ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

H. RESAL

Du mouvement d'un corps solide relié à un système matériel animé d'un mouvement relatif par rapport à ce corps

Annales scientifiques de l'É.N.S. 2e série, tome 1 (1872), p. 115-156

<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1872_2_1__115_0>

© Gauthier-Villars (Éditions scientifiques et médicales Elsevier), 1872, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales scientifiques de l'É.N.S. » (http://www.elsevier.com/locate/ansens) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

DU

MOUVEMENT D'UN CORPS SOLIDE

RELIÉ A UN SYSTÈME MATÉRIEL ANIMÉ D'UN MOUVEMENT RELATIF PAR RAPPORT A CE CORPS,

PAR M. H. RESAL,

PROFESSEUR A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE.

Faire ressortir l'influence sur le mouvement d'un corps solide (S) de l'inertie due au mouvement relatif d'un système (s) dont les points d'appui se trouvent sur le corps, tel est le problème que je me suis proposé de résoudre d'une manière générale, et qui comprend notamment, comme cas particuliers, l'étude des mouvements nuisibles d'une locomotive, celle de quelques appareils giratoires, la recherche des moments, par rapport aux axes principaux d'inertie de la Terre, auxquels donnent lieu les oscillations de la mer et de l'atmosphère.

Parmi les théorèmes spéciaux dont je dois faire usage, je citerai : 1° celui de Coriolis sur les forces apparentes dans les mouvements relatifs, et qui est suffisamment connu pour que j'aie à en rappeler ici l'énoncé; 2° les deux propositions suivantes, dont l'application est bien moins répandue dans l'enseignement, et pour les démonstrations desquelles je renverrai à mon *Traité de Cinématique pure :*

1° Si l'on regarde une rotation et une vitesse comme respectivement composées de plusieurs autres, l'accélération centrifuge composée est la résultante des accélérations semblables obtenues en considérant chaque rotation partielle avec chacune des composantes de la vitesse;

2° L'accélération en un point d'un corps solide mobile autour d'un

point fixe, est la résultante de celle qui est due à l'accélération angulaire, et de l'accélération centripète correspondant à la rotation instantanée comme si elle était permanente (théorème de M. Rivals).

§ I. — *Du mouvement de translation du corps solide.*

1. Ce cas ne présente aucune difficulté que le corps soit libre ou non.

Soient :

AX, AY, AZ trois axes rectangulaires de directions fixes passant par un point A de l'espace;
X, Y, Z les coordonnées du centre de gravité O;
M la masse de (S);
M′ la masse totale de (s);
X′, Y′, Z′ les coordonnées de l'un de ses éléments matériels m;
F_x, F_y, F_z les projections sur AX, AY, AZ de la résultante des forces extérieures qui sollicitent l'ensemble de (S) et (s).

On sait que l'on a

$$M\frac{d^2X}{dt^2}+\Sigma m\frac{d^2X'}{dt^2}=F_x,$$

ou

$$(M+M')\frac{d^2X}{dt^2}+\Sigma m\frac{d^2}{dt^2}(X'-X)=F_x.$$

Soient x, y, z les coordonnées de m par rapport à trois axes Ox, Oy, Oz parallèles aux précédents passant par le centre de gravité O de (S) : l'équation ci-dessus devient

$$(M+M')\frac{d^2X}{dt^2}+\Sigma m\frac{d^2x}{dt^2}=F_x. \qquad (1)$$

Si la loi du mouvement relatif est connue, x, y, z sont des fonctions données du temps.

2. *Application à la stabilité des machines à vapeur.* — L'équation (1) est notamment applicable à la stabilité des machines à vapeur en considérant (S) comme représentant le bati, et le massif lorsque la ma-

chine est fixe, et (s) comme l'assemblage des pistons, bielles, manivelles, etc. En supposant que le mouvement soit arrivé à l'uniformité $\Sigma m \frac{d^2x}{dt^2}$ est de la forme

$$\Sigma(A_n \cos n\Omega t + B_n \sin n\Omega t),$$

Ω étant la vitesse angulaire de l'arbre moteur, n un nombre entier et A_n, B_n des constantes.

Dans le cas d'une machine fixe, nous supposerons que OX est une horizontale comprise dans un plan vertical parallèle au mouvement des organes mobiles, et que OZ est vertical; y est constant et $\frac{d^2z}{dt^2}$ de la forme

$$\Sigma(A'_n \cos n\Omega t + B'_n \sin n\Omega t);$$

F_x est l'effort F'_x transmis par la machine, estimé dans le sens horizontal diminué de la réaction horizontale du sol dont le maximum est $(M + M')gf$, f étant le coefficient de frottement et g l'accélération de la pesanteur. Pour que la machine soit stable, il faut que $\frac{d^2x}{dt^2} = 0$, et que l'on ait constamment

$$\Sigma(A_n \cos n\Omega t + B_n \sin n\Omega t) \leqq (M + M')fg - F'_x,$$

d'où

$$(M + M')g \geqq \frac{F'_x + \text{maxim. } \Sigma(A_n \cos n\Omega t + B_n \sin n\Omega t)}{f}.$$

En désignant par F'_z la composante verticale de l'effort transmis par la machine, il faut de même que

$$(M + M')g \geqq F'_z + \text{maxim. } \Sigma(A'_n \cos n\Omega t + B'_n \sin n\Omega t).$$

La plus grande des valeurs des seconds membres de ces inégalités fera connaître une limite inférieure du poids que doit avoir tout le système et, par suite, de la masse des fondations.

En supposant OX et OZ respectivement parallèles et perpendiculaires à la voie, F_z étant nul, le mouvement moyen d'une locomotive sera défini par les équations

$$(M + M')\frac{d^2X_1}{dt^2} = F_x, \qquad \frac{d^2Z_1}{dt^2} = 0,$$

et en posant $X = X_1 + \chi$, $Z = Z_1 + \varsigma$, on aura

$$(M + M')\frac{d^2\chi}{dt^2} + \Sigma m\frac{d^2x}{dt^2} = 0, \quad (M + M')\frac{d^2\varsigma}{dt^2} + \Sigma m\frac{d^2z}{dt^2} = 0,$$

équations qui, intégrées deux fois, feront connaître les éléments des mouvements oscillatoires parallèles (tangage) et normal à la voie (trépidations).

§ II. — *Du mouvement de rotation des corps autour d'un point fixe.*

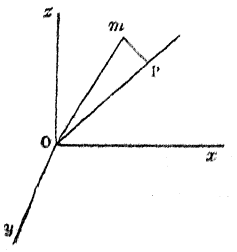
3. Les équations d'Euler reçoivent immédiatement leur application, en tenant compte des moments des pressions variables exercées sur les appuis par (s). Le résultant de ces moments est identique à celui qui est dû à l'accélération absolue des éléments matériels de (s) et des forces extérieures agissant sur le système prises en sens contraire.

On sait que l'accélération absolue a pour composantes :

L'accélération relative, — l'accélération d'entraînement, — l'accélération centripète composée.

Il résulte de là qu'il faut introduire dans les équations d'Euler les termes correspondant à la masse (s) considérée : 1° comme faisant partie intégrante de (S); 2° comme animée des accélérations relative et centripète composée. De plus, il faut tenir compte, dans les seconds membres, de toutes les forces extérieures agissant sur (S) et (s).

Fig. 1.



Soient (*fig.* 1) :

Ox, Oy, Oz les axes d'inertie principaux de (S) passant par son centre de gravité O;

A, B, C ses moments d'inertie par rapport à ces axes;

x, y, z les coordonnées parallèles aux mêmes axes d'un point m de (S) ou (s);

n, p, q les composantes de la rotation instantanée ω de (S) suivant Ox, Oy, Oz (elles seront considérées comme positives ou négatives, selon qu'elles auront lieu de la gauche vers la droite ou inversement, pour l'observateur couché suivant la partie positive de l'axe en ayant les pieds en O; la même convention s'appliquera aux moments des forces);

OP la direction de l'axe instantané de (S);

α, β, γ les angles qu'il forme avec Ox, Oy, Oz;

P la projection de m sur OP.

Nous rappellerons que $\frac{dn}{dt}$, $\frac{dp}{dt}$, $\frac{dq}{dt}$ sont les composantes de l'accélération angulaire de (S) suivant Ox, Oy, Oz.

On a

$$\cos\alpha = \frac{n}{\omega}, \quad \cos\beta = \frac{p}{\omega}, \quad \cos\gamma = \frac{q}{\omega},$$

$$OP = x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma.$$

On sait que l'accélération d'entraînement se compose :

1° *De l'accélération centripète :* La projection de $\overline{mP}$ sur Ox étant

$$OP\cos\alpha - x = x\cos^2\alpha + y\cos\alpha\cos\beta + z\cos\alpha\cos\gamma - x$$

$$= \frac{-x(\omega^2 - n^2) + ynp + znq}{\omega^2},$$

celle de l'accélération centripète $\omega^2\overline{mP}$ est

$$-x(\omega^2 - n^2) + ynp + znq.$$

La projection de cette accélération sur Oy est de même

$$-y(\omega^2 - p^2) + xpn + zpq.$$

Ajoutant ces deux expressions multipliées respectivement par $-my$ et mx, puis faisant la somme des résultats semblables relatifs à tous les points matériels de (S) et (s), on obtient, pour le moment total dû

à la force centripète par rapport à Oz,

$$(n^2-p^2)\sum mxy+np\sum m(x^2-y^2)-pq\sum mzx+nq\sum mzy.$$

Si l'on considère la portion de cette somme qui se rapporte à (S), tous les doubles produits disparaissent, et il reste

$$np(\mathrm{B}-\mathrm{A}).$$

Actuellement, le signe Σ se rapportant uniquement à (s), le moment total par rapport à Oz se réduit à

$$(a)\qquad np[\mathrm{B}-\mathrm{A}+\Sigma m(x^2-y^2)]+nq\,\Sigma mzy-pq\,\Sigma mzx.$$

2° *De l'accélération due à l'accélération angulaire.* — Cette accélération a pour composantes

$$z\frac{dp}{dt}-y\frac{dq}{dt}\quad\text{suivant } Ox,$$

$$x\frac{dq}{dt}-z\frac{dn}{dt}\quad\text{suivant } Oy.$$

En multipliant ces deux expressions par $-my$ et mx et faisant la somme pour tous les points de (S) et (s), on trouve, pour le moment par rapport à Oz, dû à l'accélération angulaire,

$$\frac{dq}{dt}\sum m(x^2+y^2)-\frac{dn}{dt}\sum mzx-\frac{dp}{dt}\sum myz,$$

ou

$$(b)\qquad \frac{dq}{dt}\left[\mathrm{C}+\Sigma m(x^2+y^2)-\frac{dn}{dt}\Sigma mzx-\frac{dp}{dt}\Sigma myz\right].$$

L'*accélération relative* donne le moment

$$(c)\qquad \Sigma m\left(x\frac{d^2y}{dt^2}-y\frac{d^2x}{dt^2}\right).$$

L'accélération centripète composée a pour composantes

$$2\left(p\frac{dz}{dt}-q\frac{dy}{dt}\right)\quad\text{suivant } Ox,$$

$$2\left(q\frac{dx}{dt}-n\frac{dz}{dt}\right)\quad\text{suivant } Oy,$$

d'où le moment

$$(d) \qquad q\frac{d}{dt}\Sigma m(x^2+y^2) - 2n\Sigma mx\frac{dz}{dt} - 2p\Sigma my\frac{dz}{dt}.$$

L'équation différentielle du problème, en projection sur Oz, s'obtiendra donc en égalant la somme des expressions (a), (b), (c), (d) au moment $\mathfrak{M}_z$ des forces extérieures agissant sur (S) et (s) par rapport à cet axe, ce qui donne

$$\begin{aligned}
&\frac{dq}{dt}[C+\Sigma m(x^2+y^2)] - \frac{dn}{dt}\Sigma mzx - \frac{dp}{dt}\Sigma mzy \\
&\quad + np[B-A+\Sigma m(x^2-y^2)] \\
&\quad + (n^2-p^2)\Sigma mxy + nq\Sigma mzy - pq\Sigma mzx \\
&\quad + \Sigma m\left(x\frac{d^2y}{dt^2} - y\frac{d^2x}{dt^2}\right) \\
&\quad + q\frac{d}{dt}\Sigma m(x^2+y^2) - 2n\Sigma mx\frac{dz}{dt} - 2p\Sigma my\frac{dz}{dt} = \mathfrak{M}_z,
\end{aligned}$$

et de même

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned}
&\frac{dn}{dt}[A+\Sigma m(y^2+z^2)] - \frac{dp}{dt}\Sigma mxy - \frac{dq}{dt}\Sigma mxz \\
&\quad + pq[C-B+\Sigma m(y^2-z^2)] \\
&\quad + (p^2-q^2)\Sigma mzy + np\Sigma mxz - nq\Sigma mxy \\
&\quad + \Sigma m\left(y\frac{d^2z}{dt^2} - z\frac{d^2y}{dt^2}\right) \\
&\quad + n\frac{d}{dt}\Sigma m(y^2+z^2-2q)\Sigma mz\frac{dx}{dt} - 2p\Sigma my\frac{dx}{dt} = \mathfrak{M}_x, \\
&\frac{dp}{dt}[B+\Sigma m(x^2+z^2)] - \frac{dq}{dt}\Sigma myz - \frac{dn}{dt}\Sigma myx \\
&\quad + nq[A-C+\Sigma m(z^2-x^2)] \\
&\quad + (q^2-n^2)\Sigma mxz + pq\Sigma myx - np\Sigma myz \\
&\quad + \Sigma m\left(z\frac{d^2x}{dt^2} - x\frac{d^2z}{dt^2}\right) \\
&\quad + p\frac{d}{dt}\Sigma m(x^2+z^2) - 2n\Sigma mx\frac{dy}{dt} - 2q\Sigma mz\frac{dy}{dt} = \mathfrak{M}_y.
\end{aligned}\right.$$

Ces équations sont comprises implicitement dans celles du problème

suivant, dont la solution est beaucoup plus simple qu'on ne pourrait le supposer *à priori*.

4. *Équations du mouvement d'un système matériel rapporté à trois axes rectangulaires mobiles autour de leur origine.* — Soient :

n, p, q les composantes suivant Ox, Oy, Oz de la rotation de l'ensemble des trois axes;

V la vitesse absolue du point m du système matériel (σ) dont les coordonnées sont x, y, z;

OP, $O\mathfrak{M}$ les axes des moments des quantités de mouvement des éléments matériels de (σ) et des forces extérieures agissant sur ce système par rapport au point O;

P_u, $\mathfrak{M}_u$, V_u les projections de OP, $O\mathfrak{M}$, V sur un axe quelconque O_u.

La vitesse V étant la résultante de la vitesse relative de (σ) par rapport aux trois axes et de la vitesse d'entraînement, on a

$$(e)\qquad \begin{cases} V_x = \dfrac{dx}{dt} + pz - qy, \\ V_x = \dfrac{dy}{dt} + qy - nz, \\ V_z = \dfrac{dz}{dt} + ny - px. \end{cases}$$

d'où

$$(8)\qquad \begin{cases} P_x = \Sigma m(yV_z - zV_y) = \Sigma m\left[y\dfrac{dz}{dt} - z\dfrac{dy}{dt} + n(y^2+z^2) - x(py+qz)\right], \\ P_y = \Sigma m\left[z\dfrac{dx}{dt} - x\dfrac{dz}{dt} + p(x^2+z^2) - y(nx+qz)\right], \\ P_z = \Sigma m\left[x\dfrac{dy}{dt} - y\dfrac{dx}{dt} + q(x^2+y^2) - z(nx+py)\right]. \end{cases}$$

On sait que $O\mathfrak{M}$ n'est autre chose que la dérivée géométrique, par rapport au temps de OP, ou la vitesse absolue du point P considéré comme un mobile et dont la vitesse relative estimée suivant Ox serait $\dfrac{dP_x}{dt}$; de

sorte que, par un changement de lettres, les équations (e) donnent les les suivantes :

$$(g)\qquad \begin{cases} \mathfrak{M}_x = \dfrac{dP_x}{dt} + pP_z - qP_y, \\ \mathfrak{M}_y = \dfrac{dP_y}{dt} + qP_x - nP_z, \\ \mathfrak{M}_z = \dfrac{dP_z}{dt} + nP_y - pP_z, \end{cases}$$

et en y substituant les valeurs (f) on obtient, pour les équations cherchées,

$$(A)\qquad \begin{cases} \dfrac{dn}{dt}\Sigma m(y^2+z^2) - \dfrac{dp}{dt}\Sigma mxy - \dfrac{dq}{dt}\Sigma mxz \\ \quad + pq\Sigma m(y^2-z^2) - np\Sigma mxz + nq\Sigma mxy + (q^2-p^2)\Sigma myz \\ \quad + n\dfrac{d}{dt}\Sigma m(y^2+x^2) - 2p\Sigma my\dfrac{dx}{dt} - 2q\Sigma mz\dfrac{dx}{dt} + \dfrac{d}{dt}\Sigma m\left(y\dfrac{dz}{dt} - z\dfrac{dy}{dt}\right) = \mathfrak{M}_x, \\ \dfrac{dp}{dt}\Sigma m(x^2+z^2) - \dfrac{dn}{dt}\Sigma myz - \dfrac{dq}{dt}\Sigma myz \\ \quad + nq\Sigma m(z^2-x^2) - pn\Sigma myz + pq\Sigma myx + (n^2-q^2)\Sigma mxz \\ \quad + p\dfrac{d}{dt}\Sigma m(x^2+z^2) - 2n\Sigma mx\dfrac{dy}{dt} - 2q\Sigma mz\dfrac{dy}{dt} + \dfrac{d}{dt}\Sigma m\left(z\dfrac{dx}{dt} - x\dfrac{dz}{dt}\right) = \mathfrak{M}_y, \\ \dfrac{dq}{dt}\Sigma m(x^2+y^2) - \dfrac{dp}{dt}\Sigma mzx - \dfrac{dn}{dt}\Sigma mzx \\ \quad + np\Sigma m(x^2-y^2) - nq\Sigma mzy + qp\Sigma mzx + (p^2-n^2)\Sigma mxy \\ \quad + q\dfrac{d}{dt}\Sigma m(y^2+z^2) - 2n\Sigma mx\dfrac{dz}{dt} - 2p\Sigma my\dfrac{dz}{dt} + \dfrac{d}{dt}\Sigma m\left(x\dfrac{dy}{dt} - y\dfrac{dx}{dt}\right) = \mathfrak{M}_z. \end{cases}$$

En désignant par $\mathfrak{T}$ le travail en forces extérieures et moléculaires qui agissent sur (σ) augmenté d'une constante, on a l'équation des forces vives

$$\Sigma m(V_x^2 + V_y^2 + V_z^2) = 2\mathfrak{T},$$

ou

$$(3)\qquad \begin{cases} n^2\Sigma m(y^2+z^2) + p^2\Sigma m(x^2+z^2) + q^2\Sigma m(x^2+y^2) \\ \quad - pq\Sigma mzy - nq\Sigma mxz - np\Sigma mxy \\ \quad + n\Sigma m\left(y\dfrac{dz}{dt} - z\dfrac{dy}{dt}\right) + p\Sigma m\left(z\dfrac{dx}{dt} - x\dfrac{dz}{dt}\right) + q\Sigma m\left(x\dfrac{dy}{dt} - y\dfrac{dx}{dt}\right) \\ \quad + \Sigma m\left(\dfrac{dx^2}{dt^2} + \dfrac{dy^2}{dt^2} + \dfrac{dz^2}{dt^2}\right) = 2\mathfrak{T}. \end{cases}$$

Cas particuliers. — 1° Si l'on suppose x, y, z indépendants du temps, les équations (A) deviennent celles de Lagrange, relatives au mouvement d'un corps solide rapporté à trois axes fixes dans ce corps, et celles d'Euler, en supposant de plus que ces axes sont des axes principaux.

2° Si le système (σ) se compose de deux parties, l'une solide (S) dont Ox, Oy, Oz sont des axes principaux d'inertie passant par le point O de ce corps, et l'autre relativement mobile, on retombe sur les équations (2).

5. *Application au mouvement d'un système de corps solides qui réagissent les uns sur les autres en ayant égard aux ébranlements des molécules; théorème de Coriolis.* — On peut toujours considérer un corps solide comme libre en introduisant dans les équations du mouvement les réactions dues aux liaisons.

Soient :

M la masse du corps vibrant (σ);

(σ') un corps solide fictif identique au précédent, mais absolument dur, dont le mouvement est produit par les mêmes forces extérieures que celles qui agissent sur (σ).

Si nous supposons qu'à un instant quelconque les deux centres de gravité coïncident et ont la même vitesse, ils coïncideront pendant toute la durée du mouvement, et nous appellerons U leur vitesse commune au bout du temps t.

La force vive de (σ) sera égale à MU^2 augmentée du premier membre de l'équation (3), en considérant Ox, Oy, Oz comme étant fixes dans (σ') dont O est censé le centre de gravité, et $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$ comme se rapportant au mouvement vibratoire.

Soient :

x_0, y_0, z_0 les coordonnées de la position moyenne de m, c'est-à-dire du point de (σ') dont m s'écarte constamment peu;

$\rho_0 = \sqrt{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2}$;

$x = x_0 + \delta x, \quad y = y_0 + \delta y, \quad z = z_0 + \delta z$;

$\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \rho_0 + \delta\rho$;

Ox, Oy, Oz les axes principaux de (σ').

Nous supposerons que δx, δy, δz sont assez petits pour qu'on puisse les négliger par rapport aux dimensions de (σ'), mais nous tiendrons compte des vitesses correspondantes qui peuvent être très-grandes, comme dans le cas où l'on aurait $\delta x = \alpha \cos(it + \varepsilon)$, α, i étant deux constantes respectivement très-petites et très-grandes, ε une constante quelconque.

D'après la définition même du mouvement de (σ') on a

$$A\frac{dn}{dt} + (C - B)pq = \partial\mathfrak{M}_x,$$

et la première des équations (A) donne

$$(B)\quad \left\{ 2n\Sigma m\rho_0 \frac{d\delta\rho}{dt} - 2n\Sigma m x_0 \frac{d\delta x}{dt} - 2p\Sigma m y_0 \frac{d\delta y}{dt} - 2q\Sigma m z_0 \frac{d\delta z}{dt} + \frac{d}{dt}\Sigma m\left(y\frac{dz}{dt} - z\frac{dy}{dt}\right) = 0. \right.$$

Si Y et Z sont deux fonctions d'une même variable t, et dont la seconde diffère constamment très-peu d'une constante z_0, $\int Y\,dZ$ ne diffère d'une constante que d'une quantité du second ordre, car on a

$$\int Y\,dZ = YZ - \int Z\,dY = YZ_0 - \int Z_0\,dY = YZ_0 - Z_0\int dY.$$

On reconnaît, par suite, en intégrant l'équation (C), que le moment $\Sigma m\left(y\frac{dz}{dt} - z\frac{dy}{dt}\right)$ par rapport à Ox de la quantité de mouvement vibratoire est une constante que nous supposerons très-petite ou nulle, et nous admettrons qu'il en est aussi de même pour les deux autres axes.

La force vive de (σ) égale au premier membre de l'équation (3) augmenté de MU^2 est, par suite,

$$An^2 + Bp^2 + Cq^2 + MU^2 + \Sigma m\left(\frac{dx^2}{dt^2} + \frac{dy^2}{dt^2} + \frac{dz^2}{dt^2}\right),$$

c'est-à-dire qu'*elle est égale à la force vive due au mouvement moyen augmentée de celle qui est due au mouvement vibratoire.* Ce théorème dû à Coriolis, qui y est arrivé d'une autre manière, s'étend évidemment à

un nombre quelconque de corps solides réagissant les uns sur les autres.

Soient :

V_m la vitesse moyenne de m;
V_r sa vitesse vibratoire;
$\mathfrak{T}'$, $\mathfrak{T}''$, $\mathfrak{T}'''$ les travaux des forces extérieures estimés dans le mouvement de (σ), dans son mouvement vibratoire, et dans le mouvement de (σ');
$\mathfrak{T}_f$ le travail des forces moléculaires;
$\mathfrak{T}_e$ le travail des forces d'entraînement estimé dans le mouvement vibratoire.

Nous aurons, d'après ce qui précède, en donnant à la caractéristique Δ la signification ordinaire d'accroissement,

$$\tfrac{1}{2}\Delta\Sigma m V_m^2 + \tfrac{1}{2}\Delta\Sigma m V_r^2 = \mathfrak{T}' + \mathfrak{T}_f,$$

et dans le mouvement relatif

$$\tfrac{1}{2}\Delta\Sigma m V_r^2 = \mathfrak{T}'' + \mathfrak{T}_f - \mathfrak{T}_e,$$

et comme

$$\mathfrak{T}' = \mathfrak{T}'' + \mathfrak{T}''',$$

il vient

$$\tfrac{1}{2}\Delta\Sigma V_m^2 = \mathfrak{T}''' + \mathfrak{T}_e.$$

Donc *le principe des forces vives s'applique au mouvement moyen pourvu que l'on ajoute au travail des forces extérieures le travail estimé dans le mouvement vibratoire, celui des forces capables de produire sur les molécules leur mouvement moyen.*

Soient :

ds un élément de chemin décrit par m dans son mouvement vibratoire;
φ la projection de la force d'entraînement de m sur la direction de cet élément.

Le terme de $\mathfrak{T}_e$ qui correspond à la masse m est $\int \varphi\, ds$.

Pour effectuer cette intégration, il suffit d'ajouter les intégrales semblables prises pour tous les intervalles pour chacun desquels $d\varphi$ conserve le même signe;

Soient :

t' et t'' les limites de l'un de ces intervalles ;
φ', φ'', s', s'' les valeurs correspondantes de φ et s.

Nous aurons

$$\int_{t'}^{t''} \varphi\, ds = \varphi'' s'' - \varphi' s' - \int_{t'}^{t''} s\, d\varphi ;$$

mais $d\varphi$ conservant le même signe, $\int_{t'}^{t''} s\, d\varphi$ est de la forme $s_1(\varphi'' - \varphi')$, s_1 étant du même ordre de grandeur que s : l'expression ci-dessus devient

$$\varphi''(s'' - s_1) - \varphi'(s' - s_1)$$

et est du même ordre de grandeur que les amplitudes des vibrations, ou négligeable; il en est par suite de même de ϖ_e. Donc, *l'équation des forces vives s'applique au mouvement moyen, en faisant abstraction des vibrations de molécules*.

§ III. — *Examen de quelques cas particuliers dans lesquels la loi du mouvement relatif de (s) est connue.*

6. Les équations (2) qui s'appliquent au mouvement d'un corps solide libre (S) autour de son centre de gravité sont suffisantes (en y joignant celles qui permettent de fixer à chaque instant la position de ce corps par rapport à trois axes de directions fixes, et que nous n'avons pas à reproduire) pour déterminer le mouvement de ce corps lorsque la loi du mouvement relatif de (s) est donnée ou que x, y, z sont des fonctions connues du temps.

7. *Équations générales des petits mouvements ; application aux mouvements secondaires des locomotives et des véhicules de chemins de fer.* — Supposons qu'à une certaine époque n, p, q soient très-petits ; que $\mathfrak{M}_x$, $\mathfrak{M}_y$, $\mathfrak{M}_z$ et les termes dépendant de m dans les équations (2) soient constamment du même ordre de grandeur; n, p, q resteront toujours

très-petits, et, en négligeant les termes du second ordre, nous aurons

$$\text{A}\quad \frac{dn}{dt}+\frac{d}{dt}\Sigma m\left(y\frac{dz}{dt}-z\frac{dy}{dt}\right)=\mathfrak{M}_x,$$

$$\text{B}\quad \frac{dp}{dt}+\frac{d}{dt}\Sigma m\left(z\frac{dx}{dt}-x\frac{dz}{dt}\right)=\mathfrak{M}_y,$$

$$\text{C}\quad \frac{dq}{dt}+\frac{d}{dt}\Sigma m\left(x\frac{dy}{dt}-y\frac{dx}{dt}\right)=\mathfrak{M}_z.$$

Ces formules sont notamment applicables : 1° au mouvement de lacet d'une locomotive et, en général, d'un véhicule faisant partie d'un train; mais, cette question d'application exigeant quelques développements, j'ai cru devoir en faire l'objet d'une Note spéciale placée à la fin de ce Mémoire; 2° aux mouvements de roulis et de galop que tend à prendre une locomotive.

8. *Équations faisant connaître les variations éprouvées par les éléments en mouvement de* (s), *quelle que soit leur grandeur, quand les moments dus à* (s) *restent constamment très-petits.* — Supposons que n, p, q, $\mathfrak{M}_x$, $\mathfrak{M}_y$, $\mathfrak{M}_z$ se rapportent à l'hypothèse de $m=0$; que $n+\delta n$, $p+\delta p$, $q+\delta q$, $\mathfrak{M}_x+\delta\mathfrak{M}_x$, $\mathfrak{M}_y+\delta\mathfrak{M}_y$, $\mathfrak{M}_z+\delta\mathfrak{M}_z$ sont ce qu'ils deviennent en tenant compte de l'influence de (s). Les équations (2) donnent

$$\begin{aligned}\text{C}\quad &\frac{d\,\delta q}{dt}+\frac{dq}{dt}\Sigma m(x^2+y^2)-\frac{dn}{dt}\Sigma mzx-\frac{dp}{dt}\Sigma mzy\\ &+(n\delta p+p\delta n)(\text{B}-\text{A})+np\Sigma m(x^2+y^2)+(n^2-p^2)\Sigma mxy+nq\Sigma mzy\\ &-pq\Sigma mzx+\Sigma m\left(x\frac{d^2y}{dt}-y\frac{d^2x}{dt^2}\right)+q\frac{d}{dt}\Sigma m(x^2+y^2)\\ &-2n\Sigma mx\frac{dz}{dt}-2p\Sigma my\frac{dz}{dt}=\delta\mathfrak{M}_x,\end{aligned}$$

$$\text{A}\quad \frac{d\,\delta n}{dt}+\ldots,$$

$$\text{B}\quad \frac{d\,\delta p}{dt}+\ldots,$$

d'où l'on déduira δn, δp, δq lorsque n, p, q auront été obtenus au moyen des équations d'Euler.

9. *De l'influence des oscillations de la mer et de l'atmosphère sur le mouvement de la Terre autour de son centre de gravité.* — Considérons

le solide fictif formé par le noyau terrestre, la mer et l'atmosphère, dans l'hypothèse où elles seraient en équilibre relatif sous l'action de la pesanteur, et soient

Ox, Oy, Oz les axes principaux d'inertie passant par le centre de gravité O de ce corps;

A, B, C les moments d'inertie correspondants;

Oz celui de ces axes principaux dont la direction diffère constamment très-peu de celle de l'axe instantané de rotation de la Terre;

q_0 la valeur moyenne de cette rotation;

x_0, y_0, z_0 les valeurs moyennes des coordonnées d'un point m de la mer ou de l'atmosphère,

$q - q_0$, n et p restent constamment très-petits, comme les moments $\partial\mathfrak{U}_x$, $\partial\mathfrak{U}_y$, $\partial\mathfrak{U}_z$, dus à l'attraction du Soleil et de la Lune, qui peuvent être regardés comme se rapportant au solide fictif ci-dessus.

Reportons-nous aux équations (A) : la masse totale de la mer et de l'atmosphère étant très-faible par rapport à celle du système terrestre, nous pourrons, sans erreur appréciable, remplacer les coordonnées de leurs éléments matériels par leurs valeurs moyennes; les termes en Σmyz, Σmxy, Σmxz disparaîtront ainsi, et, en négligeant les termes du second ordre en $q - q_0$, n, p, nous aurons

$$A\frac{dn}{dt} + pq_0(C-B) + 2n\Sigma m\left(y_0\frac{dy}{dt} + z_0\frac{dz}{dt}\right) - 2p\Sigma m y_0\frac{dx}{dt} - 2q\Sigma m z_0\frac{dx}{dt} + \Sigma m\left(y_0\frac{d^2z}{dt^2} - z_0\frac{d^2y}{dt^2}\right) = \partial\mathfrak{U}_x,$$

$$B\frac{dp}{dt} + nq_0(A-C) + 2p\Sigma m\left(x_0\frac{dx}{dt} + z_0\frac{dz}{dt}\right) - 2n\Sigma m x_0\frac{dy}{dt} - 2q\Sigma m z_0\frac{dy}{dt} + \Sigma m\left(z_0\frac{d^2x}{dt^2} - x_0\frac{d^2z}{dt^2}\right) = \partial\mathfrak{U}_y,$$

$$C\frac{dq}{dt} + 2q\Sigma m\left(x_0\frac{dx}{dt} + y_0\frac{dy}{dt}\right) - 2n\Sigma m x_0\frac{dz}{dt} - 2p\Sigma m y_0\frac{dz}{dt} + \Sigma m\left(x_0\frac{d^2y}{dt^2} - y_0\frac{d^2x}{dt^2}\right) = \partial\mathfrak{U}_z,$$

le signe Σ se rapportant aux molécules de la mer et de l'atmosphère;

mais les termes tels que $\Sigma m y_0 \frac{dy}{dt}$, $\Sigma m y_0 \frac{dx}{dt}, \cdots$, sont du même ordre de grandeur que $\mathfrak{M}_x$, $\mathfrak{M}_y$, $\mathfrak{M}_z$ ou que $q - q_0$, n et p; il vient donc tout simplement

$$A\frac{dn}{dt} + pq_0(C - B) - 2q_0\Sigma mz_0\frac{dx}{dt} = \mathfrak{M}_x,$$

$$B\frac{dp}{dt} + nq_0(A - C) - 2q_0\Sigma mz_0\frac{dy}{dt} = \mathfrak{M}_y,$$

$$C\frac{dq}{dt} + q_0\Sigma m\left(y_0\frac{dy}{dt} + x_0\frac{dx}{dt}\right) = \mathfrak{M}_z.$$

Posons $n = n_1 + \delta n$, $p = p_1 + \delta p$, $q = q_1 + \delta q$, n_1, p_1, q_1 se rapportant à l'hypothèse où la mer, l'atmosphère et le noyau terrestre ne formeraient qu'un seul corps solide. Les équations ci-dessus donnent

$$A\frac{d\delta n}{dt} + (C - B)q_0\delta p = 2q_0\Sigma mz_0\frac{dx}{dt},$$

$$B\frac{d\delta p}{dt} + (A - C)q_0\delta n = 2q_0\Sigma mz_0\frac{dy}{dt},$$

$$C\frac{d\delta q}{dt} = -2q_0\Sigma m\left(y_0\frac{dy}{dt} + x_0\frac{dx}{dt}\right).$$

On voit ainsi que δn, δp, δq sont périodiques comme $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$, c'est-à-dire comme les marées, et les marées atmosphériques, qui n'influent ainsi en aucune façon sur la précession des équinoxes et la nutation; en d'autres termes :

« Les phénomènes de la précession des équinoxes et de la nutation sont exactement les mêmes que si la mer et l'atmosphère formaient une masse solide avec le sphéroïde qu'elles recouvrent. » (Laplace.)

§ IV. — *Solution de quelques questions dans lesquelles certains éléments du mouvement absolu de (s) sont connus.*

10. Il peut être avantageux, dans quelques questions, de déterminer des relations entre la vitesse absolue, la vitesse relative des points de (*s*) et le temps. Il me paraît impossible, à ce sujet, d'indiquer une règle

générale, et c'est en se rendant bien compte de la nature de chaque problème que l'on sera conduit au mode de solution qui présente le plus de simplicité.

11. *Le corps* (S), *n'étant sollicité par aucune force extérieure, ne possède comme mobiles que des solides de révolution tournant d'un mouvement uniforme autour de leurs axes parallèles à un axe principal d'inertie de ce corps.* — Supposons en premier lieu qu'il n'y ait qu'un seul solide de révolution dont l'axe soit perpendiculaire au plan zOx; les résultats obtenus s'étendront facilement à un nombre quelconque de corps semblables.

La vitesse angulaire absolue de (s), Ω, reste constante, puisque le mobile n'est sollicité par aucune force extérieure; sa vitesse angulaire relative par rapport à (S) est $\Omega - p$.

Soient

a, b les coordonnées de l'axe de (s) parallèles à Ox et Oy;
M' et I la masse et le moment d'inertie de (s).

Posons

$$x = x' + a, \quad y = y' + b$$

et

$$\Sigma m y^2 = M' \gamma^2,$$

γ étant une constante dépendant de la forme et de la nature du mobile; nous aurons évidemment

$$I = \Sigma m(x'^2 + z'^2), \quad \Sigma m z' x' = 0, \quad \Sigma m x' = 0, \quad \Sigma m z' = 0, \quad \Sigma m x'^2 = \Sigma m z'^2 = \frac{I}{2},$$

et en supposant que (s) est symétrique par rapport au plan zOx,

$$\Sigma m x' y = 0, \quad \Sigma m z' y = 0, \quad \Sigma m y \frac{dx}{dt} = 0, \quad \Sigma m y \frac{dz}{dt} = 0.$$

On a d'autre part

$$\frac{dx}{dt} = (\Omega - p) z', \quad \frac{dz}{dt} = -(\Omega - p) x',$$

puis

$$\Sigma m z x = M' a b, \quad \Sigma m z y = 0, \quad \Sigma m x y = 0, \quad \Sigma m x^2 = \frac{I}{2} + M' a^2,$$

$$\Sigma m z^2 = \frac{I}{2} + M' b^2, \quad \Sigma m x \frac{dz}{dt} = -\frac{\Omega I}{2}, \quad \Sigma m z \frac{dx}{dt} = \frac{\Omega I}{2}.$$

Si l'on pose

$$A' = A + \frac{I}{2} + M'(\gamma^2 + a^2),$$

$$B' = B + \frac{I}{2} + M'(a^2 + b^2),$$

$$C' = C + \frac{I}{2} + M'(\gamma^2 + b^2),$$

les équations (2) deviennent

$$C'\frac{dq}{dt} - M'ab\left(pq + \frac{dn}{dt}\right) + np\left[B - A + \frac{I}{2} + M'(a^2 - \gamma^2)\right] + I(\Omega - p)n = 0,$$

$$A'\frac{dn}{dt} + M'ab\left(np - \frac{dq}{dt}\right) + pq\left[C - B - \frac{I}{2} + M'(\gamma^2 - b^2)\right] - I(\Omega - p)\gamma^2 = 0,$$

$$B'\frac{dp}{dt} + nq[A - C + M'(b^2 - a^2)] + (q^2 - n^2)M'ab = 0.$$

Ces formules s'appliqueront à plusieurs solides de révolution animés de la même vitesse angulaire, en y supposant que I est la somme de leurs moments d'inertie, et remplaçant $M'ab$ et $M'(b^2 - a^2)$ par $\Sigma M'ab$ et $\Sigma M'(b^2 - a^2)$.

Si, à une certaine époque, les valeurs de n, p, q sont très-petites, elles le seront également pour les valeurs du temps qui ne dépasseront pas certaines limites. D'après la troisième équation, p ne variera que d'une quantité du second ordre, et si sa valeur initiale est nulle, les deux premières pourront se réduire aux suivantes

$$C'\frac{dq}{dt} - M'ab\frac{dn}{dt} + \Omega I n = 0,$$

$$A'\frac{dn}{dt} - M'ab\frac{dq}{dt} - \Omega I q = 0,$$

dont les intégrales sont

$$n = N\sqrt{C'}\cos\frac{\Omega I(t + \varepsilon)}{\sqrt{A'C' - M'ab}},$$

$$q = N\sqrt{A'}\sin\frac{\Omega I(t + \varepsilon)}{\sqrt{A'C' - M'ab}},$$

N et ε étant deux constantes arbitraires.

Si le corps (S) est muni de deux solides de révolution identiques symétriquement situés par rapport à yOz, et dont les axes soient situés dans un plan parallèle à yOx, M'ab disparaît dans les équations précédentes, et l'on a tout simplement

$$n = N\sqrt{C'}\cos\frac{\Omega I(t+\varepsilon)}{\sqrt{A'C'}},$$

$$q = N\sqrt{A'}\sin\frac{\Omega I\cos(t+\varepsilon)}{\sqrt{A'C'}};$$

et les espaces angulaires parcourus en vertu de ces relations sont

$$\int_0^t n\,dt = \frac{N\sqrt{A'}}{\Omega I}\left[\sin\frac{\Omega I(t+\varepsilon)}{\sqrt{A'C'}} - \sin\frac{\Omega I\varepsilon}{\sqrt{A'C'}}\right],$$

$$\int_0^t q\,dt = -\frac{N\sqrt{C'}}{\Omega I}\left[\cos\frac{\Omega I(t+\varepsilon)}{\sqrt{A'C'}} - \cos\frac{\Omega I\varepsilon}{\sqrt{A'C'}}\right].$$

Les amplitudes sont d'autant plus petites et leurs durées plus grandes que Ω est plus grand, ce qui pourrait peut-être expliquer certains faits relatifs aux mouvements secondaires des véhicules de chemins de fer.

12. *Une sphère homogène* (s), *animée d'un mouvement de translation, qui n'est sollicité par aucune force extérieure, pénètre dans un canal de même diamètre, d'une forme déterminée, relié invariablement à* (S); *quel est le mouvement que prendra ce dernier corps ?* — En négligeant le frottement, le mouvement absolu de la sphère circulant dans le canal ne cesse pas d'être une translation dont la vitesse V est constante; de sorte que l'on est ramené à supposer que toute la masse M' de (s) se trouve concentrée en son centre de gravité; et pour appliquer les équations (2) il suffit d'y supprimer le signe Σ, d'y remplacer m par M', et enfin d'y considérer x, y, z comme étant les coordonnées du centre de la sphère.

A la relation

$$(K)\quad V^2 = \left(\frac{dx}{dt} + pz - qy\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt} + qx - nz\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt} + ny - px\right)^2,$$

nous joindrons les équations

$$y = \mathrm{F}(x), \quad z = \mathrm{F}(x),$$

qui définissent la forme du canal; nous aurons ainsi le nombre d'équations voulu pour déterminer les six inconnues n, p, q, x, y, z en fonctions du temps; mais on est arrêté de suite, même dans des cas très-simples, à l'exception de celui des petits mouvements, par des difficultés de calcul insurmontables.

Cas particulier. — Supposons que la masse M′ et ses produits par ses coordonnées prises deux à deux soient relativement et respectivement très-petits par rapport à M et à A, B, C; que q diffère peu d'une constante q_0; que, d'après leurs valeurs initiales, p, q restent du même ordre de grandeur que les termes en M′; enfin que $\mathfrak{M}_x = 0$, $\mathfrak{M}_y = 0$, $\mathfrak{M}_z = 0$.

Les équations (2) donnent, aux termes du second ordre près,

$$\mathrm{C}\frac{dq}{dt} + 2\mathrm{M}'q_0\left(x\frac{dx}{dt} + y\frac{dy}{dt}\right) + \mathrm{M}'\left(x\frac{d^2y}{dt^2} - y\frac{d^2x}{dt^2}\right) = 0,$$

$$\mathrm{A}\frac{dn}{dt} + pq_0(\mathrm{C} - \mathrm{B}) - 2\mathrm{M}'q_0 z\frac{dx}{dt} + \mathrm{M}'\left(y\frac{d^2z}{dt^2} - z\frac{d^2y}{dt^2}\right) = 0,$$

$$\mathrm{B}\frac{dp}{dt} + nq_0(\mathrm{A} - \mathrm{C}) - 2\mathrm{M}'q_0 z\frac{dy}{dt} + \mathrm{M}'\left(z\frac{d^2x}{dt^2} - x\frac{d^2z}{dt^2}\right) = 0.$$

L'équation (K) se réduit à

$$\mathrm{V}^2 = \frac{dx^2}{dt^2} + \frac{dy^2}{dt^2} + \frac{dz^2}{dt^2} + q_0^2(x^2 + y^2) + \frac{2dx}{dt}(pz - qy) + \frac{2dy}{dt}(qx - nz) + \frac{2dz}{dt}(ny - px).$$

Les équations ci-dessus sont encore trop compliquées pour qu'on puisse en tirer parti; pour simplifier la question, considérons le cas où M′ parcourrait un cercle de rayon R, de centre O, compris dans le plan zOx, et soient φ l'angle que forme le rayon vecteur OM′ avec OZ, $\mathrm{V} = \mathrm{R}\gamma$. On a

$$x = \mathrm{R}\sin\varphi, \quad z = \mathrm{R}\cos\varphi, \quad y = 0,$$

et

$$C\frac{dq}{dt} + M'q_0R^2\sin 2\varphi\frac{d\varphi}{dt} = 0,$$

$$A\frac{dn}{dt} + pq_0(C-B) - M'q_0R^2(1+\cos 2\varphi)\frac{d\varphi}{dt} = 0,$$

$$B\frac{dp}{dt} + nq_0(A-C) = 0,$$

$$\gamma^2 = \frac{d\varphi^2}{dt^2} + (1+\cos 2\varphi)p - (1-\cos 2\varphi)q,$$

ou encore, en comptant l'origine du temps à partir d'une coïncidence de OM′ avec Oz, d'après le mode d'approximation adopté,

$$C\frac{dq}{dt} + M'q_0R^2\gamma\sin 2\gamma t = 0,$$

$$A\frac{dn}{dt} + pq_0(C-B) - M'q_0R^2\gamma(1+\cos 2\gamma t) = 0,$$

$$B\frac{dp}{dt} + nq_0(A-C) = 0.$$

Ces équations s'intègrent facilement et donnent pour n, p, q des fonctions périodiques du temps; pour que ces rotations restent très-petites, comme on l'a supposé, il suffit que le quotient de $M'R^2$ par le plus petit moment d'inertie principal de (S) soit une petite fraction.

§ V. — *Cas général où les éléments du mouvement relatif de* (s) *sont eux-mêmes des inconnues du problème.*

13. Si le mouvement relatif du système (s) n'est défini que par les forces qui le sollicitent et par des équations de liaisons, un certain nombre i des coordonnées x, y, z sont, comme n, p, q, des inconnues du problème, et l'on devra joindre aux équations (2) i équations complémentaires. Ces dernières ne seront autre chose que celles du mouvement relatif de (s) par rapport à (S), et que je crois inutile de reproduire ici.

Par exemple, si (s) tourne autour d'un axe fixe dans (S), x, y, z s'expriment en fonction de l'angle variable φ, que fait un plan méridien déterminé de (s) avec un plan relativement fixe passant par l'axe, et

l'on a, entre les inconnues n, p, q, φ, les équations (2) et l'équation du mouvement relatif de (s).

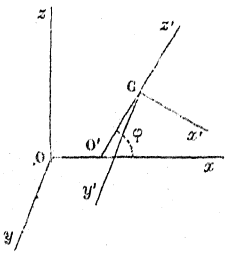
Si (s) tourne autour d'un point relativement fixe, sa position par rapport à (S) est, comme on le sait, définie par trois angles φ, ψ, θ, au moyen desquels on peut exprimer les x, y, z, et l'on a trois équations du mouvement relatif entre les angles et leurs dérivées par rapport au temps, qui, jointes aux équations (2), déterminent complétement les éléments de la question.

Il peut arriver qu'il soit plus simple de substituer à une ou plusieurs équations du mouvement relatif autant d'équations résultant de la considération de l'ensemble de (S) et (s), comme nous le verrons dans l'exemple ci-après.

Les équations des problèmes de la nature de ceux dont nous nous occupons sont loin d'être simples, et ce n'est que très-exceptionnellement que l'on peut en tirer parti.

14. *Le corps* (S) *étant assujetti à tourner autour d'un axe vertical* Oz (*fig.* 2), *en l'un de ses points* O′ *est fixé l'axe* O′G *d'un solide pesant de*

Fig. 2.



révolution (s), *assujetti à rester constamment dans une même section méridienne* $zOO'x$ *de* (S). *Trouver la loi en mouvement de* (S) *et* (s). — Soient :

$O'G = l$ la distance du point O′ au centre de gravité G de (s);
$OO' = a$;
φ l'angle variable formé par O′G avec Oz;
ω la vitesse angulaire absolue de (s) autour de O′G, qui, en vertu d'une équation d'Euler, restera constante.

La vitesse angulaire relative de (s) est évidemment $\omega - q\sin\varphi$.

On sait que l'une des équations du mouvement d'un corps autour d'un point fixe s'applique au cas où le mouvement a lieu autour d'un axe fixe, sans faire cette restriction que ce dernier est un axe principal d'inertie.

On a $\mathfrak{M}_z = 0$, $n = 0$, $p = 0$, et la première des équations (1) devient

$$(B)\quad [C+\Sigma m(x^2+y^2)]\frac{dq}{dt} + q\frac{d}{dt}m(x^2+y^2) + \frac{d}{dt}\Sigma m\left(x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt}\right) = 0.$$

Soient z' et x' les coordonnées du point m par rapport au prolongement Gz' de $O'G$, et sa perpendiculaire Gx' en G dans le plan zOx; Gy' la parallèle en G à Oy. On a

$$x = a + l\cos\varphi + x'\sin\varphi + z'\cos\varphi, \qquad z = l\sin\varphi + z'\sin\varphi - x'\cos\varphi,$$

$$\Sigma m x' = 0, \quad \Sigma m z' = 0, \quad \Sigma m x' y' = 0,$$

$$\Sigma m x^2 = M'(a + l\cos\varphi)^2 + \cos^2\varphi\,\Sigma m x'^2 + \sin^2\varphi\,\Sigma m z'^2.$$

Soient :

$$I = \Sigma m(y^2 + x'^2) = 2\Sigma m y^2 = 2\Sigma m x'^2, \qquad I' = \Sigma m(z'^2 + x^2)$$

les moments d'inertie de (s) par rapport à Gz' et Gy' ou Gx'; il vient

$$\Sigma m z'^2 = I' - \frac{I}{2}, \qquad \Sigma m x^2 = M(a + l\cos\varphi)^2 + \frac{I}{2}\cos^2\varphi + \left(I' - \frac{I}{2}\right)\sin^2\varphi,$$

et l'équation (B) prend la forme

$$[C + M'(a + l\cos\varphi)^2 + I\sin^2\varphi + I'\cos^2\varphi]\frac{dq}{dt}$$
$$+ q\frac{d}{dt}[M'(a + l\cos\varphi)^2 + I\sin^2\varphi + I'\cos^2\varphi] + \frac{d}{dt}\Sigma m\left(x\frac{dy}{dx} - y\frac{dx}{dt}\right) = 0,$$

d'où, en désignant par K une constante,

$$(C)\quad [C + M'(a + l\cos\varphi)^2 + I\sin^2\varphi + I'\cos^2\varphi]\,q + \Sigma m\left(x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt}\right) = K.$$

Pour estimer le moment $\Sigma m\left(x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt}\right)$ des quantités de mouvement relatif de (s), nous remarquerons que ce mouvement se com-

pose : 1° de la rotation $\omega - q\sin\varphi$, déterminant des quantités de mouvement qui forment un couple dont le moment est $I(\omega - q\sin\varphi)$, et le moment de ce couple par rapport à Oz est $I(\omega - q\sin\varphi)\sin\varphi$; 2° de la rotation $\frac{d\varphi}{dt}$ autour de la parallèle à Oy menée par le point O'. Or, si l'on considère deux points symétriques de (s) par rapport au plan zOx, on reconnaît que leurs quantités de mouvement dues à $\frac{d\varphi}{dt}$ se composent en une seule située dans le plan zOx; d'où il suit que cette vitesse angulaire ne donne pas de moment par rapport à Oz.

L'équation (C) devient ainsi

$$(D) \qquad [C + M'(a + l\cos\varphi)^2 + I'\cos^2\varphi]q + I\omega\sin\varphi = K;$$

c'est l'équation qui résulte de l'application du principe des aires et que l'on aurait pu poser immédiatement.

Il nous reste maintenant à déterminer l'équation complémentaire qui doit résulter du mode de liaison existant entre (S) et (s), c'est-à-dire l'équation du mouvement relatif de (s) autour de la parallèle en O' à Oy. Mais il nous a paru plus simple d'y substituer l'équation des forces vives établie pour l'ensemble de (S) et (s).

La force vive de (S) est Cq^2; le travail dû à la pesanteur donne le terme $-M'gl\sin\varphi$.

En transportant, parallèlement à elles-mêmes en G, les rotations q autour de Oz et $\frac{d\varphi}{dt}$ autour d'une parallèle à Oy menée par le point O', on obtient deux rotations pareilles, et les translations $q(a + l\cos\varphi)$ parallèle à Oy et $l\frac{d\varphi}{dt}$ suivant Gx'. La composante $q\sin\varphi$ de q suivant Gz', ajoutée à la rotation relative de (S) autour de Gz', donne ω.

En résumé, le mouvement absolu de (s) se compose des rotations

$$\omega, \quad -q\cos\varphi, \quad \frac{d\varphi}{dt}, \quad \text{suivant } Gz', Gx', Gy',$$

et de la translation

$$\sqrt{\frac{l^2 d\varphi^2}{dt^2} + (a + l\cos\varphi)^2 q^2}.$$

Mais, d'après un principe connu, la force vive d'un corps solide est

égale à celle qui est due à son mouvement de rotation autour du centre de gravité, augmenté de celle de ce centre où toute la masse serait concentrée.

La force vive de (s) est, par suite,

$$I\omega^2 + I'\left(q^2\cos^2\varphi + \frac{d\varphi^2}{dt^2}\right) + M'\left[\frac{l^2 d\varphi^2}{dt^2} + q^2(a + l\cos\varphi)^2\right]$$
$$= I\omega^2 + [I'\cos^2\varphi + M'(a + l\cos\varphi)^2]q^2 + \frac{d\varphi^2}{dt^2}(I' + M'l^2).$$

On a donc, en désignant par H une constante dépendant des éléments du mouvement initial,

$$(E)\quad [C + I'\cos^2\varphi + M'(a + l\cos\varphi)^2]\,q^2 + (I' + M'l^2)\frac{d\varphi^2}{dt^2} = -2gM'l\sin\varphi + H.$$

En éliminant q, entre (D) et (E), on trouve une formule analogue à celles auxquelles donnent lieu les théories de l'appareil de Bohenberger et de la toupie, et qu'il nous paraît inutile de discuter ici.

NOTE I.

ÉQUATIONS DU MOUVEMENT DE TRANSLATION LATÉRAL ET DU MOUVEMENT DE LACET DES VÉHICULES D'UN TRAIN DE CHEMIN DE FER.

Considérations générales sur le mouvement des véhicules.

Pour simplifier le langage, nous appellerons *plan méridien* d'un véhicule le plan passant par son centre de gravité (abstraction faite de la charge) perpendiculaire à la direction des axes des essieux.

La voie étant censée horizontale, lorsque le centre de gravité G du véhicule chargé et l'effort horizontal F sont situés dans le plan méridien, que les roues et les fusées sont respectivement de même diamètre, que le graissage est uniforme, on reconnaît que F est représenté par la différence de deux termes, l'un proportionnel au poids total,

l'autre à celui des pièces tournantes (¹); les résultantes des réactions horizontales de la voie de part et d'autre du plan méridien sont chacune égale à la moitié de F.

Supposons maintenant que G se trouve en dehors du plan méridien, que l'effort de traction horizontal reste constamment parallèle à un même plan vertical; transportons F parallèlement à lui-même en G; il en résultera un couple donnant lieu à un mouvement de lacet; la composante F_2 de l'effort de traction perpendiculaire au plan méridien donnera lieu à un déplacement translatoire; la composante F_1 parallèle à ce plan se décomposera en deux autres F_1', F_1'' compris dans les plans moyens des deux systèmes de roues situés de part et d'autre du méridien, et qui détermineront le roulement; chacune de ces forces sera représentée par la différence de deux termes, l'un proportionnel à la pression exercée par le système de roues, l'autre à la moitié du poids de toutes les pièces tournantes.

Si la voie a une légère pente, on peut calculer la pression totale exercée par chaque système de roues comme si la pente était nulle; mais il faut tenir compte de la composante due à la pesanteur estimée dans le sens du mouvement; la réaction longitudinale de la voie est, par suite, égale à la différence des deux termes respectivement proportionnels au poids total et à celui des pièces tournantes.

Si le véhicule est soutenu par des couples de roues de différents diamètres, sur lesquels la pression est répartie d'une manière déterminée, en réglant convenablement les ressorts de suspension, on voit également que la réaction longitudinale de la voie est également représentée par une expression de la même forme que ci-dessus.

Cas des chemins de fer. — Les crochets d'attelage d'un véhicule de chemin de fer sont situés dans son plan méridien.

(¹) L'effort de traction F relatif à un couple de roues de rayon r est donné par la formule

$$F = Q\frac{\delta}{r} + \frac{f\rho}{r}(Q - q) = \frac{Q}{r}(\delta + f\rho) - \frac{f\rho}{r}q,$$

dans laquelle Q représente la pression totale exercée par le couple sur la voie, q le poids des pièces tournantes, ρ le rayon des fusées, δ et f les coefficients du frottement de roulement des roues et du frottement de glissement développé dans le mouvement de rotation des moyeux des roues ou des fusées.

Considérons un train composé de n véhicules circulant d'un moyen mouvement uniforme sur un railway rectiligne. En raison de la forme conique qu'affectent les jantes des roues, on peut supposer, sans erreur appréciable, que tous leurs points de contact avec un rail se trouvent constamment sur une même parallèle à l'axe de la voie, quels que soient les petits déplacements dus aux mouvements oscillatoires que nous avons en vue d'étudier.

Nous ne considérerons que le cas où ces déplacements sont suffisamment petits pour que les rebords des roues ne viennent pas s'appuyer contre les rails.

Les vitesses des roues en leurs points de contact avec les rails, dues au lacet, étant généralement supérieures à la vitesse de translation latérale, la résultante des frottements de glissement est à peu près nulle lorsque le véhicule a un nombre pair d'essieux; dans le cas contraire, elle se réduit au frottement des roues du milieu et peut être négligée, de sorte que, dans l'étude du mouvement latéral, on peut faire abstraction des résistances passives.

En ce qui concerne le mouvement de lacet, les résistances donnent lieu à un moment comparable à celui des causes qui déterminent le mouvement. Mais, comme le frottement n'a pour effet que de réduire les amplitudes des oscillations en déterminant entre elles des temps d'arrêt (1), il y a avantage à en faire abstraction, en faisant intervenir dans la question l'élément relatif à la sécurité, point de vue qui a conduit à désigner sous le nom de *nuisibles* les mouvements secondaires dont il s'agit.

Équations des mouvements secondaires.

Soient (*fig.* 3) :

M_i la masse totale du véhicule qui occupe le rang i dans un train de n wagons;

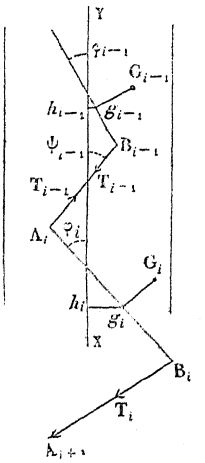
I_i son moment d'inertie par rapport à la perpendiculaire à la voie passant par le centre de gravité G_i du véhicule;

---

(1) *Voir* plus loin la Note II.

$\delta_i = G_i g_i$ la distance supposée très-petite de G_i au plan méridien $A_i B_i$, A_i et B_i représentant les positions des crochets d'attelage d'avant et d'arrière;

Fig. 3.



$\zeta_i = g_i h_i$ la distance de g_i à l'axe XY de la voie (ζ_i et δ_i seront considérés comme positifs ou négatifs, selon qu'ils seront situés à droite ou à gauche de XY et $A_i B_i$ pour l'observateur placé dans l'axe de la voie et dirigeant ses regards dans le sens du mouvement moyen);

$A_i G_i = a_i$, $g_i B_i = b_i$;

$l_i = B_i A_{i+1}$ la longueur de la barre d'attelage qui relie le premier véhicule au $(i+1)^{ième}$;

T_i la tension de l_i, T_0 et T_n étant nuls;

φ_i, ψ_i les angles formés par $g_i B_i$ et $A_{i+1} B_i$ avec le plan moyen vertical de la voie. (Ces angles seront considérés comme positifs ou négatifs, selon qu'en regardant dans le sens du mouvement moyen ils seront situés à droite ou à gauche de XY.)

Nous négligerons les termes du second ordre en φ_i, ψ_i, δ_i, ζ_i.

Nous pourrons sans inconvénient calculer T_i comme dans le mouvement moyen, c'est-à-dire en faisant abstraction des mouvements nuisibles; de sorte que T_i sera très-sensiblement égal à la somme $M_{i+1} + M_{i+2} + \ldots + M_n$ multipliée par un coefficient constant.

En projetant la ligne brisée $g_{i-1}B_{i-1}A_ig_i$ sur une perpendiculaire à XY, on trouve

$$\zeta_i - a_i \sin\varphi_i + l_{i-1}\sin\psi_{i-1} - b_{i-1}\sin\varphi_{i-1} - \zeta_{i-1} = 0$$

ou

$$\zeta_i - \zeta_{i-1} = a_i\varphi_i + b_{i-1}\varphi_{i-1} - l_{i-1}\psi_{i-1}, \tag{1}$$

et l'on a, en négligeant le frottement, conformément à ce qui a été dit plus haut,

$$\frac{d^2\zeta_i}{dt^2} = T_i\psi_i - T_{i-1}\psi_{i-1}. \tag{2}$$

La traction T_i agissant sur M_i a pour composantes T_i et $T_i\psi_i$, parallèle et perpendiculaire à XY, d'où le moment par rapport à la perpendiculaire en G_i à la voie

$$-T_{i-1}(a_i\varphi_i + \delta_i) - T_{i-1}\psi_{i-1}a_i = -T_{i-1}[a_i(\varphi_i + \psi_{i-1}) + \delta_i]. \tag{a}$$

La résistance T_i donne de même le moment

$$-T_i(b_i\varphi_i - \delta_i) - T_i\psi_i b_i = -T_i[b_i(\varphi_i + \psi_i) - \delta_i]. \tag{b}$$

La partie principale de la réaction longitudinale des rails, proportionnelle au poids total, ne donne aucun moment; l'autre, que l'on peut représenter par q_i, et qui ne dépend que du poids des pièces tournantes, est dirigée suivant XY et donne le moment

$$-q_i(\delta_i + \zeta_i). \tag{c}$$

Pour plus de généralité, nous supposerons que chaque véhicule peut être muni de pièces oscillantes. Désignant par ω la vitesse angulaire des roues motrices d'une machine ou de l'une des machines, représentons par

$$-\Sigma(A_j^i\cos j\omega t + B_j^i\sin j\omega t)$$

le moment des forces d'inertie dues au mouvement des pièces oscillantes de M_i, le signe Σ se rapportant à une suite de nombres connus j et aux constantes correspondantes A_j^i, B_j^i. Dans le cas d'une seule machine, on a $A_j^i = 0$, $B_j^i = 0$ pour $i > 1$, et j représente un nombre entier. S'il y a double traction, ces coefficients sont nuls pour des valeurs de i différentes de 1 et 3; et si les roues motrices des deux machines ont le même diamètre, j continue à représenter un nombre entier.

Nous aurons donc, d'après ce que nous avons vu dans le corps du

Mémoire,

$$(3)\qquad \begin{cases} I_i \dfrac{d^2\varphi_i}{dt^2} = -T_{i-1}[a_i(\varphi_i+\psi_{i-1})+\delta_i] - T_i[b_i(\varphi_i+\psi_i)-\delta_i] \\ \qquad\qquad -q_i(\delta_i+\zeta_i) + \Sigma(A_j^i \cos j\omega t + B_j^i \sin j\omega t). \end{cases}$$

En faisant varier i depuis 1 jusqu'à n, les équations (1), (2) et (3) nous donneront $3n-1$ équations entre autant d'inconnues $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n, \varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n, \psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_{n-1}$. Il est inutile d'intégrer ces équations : il suffit d'y satisfaire en partant de ce principe, que les effets dus aux conditions initiales du mouvement ont bientôt disparu sous l'influence des résistances passives lorsque la vitesse moyenne du train est devenue uniforme. Mais la résolution des équations du premier degré auxquelles on est ramené ne présente réellement de l'intérêt au point de vue de la symétrie des calculs que dans le cas suivant :

Cas où le centre de gravité de chaque véhicule se trouve dans son plan méridien. — On a $q_i = 0$, $\delta_i = 0$.

Considérons en particulier les termes $A_j^i \cos j\omega t$, et posons

$$\zeta_i = Z_i \cos j\omega t, \quad \varphi_i = \Phi_i \cos j\omega t, \quad \psi_i = \Psi_i \cos j\omega t,$$

Z_i, Φ_i, Ψ_i étant des constantes dont il s'agit de déterminer la valeur. En substituant, les équations (1), (2) et (3) deviennent

$$(4)\qquad \begin{cases} Z_1 - Z_2 = l_1\Psi_1 - b_1\Phi_1 - a_2\Phi_2, \\ Z_2 - Z_3 = l_2\Psi_2 - b_2\Phi_2 - a_3\Phi_3, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ Z_{n-1} - Z_n = l_{n-1}\Psi_{n-1} - b_{n-1}\Phi_{n-1} - a_n\Phi_n; \end{cases}$$

$$(5)\qquad \begin{cases} -j^2\omega^2 Z_1 = -\dfrac{T_1\Psi_1}{M_1}, \\ -j^2\omega^2 Z_2 = \dfrac{T_1\Psi_1 - T_2\Psi_2}{M_2}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ -j^2\omega^2 Z_n = \dfrac{T_{n-1}\Psi_{n-1}}{M_n}; \end{cases}$$

$$(6)\qquad \begin{cases} -I_1\omega^2 j^2\Phi_1 = A_j^1 - T_1 b_1(\Phi_1+\Psi_1) \\ -I_2\omega^2 j^2\Phi_2 = A^2 - T_1 a_2(\Phi_2+\Psi_1) - T_2 b_2(\Phi_2+\Psi_2), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ -I_n\omega^2 j^2\Phi_n = A_j^n - T_{n-1} a_n(\Phi_n+\Psi_{n-1}). \end{cases}$$

Des équations (5) on tire

$$j^2\omega^2(Z_1 - Z_2) = T_1\Psi_1\left(\frac{1}{M_1}+\frac{1}{M_2}\right) - \frac{T_2\Psi_2}{M_2},$$

$$j^2\omega^2(Z_2 - Z_3) = -\frac{T_1\Psi_1}{M_2} + T_2\Psi_2\left(\frac{1}{M_2}+\frac{1}{M_3}\right) - \frac{T_3\Psi_3}{M_3},$$

$$j^2\omega^2(Z_3 - Z_4) = -\frac{T_2\Psi_2}{M_3} + T_3\Psi_3\left(\frac{1}{M_3}+\frac{1}{M_4}\right) - \frac{T_4\Psi_4}{M_4},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,$$

$$j^2\omega^2(Z_{n-1} - Z_n) = -\frac{T_{n-2}\Psi_{n-2}}{M_{n-1}} + T_{n-1}\Psi_{n-1}\left(\frac{1}{M_{n-1}}+\frac{1}{M_n}\right),$$

d'où, en vertu des équations (4),

$$(7)\quad \begin{cases} j^2\omega^2(l_1\Psi_1 - b_1\Phi_1 - a_2\Phi_2) = T_1\Psi_1\left(\dfrac{1}{M_1}+\dfrac{1}{M_2}\right) - \dfrac{T_2\Psi_2}{M_2}, \\ j^2\omega^2(l_2\Psi_2 - b_2\Phi_2 - a_3\Phi_3) = -\dfrac{T_1\Psi_1}{M_2} + T_2\Psi_2\left(\dfrac{1}{M_2}+\dfrac{1}{M_3}\right) - \dfrac{T_3\Psi_3}{M_3}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots, \\ j^2\omega^2(l_{n-1}\Psi_{n-1} - b_{n-1}\Phi_{n-1} - a_n\Phi_n) = -\dfrac{T_{n-2}\Psi_{n-2}}{M_{n-1}} + T_{n-1}\Psi_{n-1}\left(\dfrac{1}{M_{n-1}}+\dfrac{1}{M_n}\right). \end{cases}$$

Si dans ces équations on porte les valeurs des Φ_i déduites des formules (6), on trouve

$$\Psi_1\left[\omega^2 j^2\left(l_1 + \frac{T_1 b_1^2}{T_1 b_1 - I_1\omega^2 j^2} + \frac{T_1 a_1^2}{T_1 a_2 + T_2 b_2 - I_2\omega^2 j^2}\right) - T_1\left(\frac{1}{M_1}+\frac{1}{M_2}\right)\right]$$
$$+\Psi_2\left(\omega^2 j^2\frac{T_2 a_2 b_2}{T_1 a_2 + T_2 b_2 - I_2\omega^2 j^2} + \frac{T_2}{M_2}\right)$$
$$= \omega^2 j^2\left(\frac{A_j^1 b_1}{T_1 b_1 - I_1\omega^2 j^2} + \frac{A_j^2 a_2}{T_1 a_2 + T_1 b_2 - I_2\omega^2 j^2}\right),$$

$$\Psi_1\left(\frac{\omega^2 j^2 T_1 a_2 b_2}{T_1 a_2 + T_2 b_2 - I_2\omega^2 j^2} + \frac{T_1}{M_2}\right)$$
$$+\Psi_2\left[\omega^2 j^2\left(l_2 + \frac{T_2 b_2^2}{T_1 a_2 + T_2 b_2 - I_2\omega^2 j^2} + \frac{T_2 a_3^2}{T_1 a_3 + T_2 b_3 - I_3\omega^2 j^2} - T_2\left(\frac{1}{M_2}+\frac{1}{M_3}\right)\right)\right]$$
$$+\Psi_3\left(\frac{\omega^2 j^2 T_3 a_3 b_3}{T_2 a_3 + T_3 b_3 - I_3\omega^2 j^2} + \frac{T_3}{M_3}\right)$$
$$= \omega^2 j^2\left(\frac{A_j^2 b_2}{T_1 a_2 + T_2 b_2 - I_2\omega^2 j^2} + \frac{A_j^3 a_3}{T_2 a_3 + T_2 b_3 - I_3\omega^2 j^2}\right), \ldots.$$

Il nous reste ainsi, au lieu de $3n - 1$, n équations, dont la loi des coefficients est facile à reconnaître.

NOTE II.

DE L'INFLUENCE D'UNE RÉSISTANCE CONSTANTE SUR LE MOUVEMENT OSCILLATOIRE D'UN CORPS, PRODUIT PAR UNE CAUSE PÉRIODIQUE.

---

1. Il est à peu près impossible de se rendre compte, *à priori*, de l'effet produit par une résistance constante ou un moment constant sur un mouvement oscillatoire de translation ou de rotation autour d'un axe, d'un corps solide, dû à une cause périodique.

Je ne m'occuperai ici que d'un cas particulier du problème ci-dessus énoncé, et auquel j'ai été conduit en traitant le sujet qui a fait l'objet de la Note précédente.

Je ne considérerai que l'une des causes périodiques qui donnent lieu au lacet, la plus importante si l'on veut, en négligeant les autres causes perturbatrices qui ont été analysées plus haut.

Dans cette hypothèse, le mouvement oscillatoire sera défini par une équation de la forme

$$A\frac{d^2s}{dt^2} = B\cos(nt + e) \pm \delta,$$

s étant l'angle que forme le plan méridien d'un véhicule avec un plan vertical de direction fixe, A, B, n, e étant des constantes de même que δ, qui représente le terme dû à la résistance, et que l'on devra prendre avec le signe — ou le signe +, selon que la vitesse sera positive ou négative.

Si l'on choisit convenablement l'origine du temps, on peut supposer $e = 0$; en remplaçant nt par t, s par $\frac{sB}{A}n^2$, $\frac{\delta}{B}$ par γ, l'équation ci-dessus

prend la forme plus simple

$$\frac{d^2s}{dt^2} = \cos t \pm \gamma.$$

Par la nature même du problème, la vitesse $\frac{ds}{dt}$ sera nulle à certains instants; si γ était supérieur à l'unité, il y arriverait un moment où le mouvement oscillatoire ne pourrait plus se continuer; laissons de côté ce cas, qui ne présente aucun intérêt, et posons $\gamma = \cos\alpha$. Nous aurons

$$\frac{d^2s}{dt^2} = \cos t \pm \cos\alpha. \tag{1}$$

Nous pouvons, si l'on veut, considérer cette équation comme étant celle du mouvement d'un point oscillant suivant une ligne droite, s représentant le chemin parcouru.

2. Décrivons une circonférence d'un rayon quelconque OA, de centre O, et soient

AOA′, BOB′ (*fig.* 4 et 5) deux diamètres rectangulaires;

Fig. 4.

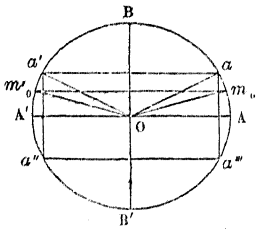
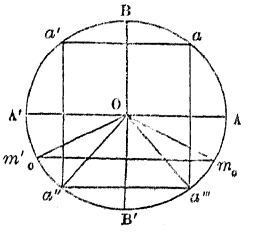


Fig 5.



t l'angle que le rayon Om fait avec OA;
i le nombre de circonférences que comprend cet angle;
a le point de la circonférence OA défini par l'angle $a\widehat{OA} = \alpha$.

Nous rappellerons que l'angle t', immédiatement supérieur à t, et qui a le même sinus, est

$$t' = (4i + 1)\pi - t$$

lorsque m se trouve entre A et B; et

$$t' = (4i + 5)\pi - t$$

quand m se trouve entre A′ et B.′

Soit t_0 le temps au bout duquel le mobile atteint une position pour laquelle sa vitesse est nulle. Si l'on a $\cos t_0 > 0$, on doit prendre, tant que la vitesse ne change pas de signe ni de sens,

$$\frac{d^2 s}{dt^2} = \cos t - \cos\alpha. \tag{2}$$

Dans le cas où $\cos t_0$ serait négatif, il faudrait employer l'équation

$$\frac{d^2 s}{dt^2} = \cos t + \cos\alpha, \tag{2'}$$

qui rentre dans la précédente, en y changeant t en $t + \pi$ et s en $-s$; nous sommes ainsi conduit à supposer $\cos t_0 > 0$, et à faire usage de l'équation (2).

3. Si $\cos\alpha = \cos t_0$, on ne voit pas *à priori* ce qui doit se passer. Il est clair que le mobile reste d'abord au repos pour $t = t_0$. Quand on a $\sin t_0 > 0$, $\cos t$ allant en diminuant, le mobile continue à rester au repos; $\cos t$ devient ensuite négatif, et alors on doit prendre la formule (2′), qui ne sera toutefois applicable qu'à partir du moment où l'on aura $-\cos t > \cos\alpha$, et c'est alors seulement que le mouvement oscillatoire continuera.

Lorsque $\sin t_0 < 0$, $\cos t$ va en augmentant, et le mouvement a lieu sans délai.

L'équation (2) donne, en appelant V la vitesse,

$$\mathrm{V} = \frac{ds}{dt} = \sin t - \sin t_0 - (t - t_0)\cos\alpha, \tag{3}$$

et, en mesurant le chemin parcouru s à partir du point correspondant à $t = t_0$,

$$s = -\cos t + \cos t_0 - (t - t_0)\sin t_0 - \cos\alpha \left(\frac{t - t_0}{2}\right)^2. \tag{4}$$

Comme pour $t = t_0$ le second membre de l'équation (2) est positif, V croît à partir de zéro et est positif; il atteint son maximum lorsque $\cos t = \cos\alpha$, et enfin devient nul pour la racine t_1, immédiatement supérieure à t_0, de l'équation

$$\sin t_1 - \sin t_0 - \cos\alpha(t_1 - t_0) = 0. \tag{5}$$

De ce que $V > 0$ pour $\cos t = \cos\alpha$, la position m_1 de m correspondant à $t = t_1$ ne peut se trouver qu'au delà du point a.

Pour une même valeur de t, mais en faisant varier l'angle α, on a

$$\frac{dV}{d\alpha} = \sin\alpha(t - t_0);$$

V croît donc avec α et atteint son maximum lorsque $\alpha = 90^\circ$; il suit de là que, généralement, t_1 est inférieur à la valeur qui correspond à $\alpha = 90^\circ$. Car si, pour une certaine valeur de α, V est nul, pour une valeur plus grande, V est positif. Dans le cas limite on a $\sin t'_1 = \sin t_0$, et en substituant cette valeur dans le second membre de l'équation (3), on obtient

$$-\cos\alpha(t'_1 - t_0),$$

qui est effectivement négatif, comme cela devait être.

Première oscillation.

4. Premier cas : $\sin t_0 > 0$ (*fig.* 4), ce qui, avec la supposition de $\cos t_0 > 0$, indique que le point m_0 de la circonférence correspondant à l'angle t_0, se trouve sur ce premier quadrant AB, et est placé entre a et A, puisque $\cos t_0 > \cos\alpha$.

Soient

m'_0, a' les symétriques de m_0 et a par rapport à B'B;

a'', a''' les symétriques de a' et a par rapport à AA'; m'_0 correspond à $(4i+1)\pi - t^0$, d'où il suit que m_1 ne peut se trouver que sur l'arc aBm'_0.

Si le mouvement oscillatoire continue immédiatement après que l'on a $t = t_1$, il est défini par la condition (2'), pourvu que

$$-\cos t_1 > \cos\alpha,$$

ce qui exige que la position m_1 correspondant à t_1 se trouve entre a' et m'_0. Il faut donc pour cela que $t = 2i\pi + \pi - \alpha = (2i+1)\pi - \alpha$ rende V positif, ou que

$$\sin\alpha - \sin t_0 - \cos\alpha[(2i+1)\pi - \alpha - t_0] > 0. \tag{6}$$

Si l'on désigne, pour abréger, le premier membre de cette inégalité par φ, en faisant varier t_0 depuis $2i\pi$ jusqu'à $2i\pi + \alpha$, on a

$$\frac{d\varphi}{dt_0} = -\cos t_0 + \cos\alpha < 0.$$

La fonction φ de t_0 est donc décroissante et sera positive pour $t_0 = 2i\pi$ si

$$\operatorname{tang}\alpha > \pi - \alpha \quad \text{ou} \quad \alpha > 64^\circ,$$

et négative pour $t_0 = 2i\pi + \alpha$. Pour toutes les valeurs de α comprises entre 64 et 90°, il y a donc une valeur $t'_0 \begin{matrix} < 2i\pi + \alpha \\ > 2i\pi \end{matrix}$ qui annule φ, et lorsque $t_0 < t'_0$ la condition (6) est satisfaite.

On a pour

$\alpha = 64^\circ$	$t'_0 = 2i\pi$
70	$2i\pi + 24^\circ$
80	$2i\pi + 38^\circ$
85	$2i\pi + 65^\circ$
90	$2i\pi + 90^\circ$

Lorsque l'on aura $\begin{matrix} \alpha > 64^\circ \\ t_0 > t'_0 \end{matrix}$, ou $\alpha < 64^\circ$, le mouvement s'arrêtera jusqu'au moment où le point m viendra en a', et c'est seulement à partir de ce moment que commencera la seconde oscillation.

5. Deuxième cas : $\sin t_0 < 0$ (*fig.* 5), ce qui, avec $\cos t_0 > 0$, indique que m_0 se trouve sur le quatrième quadrant, et, comme $\cos t_0 > \cos\alpha$, il ne peut être situé qu'entre a''' et A. Dans le cas actuel, on a

$$t \leqq (4i\pi + 5)\pi - t_0;$$

cette limite supérieure correspond au symétrique m'_0 de m_0 par rapport à BB'.

Comme V est maximum en a, le point m_1 ne peut se trouver que sur l'arc aBm'_0. S'il tombe entre m'_0 et a', on a $-\cos t > \cos\alpha$, et le mouvement oscillatoire continue sans interruption; pour qu'il en soit ainsi, il faut que

$$t_1 > (2i+2)\pi + \pi + \alpha = (2i+3)\pi - \alpha,$$

ou que cette limite, substituée à t, rende V positif, ou enfin que

$$\sin\alpha - \sin t_0 - \cos\alpha[(2i+3)\pi - \alpha - t_0] > 0.$$

Désignant par φ le premier membre de cette inégalité, on a

$$\frac{d\varphi}{dt_0} = -\cos t_0 + \cos\alpha,$$

qui est négatif pour toutes les valeurs admissibles de t_0, c'est-à-dire pour $t_0 \begin{matrix}\geqq(2i+2)\pi-\alpha \\ \leqq(2i+2)\pi\end{matrix}$; par conséquent φ est une fonction décroissante de t_0 entre les deux limites ci-dessus.

Lorsque

1° $$t_0 = (2i+2)\pi - \alpha,$$

on a

$$\varphi = 2\sin\alpha - \pi\cos\alpha,$$

et cette valeur sera positive si

$$\operatorname{tang}\alpha > \frac{\pi}{2} \quad \text{ou} \quad \alpha > 57^\circ 30' \text{ environ};$$

2° $$t_0 = (2i+2)\pi,$$

φ est positif si

$$\operatorname{tang}\alpha + \alpha > \pi \quad \text{ou} \quad \alpha > 64^\circ.$$

Pour α compris entre $57^\circ 30'$ et 64°, il y a donc une valeur $t'_0 \begin{matrix}>(2i+2)\pi-\alpha \\ <(2i+2)\pi\end{matrix}$ de t_0 qui annule φ, et pour $t_0 < t'_0$ le mouvement oscillatoire n'éprouve pas d'interruption, comme pour $\alpha > 64^\circ$.

Lorsque

$$\alpha = 57^\circ 30', \quad \text{on a} \quad t_0' = (2i+2)\pi - 57^\circ 30'$$
$$60 \qquad\qquad (2i+2)\pi - 22^\circ$$
$$64 \qquad\qquad (2i+2)\pi$$

Si m_1 tombe entre B et a', on a $-\cos t_1 < \cos\alpha$; le mouvement s'arrête jusqu'au moment où $-\cos t = \cos\alpha$, c'est-à-dire lorsque m est venu en a'. Cette circonstance se présente quand $t = (2i+2)\pi + \frac{\pi}{2}$ rend V positif, ou quand

$$1 - \sin t_0 - \cos\alpha\left[(2i+2)\pi + \frac{\pi}{2} - t_0\right] > 0.$$

Si le premier membre φ de cette inégalité est une fonction décroissante de t_0 entre $t_0 \begin{matrix} < (2i+2)\pi \\ > (2i+2)\pi - \alpha \end{matrix}$, cette fonction est positive pour $\alpha = 90^\circ$ et négative pour $\alpha = 0$. Elle s'annule pour $\alpha = 40^\circ 3'$ environ; de sorte que m_1 se trouve entre a' et B pour les valeurs de α comprises entre $40^\circ 30'$ et $57^\circ 30'$.

Pour $\alpha < 40^\circ 30'$, m_1 tombe entre a et B; $\cos t_1$ est positif, mais inférieur à $\cos\alpha$; il y a donc un temps d'arrêt jusqu'au moment où, m ayant dépassé B, arrive en a', et c'est seulement alors que commence la seconde oscillation.

En résumé, pour qu'il n'y ait pas d'interruption dans le mouvement, il faut que $\alpha > 64^\circ 30'$ ou, $\begin{matrix} \alpha > 57^\circ 30' \\ t < t_0' \end{matrix}$.

Oscillations successives.

6. Examinons maintenant ce qui se produit à la fin de la seconde oscillation.

De la formule (2′) on tire

$$(7) \qquad V = \frac{ds}{dt} = -\sin t + \sin t_1 - \cos\alpha(t - t_1),$$

ou, en ayant égard à l'équation (5),

$$(8) \qquad V = -\sin t + 2\sin t_1 - \sin t_0 - (t - t_0)\cos\alpha.$$

PREMIER CAS (*fig.* 4) : $\begin{matrix}\sin t_0 > 0\\ \cos t_0 > 0\end{matrix}$, $\begin{matrix}\sin t_1 > 0\\ \cos t_1 < 0\end{matrix}$, $\begin{matrix}\alpha > 64^\circ\\ t_0 < t'_0\end{matrix}$; en d'autres termes, m_1 tombe entre a' et m'_0.

Soient t_2 le temps au bout duquel se termine la seconde oscillation et m_2 la position correspondante de m. On a

$$-\sin t_2 + \sin t_1 - (t_2 - t_1)\cos\alpha = 0. \tag{9}$$

Si dans l'équation (8) on fait $t = t_0 + 2\pi$, on trouve

$$V = 2(\sin t - \sin t_0) - (t_0 + 2\pi - t_1)\cos\alpha,$$

d'où, en vertu de la relation (5),

$$V = 2\cos\alpha(t_1 - t_0 - \pi) < 0.$$

Le point m_2 se trouve ainsi au-dessous de m_0, et, *à fortiori*, d'après ce que l'on a vu plus haut, m_3 est-il compris entre a' et la symétrique m'_2 de m_2; la quatrième oscillation succède donc immédiatement à la troisième.

Les points m_2, m_4,... s'approchant de plus en plus de a'', il arrivera un moment où m_{2j} se trouvera entre a''' et a'', et il y aura un arrêt en a''' entre la $2j^{ième}$ et la $(2j+1)^{ième}$ oscillation; mais, à partir de ce moment, le mouvement prendra un caractère périodique, et il y aura un arrêt constant entre une oscillation de rang pair et la suivante.

DEUXIÈME CAS : Des conditions précédentes, $\begin{matrix}\sin t_0 > 0\\ \cos t_0 > 0\end{matrix}$, $\begin{matrix}\sin t_1 > 0\\ \cos t_1 < 0\end{matrix}$ sont les seules qui subsistent; en d'autres termes, m_1 tombe en deçà de a', et il y a un arrêt en ce point; mais à partir de là tout devient périodique. Les oscillations seront donc toutes périodiques et séparées l'une de l'autre par un arrêt constant.

TROISIÈME CAS : $\begin{matrix}\cos t_0 > 0\\ \sin t_0 < 0\end{matrix}$ ou $\begin{matrix}\alpha > 64^\circ\\ \alpha < 57^\circ 30'\\ \alpha < t'_0\end{matrix}$, où (*fig.* 5) le point m_1 tombe entre a' et m'_0.

Les circonstances se produiront de la même manière que dans le premier cas, c'est-à-dire qu'au bout d'un certain temps les oscillations de rang pair commenceront à partir de a'', seront identiques et séparées des oscillations de rang impair par un arrêt constant.

QUATRIÈME CAS : Des conditions précédentes, les suivantes seules subsistent :

$$\cos t_0 > 0, \qquad \sin t_0 < 0.$$

Il y a un arrêt entre la première et la seconde oscillation, puis les choses se passent comme dans le premier cas.

Des oscillations périodiques.

7. Nous sommes, par ce qui précède, ramenés aux oscillations qui ont pour point de départ a', a'' ou a'''. Nous choisirons le dernier de ces points.

Reprenons l'équation (5), en y supposant $t_0 = 2i\pi - \alpha$, si l'on pose $t_1 = 2i\pi + x$, nous aurons

$$\sin x - x\cos\alpha = \alpha\cos\alpha - \sin\alpha,$$

d'où l'on déduit les résultats suivants :

$\alpha = 0$,	x 0,
10°,	20°,
20°,	39°,
30°,	61°,
40°,	82°,
50°,	104°20′,
60°,	128°30′,
70°,	158°,
80°,	189°30′,
90°,	270°.

Pour que la seconde oscillation succède immédiatement à la première, il faut que l'on ait $x > \pi - \alpha$, ce qui n'a lieu qu'à partir de $\alpha = 60°$. Au-dessous de cet angle, on a, pour la durée de l'arrêt $\pi - \alpha - x$, entre la première et la seconde oscillation,

150°	pour	$\alpha = 10°$,
121°		20°,
89°		30°,
58°		40°,
25°40′		50°.

La seconde oscillation est identique à la première, et ainsi de suite.

Pour calculer la durée de la seconde oscillation lorsque $\alpha > 50^\circ$, nous appliquerons l'équation (9), qui donne, en y faisant $t_2 = 2i\pi + z$ et $t_1 = 2i\pi + x$,

$$\sin z + z\cos\alpha = \sin x + x\cos\alpha,$$

pour	$\alpha = 60^\circ$,	$z = 138^\circ$,	$z - x$ (durée de l'oscillation) =	$9^\circ 30'$,
	70°,	160°,	(»)	2°,
	80°,	$166^\circ 30'$,	(»)	-23°.

La dernière des valeurs de $z - x$ étant négative, il en résulte que les premières oscillations de rang pair n'existent plus à partir de $\alpha = 80^\circ$, comme pour $\alpha = 90^\circ$, cas pour lequel le mouvement est continu.

Les arrêts entre les oscillations de rang impair et celles de rang pair, mesurées par $\pi - z + (\pi - \alpha) = 2\pi - (z + \alpha)$, sont :

pour	$\alpha = 60^\circ$,	162°,
	70°,	130°.

Pour $\alpha = 80^\circ$, l'arrêt entre deux oscillations consécutives est

$$\pi - x + \pi - \alpha = 91^\circ.$$

Ainsi, au bout d'un certain temps, qui pourra être très-long si α est très-voisin de 90 degrés, le mouvement devient périodique; mais deux périodes consécutives sont séparées par un arrêt constant.

En résumé :

1° Au bout d'un certain temps, dépendant des conditions initiales du mouvement, et qui sera d'autant plus long que α différera moins de 90 degrés, le mouvement devient périodique;

2° Au-dessous d'une valeur α_1 de α comprise entre 50 et 60 degrés, deux oscillations sont identiques, mais sont séparées par un arrêt constant;

3° Dans les autres cas, on a une série de groupes de deux oscillations consécutives non identiques; deux groupes successifs sont séparés par un arrêt constant, qui devient nul lorsque α atteint 90 degrés.

Ces différents résultats sont en désaccord avec ce principe *à priori* posé par Laplace : *L'état d'un système matériel dans lequel les influences*

des conditions initiales du mouvement ont disparu par suite des résistances développées dans ce mouvement est périodique comme les forces qui sollicitent ce système.

La périodicité, telle qu'elle est comprise dans cet énoncé, ne peut avoir lieu que si les résistances sont des fonctions impaires de la vitesse.