ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

S. ZAREMBA

Contribution à la théorie des fonctions fondamentales

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3^e série, tome 20 (1903), p. 9-26

<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1903_3_20__9_0>

© Gauthier-Villars (Éditions scientifiques et médicales Elsevier), 1903, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales scientifiques de l'É.N.S. » (http://www.elsevier.com/locate/ansens) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

ANNALES

SCIENTIFIQUES

DE

L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE.

CONTRIBUTION

A LA

THÉORIE DES FONCTIONS FONDAMENTALES,

PAR M. S. ZAREMBA (1),

PROFESSEUR A L'UNIVERSITÉ DE CRACOVIE.

1. On sait l'importance considérable qu'a en Analyse pure et en Physique mathématique, la solution, au moyen des polynomes sphériques, du problème de Dirichlet dans le cas d'une sphère. Dans cette théorie, la fonction demandée se présente sous forme d'une série dont les termes peuvent être regardés, ainsi que l'a remarqué M. Poincaré (2), comme des produits, par des constantes, de certains potentiels de simples couches répandues sur la sphère.

Pour abréger, nous appellerons ces potentiels *fonctions fondamentales sphériques*. Les fonctions fondamentales sphériques jouissent de plusieurs propriétés dont chacune est susceptible de les caractériser. En partant d'une de ces propriétés, M. Poincaré (3) a étendu la notion

(1) Un résumé de ce travail a été communiqué à l'Académie des Sciences de Cracovie, le 7 janvier 1902.

(2) POINCARÉ, *La méthode de Neumann et le problème de Dirichlet* (*Acta Mathematica*, 1896).

(3) *Loc. cit.*

de fonction fondamentale à une surface quelconque, sans toutefois démontrer rigoureusement l'existence de fonctions vérifiant sa définition. D'autres propriétés des fonctions fondamentales sphériques ont conduit successivement MM. Le Roy (1) et Stekloff (2) à étendre à des points de vue nouveaux la notion de fonction fondamentale.

M. Le Roy a cru pouvoir affirmer que les fonctions fondamentales introduites par lui se réduisent à celles de M. Poincaré quand on choisit convenablement la fonction arbitraire qui intervient dans la définition de ces fonctions. M. Stekloff a émis une assertion analogue en ce qui concerne le genre de fonctions fondamentales qu'il avait considéré. M. Stekloff s'est aperçu lui-même que sa démonstration et celle de M. Le Roy sont illusoires et il a bien voulu m'en faire part dans une lettre qui m'est parvenue à peu près en même temps qu'une lettre de M. Korn contenant la même remarque.

Malgré l'insuffisance des démonstrations de MM. Le Roy et Stekloff, l'existence des fonctions fondamentales de M. Poincaré ne peut être mise en doute; en effet, j'ai démontré (3) rigoureusement l'existence de ces fonctions pour toute surface astreinte à ne vérifier que certaines conditions très générales. Mais il y a un intérêt évident à s'assurer si les propositions de MM. Le Roy et Stekloff, quoique imparfaitement établies par leurs auteurs, sont cependant exactes. Tel sera précisément l'objet de ce Travail. On verra que les propositions en question ne sont malheureusement exactes que pour des surfaces jouissant d'une propriété géométrique très particulière.

2. Nous désignerons par (S) la surface fermée à laquelle se rapportent les fonctions fondamentales, et nous représenterons par le

(1) LE ROY, *Sur l'intégration des équations de la chaleur* (*Annales de l'École Normale supérieure*, 1898).

(2) STEKLOFF, Notes du 27 mars et du 17 avril 1899 (*Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences de Paris*).

(3) ZAREMBA, *Sur la théorie de l'équation de Laplace et les méthodes de Neumann et de Robin* (*Bulletin de l'Académie de Cracovie*, 4 mars 1901). — ZAREMBA, *Sur l'intégration de l'équation* $\Delta u + \xi u = 0$ (*Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences de Paris*, 24 juin 1901). — KORN, *Ueber einen Satz von Zaremba und die Methode des arithmetischen Mittels in Raume*. Dümmler, Berlin, 1902.

symbole $\frac{d}{d\mathrm{N}}$ l'opération qui consiste à prendre la dérivée d'une fonction suivant la normale à la surface (S). La normale à la surface (S) sera toujours dirigée de l'extérieur vers l'intérieur, et, si les valeurs de la dérivée d'une fonction F suivant la normale à la surface (S) sont différentes des deux côtés de la surface, nous représenterons cette dérivée par $\left(\frac{d\mathrm{F}}{d\mathrm{N}}\right)_e$ ou $\left(\frac{d\mathrm{F}}{d\mathrm{N}}\right)_i$ selon qu'elle devra être calculée pour le côté extérieur ou pour le côté intérieur.

Si, dans la théorie des potentiels newtoniens, de simples couches et de doubles couches, on substitue à l'hypothèse d'après laquelle le potentiel dérivant d'un point A, de masse égale à l'unité, a pour expression $\frac{1}{r}$, en un point B situé à une distance r de A, l'hypothèse plus générale où le potentiel en B serait représenté par la fonction

$$\frac{e^{-\mu r}}{r},$$

où μ est un nombre réel non négatif (1), la lettre e désignant la base des logarithmes népériens, on obtient de nouvelles fonctions que nous appellerons *potentiels généralisés* (2) *de simples couches et de doubles couches*. Ces potentiels généralisés satisferont à l'équation aux dérivées partielles

$$\Delta u - \mu^2 u = 0,$$

où le symbole Δ représente l'opération

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Cela posé, considérons trois potentiels généralisés de simples couches u, v et w, ainsi qu'une fonction φ positive et continue, définie

(1) Toutes les fois que nous aurons à considérer en même temps plusieurs éléments dépendant du nombre μ, nous supposerons que ces éléments correspondent à une même valeur de μ, à moins que le contraire ne soit spécifié expressément.

(2) NEUMANN, *Allgemeine Untersuchungen über das Newtonsche Princip der Fernwirkungen*. Leipzig, 1896.

sur la surface fermée (S) et donnée *a priori*. Supposons que l'on ait

$$\left(\frac{du}{dN}\right)_i + \lambda\left(\frac{du}{dN}\right)_e = 0,$$
$$\left(\frac{dv}{dN}\right)_e - \left(\frac{dv}{dN}\right)_i = \xi\varphi v,$$
$$\left(\frac{dw}{dN}\right)_i + \eta\varphi w = 0,$$

où λ, ξ et η représentent des constantes. Nous dirons que les fonctions u, v et w sont des fonctions fondamentales, la première de M. Poincaré, la seconde de M. Le Roy et la troisième de M. Stekloff, et que les nombres λ, ξ et η sont les nombres caractéristiques respectifs de ces fonctions. Nous avons adopté ces dénominations parce que, pour $\mu = 0$, nos définitions se réduisent à celles des auteurs qui, les premiers, ont considéré des fonctions de ce genre.

Considérons une suite infinie

$$v_1, \quad v_2, \quad v_3, \quad \ldots \tag{1}$$

de fonctions fondamentales de M. Le Roy et celle des nombres caractéristiques correspondants, soit

$$\xi_1, \quad \xi_2, \quad \xi_3, \quad \ldots, \tag{2}$$

et supposons : 1° qu'il n'existe aucune relation linéaire et homogène à coefficients constants entre des termes de la suite (1); 2° que toute fonction fondamentale v de M. Le Roy ait nécessairement pour nombre caractéristique un des termes de la suite (2) et que, de plus, la fonction v soit forcément une combinaison linéaire et homogène à coefficients constants d'un nombre fini de termes de la suite (1). Dans ces conditions, nous dirons que la suite (1) est une *suite complète de fonctions fondamentales de M. Le Roy*. Nous adopterons une définition tout à fait analogue à la précédente de ce que l'on doit entendre par *suite complète de fonctions fondamentales de M. Stekloff*. J'ai démontré ailleurs (1) qu'il est possible de former, et cela d'une infinité de ma-

(1) *Sur les fonctions dites* fondamentales *dans la théorie des équations de la Physique* (*Bulletin international de l'Académie de Cracovie*, février 1901).

nières, une suite complète de fonctions fondamentales de M. Stekloff dans les conditions générales où nous nous sommes placés. On établira aisément, en s'appuyant sur les travaux déjà cités, qu'il en est de même en ce qui concerne les fonctions fondamentales de M. Le Roy. Ajoutons que la suite des nombres caractéristiques des fonctions formant une suite complète de fonctions fondamentales de M. Le Roy ou de M. Stekloff, ne contient jamais une infinité de termes ayant une même valeur.

Voici maintenant l'énoncé précis des résultats que nous nous proposons d'établir.

Il est impossible, en général, de choisir la fonction φ de telle sorte que l'on puisse lui faire correspondre une suite complète de fonctions fondamentales de M. Le Roy ou de M. Stekloff, telle que chaque fonction de cette suite puisse être considérée comme une fonction fondamentale de M. Poincaré. Pour que la fonction φ puisse être déterminée de cette façon, il faut et il suffit qu'il existe une fonction $\psi(M)$ de la position d'un point variable M de la surface (S), jouissant de la propriété suivante : désignons par α et β les angles formés par les normales intérieures à la surface (S), élevées en deux points quelconques A et B de la surface avec les directions AB et BA, la fonction ψ vérifiera identiquement la relation

$$\psi(A)\cos\beta = \psi(B)\cos\alpha. \tag{3}$$

Lorsque la surface (S) jouit de la propriété précédente, il faudra définir la fonction φ par l'équation

$$\varphi = c\psi, \tag{4}$$

où c est une constante arbitraire, pour qu'il corresponde à cette fonction une suite complète (Σ) de fonctions fondamentales de M. Le Roy ou de M. Stekloff, suite telle que chacun de ses termes puisse être considéré comme une fonction fondamentale de M. Poincaré. La suite (Σ) sera toujours à la fois une suite complète de fonctions fondamentales de M. Le Roy et une suite complète de fonctions fondamentales de M. Stekloff. Enfin, la valeur (4) de φ est celle de la

densité d'une couche électrique portée par la surface (S) et sans action sur les points intérieurs (¹).

3. Démontrons le théorème suivant qui nous sera indispensable plus tard :

Considérons une fonction continue f définie sur la surface (S), une suite complète de fonctions fondamentales de M. Leroy ou de M. Stekloff, soit :

$$\Phi_1, \quad \Phi_2, \quad \Phi_3, \quad \ldots, \tag{1}$$

ainsi que l'intégrale

$$\int_{(S)} f\Phi_k \, ds \tag{2}$$

étendue à tous les éléments ds de la surface (S).

Je dis :

1° *Que la fonction f sera nulle identiquement si l'intégrale* (2) *est nulle pour toutes les valeurs de l'indice k;*

2° *Que, dans le cas où cette intégrale ne serait différente de zéro que pour un nombre limité de valeurs de l'indice k, la fonction f sera égale au produit par φ de la fonction à laquelle se réduit, sur la surface* (S), *une certaine combinaison linéaire et homogène à coefficients constants d'un nombre fini de termes de la suite* (1).

Supposons d'abord que la suite (1) de ce numéro soit une suite complète de fonctions fondamentales de M. Stekloff et envisageons le potentiel généralisé de simple couche $\vec{\mathcal{F}}$ défini par l'équation

$$\left(\frac{d\vec{\mathcal{F}}}{d\mathrm{N}}\right)_i + \iota\varphi\vec{\mathcal{F}} = f, \tag{3}$$

(¹) Un calcul très simple et tout à fait élémentaire permet de prouver que l'ellipsoïde jouit de la propriété exprimée par l'équation (3). De là une méthode très simple pour résoudre le problème de l'équilibre de l'électricité sur un ellipsoïde conducteur isolé et soustrait à toute influence étrangère. Depuis que ces lignes ont été écrites il a été démontré que les quadriques sont les *seules* surfaces vérifiant les conditions (3) : HADAMARD, *Sur une condition que l'on peut imposer à une surface* (*Bulletin de la Société mathématique de France*, 1902); LEVI-CIVITA, *Sur les surfaces* (S) *de M. Zaremba* (*Bulletin de l'Académie de Cracovie*, 1902).

où t est un paramètre variable. On sait (¹) que la fonction $\mathcal{F}$, considérée comme fonction du paramètre t, sera une fonction analytique n'ayant, à distance finie, d'autres points singuliers que des pôles simples, chacun des résidus correspondants étant une combinaison linéaire et homogène à coefficients constants d'un nombre fini de termes de la suite (1) et ayant pour nombre caractéristique commun la valeur de t correspondant au pôle considéré. Les coefficients constants dans la combinaison linéaire et homogène dont nous venons de parler seront eux-mêmes les produits ou des sommes de produits de certaines constantes par des intégrales de la forme (2). Par conséquent si l'intégrale (2) est nulle pour toutes les valeurs de l'indice k, la fonction $\mathcal{F}$ sera une fonction entière de t. Or cela ne peut arriver qu'à la condition d'avoir dans tout l'espace

$$\mathcal{F} = 0$$

et en chaque point de la surface (S)

$$f = 0.$$

Pour s'en convaincre, il n'y a qu'à développer la fonction $\mathcal{F}$ en une série procédant suivant les puissances entières et positives du paramètre t et à former la suite ayant pour limite le rayon de convergence de la série en question. On verra que ce rayon de convergence ne pourra être infini que dans les conditions qui viennent d'être dites. Voyons maintenant ce qui arrive lorsque l'intégrale (2), sans être nulle pour toutes les valeurs de k, n'est différente de zéro que pour un nombre limité de valeurs de cet indice. Dans ce cas, la fonction $\mathcal{F}$ aura un nombre limité de pôles. Désignons par $t_1, t_2, \ldots, t_p$ ces pôles et par $P_1, P_2, \ldots, P_p$ les résidus correspondants. Nous aurons

$$\left(\frac{dP_j}{dN}\right)_i + t_j \varphi P_j = 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, p) \tag{4}$$

et nous pourrons poser

$$\mathcal{F} = \sum_{j=1}^{p} \frac{P_j}{t - t_j} + \mathcal{F}',$$

(¹) On trouvera dans mon Mémoire, déjà cité, sur les fonctions fondamentales une théorie détaillée de la fonction $\mathcal{F}$.

en désignant par $\mathcal{F}'$ un potentiel généralisé de simple couche, fonction entière du paramètre t. Portons la valeur précédente de $\mathcal{F}$ dans l'équation (3). Il viendra, à cause des relations (4),

$$\left(\frac{d\mathcal{F}'}{dN}\right)_i + t\varphi\mathcal{F}' = f - \varphi\sum_{j=1}^{p} P_j.$$

La fonction $\mathcal{F}'$ étant entière, on en conclut, en se reportant à la première partie de la démonstration, que la relation

$$f = \varphi\sum_{j=1}^{p} P_j$$

sera vérifiée en chaque point de la surface (S). On en conclura aisément que, dans l'hypothèse que nous avons envisagée, le théorème est démontré.

Reste à examiner le cas où la suite $\Phi_1, \Phi_2, \ldots$ serait une suite complète de fonctions fondamentales de M. Le Roy.

On pourra raisonner comme tout à l'heure, sauf à remplacer le potentiel $\mathcal{F}$ par le potentiel généralisé de simple couche défini par l'équation

$$\left(\frac{dF}{dN}\right)_e - \left(\frac{dF}{dN}\right)_i = t\varphi F = f.$$

Je ne sache pas que la théorie de la fonction F, définie par cette équation, et celle des fonctions fondamentales de M. Le Roy intimement liée avec elle, aient été développées avec détails dans les conditions générales où nous nous plaçons, mais, en se laissant guider par le travail de M. Le Roy, travail déjà cité, et en s'appuyant d'autre part sur le *lemme fondamental* de mon Mémoire sur les fonctions fondamentales (1), on y arrivera très aisément et l'on achèvera d'établir la proposition qui fait l'objet principal de ce numéro.

Observons, avant d'aller plus loin, qu'en démontrant le théorème

(1) *Bulletin international de l'Académie de Cracovie*, février 1901.

précédent, nous avons établi incidemment deux propositions dont nous aurons à faire usage et que l'on peut énoncer ainsi :

1° Chacune des fonctions $\mathcal{F}$ et F, considérée comme fonction du paramètre t, a au moins un pôle à distance finie à moins qu'elle ne soit nulle identiquement et que par suite il n'en soit de même de la fonction f.

2° Lorsque l'une des fonctions $\mathcal{F}$ ou F ne possède qu'un nombre limité de pôles, la fonction f est égale au produit par φ de la fonction à laquelle se réduit sur la surface (S) la somme des résidus correspondants.

4. Soit

$$\theta_1, \quad \theta_2, \quad \theta_3, \quad \ldots \tag{1}$$

une suite complète de fonctions fondamentales de M. Le Roy, telle que chacune des fonctions θ_k puisse être considérée comme une fonction fondamentale de M. Poincaré. Je dis que la suite (1) sera une suite *complète* de fonctions fondamentales de M. Stekloff. Réciproquement, si la suite (1) est une suite complète de fonctions fondamentales de M. Stekloff et si chaque terme de cette suite est une fonction fondamentale de M. Poincaré, la suite proposée sera une suite *complète* de fonctions fondamentales de M. Le Roy.

Pour établir ce théorème désignons par ξ_k le nombre caractéristique de la fonction θ_k considérée comme une fonction fondamentale de M. Le Roy et soit λ_k le nombre caractéristique de la même fonction regardée comme fonction fondamentale de M. Poincaré. Nous aurons

$$\left\{\begin{array}{l} \left(\dfrac{d\theta_k}{d\mathrm{N}}\right)_e - \left(\dfrac{d\theta_k}{d\mathrm{N}}\right)_i = \xi_k \varphi \theta_k \\ \left(\dfrac{d\theta_k}{d\mathrm{N}}\right)_i + \lambda_k \left(\dfrac{d\theta_k}{d\mathrm{N}}\right)_e = 0 \end{array}\right. \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots), \tag{2}$$

d'où

$$\left(\frac{d\theta_k}{d\mathrm{N}}\right)_i + \frac{\lambda_k \xi_k}{1 + \lambda_k} \varphi \theta_k = 0. \tag{3}$$

Cela prouve que θ_k sera une fonction fondamentale de M. Stekloff. Mais il n'en résulte pas encore que la suite (1) soit une suite *complète*

de fonctions fondamentales de M. Stekloff. Pour avoir le droit de l'affirmer, il faut prouver que *toute* fonction fondamentale w de M. Stekloff est une combinaison linéaire et homogène à coefficients constants d'un nombre fini de termes de la suite (1). A cet effet, désignons par η le nombre caractéristique de la fonction w. Nous aurons

$$\left(\frac{dw}{dN}\right)_i + \eta\varphi w = 0. \tag{4}$$

On déduit aisément, au moyen du théorème de Green, des équations (3) et (4) la conséquence suivante : l'inégalité

$$\frac{\lambda_k \xi_k}{1+\lambda_k} \neq \eta,$$

entraîne la relation

$$\int_{(S)} \varphi \theta_k w \, ds = 0.$$

D'ailleurs la relation

$$\frac{\lambda_k \xi_k}{1+\lambda_k} = \eta$$

ne peut être vérifiée que pour un nombre limité de valeurs de k. On le reconnaît immédiatement en observant que, lorsque k croît indéfiniment, λ_k tend vers l'unité et ξ_k finit par rester supérieur à tout nombre donné à l'avance. Donc, l'intégrale

$$\int_{(S)} \varphi \theta_k w \, ds,$$

ne peut être différente de zéro que pour un nombre limité de valeurs de l'indice k. On en déduit, en appliquant le théorème du numéro précédent au cas où l'on aurait $f = \varphi w$, que la fonction w est bien une combinaison linéaire et homogène à coefficients constants d'un nombre limité de termes de la suite (1). Le théorème qu'il s'agissait d'établir est donc démontré. La réciproque se démontre d'une façon tout à fait analogue.

5. Nous arrivons à la démonstration des propositions formant l'objet principal de ce travail.

Le théorème démontré au numéro précédent nous apprend que, tout d'abord, il faut examiner les conséquences de l'hypothèse où il

existerait une suite infinie de potentiels généralisés de simples couches, soit

$$\theta_1, \quad \theta_2, \quad \theta_3, \quad \ldots, \tag{1}$$

pouvant être considérée à volonté comme une suite complète de fonctions fondamentales de M. Le Roy ou comme une suite complète de fonctions fondamentales de M. Stekloff; dans ces conditions, chaque terme de la suite (1) sera évidemment une fonction fondamentale de M. Poincaré. Soit ξ_k le nombre caractéristique de la fonction θ_k considérée comme fonction fondamentale de M. Le Roy et η_k le nombre caractéristique de cette fonction regardée comme fonction fondamentale de M. Stekloff. Nous aurons

$$\left(\frac{d\theta_k}{d\mathrm{N}}\right)_e - \left(\frac{d\theta_k}{d\mathrm{N}}\right)_i = \xi_k \varphi \theta_k, \tag{2}$$

$$\left(\frac{d\theta_k}{d\mathrm{N}}\right)_i + \eta_k \varphi \theta_k = 0. \tag{3}$$

Posons

$$l_k = \frac{\xi_k - 2\eta_k}{\xi_k}, \tag{4}$$

on déduira aisément des équations (2) et (3) la relation

$$\left(\frac{d\theta_k}{d\mathrm{N}}\right)_e + \left(\frac{d\theta_k}{d\mathrm{N}}\right)_i = l_k \left[\left(\frac{d\theta_k}{d\mathrm{N}}\right)_e - \left(\frac{d\theta_k}{d\mathrm{N}}\right)_i\right]. \tag{5}$$

Soit r la distance d'un point quelconque à l'élément ds de la surface (S).

Les équations (2) et (5) donneront

$$\theta_k = \frac{\xi_k}{4\pi} \int_{(\mathrm{S})} \varphi \theta_k \frac{e^{-\mu r}}{r} ds \tag{6}$$

et

$$l_k \theta_k = \frac{1}{4\pi} \int_{(\mathrm{S})} \left[\left(\frac{d\theta_k}{d\mathrm{N}}\right)_e + \left(\frac{d\theta_k}{d\mathrm{N}}\right)_i\right] \frac{e^{-\mu r}}{r} ds. \tag{7}$$

Supposons que le point (x, y, z) soit situé à l'*intérieur* de la sur-

face (S); le théorème de Green nous donnera les deux relations

$$\frac{1}{4\pi}\int_{(S)} \theta_k \frac{d}{dN}\frac{e^{-\mu r}}{r}\,ds - \frac{1}{4\pi}\int_{(S)}\left(\frac{d\theta_k}{dN}\right)_e \frac{e^{-\mu r}}{r}\,ds = 0$$

et

$$\theta_k = \frac{1}{4\pi}\int_{(S)} \theta_k \frac{d}{dN}\frac{e^{-\mu r}}{r}\,ds - \frac{1}{4\pi}\int_{(S)}\left(\frac{d\theta_k}{dN}\right)_i \frac{e^{-\mu r}}{r}\,ds.$$

Ces équations jointes à l'équation (7) nous donnent

$$l_k\theta_k + \theta_k = \frac{1}{2\pi}\int_{(S)} \theta_k \frac{d}{dN}\frac{e^{-\mu r}}{r}\,ds, \tag{8}$$

formule valable, rappelons-le, pour toute position du point (x, y, z) à l'*intérieur* de la surface (S). Considérons deux points A et B situés sur la surface (S); désignons, comme au n° 2, par α et β les angles formés en A et B par les normales intérieures élevées en ces points à la surface (S) avec les directions AB et BA; appelons ρ la distance des points A et B et soit ds'' l'élément de la surface (S) relatif au point B. Cela posé, convenons encore de représenter d'une façon générale par $(F)_M$ la valeur d'une fonction F en un point M de la surface (S) et faisons tendre le point (x, y, z), sans qu'il cesse de rester à l'intérieur de la surface (S), vers un point A de cette surface.

L'équation (8) nous donnera

$$l_k(\theta_k)_A = -\frac{1}{2\pi}\int_{(S)} (\theta_k)_B \frac{d}{d\rho}\frac{e^{-\mu\rho}}{\rho}\cos\beta\,ds''. \tag{9}$$

D'ailleurs, on déduit de l'équation (6) la relation suivante :

$$\left[\left(\frac{d\theta_k}{dN}\right)_e + \left(\frac{d\theta_k}{dN}\right)_i\right]_A = -\frac{\xi_k}{2\pi}\int_{(S)} (\varphi)_B (\theta_k)_B \frac{d}{d\rho}\frac{e^{-\mu\rho}}{\rho}\cos\alpha\,ds'',$$

d'où, en tenant compte des relations (2) et (5) et en se rappelant que ξ_k est certainement différent de zéro :

$$l_k(\varphi)_A(\theta_k)_A = -\frac{1}{2\pi}\int_{(S)} (\varphi)_B (\theta_k)_B \frac{d}{d\rho}\frac{e^{-\mu\rho}}{\rho}\cos\alpha\,ds''. \tag{10}$$

Multiplions l'équation (9) par $(\varphi)_A$, l'équation (10) par -1 et ajoutons

membre à membre les équations obtenues; il viendra

$$\int_{(S)} [(\varphi)_B \cos\alpha - (\varphi)_A \cos\beta](0_k)_B \frac{d}{d\rho}\frac{e^{-\mu\rho}}{\rho} ds'' = 0. \tag{11}$$

Désignons par h une fonction continue sur la surface (S), mais d'ailleurs tout à fait quelconque, par ds' l'élément de la surface (S) relatif au point A et soit toujours ρ la distance des points A et B. Posons ensuite

$$(f)_B = \int_{(S)} [(\varphi)_B \cos\alpha - (\varphi)_A \cos\beta]\frac{d}{d\rho}\frac{e^{-\mu\rho}}{\rho}(h)_A ds' \tag{12}$$

et, après avoir multiplié l'équation (11) par $(h)_A ds'$, intégrons en ayant soin d'étendre l'intégration à toute la surface (S). Nous obtiendrons une relation que l'on pourra écrire ainsi :

$$\int_{(S)} 0_k f ds = 0 \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots), \tag{13}$$

en supprimant des indices devenus inutiles. La fonction f définie par l'équation (12) est une fonction continue de la position du point B sur la surface (S); d'autre part elle vérifie l'équation (13) pour toutes les valeurs de l'indice k. Il résulte de là, d'après la première partie du théorème démontré au n° 3, que cette fonction est nulle en chaque point de la surface. La fonction h étant arbitraire, cela ne peut arriver qu'à la condition d'avoir, pour toutes les positions des points A et B,

$$(\varphi)_A \cos\alpha - (\varphi)_B \cos\beta = 0; \tag{14}$$

on le reconnaît immédiatement en se reportant à l'équation (12). Donc, pour qu'il existe une suite complète de fonctions fondamentales de M. Le Roy ou une suite complète de fonctions fondamentales de M. Stekloff, suite telle que chacun de ses termes puisse être considéré comme une fonction fondamentale de M. Poincaré, il est nécessaire que la surface à laquelle se rapporte la suite en question jouisse de la propriété énoncée au n° 2.

6. Il nous reste à démontrer : 1° que la condition précédente est suffisante; 2° ceci : lorsque cette condition est remplie et lorsque la

fonction φ est choisie de façon que la relation (14) du numéro précédent soit satisfaite pour toutes les positions des points A et B, une couche électrique de densité φ portée par la surface (S) sera sans action sur les points intérieurs.

Occupons-nous d'abord du second point et supposons, à cet effet, que la relation (14) du numéro précédent soit vérifiée identiquement. Considérons ensuite l'identité bien connue

$$1 = \frac{1}{2\pi}\int_{(S)} \frac{\cos\beta}{\rho^2}\, ds'',$$

où ρ, β et ds'' ont la même signification qu'au numéro précédent. On déduit de cette identité, en tenant compte de la relation

$$(\varphi)_A \cos\beta = (\varphi)_B \cos\alpha,$$

la relation suivante :

$$(\varphi)_A = \frac{1}{2\pi}\int_{(S)} (\varphi)_B \frac{\cos\alpha}{\rho^2}\, ds'',$$

relation qui prouve la proposition qu'il s'agissait de démontrer.

Pour établir le premier point un lemme est nécessaire, qui repose lui-même sur un autre lemme. Il faut donc commencer par démontrer successivement ces lemmes.

LEMME I. — *Supposons que la fonction φ vérifie la relation (14) du numéro précédent; désignons par w une fonction fondamentale de M. Stekloff, c'est-à-dire un potentiel généralisé de simple couche vérifiant une relation de la forme*

$$\left(\frac{dw}{dN}\right)_i + \eta\varphi w = 0 \tag{1}$$

et appelons Q *le potentiel généralisé de simple couche défini par l'équation*

$$\left(\frac{dQ}{dN}\right)_e - \left(\frac{dQ}{dN}\right)_i = \varphi w. \tag{2}$$

Je dis que la fonction Q *sera aussi une fonction fondamentale de M. Stekloff ayant comme la fonction w la constante η pour nombre caractéristique.*

En effet, désignons par r la distance du point (x, y, z) à l'élément ds de la surface (S).

Nous aurons

$$(3) \qquad Q = \frac{1}{4\pi} \int_{(S)} \varphi w \frac{e^{-\mu r}}{r} ds,$$

d'où

$$(4) \qquad \left(\frac{dQ}{dN}\right)_i = -\frac{1}{2}(\varphi)_A (w)_A - \frac{1}{4\pi} \int_{(S)} (\varphi)_B (w)_B \frac{d}{d\rho} \frac{e^{-\mu\rho}}{\rho} \cos\alpha \, ds''.$$

D'ailleurs, on tire des équations (1) et (3)

$$\eta Q = -\frac{1}{4\pi} \int_{(S)} \left(\frac{dw}{dN}\right)_i \frac{e^{-\mu r}}{r} ds,$$

ce qui donne, en supposant que le point (x, y, z) soit situé dans l'espace *extérieur* à la surface (S),

$$\eta Q = -\frac{1}{4\pi} \int_{(S)} w \frac{d}{dN} \frac{e^{-\mu r}}{r} ds.$$

Faisons maintenant tendre le point (x, y, z), sans qu'il cesse de rester dans l'espace extérieur, vers un point A situé sur la surface (S). L'équation précédente donnera

$$\eta (Q)_A = +\frac{1}{2}(w)_A + \frac{1}{4\pi} \int_{(S)} (w)_B \frac{d}{d\rho} \frac{e^{-\mu\rho}}{\rho} \cos\beta \, ds'';$$

on en déduit, au moyen de l'équation (14) du numéro précédent, la relation suivante :

$$\eta (\varphi)_A (Q)_A = \frac{1}{2}(\varphi)_A (w)_A + \frac{1}{4\pi} \int_{(S)} (\varphi)_B (w)_B \frac{d}{d\rho} \frac{e^{-\mu\rho}}{\rho} \cos\alpha \, ds'',$$

et il vient, en combinant cette équation avec l'équation (4),

$$\left(\frac{dQ}{dN}\right)_i + \eta \varphi Q = 0,$$

relation qui exprime la proposition qu'il s'agissait de démontrer.

LEMME II. — *Plaçons-nous encore dans l'hypothèse où la relation* (14) *du numéro précédent est satisfaite identiquement et soit, comme tout à l'heure,* w *une fonction fondamentale de M. Stekloff ayant le nombre* η

pour nombre caractéristique. Je dis qu'il existera des fonctions jouissant des propriétés suivantes : 1° chacune de ces fonctions sera une fonction fondamentale de M. Stekloff ayant le nombre η pour nombre caractéristique, et chacune d'elles sera, en même temps, une fonction fondamentale de M. Le Roy ; 2° la fonction w sera une combinaison linéaire et homogène à coefficients constants d'un nombre fini de ces fonctions.

Pour démontrer ce lemme, considérons le potentiel généralisé de simple couche F défini par l'équation

$$\left(\frac{d\mathrm{F}}{d\mathrm{N}}\right)_e - \left(\frac{d\mathrm{F}}{d\mathrm{N}}\right)_i = t\varphi\mathrm{F} - \varphi w,$$

où t représente un paramètre variable. Développons la fonction F en une série procédant suivant les puissances entières et positives de t, et, à cet effet, posons

$$\mathrm{F} = \sum_{k=0}^{\infty} \mathrm{F}_k t^k;$$

on sait que ce développement sera légitime pourvu que le module de t ne dépasse pas une certaine limite finie. Les fonctions F_0, F_1, F_2, ..., seront des potentiels généralisés de simples couches et elles seront définies par les équations suivantes :

$$(5)\qquad \begin{cases} \left(\dfrac{d\mathrm{F}_0}{d\mathrm{N}}\right)_e - \left(\dfrac{d\mathrm{F}_0}{d\mathrm{N}}\right)_i = -\varphi w \\ \left(\dfrac{d\mathrm{F}_k}{d\mathrm{N}}\right)_e - \left(\dfrac{d\mathrm{F}_k}{d\mathrm{N}}\right)_i = \varphi \mathrm{F}_{k-1} \end{cases} \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots).$$

Le lemme I permet de tirer de ces équations la conséquence suivante : les fonctions F_0, F_1, F_2, ... seront toutes des fonctions fondamentales de M. Stekloff et elles auront toutes le nombre η pour nombre caractéristique. Par conséquent, si l'on désigne par p un nombre fini entier et positif mais assez grand, il existera entre les fonctions F_0, F_1, ..., F_p, une relation linéaire et homogène à coefficients constants, soit

$$c_0\mathrm{F}_0 + c_1\mathrm{F}_1 + \ldots + c_p\mathrm{F}_p = 0.$$

On en conclura aisément, au moyen des équations (5), que l'on aura

$$c_0 F_k + c_1 F_{k+1} + \ldots + c_p F_{k+p} = 0 \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots).$$

Cela prouve que la fonction F considérée comme fonction du paramètre t a, au plus, p pôles à distance finie. D'ailleurs, cette fonction aura au moins un pôle; cela résulte immédiatement de la première des remarques faites à la fin du n° 3.

Désignons par ν le nombre de pôles de la fonction F et par P_1, P_2, ..., P_ν les résidus correspondants. Chacun d'eux sera une fonction fondamentale de M. Le Roy. D'autre part, chacun d'eux sera aussi une fonction fondamentale de M. Stekloff ayant le nombre η pour nombre caractéristique; c'est ce que l'on vérifie immédiatement en se rappelant que chacune des fonctions F_k est une fonction fondamentale de M. Stekloff ayant le nombre η pour nombre caractéristique.

Pour achever la démonstration du lemme, il n'y a qu'à observer ceci : on trouve, en appliquant la seconde proposition énoncée à la fin du n° 3 au cas où l'on aurait $f = \varphi\omega$, que l'on a

$$\omega = P_1 + P_2 + \ldots + P_\nu,$$

relation qui prouve qu'il existe des fonctions jouissant de toutes les propriétés voulues.

En effet, au moyen de cette relation, nous achevons de nous assurer que les fonctions P_1, ..., P_ν sont précisément des fonctions jouissant de toutes ces propriétés.

Il est aisé maintenant de démontrer la première proposition énoncée au début de ce numéro. En effet, soit

$$\omega_1, \quad \omega_1, \quad \omega_3, \quad \ldots$$

une suite complète quelconque de fonctions fondamentales de M. Stekloff. Le lemme précédent permettra de former, en partant de cette suite, une nouvelle suite complète de fonctions fondamentales de M. Stekloff, soit

$$\theta_1, \quad \theta_2, \quad \theta_3, \quad \ldots, \tag{6}$$

dont chaque terme pourra être considéré comme une fonction fondamentale de M. Le Roy. Mais alors chacune des fonctions θ_k sera aussi une fonction fondamentale de M. Poincaré. Donc, d'après le théorème du n° 4, la suite (6) sera une suite *complète* de fonctions fondamentales de M. Le Roy. Cela prouve que la proposition que nous avions encore à démontrer est exacte. Observons, en terminant, qu'il serait aisé de remplacer la démonstration précédente par une autre où les rôles des fonctions fondamentales de M. Le Roy et de celles de M. Stekloff seraient intervertis; il suffirait pour cela de remplacer les lemmes I et II par deux autres lemmes analogues. Nous n'avons pas suivi cette méthode parce qu'elle exigerait des développements spéciaux pour le cas particulier où l'on considérerait des potentiels newtoniens.

Cracovie, le 18 janvier 1902.