$ et des dérivées de $z', p'_1, \ldots, p'_n$. On portera dans Ω ces expressions; mais il faudrait, pour avoir Ω_0, remplacer dans le système $\overline{\Omega}$ ainsi

obtenu, les variables $x_1, \ldots, x_n$ en fonction de $t, x'_1, \ldots, x'_n, z', p'_1, \ldots, p'_n$ au moyen des équations

$$\frac{\partial V}{\partial x'_\alpha} + p'_\alpha \frac{\partial V}{\partial z'} = 0 \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, n); \tag{15}$$

ce qui sera impossible.

On pourra cependant utiliser le système $\overline{\Omega}$ pour identifier le réduit général Ω_0 avec un réduit particulier Π calculé par la méthode du n° 4. Car cela équivaudra à identifier $\overline{\Omega}$ avec le système $\overline{\Pi}$ que l'on obtiendra en remplaçant, dans $\Pi, p'_1, \ldots, p'_n$ par les expressions qu'en donnent les équations (15). Cette identification sera conditionnée par un système différentiel liant la fonction $V(t; x_1 \ldots, x_n; x'_1, \ldots, x'_n; z')$ à ses arguments. En y remplaçant $x'_1, \ldots, x'_n, z'$ par $a_1, \ldots, a_n, c$, posant $z = V(t; x_1, \ldots, x_n; a_1, \ldots, a_n; c)$, et en lui adjoignant S, on aura ainsi (par des calculs rationnels) l'*adjoint* $\mathfrak{A}$ de Σ admettant pour solution la solution complète de $\mathfrak{S}$ qui aura servi à calculer le réduit Π de Ω.

6. On conclut de ce qui précède, sur le plan rationnel, que tout système $\mathfrak{S}$ rationnel possède des solutions complètes (dont les solutions principales relatives à des valeurs de t rationnelles) telles que, pour tout système rationnel de l'associé de $\mathfrak{S}$, l'adjoint auquel satisfait l'une d'elles est aussi rationnel : c'est-à-dire des solutions complètes *distinguées*. On est, dès lors, en mesure d'appliquer aux équations aux dérivées partielles (1), en ce qui concerne la recherche d'une intégrale complète, notre théorie générale de la réductibilité, dans son analyse et dans ses conclusions.

En conséquence, le mode de réductibilité spécial de chaque équation (1) réductible sera caractérisé par la structure d'un *groupe spécifique*, relatif à cette équation, c'est-à-dire au système $\mathfrak{S}$ qui lui correspond, et au domaine de rationalité $\mathfrak{D}$ choisi; et ce groupe sera composé des transformations $\mathfrak{G}$ [transformations de contact de l'espace $(t, x_1, \ldots, x_n, z)$ laissant invariante la coordonnée t] qui laissent invariants tous les sous-systèmes rationnels du système S associé à ce système $\mathfrak{S}$. Chacune des intégrales complètes de (1) (ou solutions complètes de $\mathfrak{S}$) sera, en ce qui concerne sa détermination par des équations rationnelles, inséparable de ses *conjuguées*, c'est-à-dire de ses homologues vis-à-vis de ce groupe spécifique. Il y en aura qui seront, avec leurs conjuguées, les solutions de *systèmes automorphes* rationnels ayant tous le groupe spécifique pour groupe d'automorphie. On les dira *primitives*. Telles seront, en particulier, les solutions complètes *distinguées* dont nous venons de constater, ci-dessus, l'existence.

Les fonctions rationnelles d'une solution complète $\mathfrak{F}$, indéterminée de $\mathfrak{S}$ donneront lieu, en ce qui concerne la rationalité de la *valeur* que prend l'une quelconque d'entre elles quand on y fait $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_0$, $\mathfrak{F}_0$ étant une solution complète

particulière quelconque, à un *théorème de Galois*, c'est-à-dire à une extension aux équations (1) du théorème fondamental de la théorie des équations algébriques de Galois. Une condition nécessaire de cette rationalité sera l'*invariance numérique* de cette valeur vis-à-vis des transformations du groupe spécifique; et cette condition sera suffisante si $\mathcal{F}_0$ est une solution complète primitive ([13]).

Pour se conformer plus strictement aux idées de Galois on peut substituer au groupe spécifique, dans l'énoncé de cette condition, soit le groupe des *permutations* que les transformations du groupe spécifique opèrent sur les intégrales de (1) considérées comme des objets distincts, soit le groupe de celles qu'elles effectuent, de même sur ses intégrales complètes : groupes que nous nommerons respectivement, *groupe de Galois*, et *groupe de réductibilité*.

On pourra enfin remplacer ce dernier par une des représentations analytiques dont il sera susceptible. Par extension d'une terminologie classique, nous nommerons le groupe ainsi obtenu *groupe de rationalité* de l'équation.

On pourra faire en sorte que ce groupe de rationalité soit un *groupe de transformations de contact de l'espace paramétrique* $(a_1, \ldots, a_n, c)$ dont les coordonnées $a_1, \ldots, a_n, c$ figurent dans la forme générale (3) des intégrales complètes (ou solutions complètes).

Cela tient à ce que, comme Sophus Lie l'a montré, on passe de toute intégrale complète à toute autre par une telle transformation : ce qu'il est, du reste, facile de déduire du résultat qui termine le n° 2 de la présente Note. Appliqué, en effet, au *réduit* de la classe $(\mathcal{S})$, c'est-à-dire à l'équation $q = 0$, il montre que l'on passe de toute intégrale complète, $z = W_1(x_1, \ldots, x_n; a_1, \ldots, a_n, c)$ de celle-ci à toute autre par une transformation de contact de l'espace $(x_1, \ldots, x_n, z)$, et par suite, par raison de symétrie, par une transformation de contact de l'espace paramétrique $(a_1, \ldots, a_n, c)$. Soient alors $\mathcal{F}_1$ et $\mathcal{F}_2$ deux solutions complètes quelconques d'un même système $\mathcal{S}$ quelconque, et soit $\mathcal{R}$ une transformation réductrice de ce système : on aura $\mathcal{R}[\mathcal{F}_2] = \mathcal{C}(\mathcal{R}[\mathcal{F}_1])$, $\mathcal{C}$ étant une certaine transformation de contact de l'espace paramétrique $(a_1, \ldots, a_n, c)$; et, par suite, $\mathcal{R}$ et $\mathcal{C}$ opérant respectivement sur deux systèmes d'indéterminées indépendants l'un de l'autre, $\mathcal{R}[\mathcal{F}_2] = \mathcal{R}(\mathcal{C}[\mathcal{F}_1])$. D'où l'on conclut $\mathcal{F}_2 = \mathcal{C}[\mathcal{F}_1]$, ce qui exprime précisément la propriété en question.

([13]) Sur les termes de *valeur* et d'*invariance numérique*, voir, pages 61 et 34 respectivement, les Mémoires que j'ai publiés dans les *Annales de l'École Normale*, en 1941 et 1942.