

quatrième série - tome 42 fascicule 1 janvier-février 2009

*ANNALES
SCIENTIFIQUES
de
L'ÉCOLE
NORMALE
SUPÉRIEURE*

Daniel CARO

D-modules arithmétiques surholonomes

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

\mathcal{D} -MODULES ARITHMÉTIQUES SURHOLONOMES

PAR DANIEL CARO

RÉSUMÉ. – Soient k un corps parfait de caractéristique $p > 0$, U une variété sur k et F une puissance de Frobenius. Nous construisons la catégorie des $(F\text{-})\mathcal{D}$ -modules arithmétiques surholonomes sur U et celle des $(F\text{-})$ complexes de \mathcal{D} -modules arithmétiques sur U surholonomes. Nous montrons que les complexes surholonomes sont stables par images directes, images inverses, images inverses extraordinaires, images directes extraordinaires, foncteurs duaux. De plus, lorsque U est lisse, nous vérifions que les F -isocristaux surconvergeants unités sur U sont surholonomes. Cela implique leur holonomie, ce qui prouve en partie une conjecture de Berthelot.

ABSTRACT. – Let k be a perfect field of characteristic $p > 0$, U be a variety over k and F be a power of Frobenius. We construct the category of overholonomic arithmetic $(F\text{-})\mathcal{D}$ -modules over U and the category of overholonomic $(F\text{-})$ complexes of arithmetic \mathcal{D} -modules over U . We show that the overholonomicity is stable under direct images, inverse images, extraordinary inverse images, extraordinary direct images, dual functors. Moreover, when U is smooth, we check that unit-root overconvergent F -isocrystals on U are overholonomic. This implies that they are holonomic, which proves in part a Berthelot's conjecture.

Introduction

Donnons-nous \mathbb{F}_q , un corps fini de caractéristique p , et X une variété sur \mathbb{F}_q (i.e. un \mathbb{F}_q -schéma séparé et de type fini). Afin de prouver la rationalité de la fonction zêta de Weil associée à X et surtout de leur donner une interprétation cohomologique qui fut conjecturée par Weil, l'idée de Grothendieck fut de généraliser ces fonctions à des coefficients sur X plus généraux, le *coefficient constant* redonnant la fonction zêta de X . Ces coefficients, les \mathbb{Q}_l -faisceaux (pour la topologie étale) constructibles, avec l un nombre premier différent de p , vérifient les trois propriétés fondamentales suivantes :

L'auteur a bénéficié du soutien du réseau européen TMR *Arithmetic Algebraic Geometry* (contrat numéro UE MRTN-CT-2003-504917).

1. Lorsque X est réduit à un point, les \mathbb{Q}_l -faisceaux constructibles sont les \mathbb{Q}_l -espaces vectoriels de dimension *finie*.
2. Ils contiennent les coefficients constants.
3. Ils sont stables par les *six opérations cohomologiques de Grothendieck*, à savoir \otimes , $\mathcal{H}om$, f_* , f^* , $f_!$ et $f^!$.

Les opérations cohomologiques permettent de changer de variétés. Afin d'établir l'interprétation cohomologique des fonctions, dites L , associées aux \mathbb{Q}_l -faisceaux constructibles, il procède alors, grâce à la stabilité de la constructibilité, à une récurrence sur la dimension de X (en effectuant des fibrations).

Nous aimerions avoir une analogie p -adique de ceci, i.e. bénéficier d'une catégorie de \mathbb{Q}_p -objets (e.g. \mathbb{Q}_p -faisceaux ou complexes de \mathbb{Q}_p -faisceaux) vivant sur X et vérifiant les trois propriétés ci-dessus. Pour y parvenir, l'idée de Berthelot est, en s'inspirant de la caractéristique nulle, d'élaborer une théorie de *\mathcal{D} -modules arithmétiques*.

Plus précisément, soient \mathcal{V} un anneau de valuation discrète complet d'inégales caractéristiques $(0, p)$ de corps résiduel parfait k , \mathcal{P} un \mathcal{V} -schéma formel lisse et P sa fibre spéciale. Berthelot construit alors le faisceau des opérateurs différentiels d'ordre infini et de niveau fini sur \mathcal{P} , $\mathcal{D}_{\mathcal{P}, \mathbb{Q}}^\dagger$ (voir [5]), qui s'interprète d'après Noot-Huyghe (voir [32]) comme le complété p -adique faible tensorisé par \mathbb{Q} du faisceau des opérateurs différentiels usuels sur \mathcal{P} , $\mathcal{D}_{\mathcal{P}}$. D'où la notion de *\mathcal{D} -modules arithmétiques* sur \mathcal{P} , i.e. de $\mathcal{D}_{\mathcal{P}, \mathbb{Q}}^\dagger$ -modules (toujours à gauche par défaut). Il construit aussi les opérations cohomologiques suivantes (voir [7, 2,3,4]) : le produit tensoriel externe \boxtimes , le foncteur dual \mathbb{D} et, pour tout morphisme $f : \mathcal{P}' \rightarrow \mathcal{P}$ de \mathcal{V} -schémas formels lisses, l'image directe f_+ et l'image inverse extraordinaire $f^!$. Il définit ensuite la notion de *F -complexes holonomes* (le symbole « F » signifie que les complexes sont munis d'une action de Frobenius) en s'inspirant de la caractéristique nulle ([7, 5]). L'holonomie est préservée par produit tensoriel externe (Berthelot : [7]) et par foncteur dual (Virrion : [35]). Berthelot conjecture la préservation de l'holonomie par image directe par un morphisme propre et par image inverse extraordinaire (voir [7, 5.3.6]). Si ces conjectures étaient exactes, nous pourrions alors définir la notion de *F -complexes holonomes* sur une k -variété et construire, pour tout morphisme g de k -variétés, les foncteurs image directe g_+ , image inverse g^+ , image directe extraordinaire $g_!$ et image inverse extraordinaire $g^!$ (de façon analogue à ceux définis ici dans 4.19 pour les complexes surholonomes). Ainsi, les *F -complexes holonomes* (sur les k -variétés) constitueraient une catégorie de coefficients p -adiques stables par les six opérations cohomologiques de Grothendieck \mathbb{D} , \boxtimes , g_+ , g^+ , $g_!$, $g^!$.

Cependant, afin de disposer d'une cohomologie p -adique stable, nous proposons ici une approche légèrement différente : nous remplaçons l'étude de l'holonomie par celle de la *surholonomie*. Pour l'instant, les liens entre ces deux notions sont les suivants : un *F - \mathcal{D} -module arithmétique surholonome* est holonome. De plus, la réciproque est validée si et seulement si la conjecture sur la stabilité de l'holonomie par foncteur cohomologique local est exacte (voir 8.2).

Décrivons maintenant le contenu de cet article.

Nous donnons dans la première partie quelques rappels sur les *\mathcal{D} -modules arithmétiques* qui nous seront utiles. Nous formulons dans une deuxième partie un critère d'holonomie. Il nous permettra d'établir qu'un *F - \mathcal{D} -module arithmétique surholonome* est holonome.

Nous introduisons dans le troisième chapitre la notion de $(F^-)\mathcal{D}_{\mathcal{P}, \mathbb{Q}}^\dagger$ -modules surholonomes et de (F^-) complexes de $\mathcal{D}_{\mathcal{P}, \mathbb{Q}}^\dagger$ -modules surholonomes. Soit $f : \mathcal{P}' \rightarrow \mathcal{P}$ un morphisme de \mathcal{V} -schémas formels lisses. Nous prouvons la stabilité de la surholonomie par foncteurs duaux, par foncteurs cohomologiques locaux, par image inverse extraordinaire et image inverse par f . De plus, lorsque f est propre, nous obtenons sa stabilité par foncteur image directe et image directe extraordinaire par f . La stabilité par produits tensoriels (internes et externes) sera étudiée dans un prochain travail (voir [19] puis [20]).

Nous construisons dans la quatrième partie, pour toute k -variété U plongeable dans un \mathcal{V} -schéma formel propre et lisse, la catégorie des (F^-) complexes surholonomes sur U que l'on note $(F^-)D_{\text{surhol}}^b(\mathcal{D}_U)$. Nous définissons ensuite le foncteur dual sur U noté $\mathbb{D}_U : D_{\text{surhol}}^b(\mathcal{D}_U) \rightarrow D_{\text{surhol}}^b(\mathcal{D}_U)$. Pour tout morphisme $g : U' \rightarrow U$ de k -variétés (on suppose ici qu'il existe des \mathcal{V} -schémas formels propres et lisses dans lesquels U et U' peuvent se plonger respectivement), nous construisons, sur les catégories de F -complexes surholonomes correspondantes, les foncteurs image directe, image directe extraordinaire, image inverse extraordinaire, image inverse par g que l'on désigne respectivement par g_+ , $g!$, $g^!$, g^+ (voir 4.19). De plus, nous prouvons la stabilité de la surholonomie par celles-ci.

Dans la cinquième partie, nous étendons, pour toute variété U sur k , la construction de la catégorie des $(F^-)\mathcal{D}$ -modules arithmétiques surholonomes sur U , que l'on note $(F^-)\mathfrak{M}_U^+$. On obtient la catégorie $(F^-)D^b(\mathfrak{M}_U^+)$, ce qui donne un analogue de $(F^-)D_{\text{surhol}}^b(\mathcal{D}_U)$. On définit de plus le « coefficient constant sur U » noté \mathcal{O}_U .

Soit U une variété sur k se plongeant dans un \mathcal{V} -schéma formel propre et lisse. Dans une sixième partie, nous définissons les fonctions L associées aux F -complexes surholonomes sur U et nous en donnons une formule cohomologique. Cela correspond à une extension de la formule cohomologique d'Étesse et Le Stum des fonctions L associées aux F -isocristaux surconvergens sur U (voir [22]). La preuve se fait par récurrence sur la dimension de U en se ramenant à la situation géométrique déjà connue (celle de [11]). Remarquons que l'hypothèse que U se plonge dans un \mathcal{V} -schéma formel propre et lisse est sûrement évitable (il s'agirait d'étendre les opérations cohomologiques via des diagrammes de topos [1, V.3.4.1]), mais nous ne nous sommes pas intéressé à ce point.

Soient \mathcal{P} un \mathcal{V} -schéma formel séparé et lisse, X un sous-schéma fermé lisse de \mathcal{P} et T un diviseur de \mathcal{P} tels que $T_X := T \cap X$ soit un diviseur de X . Berthelot a vérifié l'holonomie des F -isocristaux convergens sur \mathcal{P} , i.e. des $F\text{-}\mathcal{D}_{\mathcal{P}, \mathbb{Q}}^\dagger$ -modules cohérents, $\mathcal{O}_{\mathcal{P}, \mathbb{Q}}$ -cohérents (voir [7, 5]). Par contre, quoique ayant validé sa cohérence différentielle (voir [3]), il conjecture l'holonomie du coefficient constant $\mathcal{O}_{\mathcal{P}}(\dagger T)_{\mathbb{Q}}$ (voir [7, 5.3.6.D]). Dans la septième partie de cet article, nous démontrons que les F -isocristaux surconvergens unités sur $X \setminus T_X$ surconvergens le long de T_X sont surholonomes. Cela implique, pour n'importe quelle k -variété U , que le coefficient constant \mathcal{O}_U est surholonome. De plus, nous vérifions que, pour toute variété U lisse sur k , le $F\text{-}\mathcal{D}_U$ -module arithmétique associé à un F -isocristal unité surconvergent sur U (voir 1.20) est surholonome. En particulier, on obtient leur holonomie, ce qui confirme la conjecture de Berthelot (voir [7, 5.3.6.D]). Il faut noter que l'utilisation de la surholonomie (et surtout de sa stabilité) est l'élément clé de la preuve. La stabilité de la surholonomie permet ainsi de résoudre des problèmes sur l'holonomie.

Dans [14, 4], lorsque \mathcal{P} est une courbe propre et lisse et $\mathcal{P} = X$, nous avons établi l'holonomie des F -isocristaux surconvergens sur $X \setminus T_X$, ce qui avait étendu les premiers exemples

de $F\text{-}\mathcal{D}_{\mathcal{P}, \mathbb{Q}}^{\dagger}$ -modules holonomes sur les courbes de Berthelot de [2, 5]. Plus généralement, grâce à [16] puis avec la collaboration de Tsuzuki dans [20], nous obtiendrons la surholonomie des F -isocristaux surconvergens sur une variété lisse U . Ce résultat repose sur le théorème Kedlaya de réduction semi-stable en dimension supérieure (voir [26], [27], [29] et [30]). Par dévissage en F -isocristaux surconvergens (voir [13]), cela entraîne la stabilité par produits tensoriels de la surholonomie avec structure de Frobenius (voir [20]).

Nous prouvons dans la dernière partie que la conjecture [7, 5.3.6.B] de Berthelot sur la stabilité de l'holonomie par image inverse extraordinaire implique que les notions d'holonomie, de surholonomie, de surcohérence sont identiques. On en déduit que cette conjecture [7, 5.3.6.B] entraîne en particulier (pour une version plus générale voir 8.9) la stabilité de l'holonomie par image directe par un morphisme propre de \mathcal{V} -schémas formels lisses (ce qui était conjecturé dans [7, 5.3.6.A]).

Notations

Tout au long de cet article, nous garderons les notations suivantes : les schémas formels seront notés par des lettres calligraphiques ou gothiques et leur fibre spéciale par les lettres romanes correspondantes. Si $f : X' \rightarrow X$ est un morphisme de schémas ou de schémas formels, on note d_X la dimension de X et $d_{X'/X}$ la dimension relative. De plus, la lettre \mathcal{V} désignera un anneau de valuation discrète complet, de corps résiduel parfait k de caractéristique $p > 0$, de corps de fractions K de caractéristique 0. On fixe $s \geq 1$ un entier naturel et F sera la puissance s -ième de l'endomorphisme de Frobenius. Si \mathcal{E} est un faisceau abélien, $\mathcal{E}_{\mathbb{Q}}$ désignera $\mathcal{E} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$. Lorsque cela n'est pas précisé, les modules sont des modules à gauche, les *variétés* sont des variétés sur k , i.e. des k -schémas séparés et de type fini. Tous les k -schémas seront *réduits*. Lorsque nous considérerons des produits de \mathcal{V} -schémas formels (resp. k -schémas), nous omettrons parfois d'indiquer $\mathrm{Spf} \mathcal{V}$ (resp. $\mathrm{Spec} k$). Lorsque le symbole ensemble vide « \emptyset » apparaît dans une notation, nous ne l'indiquerons pas non plus (e.g. dans les opérations cohomologiques de la section 1 lorsqu'un diviseur est vide ; e.g. « $\mathcal{D}_{\mathfrak{x}, \mathbb{Q}}^{\dagger}$ » à la place de « $\mathcal{D}_{\mathfrak{x}}^{\dagger}(\emptyset)_{\mathbb{Q}}$ »).

Si \mathcal{A} est un faisceau d'anneaux, $D^b(\mathcal{A})$, $D^+(\mathcal{A})$ et $D^-(\mathcal{A})$ désignent respectivement les catégories dérivées des complexes de \mathcal{A} -modules à cohomologie bornée, bornée inférieurement et bornée supérieurement. Lorsque l'on souhaitera préciser entre droite et gauche, on notera alors $D^{*(s)}(\mathcal{A})$ ou $D^*(\mathcal{A}^d)$, où $*$ est l'un des symboles \emptyset , $+$, $-$, ou b . De plus, les indices « qc », « coh », « surcoh », « parf » et « hol » signifient respectivement « quasi-cohérent », « cohérent », « surcohérent », « parfait » et « holonome » (voir la section 1).

Remerciements

La surholonomie répond à des questions de K. Kedlaya, B. Le Stum et N. Tsuzuki concernant une extension logique de la notion de surcohérence. Leur intérêt à ce sujet et notamment ceux de A. Abbes et C. Huyghe-Noot ont été une grande source de motivation. Je remercie B. Le Stum et A. Virrion pour leur attention très stimulante relative au critère d'holonomie.

1. Rappels sur les \mathcal{D} -modules arithmétiques

Nous avons regroupé dans cette section toutes les définitions et propriétés concernant la théorie des \mathcal{D} -modules arithmétiques que nous utiliserons constamment dans ce manuscrit. Nous nous sommes donc focalisé sur ce qui sera sans cesse nécessaire. Ainsi, ce survol ne se prétend pas exhaustif. Le lecteur néophyte pourra aussi se reporter à [7] ou pour une version plus récente à [28].

Soient $\mathfrak{X}, \mathfrak{X}'$ deux \mathcal{V} -schémas formels lisses, $f_0 : X' \rightarrow X$ un morphisme de k -schémas sur les fibres spéciales, T un diviseur de X tel que $T' := f_0^{-1}(T)$ soit un diviseur de X' . On note $\mathcal{Y} := \mathfrak{X} \setminus T, \mathcal{Y}' := \mathfrak{X}' \setminus T'$ les ouverts respectifs de $\mathfrak{X}, \mathfrak{X}'$. Sauf mention explicite du contraire (e.g. pour les définitions de l'image directe et de l'image inverse extraordinaire), pour simplifier l'exposé, on supposera que f_0 se relève en un morphisme $f : \mathfrak{X}' \rightarrow \mathfrak{X}$ de \mathcal{V} -schémas formels lisses.

1.1. Opérateurs différentiels de niveau m

Berthelot a construit pour tout entier $m \geq 0$ donné le « faisceau des opérateurs différentiels de niveau m sur \mathfrak{X} », qu'il note $\mathcal{D}_{\mathfrak{X}}^{(m)}$ (voir [5, 2]). Comme p n'est pas inversible sur $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$, on remarque que le faisceau $\mathcal{D}_{\mathfrak{X}}$ des opérateurs différentiels usuels sur \mathfrak{X} n'est pas cohérent. Par contre, les faisceaux $(\mathcal{D}_{\mathfrak{X}}^{(m)})_{m \in \mathbb{N}}$ donnent une filtration croissante exhaustive de $\mathcal{D}_{\mathfrak{X}}$ par des $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$ -algèbres cohérentes (voir par exemple [5, 2.2.1.7, 2.2.3.1] et remarquer que $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$ n'a pas d'éléments de p -torsion).

Il a aussi construit une $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$ -algèbre qu'il note $\mathcal{B}_{\mathfrak{X}}^{(m)}(T)$ (voir [5, 4.2]). Lorsque $f \in \mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$ relève une équation définissant T dans $X, \mathcal{B}_{\mathfrak{X}}^{(m)}(T) \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_{\mathfrak{X}}[t]/(f^{p^{m+1}}t - p)$, cette dernière étant indépendante à isomorphisme canonique près du choix du relèvement f . Il en déduit ainsi la construction de $\mathcal{B}_{\mathfrak{X}}^{(m)}(T)$ par recollement.

On pose enfin $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}}^{(m)}(T) := \mathcal{B}_{\mathfrak{X}}^{(m)}(T) \widehat{\otimes}_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}} \mathcal{D}_{\mathfrak{X}}^{(m)}$ que l'on pourrait appeler, s'il fallait absolument lui donner un nom, « complété p -adique du faisceau des opérateurs différentiels de niveau m sur \mathfrak{X} à coefficients surconvergens le long de T ».

1.2. Complexes quasi-cohérents, définitions

La notion de « complexes quasi-cohérents sur les schémas formels » a été introduite par Berthelot (voir [7]). Soient \mathcal{B} un faisceau de $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$ -algèbres (non nécessairement commutatif), $\mathcal{E} \in D^-(\mathcal{B}^d), \mathcal{F} \in D^-(\mathcal{B}^g)$. On pose $\mathcal{B}_i := \mathcal{B}/\pi^{i+1}\mathcal{B}, \mathcal{E}_i := \mathcal{E} \otimes_{\mathcal{B}}^{\mathbb{L}} \mathcal{B}_i, \mathcal{F}_i := \mathcal{B}_i \otimes_{\mathcal{B}}^{\mathbb{L}} \mathcal{F}, \mathcal{E} \widehat{\otimes}_{\mathcal{B}}^{\mathbb{L}} \mathcal{F} := \mathbb{R} \varprojlim_i \mathcal{E}_i \otimes_{\mathcal{B}_i}^{\mathbb{L}} \mathcal{F}_i$. On définit de même $\mathcal{E}^{(\bullet)} \widehat{\otimes}_{\mathcal{B}^{(\bullet)}}^{\mathbb{L}} \mathcal{F}^{(\bullet)}$ lorsque $\mathcal{B}^{(\bullet)}$ est un système inductif de $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$ -algèbres, $\mathcal{E}^{(\bullet)}$ et $\mathcal{F}^{(\bullet)}$ sont des complexes de $\mathcal{B}^{(\bullet)}$ -algèbres.

Le complexe \mathcal{E} (resp. \mathcal{F}) est dit « \mathcal{B} -quasi-cohérent » si le morphisme canonique $\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E} \widehat{\otimes}_{\mathcal{B}}^{\mathbb{L}} \mathcal{B}$ (resp. $\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{B} \widehat{\otimes}_{\mathcal{B}}^{\mathbb{L}} \mathcal{F}$) est un isomorphisme. Pour $* = g$ ou $* = d$, on désigne par $D_{\text{qc}}^-(\mathcal{B}^*)$ (resp. $D_{\text{qc}}^b(\mathcal{B}^*)$) la sous-catégorie pleine de $D^-(\mathcal{B}^*)$ (resp. $D^b(\mathcal{B}^*)$) des complexes quasi-cohérents.

On remarque que, puisque $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}}^{(m)}(T)$ est un $\widehat{\mathcal{B}}_{\mathfrak{X}}^{(m)}(T)$ -module plat (pour les structures droite ou gauche), un complexe de $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}}^{(m)}(T)$ -modules à gauche ou à droite est $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}}^{(m)}(T)$ -quasi-cohérent, si et seulement s'il est $\widehat{\mathcal{B}}_{\mathfrak{X}}^{(m)}(T)$ -quasi-cohérent. De plus, on dispose de l'isomorphisme : $\widehat{\mathcal{B}}_{\mathfrak{X}}^{(m)}(T) \otimes_{\mathcal{V}}^{\mathbb{L}} \mathcal{V}/\pi^{i+1} \xrightarrow{\sim} \widehat{\mathcal{B}}_{\mathfrak{X}}^{(m)}(T) \otimes_{\mathcal{V}} \mathcal{V}/\pi^{i+1}$ (cela découle de [5, 4.3.3.(i)]).

Ainsi, un complexe de $\widehat{\mathcal{B}}_{\mathfrak{X}}^{(m)}(T)$ -modules est $\widehat{\mathcal{B}}_{\mathfrak{X}}^{(m)}(T)$ -quasi-cohérent si et seulement s'il est $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$ -quasi-cohérent et si et seulement s'il est \mathcal{V} -quasi-cohérent.

On note $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}}^{(\bullet)}(T)$ le système inductif $(\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}}^{(m)}(T))_{m \in \mathbb{N}}$. En localisant deux fois $D^b(\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}}^{(\bullet)}(T))$ (ces localisations remplacent respectivement les foncteurs $- \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ et « limite inductive sur le niveau m »), on obtient $\underline{LD}_{\mathbb{Q}}^b(\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}}^{(\bullet)}(T))$ (voir [7, 4.2.1 et 4.2.2]). Soit $\mathcal{E}^{(\bullet)} = (\mathcal{E}^{(m)})_{m \in \mathbb{N}} \in \underline{LD}_{\mathbb{Q}}^b(\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}}^{(\bullet)}(T))$. D'après [7, 4.2.3] (voir aussi [14, 1.1.3]), $\mathcal{E}^{(\bullet)}$ est dit quasi-cohérent si et seulement si, pour tout m , $\mathcal{E}^{(m)}$ est $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}}^{(m)}(T)$ -quasi-cohérent. La sous-catégorie pleine des complexes quasi-cohérents est notée $\underline{LD}_{\mathbb{Q}, \text{qc}}^b(\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}}^{(\bullet)}(T))$.

1.3. Quasi-cohérence et variation du diviseur

Soient $T_1 \subset T_2$ deux diviseurs de X . Avec les remarques de 1.2, on dispose du foncteur oubli : $\underline{LD}_{\mathbb{Q}, \text{qc}}^b(\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}}^{(\bullet)}(T_2)) \rightarrow \underline{LD}_{\mathbb{Q}, \text{qc}}^b(\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}}^{(\bullet)}(T_1))$ que l'on note oub_{T_1, T_2} .

Réciproquement, on définit un foncteur

$$(\dagger T_2, T_1) : \underline{LD}_{\mathbb{Q}, \text{qc}}^b(\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}}^{(\bullet)}(T_1)) \rightarrow \underline{LD}_{\mathbb{Q}, \text{qc}}^b(\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}}^{(\bullet)}(T_2))$$

en posant, pour tout $\mathcal{E}^{(\bullet)} \in \underline{LD}_{\mathbb{Q}, \text{qc}}^b(\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}}^{(\bullet)}(T_1))$,

$$(\dagger T_2, T_1)(\mathcal{E}^{(\bullet)}) := \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}}^{(\bullet)}(T_2) \widehat{\otimes}_{\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}}^{(\bullet)}(T_1)}^{\mathbb{L}} \mathcal{E}^{(\bullet)},$$

où $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}}^{(\bullet)}(T_2) \widehat{\otimes}_{\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}}^{(\bullet)}(T_1)}^{\mathbb{L}} \mathcal{E}^{(\bullet)}$ désigne le système inductif $(\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}}^{(m)}(T_2) \widehat{\otimes}_{\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}}^{(m)}(T_1)}^{\mathbb{L}} \mathcal{E}^{(m)})_{m \in \mathbb{N}}$.

Lorsque T_1 est vide, on note simplement oub_{T_2} et $(\dagger T_2)$. On dispose pour ces deux foncteurs des formules de transitivité en les diviseurs évidentes. D'après [14, 1.1.8], on bénéficie aussi de l'isomorphisme $(\dagger T_2, T_1) \xrightarrow{\sim} (\dagger T_2) \circ \text{oub}_{T_1}$. Cela implique que les foncteurs de la forme oub_{T_1} sont pleinement fidèles (voir [14, 1.1.8]). Il en est donc de même de ceux de la forme oub_{T_1, T_2} . On pourra ainsi sans aucune ambiguïté omettre d'indiquer les inclusions canoniques $\text{oub}_{T_1, T_2} : \underline{LD}_{\mathbb{Q}, \text{qc}}^b(\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}}^{(\bullet)}(T_2)) \subset \underline{LD}_{\mathbb{Q}, \text{qc}}^b(\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}}^{(\bullet)}(T_1))$ et identifier les deux foncteurs $(\dagger T_2, T_1)$ et $(\dagger T_2)$.

1.4. Produits tensoriels internes

Soient $\mathcal{E}^{(\bullet)}, \mathcal{F}^{(\bullet)} \in \underline{LD}_{\mathbb{Q}, \text{qc}}^b(\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}}^{(\bullet)}(T))$. On définit le « produit tensoriel interne » de $\mathcal{E}^{(\bullet)}$ et $\mathcal{F}^{(\bullet)}$ en posant dans $\underline{LD}_{\mathbb{Q}, \text{qc}}^b(\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}}^{(\bullet)}(T))$:

$$(1.4.1) \quad \mathcal{E}^{(\bullet)} \widehat{\otimes}_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}(\dagger T)_{\mathbb{Q}}}^{\mathbb{L}} \mathcal{F}^{(\bullet)} := \mathcal{E}^{(\bullet)} \widehat{\otimes}_{\widehat{\mathcal{B}}_{\mathfrak{X}}^{(\bullet)}(T)}^{\mathbb{L}} \mathcal{F}^{(\bullet)},$$

où $\mathcal{E}^{(\bullet)} \widehat{\otimes}_{\widehat{\mathcal{B}}_{\mathfrak{X}}^{(\bullet)}(T)}^{\mathbb{L}} \mathcal{F}^{(\bullet)}$ désigne le système inductif $(\mathcal{E}^{(m)} \widehat{\otimes}_{\widehat{\mathcal{B}}_{\mathfrak{X}}^{(m)}(T)}^{\mathbb{L}} \mathcal{F}^{(m)})_{m \in \mathbb{N}}$.

Soient $T_1 \subset T_2$ deux diviseurs et $\mathcal{E}^{(\bullet)} \in \underline{LD}_{\mathbb{Q}, \text{qc}}^b(\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}}^{(\bullet)}(T_1))$. Pour simplifier les notations, on écrira abusivement $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}(\dagger T_2)_{\mathbb{Q}} \widehat{\otimes}_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}(\dagger T_1)_{\mathbb{Q}}}^{\mathbb{L}} \mathcal{E}^{(\bullet)}$ pour $\widehat{\mathcal{B}}_{\mathfrak{X}}^{(\bullet)}(T_2) \widehat{\otimes}_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}(\dagger T_1)_{\mathbb{Q}}}^{\mathbb{L}} \mathcal{E}^{(\bullet)}$. D'après [14, 1.1.7.1], on dispose alors de l'isomorphisme canonique :

$$(1.4.2) \quad \mathcal{O}_{\mathfrak{X}}(\dagger T_2)_{\mathbb{Q}} \widehat{\otimes}_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}(\dagger T_1)_{\mathbb{Q}}}^{\mathbb{L}} \mathcal{E}^{(\bullet)} \xrightarrow{\sim} (\dagger T_2, T_1)(\mathcal{E}^{(\bullet)}).$$

1.5. Produits tensoriels externes

Soient $\mathfrak{X}_1, \mathfrak{X}_2$ deux \mathcal{V} -schémas formels lisses, $\mathcal{E}_1^{(\bullet)} \in \underline{LD}_{\mathbb{Q}, \text{qc}}^b(\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}_1}^{(\bullet)})$, $\mathcal{E}_2^{(\bullet)} \in \underline{LD}_{\mathbb{Q}, \text{qc}}^b(\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}_2}^{(\bullet)})$, $p_1 : \mathfrak{X}_1 \times_S \mathfrak{X}_2 \rightarrow \mathfrak{X}_1$ et $p_2 : \mathfrak{X}_1 \times_S \mathfrak{X}_2 \rightarrow \mathfrak{X}_2$ les projections canoniques. Le « produit tensoriel externe » de $\mathcal{E}_1^{(\bullet)}$ et $\mathcal{E}_2^{(\bullet)}$ est défini en posant (voir [7, 4.3.5]) :

$$(1.5.1) \quad \mathcal{E}_1^{(\bullet)} \boxtimes_{\mathcal{O}_S}^{\mathbb{L}} \mathcal{E}_2^{(\bullet)} := p_1^!(\mathcal{E}_1^{(\bullet)}) \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}_1 \times_S \mathfrak{X}_2, \mathbb{Q}}}^{\mathbb{L}} p_2^!(\mathcal{E}_2^{(\bullet)})[-d_{\mathfrak{X}_1} - d_{\mathfrak{X}_2}].$$

1.6. Images directes et images inverses extraordinaires

Le faisceau $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}' \rightarrow \mathfrak{X}}^{(m)}(T', T) := \mathcal{B}_{\mathfrak{X}'}^{(m)}(T') \widehat{\otimes}_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}'}} f^* \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}}^{(m)}(T)$ est muni par functorialité d'une structure de $(\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}'}^{(m)}(T'), f^{-1}(\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}}^{(m)}(T)))$ -bimodule.

On définit le foncteur $f_T^! : \underline{LD}_{\mathbb{Q}, \text{qc}}^b(\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}}^{(\bullet)}(T)) \rightarrow \underline{LD}_{\mathbb{Q}, \text{qc}}^b(\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}'}^{(\bullet)}(T'))$ « image inverse extraordinaire par f à coefficients surconvergens le long de T » en posant, pour tout $\mathcal{E}^{(\bullet)} \in \underline{LD}_{\mathbb{Q}, \text{qc}}^b(\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}}^{(\bullet)}(T))$, :

$$(1.6.1) \quad f_T^!(\mathcal{E}^{(\bullet)}) := \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}' \rightarrow \mathfrak{X}}^{(\bullet)}(T', T) \widehat{\otimes}_{f^{-1}\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}}^{(\bullet)}(T)}^{\mathbb{L}} f^{-1}\mathcal{E}^{(\bullet)}[d_{\mathfrak{X}'/\mathfrak{X}}].$$

Posons $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X} \leftarrow \mathfrak{X}'}^{(m)}(T, T') := \mathcal{B}_{\mathfrak{X}'}^{(m)}(T') \widehat{\otimes}_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}'}} (\omega_{\mathfrak{X}'} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}'}} f_g^* \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}}^{(m)}(T) \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}} \omega_{\mathfrak{X}}^{-1})$, l'indice « g » signifiant que l'on a choisi pour calculer l'image inverse la structure gauche de $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}}^{(m)}(T)$ -module à gauche. Par functorialité, $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X} \leftarrow \mathfrak{X}'}^{(m)}(T, T')$ est muni d'une structure de $(f^{-1}(\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}}^{(m)}(T)), \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X} \leftarrow \mathfrak{X}'}^{(m)}(T, T'))$ -bimodule. On définit le foncteur $f_{T,+} : \underline{LD}_{\mathbb{Q}, \text{qc}}^b(\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}'}^{(\bullet)}(T')) \rightarrow \underline{LD}_{\mathbb{Q}, \text{qc}}^b(\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}}^{(\bullet)}(T))$ « image directe par f à coefficients surconvergens le long de T » en posant, pour tout $\mathcal{E}'^{(\bullet)} \in \underline{LD}_{\mathbb{Q}, \text{qc}}^b(\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}'}^{(\bullet)}(T'))$:

$$(1.6.2) \quad f_{T,+}(\mathcal{E}'^{(\bullet)}) := \mathbb{R}f_* (\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X} \leftarrow \mathfrak{X}'}^{(\bullet)}(T, T') \widehat{\otimes}_{\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}'}^{(m)}(T')}^{\mathbb{L}} \mathcal{E}'^{(\bullet)}).$$

D'après [14, 1.1.9, 1.1.10], on dispose des isomorphismes canoniques de foncteurs :

$$(1.6.3) \quad \text{oub}_T \circ f_{T,+} \xrightarrow{\sim} f_+ \circ \text{oub}_{T'} \quad \text{et} \quad \text{oub}_{T'} \circ f_T^! \xrightarrow{\sim} f^! \circ \text{oub}_T.$$

En omettant d'indiquer les inclusions de la forme $\text{oub}_T : \underline{LD}_{\mathbb{Q}, \text{qc}}^b(\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}}^{(\bullet)}(T)) \subset \underline{LD}_{\mathbb{Q}, \text{qc}}^b(\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}}^{(\bullet)})$, on pourra ainsi par abus de notations écrire $f^!$ pour $f_T^!$ (resp. f_+ pour $f_{T,+}$).

Lorsque f_0 ne se relève pas, les bimodules $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}' \rightarrow \mathfrak{X}}^{(m)}(T', T)$ et $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X} \leftarrow \mathfrak{X}'}^{(m)}(T, T')$ peuvent néanmoins être définis par recollement (e.g. voir [6, 2.1.6]). On construit ainsi de manière identique les foncteurs image inverse extraordinaire et image directe par f_0 , que l'on note respectivement $f_0^!$ et $f_{0,+}$. On obtient en particulier la notion d'image inverse par F_X , où F_X désigne la puissance s -ième de l'endomorphisme de Frobenius absolu de X . Ce foncteur se note simplement F^* . Nous verrons que F^* commute à l'image directe et l'image inverse extraordinaire (voir 1.7 et 1.12).

1.7. Commutation à Frobenius et transitivité de l'image inverse extraordinaire

Soient $f : \mathfrak{X}' \rightarrow \mathfrak{X}$, $g : \mathfrak{X}'' \rightarrow \mathfrak{X}'$ et $h : \mathfrak{X}''' \rightarrow \mathfrak{X}''$ trois morphismes de \mathcal{V} -schémas formels lisses.

On dispose, pour tout $\mathcal{E}^{(\bullet)} \in \underline{LD}_{\mathbb{Q}, \text{qc}}^b(\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}}^{(\bullet)})$, de l'isomorphisme canonique dit de « transitivité de l'image inverse extraordinaire », $g^! \circ f^! \xrightarrow{\sim} (f \circ g)^!$, vérifiant la condition d'associativité : les deux isomorphismes $h^! g^! f^! \xrightarrow{\sim} h^! (f \circ g)^! \xrightarrow{\sim} (f \circ g \circ h)^!$ et $h^! g^! f^! \xrightarrow{\sim} (g \circ h)^! f^! \xrightarrow{\sim} (f \circ g \circ h)^!$ sont identiques (voir [14, 1.2.2]).

En particulier, en désignant par F les morphismes absolus de Frobenius de X ou Y , on dispose des isomorphismes canoniques de commutation à Frobenius : $F^* \circ f^!(\mathcal{E}^{(\bullet)}) \xrightarrow{\sim} f^! \circ F^*(\mathcal{E}^{(\bullet)})$ (car $F^* = F^!$). Les isomorphismes de transitivité de l'image inverse extraordinaire sont compatibles à Frobenius.

1.8. Passage à la limite sur le niveau et cohérence

Berthelot définit par passage à la limite $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}(\dagger T)_{\mathbb{Q}} := \varinjlim_m \widehat{\mathcal{B}}_{\mathfrak{X}}^{(m)}(T)_{\mathbb{Q}}$ le « faisceau des fonctions sur \mathfrak{X} à singularités surconvergentes le long de T » ([5, 4.2.4]). Il construit de même $\mathcal{D}_{\mathfrak{X}}^{\dagger}(\dagger T)_{\mathbb{Q}} := \varinjlim_m \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}}^{(m)}(T)_{\mathbb{Q}}$ et le nomme « faisceau des opérateurs différentiels de niveau fini, à singularités surconvergentes le long de T » ([5, 4.2.5]).

En passant à la limite sur le niveau puis en tensorisant par \mathbb{Q} sur \mathbb{Z} , on obtient le foncteur noté abusivement (pour simplifier les notations) $\varinjlim : \underline{LD}_{\mathbb{Q}, \text{qc}}^b(\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}}^{(\bullet)}(T)) \rightarrow D(\mathcal{D}_{\mathfrak{X}}^{\dagger}(\dagger T)_{\mathbb{Q}})$ (e.g. voir [7, 4.2.2]). Celui-ci induit une équivalence de catégories entre $D_{\text{coh}}^b(\mathcal{D}_{\mathfrak{X}}^{\dagger}(\dagger T)_{\mathbb{Q}})$ et une sous-catégorie pleine de $\underline{LD}_{\mathbb{Q}, \text{qc}}^b(\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}}^{(\bullet)}(T))$, notée $\underline{LD}_{\mathbb{Q}, \text{coh}}^b(\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}}^{(\bullet)}(T))$ (voir [7, 4.2.4]). Par abus de notations, il nous arrivera d'omettre le foncteur \varinjlim , i.e. d'identifier $\underline{LD}_{\mathbb{Q}, \text{coh}}^b(\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}}^{(\bullet)}(T))$ avec $D_{\text{coh}}^b(\mathcal{D}_{\mathfrak{X}}^{\dagger}(\dagger T)_{\mathbb{Q}})$. De cette manière $D_{\text{coh}}^b(\mathcal{D}_{\mathfrak{X}}^{\dagger}(\dagger T)_{\mathbb{Q}})$ est une sous-catégorie pleine de $\underline{LD}_{\mathbb{Q}, \text{qc}}^b(\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}}^{(\bullet)}(T))$.

1.9. Cohérence : comment se ramener au cas sans diviseur

Nous utiliserons énormément le résultat fondamental suivant de Berthelot (voir [5, 4.3.12]) : un $\mathcal{D}_{\mathfrak{X}}^{\dagger}(\dagger T)_{\mathbb{Q}}$ -module cohérent est nul si et seulement si sa restriction sur \mathcal{Y} est nulle. Cela implique par exemple qu'un morphisme de $\mathcal{D}_{\mathfrak{X}}^{\dagger}(\dagger T)_{\mathbb{Q}}$ -modules cohérents est injective (resp. surjective) si et seulement si sa restriction sur \mathcal{Y} est injective (resp. surjective). On en déduit aussi qu'un morphisme de $D_{\text{coh}}^b(\mathcal{D}_{\mathfrak{X}}^{\dagger}(\dagger T)_{\mathbb{Q}})$ est un isomorphisme si et seulement si sa restriction sur \mathcal{Y} est un isomorphisme. La philosophie est qu'un $\mathcal{D}_{\mathfrak{X}}^{\dagger}(\dagger T)_{\mathbb{Q}}$ -module cohérent « vit essentiellement sur \mathcal{Y} ».

1.10. Opérations cohomologiques de complexes cohérents

Considérons les bimodules suivants

$$\mathcal{D}_{\mathfrak{X}' \rightarrow \mathfrak{X}}^{\dagger}(\dagger T', T)_{\mathbb{Q}} := \varinjlim_m \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}' \rightarrow \mathfrak{X}}^{(m)}(T', T)_{\mathbb{Q}},$$

$$\mathcal{D}_{\mathfrak{X} \leftarrow \mathfrak{X}'}^{\dagger}(\dagger T, T')_{\mathbb{Q}} := \varinjlim_m \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X} \leftarrow \mathfrak{X}'}^{(m)}(T, T')_{\mathbb{Q}}.$$

Soient $T \subset T_2$ un diviseur de X , $\mathcal{E}^{(\bullet)} \in \underline{LD}_{\mathbb{Q}, \text{coh}}^b(\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{x}}^{(\bullet)}(T))$, $\mathcal{F}^{(\bullet)} \in \underline{LD}_{\mathbb{Q}, \text{coh}}^b(\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{x}}^{(\bullet)}(T))$, $\mathcal{E}'^{(\bullet)} \in \underline{LD}_{\mathbb{Q}, \text{coh}}^b(\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{x}'}^{(\bullet)}(T'))$, $\mathcal{E} := \varinjlim \mathcal{E}^{(\bullet)}$, $\mathcal{F} := \varinjlim \mathcal{F}^{(\bullet)}$, $\mathcal{E}' := \varinjlim \mathcal{E}'^{(\bullet)}$. On définit alors les foncteurs suivants en posant :

$$(1.10.1) \quad (\dagger T_2, T)(\mathcal{E}) := \mathcal{D}_{\mathfrak{x}}^{\dagger}(\dagger T_2)_{\mathbb{Q}} \otimes_{\mathcal{D}_{\mathfrak{x}}^{\dagger}(\dagger T)_{\mathbb{Q}}} \mathcal{E},$$

$$(1.10.2) \quad f_T^{\dagger}(\mathcal{E}) := \mathcal{D}_{\mathfrak{x}' \rightarrow \mathfrak{x}}^{\dagger}(\dagger T', T)_{\mathbb{Q}} \otimes_{f^{-1}\mathcal{D}_{\mathfrak{x}}^{\dagger}(\dagger T)_{\mathbb{Q}}}^{\mathbb{L}} f^{-1}\mathcal{E}[d_{\mathfrak{x}'/\mathfrak{x}}],$$

$$(1.10.3) \quad f_{T+}(\mathcal{E}') := \mathbb{R}f_* (\mathcal{D}_{\mathfrak{x} \leftarrow \mathfrak{x}'}^{\dagger}(\dagger T, T')_{\mathbb{Q}} \otimes_{\mathcal{D}_{\mathfrak{x}'}^{\dagger}(\dagger T')_{\mathbb{Q}}}^{\mathbb{L}} \mathcal{E}'),$$

où nous avons omis d'inscrire le symbole « \mathbb{L} » dans le premier produit tensoriel car l'homomorphisme $\mathcal{D}_{\mathfrak{x}}^{\dagger}(\dagger T)_{\mathbb{Q}} \rightarrow \mathcal{D}_{\mathfrak{x}}^{\dagger}(\dagger T_2)_{\mathbb{Q}}$ est plat (voir [5, 4.3.10-11]). On dispose des isomorphismes $(\dagger T_2, T)(\mathcal{E}) \xrightarrow{\sim} \varinjlim (\dagger T_2, T)(\mathcal{E}^{(\bullet)})$, $f_T^{\dagger}(\mathcal{E}) \xrightarrow{\sim} \varinjlim f_T^{\dagger}(\mathcal{E}^{(\bullet)})$, $f_{T+}(\mathcal{E}') \xrightarrow{\sim} \varinjlim f_{T+}(\mathcal{E}'^{(\bullet)})$. Les notations relatives à ces foncteurs sont donc compatibles. De plus, on pose (voir 1.4.1, 1.5.1) :

$$(1.10.4) \quad \mathcal{E} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{x}}(\dagger T)_{\mathbb{Q}}}^{\mathbb{L}\dagger} \mathcal{F} := \varinjlim \mathcal{E}^{(\bullet)} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{x}}(\dagger T)_{\mathbb{Q}}}^{\mathbb{L}\dagger} \mathcal{F}^{(\bullet)},$$

$$(1.10.5) \quad \mathcal{E} \boxtimes_{\mathcal{O}_S}^{\mathbb{L}\dagger} \mathcal{F} := \varinjlim \mathcal{E}^{(\bullet)} \boxtimes_{\mathcal{O}_S}^{\mathbb{L}\dagger} \mathcal{F}^{(\bullet)}.$$

Pour tout $\mathcal{G} \in D_{\text{parf}}(\mathcal{D}_{\mathfrak{x}, \mathbb{Q}}^{\dagger}(\dagger T))$, Virrion définit son « foncteur dual $\mathcal{D}_{\mathfrak{x}, \mathbb{Q}}^{\dagger}(\dagger T)$ -linéaire » (voir [35, I.3.2]) en posant :

$$(1.10.6) \quad \mathbb{D}_T(\mathcal{G}) := \mathbb{R}\text{Hom}_{\mathcal{D}_{\mathfrak{x}}^{\dagger}(\dagger T)_{\mathbb{Q}}}(\mathcal{G}, \mathcal{D}_{\mathfrak{x}}^{\dagger}(\dagger T)_{\mathbb{Q}} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{x}, \mathbb{Q}}} \omega_{\mathfrak{x}, \mathbb{Q}}^{-1}[d_{\mathfrak{x}}]).$$

Elle a aussi vérifié (voir [35, II.3.5]) que l'on dispose de l'« isomorphisme de bidualité » compatible à Frobenius :

$$(1.10.7) \quad \mathbb{D}_T \circ \mathbb{D}_T(\mathcal{G}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{G}.$$

Rappelons que Noot-Huyghe ([33]) a prouvé que le faisceau $\mathcal{D}_{\mathfrak{x}}^{\dagger}(\dagger T)_{\mathbb{Q}}$ est de dimension cohomologique finie. Comme $\mathcal{D}_{\mathfrak{x}}^{\dagger}(\dagger T)_{\mathbb{Q}}$ est aussi cohérent ([5, 5.4]), on obtient $D_{\text{parf}}(\mathcal{D}_{\mathfrak{x}}^{\dagger}(\dagger T)_{\mathbb{Q}}) = D_{\text{coh}}^b(\mathcal{D}_{\mathfrak{x}}^{\dagger}(\dagger T)_{\mathbb{Q}})$. Ainsi, le foncteur \mathbb{D}_T préserve la cohérence. Par contre, le foncteur f_{T+} (resp. f_T^{\dagger}) ne préserve pas la cohérence lorsque f est une immersion ouverte (resp. immersion fermée) différente de l'identité. Berthelot (voir [7]) a néanmoins vérifié la stabilité de la cohérence par le foncteur f_{T+} (resp. f_T^{\dagger}) lorsque f est un morphisme propre (resp. un morphisme lisse).

Lorsque cela aura un sens, on notera alors respectivement $f_T^{\dagger} := \mathbb{D}_{T'} \circ f_T^{\dagger} \circ \mathbb{D}_T$ et $f_{T,!} := \mathbb{D}_T \circ f_{T+} \circ \mathbb{D}_{T'}$ « l'image inverse » et « l'image directe extraordinaire ».

1.11. Isomorphisme de dualité relative

Dans toute cette section concernant l'isomorphisme de dualité relative, f est propre. Virrion construit dans [36] un isomorphisme de commutation entre les foncteurs duaux respectifs et le foncteur image directe par f . Un tel isomorphisme est appelé « isomorphisme de dualité relative ». En reprenant ses constructions (notamment, celui très technique du

morphisme trace), nous avons vérifié dans [14, 1.2.7] que cet isomorphisme de dualité relative s'étend de la manière suivante : pour tout $\mathcal{E}' \in D_{\text{coh}}^b(\mathcal{D}_{\mathcal{X}'}^\dagger(\dagger T')_{\mathbb{Q}})$, il existe alors dans $D_{\text{coh}}^b(\mathcal{D}_{\mathcal{X}}^\dagger(\dagger T)_{\mathbb{Q}})$ l'isomorphisme canonique :

$$(1.11.1) \quad f_{T,+} \circ \mathbb{D}_{T'}(\mathcal{E}') \xrightarrow{\sim} \mathbb{D}_T \circ f_{T,+}(\mathcal{E}').$$

Lorsque le diviseur est vide, on retrouve un cas particulier du contexte de [36]. Lorsque le diviseur T n'est pas vide, il n'est pas clair que les catégories utilisées dans [36] correspondent aux complexes à cohomologie bornée et cohérente. C'est précisément ce qui nous avait conduit à vérifier 1.11.1 pour $\mathcal{E}' \in D_{\text{coh}}^b(\mathcal{D}_{\mathcal{X}'}^\dagger(\dagger T')_{\mathbb{Q}})$.

En outre, lorsque f est une immersion fermée, nous avons vérifié dans [18, 2.4.3] que 1.11.1 commute à Frobenius (plus précisément, aux images inverses par Frobenius F^*).

Le théorème de dualité relative implique le fait suivant : pour tous $\mathcal{E}' \in D_{\text{coh}}^b(\mathcal{D}_{\mathcal{X}'}^\dagger(\dagger T')_{\mathbb{Q}})$, $\mathcal{E} \in D_{\text{coh}}^b(\mathcal{D}_{\mathcal{X}}^\dagger(\dagger T)_{\mathbb{Q}})$, on dispose alors de l'isomorphisme canonique d'adjonction fonctoriel en \mathcal{E} et \mathcal{E}' :

$$(1.11.2) \quad \text{adj}_{f,T} : \text{Hom}_{\mathcal{D}_{\mathcal{X},\mathbb{Q}}^\dagger(\dagger T)}(f_{T,+}(\mathcal{E}'), \mathcal{E}) \xrightarrow{\sim} \text{Hom}_{\mathcal{D}_{\mathcal{X}',\mathbb{Q}}^\dagger(\dagger T')}(\mathcal{E}', f_T^!(\mathcal{E})),$$

où $\text{Hom}_{\mathcal{D}_{\mathcal{X},\mathbb{Q}}^\dagger}(-, -) := H^0 \circ \mathbb{R}\text{Hom}_{D(\mathcal{D}_{\mathcal{X},\mathbb{Q}}^\dagger)}(-, -) = \text{Hom}_{D(\mathcal{D}_{\mathcal{X},\mathbb{Q}}^\dagger)}(-, -)$.

D'après [14, 1.2.15] (voir aussi [17, 1.2.8] avec la remarque [17, 1.2.9]), cet isomorphisme d'adjonction est transitif pour la composition des morphismes propres.

1.12. Commutation à Frobenius de l'image directe par un morphisme propre d'un complexe cohérent

Berthelot a construit (voir [7, 4.3.9.1] ou [6, 3.4.4]), pour tout $\mathcal{E}^{(\bullet)} \in \underline{LD}_{\mathbb{Q},\text{qc}}^b(\widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{X}}^{(\bullet)})$, l'isomorphisme canonique de commutation de l'image directe par f à Frobenius :

$$f_+ F^*(\mathcal{E}^{(\bullet)}) \xrightarrow{\sim} F^* f_+(\mathcal{E}^{(\bullet)}).$$

Lorsque f est propre, d'après [14, 1.2.12.1], pour tout $\mathcal{E} \in D_{\text{coh}}^b(\mathcal{D}_{\mathcal{X}}^\dagger(\dagger T)_{\mathbb{Q}})$, on dispose d'une seconde construction de l'isomorphisme $f_{T,+} F^*(\mathcal{E}) \xrightarrow{\sim} F^* f_{T,+}(\mathcal{E})$. Ce dernier isomorphisme est caractérisé par le fait que, pour tous $\mathcal{E}' \in D_{\text{coh}}^b(\mathcal{D}_{\mathcal{X}'}^\dagger(\dagger T')_{\mathbb{Q}})$, $\mathcal{E} \in D_{\text{coh}}^b(\mathcal{D}_{\mathcal{X}}^\dagger(\dagger T)_{\mathbb{Q}})$, le morphisme d'adjonction de 1.11.2

$$\text{adj}_{f,T} : \text{Hom}_{\mathcal{D}_{\mathcal{X},\mathbb{Q}}^\dagger(\dagger T)}(f_{T,+}(\mathcal{E}'), \mathcal{E}) \xrightarrow{\sim} \text{Hom}_{\mathcal{D}_{\mathcal{X}',\mathbb{Q}}^\dagger(\dagger T')}(\mathcal{E}', f_T^!(\mathcal{E}))$$

est alors compatible aux isomorphismes de commutation à Frobenius (voir [14, 1.2.21]). De plus, les morphismes d'adjonction entre l'image directe et l'image inverse extraordinaire par un morphisme propre (i.e. lorsqu'ils existent, ceux de la forme $f_{T,+} f_T^!(\mathcal{E}) \rightarrow \mathcal{E}$ ou $\mathcal{E}' \rightarrow f_T^! f_{T,+}(\mathcal{E}')$) sont alors, pour cette seconde construction, aussi compatibles à Frobenius (voir [14, 1.2.13, 1.2.14]). En outre, d'après [17, 1.2.11], ces morphismes d'adjonction sont transitifs pour la composition de morphismes propres (voir aussi [17, 1.2.8] avec la remarque [17, 1.2.9]).

Il n'est pas évident que ces deux constructions coïncident. Cependant, lorsque f est une immersion fermée, cela a déjà été vérifié (voir [18, 2.5.4]). En outre, toujours lorsque f est une immersion fermée, nous avons établi (voir [18, 2.4.3]) que, pour tout $\mathcal{E}' \in D_{\text{coh}}^b(\mathcal{D}_{\mathcal{X}'}^\dagger(\dagger T')_{\mathbb{Q}})$, l'isomorphisme de dualité relative

$$f_{T,+} \circ \mathbb{D}_{T'}(\mathcal{E}') \xrightarrow{\sim} \mathbb{D}_T \circ f_{T,+}(\mathcal{E}')$$

de 1.11.1 est compatible à Frobenius.

Nous n'utiliserons dans cet article que l'isomorphisme $f_{T+}F^*(\mathcal{E}) \xrightarrow{\sim} F^*f_{T+}(\mathcal{E})$ construit dans [14, 1.2.12.1].

Concernant la transitivité de l'image directe par un morphisme propre et sa compatibilité à Frobenius, cela sera traité de manière plus approfondie dans la section 3.12 dans le cas des complexes surholonomes.

1.13. Structure de Frobenius, holonomie, critère d'holonomie de Virrion

Rappelons la convention suivante de Berthelot ([7, 5.1]) : un $F\text{-}\mathcal{D}_x^\dagger(\dagger T)_\mathbb{Q}$ -module est la donnée d'un $\mathcal{D}_x^\dagger(\dagger T)_\mathbb{Q}$ -module \mathcal{E} et d'un isomorphisme $\mathcal{D}_x^\dagger(\dagger T)_\mathbb{Q}$ -linéaire $\Phi : \mathcal{E} \xrightarrow{\sim} F^*\mathcal{E}$. Les morphismes de $F\text{-}\mathcal{D}_x^\dagger(\dagger T)_\mathbb{Q}$ -modules sont les morphismes $\mathcal{D}_x^\dagger(\dagger T)_\mathbb{Q}$ -linéaires commutant à l'action de Frobenius. De même, nous appellerons $F\text{-}\mathcal{D}_x^\dagger(\dagger T)_\mathbb{Q}$ -complexe la donnée d'un complexe $\mathcal{E} \in D_{\text{coh}}^b(\mathcal{D}_x^\dagger(\dagger T)_\mathbb{Q})$ et d'un isomorphisme $\Phi : \mathcal{E} \xrightarrow{\sim} F^*\mathcal{E}$ dans $D_{\text{coh}}^b(\mathcal{D}_x^\dagger(\dagger T)_\mathbb{Q})$. On notera cette catégorie $F\text{-}D_{\text{coh}}^b(\mathcal{D}_{x,\mathbb{Q}}^\dagger(\dagger T))$. Par abus de notations, on pourra omettre d'indiquer la structure de Frobenius Φ et ainsi écrire \mathcal{E} à la place (\mathcal{E}, Φ) .

Soit \mathcal{E} un $F\text{-}\mathcal{D}_{x,\mathbb{Q}}^\dagger$ -module cohérent. Berthelot définit dans [7, 5.2.7] la variété caractéristique de \mathcal{E} , que l'on notera $\text{Car}(\mathcal{E})$. En outre, d'après [7, 5.3.4], l'inégalité de Berthelot-Bernstein est vérifiée : pour tout point x du support de \mathcal{E} , on a

$$(1.13.1) \quad \dim_x \text{Car}(\mathcal{E}) \geq \dim_x X.$$

Conformément à Virrion (voir [35, III.1.2]), on définit la « dimension de \mathcal{E} » en posant $\dim \mathcal{E} := \sup_x (\dim_x \text{Car}(\mathcal{E}))$. De plus, la « codimension de \mathcal{E} » est par définition $\text{codim}(\mathcal{E}) := 2d_X - \dim(\mathcal{E})$ (c'est donc la codimension de la variété caractéristique $\text{Car}(\mathcal{E})$ associée à \mathcal{E} dans le fibré cotangent). Ces deux définitions s'étendent naturellement aux $F\text{-}\mathcal{D}_{x,\mathbb{Q}}^\dagger$ -modules cohérents à droite via les foncteurs quasi-inverses $-\otimes_{\mathcal{O}_x} \omega_x$ et $-\otimes_{\mathcal{O}_x} \omega_x^{-1}$.

L'inégalité de Berthelot-Bernstein assure que, si $\mathcal{E} \neq 0$, alors $\dim \mathcal{E} \geq d_X$. D'après la terminologie de Berthelot, un $F\text{-}\mathcal{D}_{x,\mathbb{Q}}^\dagger$ -module cohérent \mathcal{E} est holonome si $\mathcal{E} = 0$ ou si $\dim \mathcal{E} = d_X$. Autrement dit, un $F\text{-}\mathcal{D}_{x,\mathbb{Q}}^\dagger$ -module cohérent \mathcal{E} est holonome si et seulement si $\dim(\mathcal{E}) \leq d$ si et seulement si $\text{codim}(\mathcal{E}) \geq d$. De plus, un F -complexe $\mathcal{E} \in F\text{-}D_{\text{coh}}^b(\mathcal{D}_{x,\mathbb{Q}}^\dagger)$ est par définition *holonome* si ses faisceaux de cohomologie le sont. Nous noterons $F\text{-}D_{\text{hol}}^b(\mathcal{D}_{x,\mathbb{Q}}^\dagger)$ la sous-catégorie pleine de $F\text{-}D_{\text{coh}}^b(\mathcal{D}_{x,\mathbb{Q}}^\dagger)$ des $F\text{-}\mathcal{D}_{x,\mathbb{Q}}^\dagger$ -complexes holonomes.

On dispose enfin du « critère homologique » de l'holonomie dû à Virrion (voir [35, III.4.2]) qui nous sera très utile : un $F\text{-}\mathcal{D}_{x,\mathbb{Q}}^\dagger$ -module cohérent \mathcal{E} est holonome si et seulement si, pour tout $i \neq d_x$, on a $\mathcal{E}xt_{\mathcal{D}_{x,\mathbb{Q}}^\dagger}^i(\mathcal{E}, \mathcal{D}_{x,\mathbb{Q}}^\dagger) = 0$. Ainsi, si \mathcal{E} est un $F\text{-}\mathcal{D}_{x,\mathbb{Q}}^\dagger$ -module holonome on dispose alors de l'isomorphisme canonique $\mathcal{H}^0\mathbb{D}(\mathcal{E}) \xrightarrow{\sim} \mathbb{D}(\mathcal{E})$. De plus, Virrion a vérifié que $\mathcal{H}^0\mathbb{D}(\mathcal{E})$ est aussi un $F\text{-}\mathcal{D}_{x,\mathbb{Q}}^\dagger$ -module holonome qui sera noté \mathcal{E}^* (voir [35, III.4.3]). Cela implique que l'holonomie est stable par le foncteur dual \mathbb{D} (voir [35, III.4.4]).

1.14. Théorème de Berthelot-Kashiwara

On suppose ici que f_0 est une immersion fermée qui ne se relève pas forcément en un morphisme de \mathcal{V} -schémas formels lisses.

1. Pour tout $\mathcal{D}_{\mathfrak{x}}^\dagger(\dagger T)_{\mathbb{Q}}$ -module cohérent (resp. $F\text{-}\mathcal{D}_{\mathfrak{x},\mathbb{Q}}^\dagger$ -module holonome) \mathcal{E} à support dans X' , pour tout $\mathcal{D}_{\mathfrak{x}'}^\dagger(\dagger T')_{\mathbb{Q}}$ -module cohérent \mathcal{E}' (resp. $F\text{-}\mathcal{D}_{\mathfrak{x}',\mathbb{Q}}^\dagger$ -module holonome) $\mathcal{H}^k f_{0+}(\mathcal{E}) = 0$ et $\mathcal{H}^k f_0^!(\mathcal{E}) = 0$ si $k \neq 0$.
2. Les foncteurs f_{0+} et $f_0^!$ sont des équivalences quasi-inverses entre la catégorie des $\mathcal{D}_{\mathfrak{x}}^\dagger(\dagger T)_{\mathbb{Q}}$ -modules cohérents à support dans X' (resp. $F\text{-}\mathcal{D}_{\mathfrak{x},\mathbb{Q}}^\dagger$ -modules holonomes à support dans X') et celle des $\mathcal{D}_{\mathfrak{x}'}^\dagger(\dagger T')_{\mathbb{Q}}$ -modules cohérents (resp. $F\text{-}\mathcal{D}_{\mathfrak{x}',\mathbb{Q}}^\dagger$ -modules holonomes).

Le cas non respectif a été vérifié par Berthelot (voir 1.14 ou [11, 3.1.6]). Le cas respectif s'en déduit grâce au critère d'holonomie de Virrion (voir 1.13) et à l'isomorphisme de dualité relative.

1.15. Foncteur cohomologique local

Nous exposons ici les principaux résultats de [11, 2.2]. Soit Z un sous-schéma fermé de X . Le « foncteur cohomologique local à support strict dans Z » construit dans [11, 2.2.6] sera noté $\mathbb{R}\Gamma_Z^\dagger : \underline{LD}_{\mathbb{Q},\text{qc}}^b(\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{x}}^{\bullet}(\mathcal{T})) \rightarrow \underline{LD}_{\mathbb{Q},\text{qc}}^b(\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{x}}^{\bullet}(\mathcal{T}))$ (on dispose d'une deuxième construction par Berthelot donnée dans [7, 4.4.4, 4.4.5]). Rappelons en deux mots sa construction. Lorsque Z est un diviseur de X , $\mathbb{R}\Gamma_Z^\dagger$ est par définition le foncteur cohomologique local à support strict dans Z construit par Berthelot (voir [7, 4.4.4, 4.4.5]). Si Z est l'intersection des diviseurs T_1, \dots, T_r , alors, pour tout $\mathcal{E}^{\bullet} \in \underline{LD}_{\mathbb{Q},\text{qc}}^b(\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{x}}^{\bullet}(\mathcal{T}))$, on pose $\mathbb{R}\Gamma_Z^\dagger(\mathcal{E}^{\bullet}) = \mathbb{R}\Gamma_{T_1}^\dagger \circ \dots \circ \mathbb{R}\Gamma_{T_r}^\dagger(\mathcal{E}^{\bullet})$. Cette définition de $\mathbb{R}\Gamma_Z^\dagger(\mathcal{E}^{\bullet})$ a bien un sens car celle-ci est (à isomorphisme canonique près) indépendante du choix des diviseurs T_1, \dots, T_r tels que $Z = \cap_{l=1,\dots,r} T_l$ (voir [11, 2.2.4–6]). Pour tous sous-schémas fermés Z, Z' de X , on obtient alors l'isomorphisme canonique compatible à Frobenius et fonctoriel en Z et Z' (voir [11, 2.2.8]) :

$$(1.15.1) \quad \mathbb{R}\Gamma_{Z \cap Z'}^\dagger \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}\Gamma_Z^\dagger \circ \mathbb{R}\Gamma_{Z'}^\dagger.$$

De plus, pour tous sous-schémas fermés Z, Z', Z'' de X , les deux morphismes composés canoniques suivants sont égaux :

$$(1.15.2) \quad \begin{aligned} \mathbb{R}\Gamma_{Z \cap Z' \cap Z''}^\dagger &\xrightarrow{\sim} \mathbb{R}\Gamma_{Z \cap Z'}^\dagger \circ \mathbb{R}\Gamma_{Z''}^\dagger \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}\Gamma_Z^\dagger \circ \mathbb{R}\Gamma_{Z'}^\dagger \circ \mathbb{R}\Gamma_{Z''}^\dagger, \\ \mathbb{R}\Gamma_{Z \cap Z' \cap Z''}^\dagger &\xrightarrow{\sim} \mathbb{R}\Gamma_Z^\dagger \circ \mathbb{R}\Gamma_{Z' \cap Z''}^\dagger \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}\Gamma_Z^\dagger \circ \mathbb{R}\Gamma_{Z'}^\dagger \circ \mathbb{R}\Gamma_{Z''}^\dagger. \end{aligned}$$

Lorsque Z est un diviseur, pour tout $\mathcal{E}^{\bullet} \in \underline{LD}_{\mathbb{Q},\text{qc}}^b(\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{x}}^{\bullet}(\mathcal{T}))$, Berthelot a établi que l'on dispose du triangle distingué de localisation en Z (voir [7, 5.3.6] ou [11, 2.2]) :

$$(1.15.3) \quad \mathbb{R}\Gamma_Z^\dagger(\mathcal{E}^{\bullet}) \rightarrow \mathcal{E}^{\bullet} \rightarrow (\dagger Z)(\mathcal{E}^{\bullet}) \rightarrow \mathbb{R}\Gamma_Z^\dagger(\mathcal{E}^{\bullet})[1],$$

où le foncteur $(\dagger Z)$ est celui défini dans 1.3.

On étend alors naturellement la définition du foncteur $(\dagger Z)$ au cas où Z est un sous-schéma fermé quelconque de X en définissant $(\dagger Z)(\mathcal{E}^{\bullet})$ comme égale au cône du morphisme canonique $\mathbb{R}\Gamma_Z^\dagger(\mathcal{E}^{\bullet}) \rightarrow \mathcal{E}^{\bullet}$. On l'appelle foncteur de localisation en dehors de Z (ou, de façon abusive, foncteur restriction en dehors de Z). Si Z, Z' sont deux sous-schémas

fermés de X , on bénéficie d'après [11, 2.2.14] de l'isomorphisme canonique compatible à Frobenius :

$$(1.15.4) \quad (\dagger Z) \circ (\dagger Z')(\mathcal{E}(\bullet)) \xrightarrow{\sim} (\dagger Z \cup Z')(\mathcal{E}(\bullet)).$$

D'après [11, 2.2.6.1], pour tout $\mathcal{E}(\bullet) \in \underline{LD}_{\mathbb{Q}, \text{qc}}^b(\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{x}}(\bullet))$,

$$(1.15.5) \quad \mathbb{R}\Gamma_Z^\dagger(\mathcal{O}_{\mathfrak{x}, \mathbb{Q}}) \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{x}, \mathbb{Q}}}^{\mathbb{L}\dagger} \mathcal{E}(\bullet) \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}\Gamma_Z^\dagger(\mathcal{E}(\bullet)), \quad (\dagger Z)(\mathcal{O}_{\mathfrak{x}, \mathbb{Q}}) \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{x}, \mathbb{Q}}}^{\mathbb{L}\dagger} \mathcal{E}(\bullet) \xrightarrow{\sim} (\dagger Z)(\mathcal{E}(\bullet)),$$

où nous avons identifié le système inductif de $\underline{LD}_{\mathbb{Q}, \text{qc}}^b(\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{x}}(\bullet))$ constant égal à $\mathcal{O}_{\mathfrak{x}}$ avec $\mathcal{O}_{\mathfrak{x}, \mathbb{Q}}$. Cela implique que les foncteurs de la forme $\mathbb{R}\Gamma_Z^\dagger$ et $(\dagger Z)$ commutent deux à deux (voir [11, 2.2.6.1]).

Sans supposer que f_0 se relève, soit Z un sous-schéma fermé de X et $Z' := f^{-1}(Z)$. Pour tous $\mathcal{E}(\bullet) \in \underline{LD}_{\mathbb{Q}, \text{qc}}^b(\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{x}}(\bullet))$, $\mathcal{E}'(\bullet) \in \underline{LD}_{\mathbb{Q}, \text{qc}}^b(\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{x}'}(\bullet))$, on dispose des isomorphismes fonctoriels en Z , compatibles à Frobenius (voir [11, 2.2.18]) :

$$(1.15.6) \quad f_0^! \circ \mathbb{R}\Gamma_Z^\dagger(\mathcal{E}) \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}\Gamma_{Z'}^\dagger \circ f_0^!(\mathcal{E}), \quad f_0^! \circ (\dagger Z)(\mathcal{E}) \xrightarrow{\sim} (\dagger Z') \circ f_0^!(\mathcal{E}),$$

$$(1.15.7) \quad \mathbb{R}\Gamma_Z^\dagger \circ f_{0+}(\mathcal{E}') \xrightarrow{\sim} f_{0+} \circ \mathbb{R}\Gamma_{Z'}^\dagger(\mathcal{E}'), \quad (\dagger Z) \circ f_{0+}(\mathcal{E}') \xrightarrow{\sim} f_{0+} \circ (\dagger Z')(\mathcal{E}').$$

Soient Z_1, Z_2 deux sous-schémas fermés de X et $\mathcal{E} \in \underline{LD}_{\mathbb{Q}, \text{qc}}^b({}^g\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{x}}(\bullet))$. On dispose aussi des triangles distingués de localisation de Mayer-Vietoris (voir [11, 2.2.16]) :

$$(1.15.8) \quad \mathbb{R}\Gamma_{Z_1 \cap Z_2}^\dagger(\mathcal{E}) \rightarrow \mathbb{R}\Gamma_{Z_1}^\dagger(\mathcal{E}) \oplus \mathbb{R}\Gamma_{Z_2}^\dagger(\mathcal{E}) \rightarrow \mathbb{R}\Gamma_{Z_1 \cup Z_2}^\dagger(\mathcal{E}) \rightarrow \mathbb{R}\Gamma_{Z_1 \cap Z_2}^\dagger(\mathcal{E})[1],$$

$$(1.15.9) \quad (\dagger Z_1 \cap Z_2)(\mathcal{E}) \rightarrow (\dagger Z_1)(\mathcal{E}) \oplus (\dagger Z_2)(\mathcal{E}) \rightarrow (\dagger Z_1 \cup Z_2)(\mathcal{E}) \rightarrow (\dagger Z_1 \cap Z_2)(\mathcal{E})[1].$$

Supposons maintenant que $f_0 : X' \hookrightarrow X$ soit une immersion fermée. On bénéficie alors de l'isomorphisme canonique :

$$(1.15.10) \quad \mathbb{R}\Gamma_{X'}^\dagger(\mathcal{E}(\bullet)) \xrightarrow{\sim} f_{0+} f_0^!(\mathcal{E}(\bullet)).$$

En effet, $f_{0+} f_0^!(\mathcal{E}(\bullet)) = f_{0+}(\mathcal{O}_{X', \mathbb{Q}}) \otimes_{\mathcal{O}_{X', \mathbb{Q}}}^{\mathbb{L}\dagger} f_0^!(\mathcal{E}(\bullet)) \xrightarrow{\sim} f_{0+}(\mathcal{O}_{X', \mathbb{Q}}[d_{X'/X}]) \otimes_{\mathcal{O}_{X', \mathbb{Q}}}^{\mathbb{L}\dagger} \mathcal{E}(\bullet) \xrightarrow{\sim} f_{0+} f_0^!(\mathcal{O}_{X, \mathbb{Q}}) \otimes_{\mathcal{O}_{X, \mathbb{Q}}}^{\mathbb{L}\dagger} \mathcal{E}(\bullet)$, où le premier isomorphisme est l'exemple de [11, 2.1.4]. Avec 1.15.5, il suffit donc de prouver $\mathbb{R}\Gamma_{X'}^\dagger(\mathcal{O}_{X, \mathbb{Q}}) \xrightarrow{\sim} f_{0+} f_0^!(\mathcal{O}_{X, \mathbb{Q}})$. Comme $\mathbb{R}\Gamma_{X'}^\dagger(\mathcal{O}_{X, \mathbb{Q}}) \in D_{\text{coh}}^b(\mathcal{D}_{\mathfrak{x}, \mathbb{Q}}^\dagger)$ et est à support dans X' , cela découle du théorème de Berthelot-Kashiwara et de 1.15.6 (en remarquant aussi que $\mathbb{R}\Gamma_{X'}^\dagger$ est l'identité sur $\underline{LD}_{\mathbb{Q}, \text{qc}}^b(\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{x}'}(\bullet))$). Comme Berthelot a obtenu un isomorphisme similaire (voir [7, 4.4.4, 4.4.5]), cela implique que les deux constructions du foncteur cohomologique local à support strict dans un sous-schéma fermé Z se rejoignent lorsque Z est lisse.

1.16. Surcohérence

La notion de « surcohérence » (voir [11, 3.1.1]) est définie de la manière suivante : soit \mathcal{E} un $(F-)\mathcal{D}_{\mathfrak{x}}^\dagger(\dagger T)_{\mathbb{Q}}$ -module cohérent (resp. un objet de $(F-)D_{\text{coh}}^b(\mathcal{D}_{\mathfrak{x}}^\dagger(\dagger T)_{\mathbb{Q}})$). On dit que \mathcal{E} est « $\mathcal{D}_{\mathfrak{x}}^\dagger(\dagger T)_{\mathbb{Q}}$ -surcohérent » si pour tout morphisme lisse de \mathcal{V} -schémas formels lisses $g : \mathcal{P} \rightarrow \mathfrak{X}$, pour tout diviseur H de \mathcal{P} , $(\dagger H)(g^* \mathcal{E})$ est un $(F-)D_{\mathcal{P}}^\dagger(\dagger g^{-1}(T))_{\mathbb{Q}}$ -module cohérent (resp. un objet de $(F-)D_{\text{coh}}^b(\mathcal{D}_{\mathcal{P}}^\dagger(\dagger g^{-1}(T))_{\mathbb{Q}})$). On note $(F-)D_{\text{surcoh}}^b(\mathcal{D}_{\mathfrak{x}}^\dagger(\dagger T)_{\mathbb{Q}})$, la sous-catégorie pleine de $(F-)D_{\text{coh}}^b(\mathcal{D}_{\mathfrak{x}}^\dagger(\dagger T)_{\mathbb{Q}})$ des complexes surcohérents.

Un complexe est surcohérent si et seulement si ses espaces de cohomologie le sont (cela vient du fait que les foncteurs de la forme g^* et $(\dagger H)$ sont exacts si g est lisse et H est un

diviseur). La surcohérence est stable par image directe par un morphisme propre, par image inverse extraordinaire et par foncteur cohomologique local (voir [11, 3.1.7, 3.1.9]).

1.17. Isocristaux surconvergens associés aux \mathcal{D} -modules arithmétiques : Cas de la compactification lisse

Le point de départ est le théorème suivant de Berthelot (voir [8] ou pour une version publiée [5, 4.4.5] et [14, 2.2.12]) qui améliore la caractérisation [5, 4.4.5] (et [6, 4.6] pour la commutation à Frobenius) des isocristaux surconvergens :

THÉORÈME (Berthelot). – *On note \mathfrak{X}_K la fibre générique de \mathfrak{X} comme K -espace analytique rigide, et $\mathrm{sp} : \mathfrak{X}_K \rightarrow \mathfrak{X}$ le morphisme de spécialisation.*

Les foncteurs sp_ et sp^* induisent des équivalences quasi-inverses entre la catégorie des isocristaux sur Y , surconvergens le long de T , et celle des $\mathcal{D}_{\mathfrak{X}}^\dagger(\dagger T)_{\mathbb{Q}}$ -modules cohérents $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}(\dagger T)_{\mathbb{Q}}$ -cohérents. Ceux-ci commutent en outre à Frobenius.*

De plus, un $\mathcal{D}_{\mathfrak{X}}^\dagger(\dagger T)_{\mathbb{Q}}$ -module cohérent \mathcal{E} est $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}(\dagger T)_{\mathbb{Q}}$ -cohérent si et seulement si la restriction $\mathcal{E}|_{\mathcal{Y}}$ est $\mathcal{O}_{\mathcal{Y},\mathbb{Q}}$ -cohérente.

On suppose que \mathfrak{X} est un \mathcal{V} -schéma formel séparé et lisse. Soit Z un sous-schéma fermé lisse de X tel que $T \cap Z$ soit un diviseur de Z (cette dernière condition n'est pas vraiment restrictive). On pose $U := Z \setminus T$.

Nous étendons (voir [17, 2.5.10]) le théorème 1.17 de la manière suivante : il existe un foncteur canonique pleinement fidèle noté $\mathrm{sp}_{Z \hookrightarrow \mathfrak{X}, T, +}$ de la catégorie des isocristaux sur U surconvergens le long de $T \cap Z$ dans celle des $\mathcal{D}_{\mathfrak{X}}^\dagger(\dagger T)_{\mathbb{Q}}$ -modules surcohérents à support dans Z (pour la surcohérence, il faut aussi consulter [13, 6.1.4]). En particulier, lorsque le diviseur T est vide, on obtient un foncteur pleinement fidèle noté $\mathrm{sp}_{Z \hookrightarrow \mathfrak{X}, +}$ de la catégorie des isocristaux convergens sur Z dans celle des $\mathcal{D}_{\mathfrak{X}, \mathbb{Q}}^\dagger$ -modules surcohérents à support dans Z .

Lorsque $Z \hookrightarrow \mathfrak{X}$ se relève en une immersion fermée $u : \mathcal{Z} \hookrightarrow \mathfrak{X}$ de \mathcal{V} -schémas formels lisses, il suffit pour tout isocristal E sur U surconvergent le long de $T \cap Z$ de poser $\mathrm{sp}_{Z \hookrightarrow \mathfrak{X}, T, +}(E) := u_{T+} \circ \mathrm{sp}_*(E)$. La pleine fidélité se déduit du théorème de Berthelot-Kashiwara. Les isocristaux surconvergens et les \mathcal{D} -modules arithmétiques ont l'aspect *crystallin* suivant : les images inverses par deux relèvements (induisant la même réduction modulo π) sont canoniquement isomorphes (voir respectivement [4, 2.2.17] (ou [31]) et [6, 2.1.5]). Cela implique que le module $\mathrm{sp}_{Z \hookrightarrow \mathfrak{X}, T, +}(E)$ ne dépend pas à isomorphisme canonique près du choix du relèvement u . On construit alors par recollement $\mathrm{sp}_{Z \hookrightarrow \mathfrak{X}, T, +}(E)$ (pour les détails techniques, voir [17, 2]).

De plus, le foncteur $\mathrm{sp}_{Z \hookrightarrow \mathfrak{X}, T, +}$ commute à Frobenius (voir [17, 4.1.9]), aux foncteurs duaux et images inverses (voir [17, 4]).

1.18. F -isocristaux surcohérents

Soient \mathfrak{X} un \mathcal{V} -schéma formel propre et lisse, T un diviseur de X , $\mathcal{Y} := \mathfrak{X} \setminus T$, Z un sous-schéma fermé. On suppose que $U := Z \setminus T$ est lisse (mais Z n'est plus forcément lisse).

On définit (voir [13, 3.2.1] et aussi [15, 2.3.2] pour la simplification de la définition dans le cas propre avec structure de Frobenius) la catégorie $F\text{-Isoc}^{\dagger\dagger}(\mathfrak{X}, T, Z/K)$ de la manière suivante :

- les objets sont les $F\text{-}\mathcal{D}_{\mathfrak{X}}^{\dagger}({}^{\dagger}T)_{\mathbb{Q}}$ -modules surcohérents \mathcal{E} à support dans Z tels qu’il existe un isocrystal convergent G sur U vérifiant $\mathcal{E}|_{\mathcal{Y}} \xrightarrow{\sim} \text{sp}_{U \hookrightarrow \mathcal{Y},+}(G)$;
- les flèches sont les morphismes $F\text{-}\mathcal{D}_{\mathcal{P}}^{\dagger}({}^{\dagger}T)_{\mathbb{Q}}$ -linéaires.

Cette catégorie $F\text{-Isoc}^{\dagger\dagger}(\mathfrak{X}, T, Z/K)$ ne dépend canoniquement pas du choix de (\mathfrak{X}, T, Z) tels que $Z \setminus T = U$. Elle sera notée $F\text{-Isoc}^{\dagger\dagger}(U/K)$ et ses objets sont les « F -isocristaux surcohérents sur U ».

Lorsque U est un k -schéma séparé lisse quelconque, on construit plus généralement la catégorie $F\text{-Isoc}^{\dagger\dagger}(U/K)$ par recollement (voir [15, 2.2.4])

1.19. Isocristaux surconvergents associés aux \mathcal{D} -modules arithmétiques : Cas général

On dispose du théorème suivant qui étend d’une certaine manière 1.17 (voir [15, 2.3.2]) :

THÉORÈME 1.20. – *Soit U un k -schéma séparé et lisse. On dispose d’une équivalence canonique de catégories*

$$\text{sp}_{U,+} : F\text{-Isoc}^{\dagger}(U/K) \cong F\text{-Isoc}^{\dagger\dagger}(U/K).$$

Donnons une esquisse de la preuve. Tout d’abord, les deux catégories étant construites par recollement, on se ramène à supposer U affine et lisse. On construit dans ce cas explicitement le foncteur $\text{sp}_{U,+}$ via le choix d’un plongement $U \hookrightarrow \mathfrak{X}$, avec \mathfrak{X} égale au complété p -adique de l’espace projectif $\mathbb{P}_{\mathbb{Z}}^n$ pour un certain entier n . Lorsque l’adhérence de U dans X est lisse, cette construction est canoniquement isomorphe au foncteur construit dans 1.17. En procédant ensuite par récurrence sur la dimension de U , quitte à se restreindre à un ouvert dense de U , on peut alors se ramener au cas où U vérifie certaines hypothèses techniques géométriques (voir la notion de « désingularisation idéale » de [13, 7.1.1]). Ces conditions géométriques nous permettent par *descente finie et étale* de supposer que la compactification de U est lisse. Ce dernier cas a déjà été traité dans 1.17.

2. Un critère d’holonomie

Soit \mathcal{P} un \mathcal{V} -schéma formel lisse.

DÉFINITION 2.1. – Un $\mathcal{D}_{\mathcal{P},\mathbb{Q}}^{\dagger}$ -module cohérent \mathcal{E} (resp. un complexe \mathcal{E} de $D_{\text{coh}}^{\dagger}(\mathcal{D}_{\mathcal{P},\mathbb{Q}}^{\dagger})$) est dit à « fibres extraordinaires finies » si, pour tout point fermé x de P , pour tout relèvement i_x de l’immersion fermée $\text{Spec } k(x) \hookrightarrow P$ induite par x , les espaces de cohomologie de $i_x^! (\mathcal{E})$ sont des K -espaces vectoriels de dimension finie.

Puisque la *surcohérence* ([11, 3.1.1]) est préservée par image inverse extraordinaire ([11, 3.1.7]), on remarque qu’un $\mathcal{D}_{\mathcal{P},\mathbb{Q}}^{\dagger}$ -module surcohérent (resp. un complexe de $D_{\text{surcoh}}^{\dagger}(\mathcal{D}_{\mathcal{P},\mathbb{Q}}^{\dagger})$) est à fibres extraordinaires finies.

LEMME 2.2. – *Soit \mathcal{E} un $F\text{-}\mathcal{D}_{\mathcal{P},\mathbb{Q}}^{\dagger}$ -module cohérent à fibres extraordinaires finies. En notant Z , le sous-schéma fermé réduit de P définissant son support, il existe un ouvert \mathfrak{U} de \mathcal{P} , tel que $Y := Z \cap U$ soit affine, lisse et dense dans Z et tel que la restriction de \mathcal{E} sur \mathfrak{U} soit isomorphe à l’image par $\text{sp}_{Y \hookrightarrow \mathfrak{U},+}$ (voir 1.17) d’un F -isocrystal convergent sur Y . En particulier, $\mathcal{E}|_{\mathfrak{U}}$ est holonome et non nul.*

Démonstration. – Soit \mathcal{U}' un ouvert de \mathcal{P} tel que $Y' := Z \cap U'$ soit affine, lisse et dense dans Z . D'après Elkik (voir [21]), on peut alors relever Y' en un \mathcal{V} -schéma formel affine et lisse \mathcal{Y}' . Comme \mathcal{U}' est lisse et \mathcal{Y}' est affine, il existe un morphisme de \mathcal{V} -schémas formels lisses de la forme $v : \mathcal{Y}' \hookrightarrow \mathcal{U}'$ relevant $Y' \hookrightarrow \mathcal{U}'$. Comme $\mathcal{E}|\mathcal{U}'$ est un $F\text{-}\mathcal{D}_{\mathcal{U}',\mathbb{Q}}^\dagger$ -module cohérent à support dans Y' et à fibres extraordinaires finies, il résulte du théorème de Berthelot-Kashiwara (voir 1.14) que $v^!(\mathcal{E}|\mathcal{U}')$ est un $F\text{-}\mathcal{D}_{\mathcal{Y}',\mathbb{Q}}^\dagger$ -module cohérent et à fibres extraordinaires finies. D'après [14, 2.2.17], il existe alors un ouvert \mathcal{U} de \mathcal{U}' tel que $\mathcal{Y} := \mathcal{Y}' \cap U$ soit affine et dense dans \mathcal{Y}' et tel que $v^!(\mathcal{E}|\mathcal{U}')|_{\mathcal{Y}}$ soit même $\mathcal{O}_{\mathcal{Y},\mathbb{Q}}$ -cohérent. Notons $u : \mathcal{Y} \hookrightarrow \mathcal{U}$ l'immersion fermée induite par v . Ainsi $u^!(\mathcal{E}|\mathcal{U})$ est un $F\text{-}\mathcal{D}_{\mathcal{Y},\mathbb{Q}}^\dagger$ -module cohérent, $\mathcal{O}_{\mathcal{Y},\mathbb{Q}}$ -cohérent. D'après [7, 5.3.5.(i)], cela implique que $u^!(\mathcal{E}|\mathcal{U})$ est holonome. D'après la version cohérente du théorème de Berthelot-Kashiwara (voir 1.14), comme $\mathcal{E}|\mathcal{U}$ est à support dans Y , $u_+u^!(\mathcal{E}|\mathcal{U}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}|\mathcal{U}$ et donc, d'après la version holonome de 1.14, $\mathcal{E}|\mathcal{U}$ est holonome.

Enfin, d'après 1.17, en notant $G := \text{sp}^*(u^!(\mathcal{E}|\mathcal{U}))$ le F -isocristal convergent sur Y associé à $u^!(\mathcal{E}|\mathcal{U})$, on obtient : $\text{sp}_{Y \hookrightarrow \mathcal{U},+}(G) = u_+(\text{sp}_*(G)) \xrightarrow{\sim} u_+u^!(\mathcal{E}|\mathcal{U}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}|\mathcal{U}$. On a ainsi prouvé $\text{sp}_{Y \hookrightarrow \mathcal{U},+}(G) \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}|\mathcal{U}$. D'où le résultat. \square

Nous aurons aussi besoin du résultat suivant qui étend 2.2 et s'en déduit :

LEMME 2.3. – Soient $\mathcal{E}_1, \dots, \mathcal{E}_n$ des $F\text{-}\mathcal{D}_{\mathcal{P},\mathbb{Q}}^\dagger$ -modules cohérents à fibres extraordinaires finies non tous nuls. Il existe alors un ouvert \mathcal{U} de \mathcal{P} tel que $\mathcal{E}_1|\mathcal{U}, \dots, \mathcal{E}_n|\mathcal{U}$ soient holonomes et non tous nuls.

Démonstration. – On procède par récurrence sur le nombre N de faisceaux \mathcal{E}_i non nuls (avec i parcourant $1, \dots, n$). Lorsque $N = 1$, ceci résulte de 2.2 (en effet, le module nul est holonome). Supposons à présent $N \geq 2$. Quitte à réindexer, supposons $\mathcal{E}_1 \neq 0$. D'après 2.2, il existe un ouvert \mathcal{U}' de \mathcal{P} tel que $\mathcal{E}_1|\mathcal{U}'$ soit holonome et non nul. Le cas où, pour tout $i \geq 2$, $\mathcal{E}_i|\mathcal{U}' = 0$ est immédiat. Autrement, supposons que les $\mathcal{E}_2|\mathcal{U}', \dots, \mathcal{E}_n|\mathcal{U}'$ soient non tous nuls. Par hypothèse de récurrence, il existe un ouvert \mathcal{U} de \mathcal{U}' tel que $\mathcal{E}_2|\mathcal{U}, \dots, \mathcal{E}_n|\mathcal{U}$ soient holonomes et non tous nuls. Le fait que $\mathcal{E}_1|\mathcal{U}$ soit aussi holonome nous permet de conclure. \square

LEMME 2.4. – Pour tout $F\text{-}\mathcal{D}_{\mathcal{P},\mathbb{Q}}^\dagger$ -module cohérent \mathcal{E} , $\mathcal{H}^0\mathbb{D}(\mathcal{E})$ est holonome. De plus, $\mathcal{H}^0\mathbb{D} \circ \mathcal{H}^0\mathbb{D}(\mathcal{E})$ est le plus grand sous- $F\text{-}\mathcal{D}_{\mathcal{X},\mathbb{Q}}^\dagger$ -module cohérent de \mathcal{E} qui soit holonome.

Démonstration. – Notons d la dimension de P . D'après [35, III.2.4.(i)], $\text{codim}(\text{Ext}_{\mathcal{D}_{\mathcal{P},\mathbb{Q}}^\dagger}^d(\mathcal{E}, \mathcal{D}_{\mathcal{P},\mathbb{Q}}^\dagger)) \geq d$. Comme $\mathcal{H}^0\mathbb{D}(\mathcal{E}) \xrightarrow{\sim} \text{Ext}_{\mathcal{D}_{\mathcal{P},\mathbb{Q}}^\dagger}^d(\mathcal{E}, \mathcal{D}_{\mathcal{P},\mathbb{Q}}^\dagger) \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{X}}} \omega_{\mathcal{X}}^{-1}$, on obtient ainsi $\text{codim}(\mathcal{H}^0\mathbb{D}(\mathcal{E})) \geq d$. Or, d'après 1.13 (voir la définition de l'holonomie et l'inégalité de Berthelot-Bernstein), $\mathcal{H}^0\mathbb{D}(\mathcal{E})$ est holonome si et seulement si $\text{codim}(\mathcal{H}^0\mathbb{D}(\mathcal{E})) \geq d$. D'où l'holonomie de $\mathcal{H}^0\mathbb{D}(\mathcal{E})$.

La deuxième assertion étant locale en \mathcal{P} , on peut supposer \mathcal{P} affine. Résumons d'abord la construction de la suite spectrale étudiée par Virrion dans [35, III.3.4]. Puisque \mathcal{E} est cohérent, il existe une résolution gauche $\mathcal{L}^\bullet \rightarrow \mathcal{E}$ où \mathcal{L}^\bullet est un complexe de $\mathcal{D}_{\mathcal{P},\mathbb{Q}}^\dagger$ -modules localement projectifs de type fini de longueur d (concernant la longueur, voir [35, III.3.3]). La

deuxième suite spectrale d'hypercohomologie du foncteur $\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_{\mathcal{P},\mathbb{Q}}^\dagger}(-, \mathcal{D}_{\mathcal{P},\mathbb{Q}}^\dagger)$ par rapport au complexe $\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_{\mathcal{P},\mathbb{Q}}^\dagger}(\mathcal{L}^\bullet, \mathcal{D}_{\mathcal{P},\mathbb{Q}}^\dagger)$ donne la suite spectrale (voir [35, III.3.4, p. 60]) :

$$(2.4.1) \quad E_2^{i,j} = \mathcal{E}xt_{\mathcal{D}_{\mathcal{P},\mathbb{Q}}^\dagger}^i(\mathcal{E}xt_{\mathcal{D}_{\mathcal{P},\mathbb{Q}}^\dagger}^{-j}(\mathcal{E}, \mathcal{D}_{\mathcal{P},\mathbb{Q}}^\dagger), \mathcal{D}_{\mathcal{P},\mathbb{Q}}^\dagger) \Rightarrow E^n = \mathcal{H}^n(\mathcal{E}).$$

Virrion a établi dans la preuve de [35, III.3.6] que la filtration décroissante $(F^l(\mathcal{E}))_{l=1,\dots,d}$ définie par la suite spectrale 2.4.1 pour $n = 0$ possède la propriété suivante : $F^l(\mathcal{E})$ est le plus grand sous- $F\text{-}\mathcal{D}_{\mathcal{P},\mathbb{Q}}^\dagger$ -module cohérent de \mathcal{E} de codimension supérieure ou égale à l . Comme être de codimension supérieure ou égale à d équivaut à être holonome, cela implique que $F^d(\mathcal{E})$ est le plus grand sous- $F\text{-}\mathcal{D}_{\mathcal{P},\mathbb{Q}}^\dagger$ -module cohérent de \mathcal{E} qui soit holonome. Or, les termes non nuls de $E_2^{i,j}$ sont à l'intérieur du triangle défini par $i = -j$, $j = 0$ et $i = d$ (voir [35, III.3.4, p. 61]). Cela implique que $E_2^{d,-d} = E_\infty^{d,-d} = F^d(\mathcal{E})$. L'isomorphisme $E_2^{d,-d} \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}^0\mathbb{D} \circ \mathcal{H}^0\mathbb{D}(\mathcal{E})$ nous permet de conclure. \square

PROPOSITION 2.5. – *Soit \mathcal{E} un $F\text{-}\mathcal{D}_{\mathcal{P},\mathbb{Q}}^\dagger$ -module cohérent. Si les espaces de cohomologie de $\mathbb{D}(\mathcal{E})$ sont à fibres extraordinaires finies (e.g. si $\mathbb{D}(\mathcal{E})$ est $\mathcal{D}_{\mathcal{P},\mathbb{Q}}^\dagger$ -surcohérent), alors \mathcal{E} est holonome.*

Démonstration. – Notons d la dimension de P . Pour tout entier $d \geq i \geq 0$, notons $\mathcal{F}_i := \mathcal{H}^{-i}\mathbb{D}(\mathcal{E})$. Pour $d \geq i \geq 1$, désignons par Z_i le support de \mathcal{F}_i et $Z := \cup_{i=1,\dots,d} Z_i$ leur réunion. D'après le critère d'holonomie de Virrion (voir 1.13 ou [35, III.4.2]), \mathcal{E} est holonome si et seulement si $\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_d$ sont tous nuls.

Par l'absurde, supposons que $\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_d$ sont non tous nuls. Il découle de 2.3 qu'il existe un ouvert \mathcal{U} de \mathcal{P} tel que $\mathcal{F}_1|_{\mathcal{U}}, \dots, \mathcal{F}_d|_{\mathcal{U}}$ soient holonomes et non tous nuls. Par 2.4, \mathcal{F}_0 est lui aussi holonome. Ainsi, les espaces de cohomologie de $\mathbb{D}(\mathcal{E}|_{\mathcal{U}})$ sont tous holonomes, i.e. le complexe $\mathbb{D}(\mathcal{E}|_{\mathcal{U}})$ est holonome. Donc, grâce au théorème de bidualité (voir 1.10.7 ou [35, II.3.5]) et à la préservation de l'holonomie par le foncteur \mathbb{D} (voir [35, III.4.4]), $\mathcal{E}|_{\mathcal{U}}$ est holonome. Or, d'après le critère d'holonomie de Virrion (voir 1.13 ou [35, III.4.2]), cela implique que $\mathcal{F}_1|_{\mathcal{U}}, \dots, \mathcal{F}_d|_{\mathcal{U}}$ sont tous nuls. On a ainsi abouti à une contradiction. \square

3. Surholonomie et stabilité

On désignera par \mathfrak{X} un \mathcal{V} -schéma formel lisse.

DÉFINITION 3.1. – Soit \mathcal{E} un objet de $(F\text{-})D(\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}^\dagger)$. On définit par récurrence sur l'entier $r \geq 0$, la notion de r -surholonomie de la façon suivante :

1. \mathcal{E} est 0-surholonome si et seulement si $\mathcal{E} \in (F\text{-})D_{\text{surcoh}}^b(\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}^\dagger)$.
2. Pour tout entier $r \geq 1$, \mathcal{E} est r -surholonome si et seulement si \mathcal{E} est $r - 1$ -surholonome et, pour tout morphisme lisse $f : \mathfrak{X}' \rightarrow \mathfrak{X}$ de \mathcal{V} -schémas formels, pour tout diviseur T' de X' , le complexe $\mathbb{D}({}^\dagger T')f^!(\mathcal{E})$ est $r - 1$ -surholonome.

On dit que \mathcal{E} est ∞ -surholonome ou tout simplement *surholonome* si \mathcal{E} est r -surholonome pour tout entier r . On note $(F\text{-})D_{\text{surhol}}^b(\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}^\dagger)$ la sous-catégorie pleine de $(F\text{-})D_{\text{coh}}^b(\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}^\dagger)$ des complexes surholonomes. Enfin un $(F\text{-})\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}^\dagger$ -module est r -surholonome (resp. surholonome) s'il l'est en tant qu'objet de $(F\text{-})D^b(\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}^\dagger)$.

- REMARQUES 3.2. – 1. Pour tout entier naturel $r' \geq r$, si un complexe \mathcal{E} de $(F-)D(\mathcal{D}_{\mathfrak{X}, \mathbb{Q}}^\dagger)$ est r' -surholonome, alors \mathcal{E} est r -surholonome. En particulier $\mathcal{E} \in (F-)D_{\text{surcoh}}^b(\mathcal{D}_{\mathfrak{X}, \mathbb{Q}}^\dagger)$.
2. Réciproquement, il est raisonnable de conjecturer que la surcohérence est stable par foncteur dual. Si cette conjecture était vraie alors, pour tout entier r , la notion de r -surholonomie serait équivalente à celle de surcohérence (i.e. 0-surholonomie) et donc à celle de surholonomie. Par 2.5, cela impliquerait donc aussi que les F -complexes surcohérents sont holonomes.

- PROPOSITION 3.3. – 1) Soient $r \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ et $\mathcal{E} \in D_{\text{coh}}^b(\mathcal{D}_{\mathfrak{X}, \mathbb{Q}}^\dagger)$ un complexe $r + 1$ -surholonome. Alors $\mathbb{D}(\mathcal{E})$ est r -surholonome
- 2) Pour tout $r \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, un facteur direct d'un complexe r -surholonome est r -surholonome.
- 3) Soient $r \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ et $\mathcal{E}' \rightarrow \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}'' \rightarrow \mathcal{E}'[1]$ un triangle distingué de $D(\mathcal{D}_{\mathfrak{X}, \mathbb{Q}}^\dagger)$. Si deux des complexes sont r -surholonomes alors le troisième l'est. En particulier, $D_{\text{surhol}}^b(\mathcal{D}_{\mathfrak{X}, \mathbb{Q}}^\dagger)$ est une sous-catégorie triangulée de $D_{\text{surcoh}}^b(\mathcal{D}_{\mathfrak{X}, \mathbb{Q}}^\dagger)$.
- 4) Soient $r \geq 1$ un entier ou $r = \infty$ et \mathcal{E} un $F\text{-}\mathcal{D}_{\mathfrak{X}, \mathbb{Q}}^\dagger$ -module r -surholonome. Alors \mathcal{E} est holonome.
- 5) Soient $r \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ et $\mathcal{E} \in D_{\text{coh}}^b(\mathcal{D}_{\mathfrak{X}, \mathbb{Q}}^\dagger)$ un complexe r -surholonome. Alors, pour tout sous-schéma fermé Z de X , $\mathbb{R}\Gamma_Z^\dagger(\mathcal{E})$ et $(\dagger Z)(\mathcal{E})$ sont r -surholonomes.

Démonstration. – La propriété 1) est tautologique (avec les notations de 3.1, il suffit de prendre T' vide et f égal à l'identité). Les propriétés 2) et 3) sont vérifiées pour les complexes cohérents. On vérifie alors 2) et 3) lorsque $r = 0$. Le cas général s'en déduit par récurrence sur $r \in \mathbb{N}$. Traitons à présent 4). D'après la remarque 3.2.1, il suffit de l'établir lorsque $r = 1$. Grâce à 1), si \mathcal{E} est un $F\text{-}\mathcal{D}_{\mathfrak{X}, \mathbb{Q}}^\dagger$ -module 1-surholonome alors $\mathbb{D}(\mathcal{E})$ est surcohérent. Par 2.5, cela implique que \mathcal{E} est holonome. D'où 4). Maintenant établissons 5). Le cas $r = 0$ a déjà été traité (voir [11, 3.1.5]). Soient $r \geq 1$ un entier et $\mathcal{E} \in D_{\text{coh}}^b(\mathcal{D}_{\mathfrak{X}, \mathbb{Q}}^\dagger)$ un complexe r -surholonome.

Traitons à présent le cas où Z est un diviseur. On obtient par récurrence sur r que $\mathbb{R}\Gamma_Z^\dagger(\mathcal{E})$ et $(\dagger Z)(\mathcal{E})$ sont $r - 1$ -surholonomes. Puis, en utilisant 1.15.6 puis 1.15.4, pour tout morphisme lisse $f : \mathfrak{X}' \rightarrow \mathfrak{X}$ de \mathcal{V} -schémas formels, pour tout diviseur T' de X' , on dispose des isomorphismes :

$$\mathbb{D}(\dagger T')f^!(\dagger Z)(\mathcal{E}) \xrightarrow{\sim} \mathbb{D}(\dagger T')(\dagger f^{-1}(Z))f^!(\mathcal{E}) \xrightarrow{\sim} \mathbb{D}(\dagger T' \cup f^{-1}(Z))f^!(\mathcal{E}).$$

Le complexe $\mathbb{D}(\dagger T')f^!(\dagger Z)(\mathcal{E})$ est donc $r - 1$ -surholonome. On a ainsi prouvé que $(\dagger Z)(\mathcal{E})$ est r -surholonome (voir 3.1). En utilisant le triangle de localisation en Z (voir 1.15.3) et via 3), il en découle que $\mathbb{R}\Gamma_Z^\dagger(\mathcal{E})$ est r -surholonome.

Passons maintenant au cas où Z est un sous-schéma fermé quelconque de X . D'après [11, 2.2.5], il existe des diviseurs T_1, \dots, T_n de X tels que $Z = \cap_{i=1, \dots, n} T_i$. En notant $Z' := \cap_{i=2, \dots, n} T_i$, on dispose du triangle distingué de Mayer-Vietoris (voir 1.15.8) :

$$\mathbb{R}\Gamma_Z^\dagger(\mathcal{E}) \rightarrow \mathbb{R}\Gamma_{Z'}^\dagger(\mathcal{E}) \oplus \mathbb{R}\Gamma_{T_1}^\dagger(\mathcal{E}) \rightarrow \mathbb{R}\Gamma_{Z' \cup T_1}^\dagger(\mathcal{E}) \rightarrow \mathbb{R}\Gamma_Z^\dagger(\mathcal{E})[1].$$

Comme Z' et $Z' \cup T_1$ sont des intersections de $n - 1$ diviseurs, on termine la preuve grâce à 3) et en procédant par récurrence sur n . \square

COROLLAIRE 3.4. – Soient T un diviseur de X et $\mathcal{E} \in D_{\text{coh}}^b(\mathcal{D}_{\mathfrak{X}}^\dagger(\dagger T)_{\mathbb{Q}})$. Alors $\mathcal{E} \in D_{\text{surhol}}^b(\mathcal{D}_{\mathfrak{X}, \mathbb{Q}}^\dagger)$ si et seulement si $\mathbb{D}_T(\mathcal{E}) \in D_{\text{surhol}}^b(\mathcal{D}_{\mathfrak{X}, \mathbb{Q}}^\dagger)$.

Démonstration. – Supposons $\mathcal{E} \in D_{\text{surhol}}^b(\mathcal{D}_{\mathfrak{X}, \mathbb{Q}}^\dagger)$. On remarque que le morphisme canonique $\mathcal{E} \rightarrow (\dagger T)(\mathcal{E})$ est un morphisme de $\mathcal{D}_{\mathfrak{X}}^\dagger(\dagger T)_{\mathbb{Q}}$ -modules cohérents qui est un isomorphisme en dehors de T . Par [5, 4.3.12] (voir 1.9), on en déduit que $\mathcal{E} \rightarrow (\dagger T)(\mathcal{E})$ est un isomorphisme. Or, d'après [35, I.4.4], les foncteurs duaux commutent à l'extension des scalaires, i.e. $\mathbb{D}_T \circ (\dagger T)(\mathcal{E}) \xrightarrow{\sim} (\dagger T) \circ \mathbb{D}(\mathcal{E})$. On obtient donc $\mathbb{D}_T(\mathcal{E}) \xrightarrow{\sim} (\dagger T) \circ \mathbb{D}(\mathcal{E})$. Il résulte alors de 3.3.1) et 3.3.5) que $\mathbb{D}_T(\mathcal{E}) \in D_{\text{surhol}}^b(\mathcal{D}_{\mathfrak{X}, \mathbb{Q}}^\dagger)$. La réciproque découle de l'isomorphisme de bidualité $\mathbb{D}_T \circ \mathbb{D}_T(\mathcal{E}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}$. \square

À l'instar de la cohérence, on vérifie que la notion de surholonomie est locale en \mathfrak{X} . De plus, on étend les propriétés standards des modules cohérents aux modules surholonomes. Par exemple, on a les deux propositions suivantes :

PROPOSITION 3.5. – Soient $\Phi : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F}$ un morphisme de $F\text{-}\mathcal{D}_{\mathfrak{X}, \mathbb{Q}}^\dagger$ -modules cohérents et $r \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Si \mathcal{E} et \mathcal{F} sont r -surholonomes, alors $\ker \Phi$, $\text{coker} \Phi$ et $\text{Im} \Phi$ sont r -surholonomes.

Démonstration. – Soient $f : \mathfrak{X}' \rightarrow \mathfrak{X}$ un morphisme lisse de \mathcal{V} -schémas formels, T' un diviseur de X' . Notons $f^* := \mathcal{H}^0 f^![-d_{X'/X}]$. Procédons alors à une récurrence sur $r \geq 0$. Comme f est lisse, le foncteur f^* est exact et l'image par f^* d'un $F\text{-}\mathcal{D}_{\mathfrak{X}, \mathbb{Q}}^\dagger$ -module cohérent est un $F\text{-}\mathcal{D}_{\mathfrak{X}', \mathbb{Q}}^\dagger$ -module cohérent. Comme l'extension $\mathcal{D}_{\mathfrak{X}', \mathbb{Q}}^\dagger \rightarrow \mathcal{D}_{\mathfrak{X}', \mathbb{Q}}^\dagger(\dagger T')$ est plate, le foncteur $(\dagger T')$ de la catégorie des $F\text{-}\mathcal{D}_{\mathfrak{X}', \mathbb{Q}}^\dagger$ -modules cohérents dans celle des $F\text{-}\mathcal{D}_{\mathfrak{X}', \mathbb{Q}}^\dagger(\dagger T')$ -modules cohérents est exact. Il en résulte que le foncteur $(\dagger T') \circ f^*$ qui va de la catégorie des $F\text{-}\mathcal{D}_{\mathfrak{X}, \mathbb{Q}}^\dagger$ -modules cohérents dans celle des $F\text{-}\mathcal{D}_{\mathfrak{X}', \mathbb{Q}}^\dagger(\dagger T')$ -modules cohérents est exact et commute aux noyaux, conoyaux et images. Comme les noyaux, conoyaux, images d'un morphisme de $F\text{-}\mathcal{D}_{\mathfrak{X}', \mathbb{Q}}^\dagger$ -modules cohérents sont $F\text{-}\mathcal{D}_{\mathfrak{X}', \mathbb{Q}}^\dagger$ -cohérents, on vérifie alors le cas $r = 0$.

Supposons maintenant le théorème validé pour $r - 1 \geq 0$ et prouvons-le pour r . Comme le foncteur $(\dagger T') \circ f^*$ est exact, on se ramène par hypothèse de récurrence à prouver que $\mathbb{D}(\ker \Phi)$, $\mathbb{D}(\text{coker} \Phi)$ et $\mathbb{D}(\text{Im} \Phi)$ sont $r - 1$ -surholonomes. Par 3.3.4, comme $r \geq 1$, Φ est un morphisme de $F\text{-}\mathcal{D}_{\mathfrak{X}, \mathbb{Q}}^\dagger$ -modules holonomes. Or, d'après [7, 5.3.5.(ii)], une suite exacte de $F\text{-}\mathcal{D}_{\mathfrak{X}, \mathbb{Q}}^\dagger$ -modules cohérents dont le terme du milieu est holonome est une suite exacte de $F\text{-}\mathcal{D}_{\mathfrak{X}, \mathbb{Q}}^\dagger$ -modules holonomes. Il en résulte que $\ker \Phi$, $\text{coker} \Phi$ et $\text{Im} \Phi$ sont holonomes. Rappelons que, d'après le critère homologique de Virrion de l'holonomie (voir 1.13), si \mathcal{G} est un $F\text{-}\mathcal{D}_{\mathfrak{X}, \mathbb{Q}}^\dagger$ -module holonome, alors en posant $\mathcal{G}^* := \mathcal{H}^0 \mathbb{D}(\mathcal{G})$ on obtient $\mathcal{G}^* \xrightarrow{\sim} \mathbb{D}(\mathcal{G})$. Notons $\Phi^* := \mathcal{H}^0 \mathbb{D}(\Phi) : \mathcal{F}^* \rightarrow \mathcal{E}^*$ le morphisme dual de Φ . Comme le foncteur $\mathcal{H}^0 \mathbb{D}$ est exact sur la catégorie des $F\text{-}\mathcal{D}_{\mathfrak{X}, \mathbb{Q}}^\dagger$ -modules holonomes, alors $(\text{Im}(\phi))^* \xrightarrow{\sim} \text{Im}(\phi^*)$, $(\ker \Phi)^* \xrightarrow{\sim} \text{coker}(\Phi^*)$, $(\text{coker} \Phi)^* \xrightarrow{\sim} \ker(\Phi^*)$. Or, Φ^* est un morphisme de $F\text{-}\mathcal{D}_{\mathfrak{X}, \mathbb{Q}}^\dagger$ -modules $r - 1$ -surholonomes. Par hypothèse de récurrence, il en découle que $(\text{Im}(\phi))^*$, $(\ker \Phi)^*$, $(\text{coker} \Phi)^*$ sont $r - 1$ -surholonomes, ce qu'il fallait démontrer. \square

PROPOSITION 3.6. – Soit $\mathcal{E}_1 \rightarrow \mathcal{E}_2 \rightarrow \mathcal{E}_3 \rightarrow \mathcal{E}_4 \rightarrow \mathcal{E}_5$ une suite exacte de $F\text{-}\mathcal{D}_{\mathfrak{X}, \mathbb{Q}}^\dagger$ -modules cohérents. Pour tout $r \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, si $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \mathcal{E}_4, \mathcal{E}_5$ sont r -surholonomes, alors \mathcal{E}_3 est r -surholonome.

Démonstration. – La preuve est analogue à celle de 3.5 : soient $f : \mathfrak{X}' \rightarrow \mathfrak{X}$ un morphisme lisse de \mathcal{V} -schémas formels, T' un diviseur de X' . Traitons le cas $r = 0$. Comme le foncteur $(\dagger T') \circ f^*$ est exact, on obtient la suite exacte $(\dagger T') \circ f^*(\mathcal{E}_1) \rightarrow (\dagger T') \circ f^*(\mathcal{E}_2) \rightarrow (\dagger T') \circ f^*(\mathcal{E}_3) \rightarrow (\dagger T') \circ f^*(\mathcal{E}_4) \rightarrow (\dagger T') \circ f^*(\mathcal{E}_5)$. Comme par hypothèse tous les termes sauf celui du milieu sont des $F\text{-}\mathcal{D}_{\mathfrak{X}', \mathbb{Q}}^\dagger$ -modules cohérents, celui du milieu l'est aussi. Ainsi, \mathcal{E}_3 est un $F\text{-}\mathcal{D}_{\mathfrak{X}, \mathbb{Q}}^\dagger$ -module surcohérent.

Supposons maintenant le théorème validé pour $r-1 \geq 0$ et prouvons-le pour r . Comme le foncteur $(\dagger T') \circ f^*$ est exact, on se ramène par hypothèse de récurrence à prouver que $\mathbb{D}(\mathcal{E}_3)$ est $r-1$ -surholonome.

Par 3.3.4, comme $r \geq 1$, $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \mathcal{E}_4, \mathcal{E}_5$ sont holonomes. Notons \mathcal{F}_2 (resp. \mathcal{F}_3) l'image de $\mathcal{E}_2 \rightarrow \mathcal{E}_3$ (resp. $\mathcal{E}_3 \rightarrow \mathcal{E}_4$). D'après [7, 5.3.5 (ii)], comme \mathcal{E}_2 (resp. \mathcal{E}_4) est holonome, \mathcal{F}_2 (resp. \mathcal{F}_3) est aussi holonome. Encore d'après [7, 5.3.5 (ii)], comme on dispose de la suite exacte $0 \rightarrow \mathcal{F}_2 \rightarrow \mathcal{E}_3 \rightarrow \mathcal{F}_3 \rightarrow 0$ avec \mathcal{F}_2 et \mathcal{F}_3 holonomes, alors \mathcal{E}_3 est holonome.

Ainsi, $\mathbb{D}(\mathcal{E}_3) \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}_3^*$. Comme le foncteur $\mathcal{H}^0 \mathbb{D}$ est exact sur la catégorie des $F\text{-}\mathcal{D}_{\mathfrak{X}, \mathbb{Q}}^\dagger$ -modules holonomes, on obtient la suite exacte $\mathcal{E}_5^* \rightarrow \mathcal{E}_4^* \rightarrow \mathcal{E}_3^* \rightarrow \mathcal{E}_2^* \rightarrow \mathcal{E}_1^*$. Par hypothèse de récurrence, \mathcal{E}_3^* est donc $r-1$ -surholonome. \square

COROLLAIRE 3.7. – Pour $N \geq p, q \geq 0, r_0 \geq 1$, soit $\mathcal{E}_{r_0}^{p,q} \Rightarrow \mathcal{E}^n$ une suite spectrale de $F\text{-}\mathcal{D}_{\mathfrak{X}, \mathbb{Q}}^\dagger$ -modules cohérents. Si, pour tous p, q , les $F\text{-}\mathcal{D}_{\mathfrak{X}, \mathbb{Q}}^\dagger$ -modules $\mathcal{E}_{r_0}^{p,q}$ sont r -surholonomes, alors les $F\text{-}\mathcal{D}_{\mathfrak{X}, \mathbb{Q}}^\dagger$ -modules \mathcal{E}^n sont, pour tout n , r -surholonomes.

Démonstration. – Il découle de 3.5 que les $\mathcal{E}_{r_0}^{p,q}$ sont r -surholonomes. Par 3.6, on en déduit que les \mathcal{E}^n sont r -surholonomes. \square

THÉORÈME 3.8. – Soient \mathcal{Y} et \mathfrak{X} deux \mathcal{V} -schémas formels lisses et $f_0 : Y \rightarrow X$ un morphisme entre leur fibre spéciale. Pour tout $\mathcal{E} \in D_{\text{coh}}^b(\mathcal{D}_{\mathfrak{X}, \mathbb{Q}}^\dagger)$, pour tout entier r , si \mathcal{E} est r -surholonome, alors $f_0^!(\mathcal{E})$ est r -surholonome.

Démonstration. – Comme le théorème est local en \mathcal{Y} , on peut supposer que f_0 se relève en un morphisme $f : \mathcal{Y} \rightarrow \mathfrak{X}$. Procédons alors par récurrence sur l'entier $r \geq 0$. Pour $r = 0$, c'est [11, 3.1.7]. Supposons donc le théorème validé pour $r-1 \geq 0$ et prouvons-le pour r .

Puisque f se décompose en une immersion (le graphe de $f : \mathcal{Y} \hookrightarrow \mathcal{Y} \times_{\mathcal{S}} \mathfrak{X}$) suivie de la projection lisse $\mathcal{Y} \times_{\mathcal{S}} \mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{X}$, il suffit de traiter le cas où f est lisse et celui où f est une immersion fermée. Soient $g : \mathcal{Y}' \rightarrow \mathcal{Y}$ un morphisme lisse et Z un diviseur de Y' . Par hypothèse de récurrence sur r , il s'agit d'établir que $\mathbb{D} \circ (\dagger Z) \circ g^!(f^!(\mathcal{E}))$ est $r-1$ -surholonome. Lorsque f est lisse, cela découle de l'isomorphisme $\mathbb{D} \circ (\dagger Z) \circ g^!(f^!(\mathcal{E})) \xrightarrow{\sim} \mathbb{D} \circ (\dagger Z) \circ (f \circ g)^!(\mathcal{E})$ et du fait que \mathcal{E} est r -surholonome. On se ramène donc à traiter le cas où f est une immersion fermée.

Il suffit de prouver que pour tout morphisme lisse $g : \mathcal{Y}' \rightarrow \mathcal{Y}$ et pour tout diviseur Z de Y' , le complexe $\mathbb{D} \circ \mathbb{R}\Gamma_Z^\dagger \circ g^!(f^!(\mathcal{E}))$ est $r-1$ -surholonome. En effet, en prenant Z égal à l'ensemble vide, cela implique que $\mathbb{D} \circ g^!(f^!(\mathcal{E}))$ est $r-1$ -surholonome. En appliquant le

foncteur dual \mathbb{D} au triangle de localisation de $g^1(f^1(\mathcal{E}))$ en Z (voir 1.15.3), il découle alors de 3.3.3 que $\mathbb{D} \circ (\dagger Z) \circ g^1(f^1(\mathcal{E}))$ est $r - 1$ -surholonome.

En fixant g et Z , prouvons à présent que $\mathbb{D} \circ \mathbb{R}\Gamma_Z^\dagger \circ g^1(f^1(\mathcal{E}))$ est $r - 1$ -surholonome. Comme cela est local en \mathcal{Y}' , on peut donc supposer que g se décompose en une immersion fermée $\mathcal{Y}' \hookrightarrow \widehat{\mathbb{A}}_{\mathcal{Y}}^n$ suivie de la projection $\widehat{\mathbb{A}}_{\mathcal{Y}}^n \rightarrow \mathcal{Y}$. En notant p la projection $\widehat{\mathbb{A}}_{\mathcal{X}}^n \rightarrow \mathcal{X}$ et i l'immersion fermée $\mathcal{Y}' \hookrightarrow \widehat{\mathbb{A}}_{\mathcal{X}}^n$, on obtient $f \circ g = p \circ i$. Ainsi, $\mathbb{D} \circ \mathbb{R}\Gamma_Z^\dagger \circ g^1(f^1(\mathcal{E})) \xrightarrow{\sim} \mathbb{D} \circ \mathbb{R}\Gamma_Z^\dagger \circ i^1 \circ p^1(\mathcal{E})$. Comme l'image inverse extraordinaire commute au foncteur cohomologique local (voir 1.15.6), $\mathbb{R}\Gamma_Z^\dagger i^1 \xrightarrow{\sim} i^1 \mathbb{R}\Gamma_Z^\dagger$. D'où : $\mathbb{D} \circ \mathbb{R}\Gamma_Z^\dagger \circ g^1(f^1(\mathcal{E})) \xrightarrow{\sim} \mathbb{D} \circ i^1 \circ \mathbb{R}\Gamma_Z^\dagger \circ p^1(\mathcal{E})$.

En utilisant le théorème de Berthelot-Kashiwara (1.14) puis le théorème de dualité relative ([36] ou 1.11.1), on obtient sur $D_{\text{coh}}^b(\mathcal{D}_{\mathcal{Y}', \mathbb{Q}}^\dagger) : \mathbb{D} \xrightarrow{\sim} i^1 i_+ \mathbb{D} \xrightarrow{\sim} i^1 \mathbb{D} i_+$. Or, comme \mathcal{E} est surcohérent, $i^1 \mathbb{R}\Gamma_Z^\dagger p^1(\mathcal{E}) \in D_{\text{coh}}^b(\mathcal{D}_{\mathcal{Y}', \mathbb{Q}}^\dagger)$. D'où : $\mathbb{D}(i^1 \mathbb{R}\Gamma_Z^\dagger p^1(\mathcal{E})) \xrightarrow{\sim} i^1 \mathbb{D} i_+(i^1 \mathbb{R}\Gamma_Z^\dagger p^1(\mathcal{E}))$. Comme $\mathbb{R}\Gamma_Z^\dagger p^1(\mathcal{E}) \in D_{\text{coh}}^b(\widehat{\mathbb{A}}_{\mathcal{X}}^\dagger, \mathbb{Q})$ et est à support dans Y' (car $Z \subset Y'$), le théorème de Berthelot-Kashiwara implique $i^1 \mathbb{D} i_+(i^1 \mathbb{R}\Gamma_Z^\dagger p^1(\mathcal{E})) \xrightarrow{\sim} i^1 \mathbb{D} \circ \mathbb{R}\Gamma_Z^\dagger p^1(\mathcal{E})$. On a ainsi établi l'isomorphisme $\mathbb{D} \circ \mathbb{R}\Gamma_Z^\dagger g^1(f^1(\mathcal{E})) \xrightarrow{\sim} i^1 \mathbb{D} \circ \mathbb{R}\Gamma_Z^\dagger p^1(\mathcal{E})$.

Or, d'après 3.3, comme \mathcal{E} est r -surholonome le complexe $\mathbb{D} \circ \mathbb{R}\Gamma_Z^\dagger p^1(\mathcal{E})$ est $r - 1$ -surholonome. Par hypothèse de récurrence, $i^1 \mathbb{D} \circ \mathbb{R}\Gamma_Z^\dagger p^1(\mathcal{E})$ est aussi $r - 1$ -surholonome. \square

THÉORÈME 3.9. – Soient \mathcal{Y} et \mathcal{X} deux \mathcal{V} -schémas formels lisses et $f_0 : Y \rightarrow X$ un morphisme propre entre leur fibre spéciale. On suppose que l'une des conditions suivantes est validée :

- 1) Le morphisme f_0 se relève en un morphisme $f : \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{X}$ de \mathcal{V} -schémas formels lisses.
- 2) Le morphisme f_0 est une immersion fermée.
- 3) Le \mathcal{V} -schéma formel \mathcal{Y} se plonge dans un \mathcal{V} -schéma formel propre et lisse.

Pour tout $\mathcal{F} \in D_{\text{coh}}^b(\mathcal{D}_{\mathcal{Y}, \mathbb{Q}}^\dagger)$, pour tout entier r , si \mathcal{F} est r -surholonome, alors $f_{0+}(\mathcal{F})$ est r -surholonome.

Démonstration. – Dans le cas 3), on suppose que \mathcal{Y} se plonge dans un \mathcal{V} -schéma formel \mathcal{P} propre et lisse. Il en résulte une décomposition de f_0 en une immersion ($Y \hookrightarrow P \times X$) suivie d'un morphisme propre et lisse (la projection $P \times X \rightarrow X$) qui se relève en $\mathcal{P} \times \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$. Comme f_0 est propre, l'immersion $Y \hookrightarrow P \times X$ est une immersion fermée (voir [23, II.4.8 (e)]). Il suffit donc de traiter les deux cas 2) et 1). Or, le cas 2) se ramène au cas releuable 1). En effet, dans le cas où f_0 est une immersion fermée, comme le théorème est local en \mathcal{X} on peut supposer \mathcal{X} et donc \mathcal{Y} affines. Il existe alors un relèvement $f : \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{X}$ de f_0 . Il suffit donc de traiter le cas où le morphisme f_0 se relève en un morphisme propre $f : \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{X}$.

Maintenant, traitons le cas 1) et procédons à une récurrence sur l'entier $r \geq 0$. Le cas $r = 0$ a été démontré dans [11, 3.1.9]. Supposons donc le théorème validé pour $r - 1 \geq 0$ et prouvons-le pour r . Soient \mathcal{F} un complexe r -surholonome de $\mathcal{D}_{\mathcal{Y}, \mathbb{Q}}^\dagger$ -modules, $g : \mathcal{X}' \rightarrow \mathcal{X}$ un morphisme lisse de \mathcal{V} -schémas formels et T' un diviseur de X' . Notons $f' : \mathcal{Y} \times_{\mathcal{X}} \mathcal{X}' \rightarrow \mathcal{X}'$ et $g' : \mathcal{Y} \times_{\mathcal{X}} \mathcal{X}' \rightarrow \mathcal{Y}$ les projections respectives. Il s'agit de prouver que $\mathbb{D}(\dagger T')g'_+ f'_+(\mathcal{F})$ est $r - 1$ surholonome. Or, en utilisant l'isomorphisme de changement de base de l'image directe d'un morphisme propre par un morphisme lisse $g'_+ f'_+(\mathcal{F}) \xrightarrow{\sim} f'_+ g^1(\mathcal{F})$ (voir [11, 3.1.8]), la commutation de l'image directe au foncteur cohomologique local (voir 1.15.6) et au théorème de

dualité relative de Virrion (voir [36] ou 1.11.1 pour la version avec diviseur), on obtient les isomorphismes :

$$\mathbb{D}(\dagger T')g^!f_+(\mathcal{F}) \xrightarrow{\sim} \mathbb{D}(\dagger T')f'_+g^!(\mathcal{F}) \xrightarrow{\sim} \mathbb{D}f'_+(\dagger f'^{-1}T')g^!(\mathcal{F}) \xrightarrow{\sim} f'_+\mathbb{D}(\dagger f'^{-1}T')g^!(\mathcal{F}).$$

D'après la proposition 3.3 et le théorème 3.8, le complexe $\mathbb{D}(\dagger f'^{-1}T')g^!(\mathcal{F})$ est $r-1$ -surholonome. Par hypothèse de récurrence, il en découle que le complexe $f'_+\mathbb{D}(\dagger f'^{-1}T')g^!(\mathcal{F})$ est $r-1$ -surholonome. \square

THÉORÈME 3.10 (Kashiwara). – *Soient \mathcal{Y} et \mathcal{X} deux \mathcal{V} -schémas formels lisses, $f_0 : Y \hookrightarrow X$ une immersion fermée entre leur fibre spéciale.*

- 1) *Pour tout $r \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, pour tout $\mathcal{D}_{\mathcal{X}, \mathbb{Q}}^\dagger$ -module r -surholonome \mathcal{E} à support dans Y , tout $\mathcal{D}_{\mathcal{Y}, \mathbb{Q}}^\dagger$ -module r -surholonome \mathcal{F} et tout entier $k \neq 0$, $\mathcal{H}^k f_{0+}(\mathcal{F}) = 0$ et $\mathcal{H}^k f_0^!(\mathcal{E}) = 0$.*
- 2) *Les foncteurs f_{0+} et $f_0^!$ induisent des équivalences quasi-inverses entre la catégorie des $\mathcal{D}_{\mathcal{X}, \mathbb{Q}}^\dagger$ -modules r -surholonomes à support dans Y et celle des $\mathcal{D}_{\mathcal{Y}, \mathbb{Q}}^\dagger$ -modules r -surholonomes.*

Démonstration. – La partie 1) résulte de la version cohérente du théorème de Kashiwara dû à Berthelot (voir 1.14) et du fait qu'un $\mathcal{D}_{\mathcal{Y}, \mathbb{Q}}^\dagger$ -module r -surholonome (resp. un $\mathcal{D}_{\mathcal{X}, \mathbb{Q}}^\dagger$ -module r -surholonome à support dans Y) est un $\mathcal{D}_{\mathcal{Y}, \mathbb{Q}}^\dagger$ -module cohérent (resp. un $\mathcal{D}_{\mathcal{X}, \mathbb{Q}}^\dagger$ -module cohérent à support dans Y). L'assertion 2) découle à nouveau de 1.14 mais aussi de la stabilité de la r -surholonomie par image directe par une immersion fermée et image inverse extraordinaire (voir 3.8 et 3.9). \square

PROPOSITION 3.11. – *Pour tout $r \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, les deux assertions suivantes sont équivalentes :*

- 1) *La r -surholonomie est stable par produit tensoriel interne.*
- 2) *La r -surholonomie est stable par produit tensoriel externe.*

Démonstration. – Comme la r -surholonomie est préservée par image inverse extraordinaire (voir 3.8), on obtient d'abord par définition du produit tensoriel externe (voir 1.5.1) l'implication 1) \Rightarrow 2).

Réciproquement, notons $p_1, p_2 : \mathcal{X} \times_{\mathcal{S}} \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ les projections respectives à gauche et à droite, $\delta : \mathcal{X} \hookrightarrow \mathcal{X} \times_{\mathcal{S}} \mathcal{X}$ l'immersion diagonale. Pour tous complexes \mathcal{E}_1 et $\mathcal{E}_2 \in \underline{LD}_{\mathbb{Q}, \text{qc}}^b(\widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{X}}^{\bullet})$,

$$(3.11.1) \quad \delta^!(\mathcal{E}_1 \boxtimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{S}}}^{\mathbb{L}\dagger} \mathcal{E}_2) = \delta^!(p_1^!(\mathcal{E}_1) \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{X} \times_{\mathcal{S}} \mathcal{X}, \mathbb{Q}}}^{\mathbb{L}\dagger} p_2^!(\mathcal{E}_2)[-2d_{\mathcal{X}}]) \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}_1 \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{X}, \mathbb{Q}}}^{\mathbb{L}\dagger} \mathcal{E}_2[-d_{\mathcal{X}}],$$

l'isomorphisme résultant de la commutation de l'image inverse extraordinaire (décalée de la dimension relative) aux produits tensoriels internes (voir par exemple [11, 1.2.22]). Si la r -surholonomie est préservée par produits tensoriels externes, comme elle l'est aussi par image inverse extraordinaire (voir 3.8), par 3.11.1, on obtient alors la stabilité par produits tensoriels internes. On a ainsi vérifié 2) \Rightarrow 1). \square

3.12. Transitivité de l'image directe par un morphisme propre pour les complexes surholonomes

Soient $f : \mathfrak{X}' \rightarrow \mathfrak{X}, g : \mathfrak{X}'' \rightarrow \mathfrak{X}'$ et $h : \mathfrak{X}''' \rightarrow \mathfrak{X}''$, trois morphismes propres de \mathcal{V} -schémas formels lisses.

Il découle de la remarque [14, 1.2.16] que l'on dispose, pour tout $\mathcal{G} \in D_{\text{surhol}}^b(\mathcal{D}_{\mathfrak{X}'', \mathbb{Q}}^\dagger)$, de l'isomorphisme canonique $(f \circ g)_+(\mathcal{G}) \xrightarrow{\sim} f_+ \circ g_+(\mathcal{G})$, fonctoriel en \mathcal{G} . On obtient ainsi des « isomorphismes de transitivité de l'image directe par un morphisme propre pour les complexes surholonomes ». En outre, d'après [14, 1.2.16], celui-ci est par construction compatible à Frobenius (voir 1.12 pour la commutation de l'image directe à Frobenius) et associatif, i.e. pour tout $\mathcal{H} \in D_{\text{surhol}}^b(\mathcal{D}_{\mathfrak{X}''', \mathbb{Q}}^\dagger)$, les deux morphismes composés $(f \circ g \circ h)_+(\mathcal{H}) \xrightarrow{\sim} (f \circ g)_+ \circ h_+(\mathcal{H}) \xrightarrow{\sim} f_+ \circ g_+ \circ h_+(\mathcal{H})$ et $(f \circ g \circ h)_+(\mathcal{H}) \xrightarrow{\sim} f_+ \circ (g \circ h)_+(\mathcal{H}) \xrightarrow{\sim} f_+ \circ g_+ \circ h_+(\mathcal{H})$ sont égaux.

On dispose d'après Berthelot d'une seconde construction plus naturelle de l'isomorphisme de transitivité : $(f \circ g)_+(\mathcal{G}) \xrightarrow{\sim} f_+ \circ g_+(\mathcal{G})$ (pour une description de la construction, voir par exemple [17, 1.1.2]) dont la compatibilité à Frobenius est loin d'être évidente.

En fait, d'après la remarque [17, 1.2.9], ces deux isomorphismes de transitivité du foncteur image directe sont identiques. Pour le vérifier, nous avons établi que les morphismes d'adjonction entre image directe et image inverse extraordinaire par un morphisme propre sont transitifs, en prenant pour isomorphisme de transitivité de l'image directe ceux construits par Berthelot.

3.13. – Soient $f : \mathfrak{X}' \rightarrow \mathfrak{X}$ un morphisme propre de \mathcal{V} -schémas formels lisses, $\mathcal{E} \in D_{\text{surhol}}^b(\mathcal{D}_{\mathfrak{X}, \mathbb{Q}}^\dagger)$, $\mathcal{E}' \in D_{\text{surhol}}^b(\mathcal{D}_{\mathfrak{X}', \mathbb{Q}}^\dagger)$. Comme un complexe surholonome est en particulier cohérent et que la surholonomie est stable par image inverse extraordinaire et par image directe par un morphisme propre, par 1.11.2, on dispose des morphismes canoniques d'adjonction $\mathcal{E}' \rightarrow f^! f_+(\mathcal{E}')$, $f_+ f^!(\mathcal{E}) \rightarrow \mathcal{E}$.

En outre, si f est une immersion fermée, ces morphismes d'adjonction sont des isomorphismes pour tout $\mathcal{E} \in D_{\text{surhol}}^b(\mathcal{D}_{\mathfrak{X}, \mathbb{Q}}^\dagger)$ à support dans X' et tout $\mathcal{E}' \in D_{\text{surhol}}^b(\mathcal{D}_{\mathfrak{X}', \mathbb{Q}}^\dagger)$. Enfin, pour tout $\mathcal{E} \in D_{\text{surhol}}^b(\mathcal{D}_{\mathfrak{X}, \mathbb{Q}}^\dagger)$, on bénéficie comme dans le cas surcohérent ([11, 3.1.12]) d'un isomorphisme compatible à Frobenius $f_+ f^!(\mathcal{E}) \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}\Gamma_{X'}^\dagger(\mathcal{E})$ s'inscrivant dans le diagramme canonique :

$$(3.13.1) \quad \begin{array}{ccc} f_+ \circ f^!(\mathcal{E}) & \xrightarrow{\text{adj}} & \mathcal{E} \\ \sim \downarrow & & \parallel \\ \mathbb{R}\Gamma_{X'}^\dagger(\mathcal{E}) & \longrightarrow & \mathcal{E}. \end{array}$$

4. \mathcal{D} -modules arithmétiques surholonomes sur une variété plongeable

Pour construire les complexes de \mathcal{D} -modules arithmétiques surholonomes sur une variété U , nous étudions dans cette section le cas où la variété U se plonge dans un \mathcal{V} -schéma formel propre et lisse (voir 4.18).

NOTATIONS 4.1. – Soient \mathfrak{X} un \mathcal{V} -schéma formel lisse, T et Z deux sous-schémas fermés de X et $U := Z \setminus T$. On note alors $(F-)\mathfrak{M}_{\mathfrak{X},T,Z}^+$ la catégorie des $(F-)\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}^\dagger$ -modules surholonomes \mathcal{E} à support dans Z et vérifiant $\mathbb{R}\Gamma_T^\dagger(\mathcal{E}) = 0$.

En utilisant le triangle de localisation 1.15.3 en T , on remarque que la condition $\mathbb{R}\Gamma_T^\dagger(\mathcal{E}) = 0$ équivaut à dire que le morphisme canonique $\mathcal{E} \rightarrow (\dagger T)(\mathcal{E})$ est un isomorphisme. Lorsque T est un diviseur de X , cette condition est équivalente à demander que la structure de $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}^\dagger$ -module de \mathcal{E} se prolonge en une structure de $\mathcal{D}_{\mathfrak{X}}^\dagger(\dagger T)_{\mathbb{Q}}$ -module.

De même, on note $(F-)\mathfrak{C}_{\mathfrak{X},T,Z}^+$ la sous-catégorie pleine de $(F-)\mathcal{D}_{\text{surhol}}^b(\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}^\dagger)$ des complexes \mathcal{E} vérifiant $(\dagger Z)(\mathcal{E}) = 0$ et $\mathbb{R}\Gamma_T^\dagger(\mathcal{E}) = 0$.

4.2. – On garde les notations 4.1. Dans [11, 3.2.1], on a défini les catégories analogues à celles de 4.1 en remplaçant « surholonome » par « surcohérent ». On les avait désignées par $(F-)\mathfrak{M}_{\mathfrak{X},T,Z}$ et $(F-)\mathfrak{C}_{\mathfrak{X},T,Z}$. Comme la surholonomie est une notion plus forte que la surcohérence, on obtient les inclusions : $(F-)\mathfrak{M}_{\mathfrak{X},T,Z}^+ \subset (F-)\mathfrak{M}_{\mathfrak{X},T,Z}$ et $(F-)\mathfrak{C}_{\mathfrak{X},T,Z}^+ \subset (F-)\mathfrak{C}_{\mathfrak{X},T,Z}$.

De plus, si T est un diviseur et si \mathfrak{X} est propre, la sous-catégorie pleine de $(F-)\mathcal{D}_{\text{coh}}^b(\mathcal{D}_{\mathfrak{X}}^\dagger(\dagger T)_{\mathbb{Q}})$ des $(F-)$ complexes \mathcal{E} tels que $\mathbb{D}_T(\mathcal{E}) \in (F-)\mathfrak{C}_{\mathfrak{X},T,Z}$ avait été notée $(F-)\mathfrak{C}_{\mathfrak{X},T,Z}^\vee$ (voir [11, 3.3.1]). Comme le foncteur \mathbb{D}_T stabilise la catégorie $(F-)\mathfrak{C}_{\mathfrak{X},T,Z}^+$, on obtient l'inclusion $(F-)\mathfrak{C}_{\mathfrak{X},T,Z}^+ \subset (F-)\mathfrak{C}_{\mathfrak{X},T,Z}^\vee$.

REMARQUES 4.3 (Frobenius). – Dans toutes les assertions de cette section, les structures de Frobenius sont inutiles. Plus précisément, on peut remplacer « $F-$ » par « $(F-)$ ». Afin de ne pas alourdir les notations, nous avons parfois omis d'indiquer les parenthèses.

DÉFINITION 4.4. – Avec les notations 4.1, on définit « le foncteur dual sur $F-\mathfrak{C}_{\mathfrak{X},T,Z}^+$ » en posant $\mathbb{D}_T := (\dagger T) \circ \mathbb{D} : F-\mathfrak{C}_{\mathfrak{X},T,Z}^+ \rightarrow F-\mathfrak{C}_{\mathfrak{X},T,Z}^+$, où \mathbb{D} est le foncteur dual $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}^\dagger$ -linéaire de 1.10.6 (i.e. le diviseur est vide).

Lorsque T est un diviseur, on vérifie de manière analogue à la preuve de 3.4 l'isomorphisme $\mathbb{D}_T(\mathcal{E}) \xrightarrow{\sim} (\dagger T) \circ \mathbb{D}(\mathcal{E})$, où \mathbb{D} (resp. \mathbb{D}_T) est le foncteur dual $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}^\dagger$ -linéaire (resp. $\mathcal{D}_{\mathfrak{X}}^\dagger(\dagger T)_{\mathbb{Q}}$ -linéaire) de 1.10.6. Cela unifie donc nos notations.

PROPOSITION 4.5. – Avec les notations de 4.1, soit $\mathcal{E} \in \mathfrak{C}_{\mathfrak{X},T,Z}^+$. On bénéficie de l'isomorphisme canonique $\iota : \mathcal{E} \xrightarrow{\sim} \mathbb{D}_T \circ \mathbb{D}_T(\mathcal{E})$, dit de « bidualité », compatible à Frobenius.

De plus, soit $f : \mathcal{Y} \rightarrow \mathfrak{X}$ un morphisme propre de \mathcal{V} -schémas formels lisses. On dispose alors de l'isomorphisme $f_+ \circ \mathbb{D}_{f_0^{-1}(T)}(\mathcal{E}) \xrightarrow{\sim} \mathbb{D}_T \circ f_+(\mathcal{E})$ dit de « dualité relative ».

Démonstration. – On dispose du morphisme canonique $\mathbb{D}(\mathcal{E}) \rightarrow (\dagger T)\mathbb{D}(\mathcal{E})$ désigné par u . En notant $\mathcal{E}_1 = (\dagger T)\mathbb{D}(\dagger T)\mathbb{D}(\mathcal{E})$, $\mathcal{E}_2 = (\dagger T)\mathbb{D}\mathbb{D}(\mathcal{E})$, on obtient le morphisme $v := (\dagger T)\mathbb{D}(u) : \mathcal{E}_2 \rightarrow \mathcal{E}_1$. Dans un premier temps, vérifions que v est un isomorphisme.

Soit $T' \supset T$ un diviseur de X contenant T . Par 1.15.4, $(\dagger T')(\dagger T)\mathbb{D} \xrightarrow{\sim} (\dagger T')\mathbb{D}$. Or, d'après [35, I.4.4], le foncteur dual commute à l'extension des scalaires et donc $(\dagger T')\mathbb{D} \xrightarrow{\sim} \mathbb{D}_{T'}(\dagger T')$. On obtient donc par composition : $(\dagger T')(\dagger T)\mathbb{D} \xrightarrow{\sim} \mathbb{D}_{T'}(\dagger T')$. Ainsi, $(\dagger T')(v) \xrightarrow{\sim} \mathbb{D}_{T'}(\dagger T')(u)$. Par 1.15.4, $(\dagger T')(u)$ est un isomorphisme. Il en résulte alors que $(\dagger T')(v)$ est un isomorphisme.

Soient T_1, \dots, T_r des diviseurs de X tels que $T \subset \cap_{i=1}^r T_i$. Par récurrence sur r , vérifions maintenant que $(\dagger \cap_{i=1}^r T_i)(v)$ est un isomorphisme. Le cas où $r = 1$ vient d'être traité. Supposons $r \geq 2$. Les triangles distingués de Mayer-Vietoris (voir 1.15.8) utilisés pour T_1 et $T'_1 := \cap_{i=2}^r T_i$ donnent par functorialité :

$$(4.5.1) \quad \begin{array}{ccccccc} (\dagger T_1 \cap T'_1)(\mathcal{E}_1) & \longrightarrow & (\dagger T_1)(\mathcal{E}_1) \oplus (\dagger T'_1)(\mathcal{E}_1) & \longrightarrow & (\dagger T_1 \cup T'_1)(\mathcal{E}_1) & \longrightarrow & (\dagger T_1 \cap T'_1)(\mathcal{E}_1)[1] \\ & & \downarrow (\dagger T_1 \cap T'_1)(v) & & \downarrow (\dagger T_1 \cup T'_1)(v) & & \downarrow (\dagger T_1 \cap T'_1)(v) \\ & & (\dagger T_1 \cap T'_1)(\mathcal{E}_2) & \longrightarrow & (\dagger T_1)(\mathcal{E}_2) \oplus (\dagger T'_1)(\mathcal{E}_2) & \longrightarrow & (\dagger T_1 \cup T'_1)(\mathcal{E}_2) \longrightarrow (\dagger T_1 \cap T'_1)(\mathcal{E}_2)[1]. \end{array}$$

Par hypothèse de récurrence, $(\dagger T_1)(v) \oplus (\dagger T'_1)(v)$ et $(\dagger T_1 \cup T'_1)(v)$ sont des isomorphismes. Via 4.5.1, il en résulte que $(\dagger \cap_{i=1}^r T_i)(v)$ est un isomorphisme.

Comme T est une intersection de diviseurs, il en résulte que $(\dagger T)(v)$ est un isomorphisme. Or, d'après 1.15.4, $\mathcal{E}_1 \xrightarrow{\sim} (\dagger T)(\mathcal{E}_1)$, $\mathcal{E}_2 \xrightarrow{\sim} (\dagger T)(\mathcal{E}_2)$. D'où : $v \xrightarrow{\sim} (\dagger T)(v)$. Ainsi v est un isomorphisme. On construit alors l'isomorphisme de bidualité ι en posant :

$$\iota : (\dagger T)\mathbb{D}(\dagger T)\mathbb{D}(\mathcal{E}) \xrightarrow{\sim} (\dagger T)\mathbb{D}\mathbb{D}(\mathcal{E}) \xleftarrow{\sim} (\dagger T)\mathcal{E} \xleftarrow{\sim} \mathcal{E},$$

où le deuxième isomorphisme se déduit de l'isomorphisme de bidualité de Virrion (voir 1.10.7) et le dernier de 1.15.4.

Avec l'isomorphisme de dualité relative (voir 1.11.1) et la commutation de l'image directe aux foncteurs localisations (voir 1.15.7), on construit l'isomorphisme de dualité relative via le composé :

$$f_+ \circ \mathbb{D}_{f_0^{-1}(T)}(\mathcal{E}) = f_+ \circ (\dagger f_0^{-1}(T)) \circ \mathbb{D}(\mathcal{E}) \xrightarrow[1.15.7]{\sim} (\dagger T) \circ f_+ \circ \mathbb{D}(\mathcal{E}) \xrightarrow[1.11.1]{\sim} (\dagger T) \circ \mathbb{D} \circ f_+(\mathcal{E}) = \mathbb{D}_T \circ f_+(\mathcal{E}). \quad \square$$

PROPOSITION 4.6. – Soient \mathfrak{X} un \mathcal{V} -schéma formel lisse, Z, Z', T et T' des sous-schémas fermés de X tels que $Z \setminus T = Z' \setminus T'$. On bénéficie alors des égalités $F\text{-}\mathfrak{M}_{\mathfrak{X},T,Z}^+ = F\text{-}\mathfrak{M}_{\mathfrak{X},T',Z'}^+$ et $F\text{-}\mathfrak{C}_{\mathfrak{X},T,Z}^+ = F\text{-}\mathfrak{C}_{\mathfrak{X},T',Z'}^+$. En particulier, en notant \bar{U} l'adhérence schématique de $U := Z \setminus T$ dans X , $F\text{-}\mathfrak{M}_{\mathfrak{X},T,Z}^+ = F\text{-}\mathfrak{M}_{\mathfrak{X},T,\bar{U}}^+$ et $F\text{-}\mathfrak{C}_{\mathfrak{X},T,Z}^+ = F\text{-}\mathfrak{C}_{\mathfrak{X},T,\bar{U}}^+$.

Démonstration. – D'après [11, 3.2.4], on dispose des égalités $F\text{-}\mathfrak{M}_{\mathfrak{X},T,Z} = F\text{-}\mathfrak{M}_{\mathfrak{X},T',Z'}$ et $F\text{-}\mathfrak{C}_{\mathfrak{X},T,Z} = F\text{-}\mathfrak{C}_{\mathfrak{X},T',Z'}$. Les inclusions $F\text{-}\mathfrak{M}_{\mathfrak{X},T,Z}^+ \subset F\text{-}\mathfrak{M}_{\mathfrak{X},T,Z}$, $F\text{-}\mathfrak{C}_{\mathfrak{X},T,Z}^+ \subset F\text{-}\mathfrak{C}_{\mathfrak{X},T,Z}$ (voir 4.2) nous permettent alors de conclure. \square

LEMME 4.7. – Soient $f_1 : \mathfrak{X}_2 \rightarrow \mathfrak{X}_1$, $f_2 : \mathfrak{X}_3 \rightarrow \mathfrak{X}_2$ deux morphismes de \mathcal{V} -schémas formels lisses, Z_1 un sous-schéma fermé de X_1 . On pose $Z_2 := f_1^{-1}(Z_1)$, $Z_3 := f_2^{-1}(Z_2)$.

Les diagrammes canoniques de foncteurs $F\text{-}\mathfrak{C}_{\mathfrak{X}_1,T_1,Z_1}^+ \rightarrow F\text{-}\mathfrak{C}_{\mathfrak{X}_3,T_3,Z_3}^+$:

$$(4.7.1) \quad \begin{array}{ccccccc} (f_1 \circ f_2)! \mathbb{R}\Gamma_{Z_1}^\dagger & \xrightarrow{\sim} & \mathbb{R}\Gamma_{Z_3}^\dagger (f_1 \circ f_2)! & (f_1 \circ f_2)!(\dagger Z_1) & \xrightarrow{\sim} & (\dagger Z_3)(f_1 \circ f_2)! & \\ \sim \downarrow & & \sim \downarrow & \sim \downarrow & & \sim \downarrow & \\ f_2! f_1! \mathbb{R}\Gamma_{Z_1}^\dagger & \xrightarrow{\sim} & f_2! \mathbb{R}\Gamma_{Z_2}^\dagger f_1! & \xrightarrow{\sim} & \mathbb{R}\Gamma_{Z_3}^\dagger f_2! f_1! & & f_2! f_1! (\dagger Z_3) \xrightarrow{\sim} f_2! (\dagger Z_2) f_1! \xrightarrow{\sim} (\dagger Z_3) f_2! f_1! \end{array}$$

où les isomorphismes horizontaux sont les isomorphismes de commutation à l'image inverse extraordinaire du foncteur cohomologique local ou du foncteur de localisation (voir 1.15.6), sont commutatifs.

Démonstration. – Le cas du foncteur de localisation se traitant de manière identique, contentons-nous de prouver le cas du foncteur cohomologique local. Rappelons d'abord que le morphisme du haut à gauche de 4.7.1 correspond par construction (plus précisément, voir la construction dans la première partie de la preuve de [11, 2.2.18.1]) au composé des morphismes canoniques :

$$(f_1 \circ f_2)^! \mathbb{R}\Gamma_{Z_1}^\dagger \xleftarrow{\sim} \mathbb{R}\Gamma_{Z_3}^\dagger (f_1 \circ f_2)^! \mathbb{R}\Gamma_{Z_1}^\dagger \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}\Gamma_{Z_3}^\dagger (f_1 \circ f_2)^!.$$

Il s'agit d'établir que le rectangle du fond (et vertical) du diagramme ci-dessous

$$(4.7.2) \quad \begin{array}{ccc} f_2^! f_1^! \mathbb{R}\Gamma_{Z_1}^\dagger & \xrightarrow{\sim} & (f_1 \circ f_2)^! \mathbb{R}\Gamma_{Z_1}^\dagger \\ \sim \downarrow & \swarrow \sim & \sim \downarrow \\ \mathbb{R}\Gamma_{Z_3}^\dagger f_2^! f_1^! & \xrightarrow{\sim} & \mathbb{R}\Gamma_{Z_3}^\dagger (f_1 \circ f_2)^! \\ & \nwarrow \sim & \swarrow \sim \\ & \mathbb{R}\Gamma_{Z_3}^\dagger f_2^! f_1^! \mathbb{R}\Gamma_{Z_1}^\dagger & \xrightarrow{\sim} & \mathbb{R}\Gamma_{Z_3}^\dagger (f_1 \circ f_2)^! \mathbb{R}\Gamma_{Z_1}^\dagger \end{array}$$

est commutatif. Les rectangles horizontal et oblique sont commutatifs par functorialité, tandis que le triangle de droite l'est par définition. Toutes les flèches étant des isomorphismes, il est alors équivalent de prouver que le triangle de gauche est commutatif. Considérons pour cela le diagramme canonique suivant :

$$(4.7.3) \quad \begin{array}{ccccc} \mathbb{R}\Gamma_{Z_3}^\dagger f_2^! f_1^! \mathbb{R}\Gamma_{Z_1}^\dagger & \xleftarrow{\sim} & \mathbb{R}\Gamma_{Z_3}^\dagger f_2^! \mathbb{R}\Gamma_{Z_2}^\dagger f_1^! \mathbb{R}\Gamma_{Z_1}^\dagger & \xrightarrow{\sim} & \mathbb{R}\Gamma_{Z_3}^\dagger f_2^! f_1^! \mathbb{R}\Gamma_{Z_1}^\dagger \\ \sim \downarrow & & \swarrow \sim & & \searrow \sim \\ f_2^! f_1^! \mathbb{R}\Gamma_{Z_1}^\dagger & \xleftarrow{\sim} & f_2^! \mathbb{R}\Gamma_{Z_2}^\dagger f_1^! \mathbb{R}\Gamma_{Z_1}^\dagger & \xrightarrow{\sim} & f_2^! \mathbb{R}\Gamma_{Z_2}^\dagger f_1^! & \xleftarrow{\sim} & \mathbb{R}\Gamma_{Z_3}^\dagger f_2^! \mathbb{R}\Gamma_{Z_2}^\dagger f_1^! & \xrightarrow{\sim} & \mathbb{R}\Gamma_{Z_3}^\dagger f_2^! f_1^! \end{array}$$

Les trois petits « carrés » de ce diagramme sont commutatifs par functorialité. Par exemple, celui du milieu l'est par functorialité du morphisme canonique $\mathbb{R}\Gamma_{Z_3}^\dagger f_2^! \mathbb{R}\Gamma_{Z_2}^\dagger f_1^! \xrightarrow{\sim} f_2^! \mathbb{R}\Gamma_{Z_2}^\dagger f_1^!$ via $\mathbb{R}\Gamma_{Z_1}^\dagger \rightarrow \text{Id}$. Le composé du haut de 4.7.3 est l'identité de $\mathbb{R}\Gamma_{Z_3}^\dagger f_2^! f_1^! \mathbb{R}\Gamma_{Z_1}^\dagger$. Le composé du bas de 4.7.3 est l'isomorphisme canonique $f_2^! f_1^! \mathbb{R}\Gamma_{Z_1}^\dagger \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}\Gamma_{Z_3}^\dagger f_2^! f_1^!$ du triangle de gauche de 4.7.2. La commutativité de 4.7.3 se traduit donc par celle du triangle de gauche de 4.7.2. \square

THÉORÈME 4.8 (Opérations cohomologiques sur les schémas). – Soient $f_1 : \mathfrak{X}_2 \rightarrow \mathfrak{X}_1$ un morphisme propre de \mathcal{V} -schémas formels lisses, pour $i = 1, 2$, T_i et Z_i des sous-schémas fermés de X_i et $U_i := Z_i \setminus T_i$. On suppose que le morphisme f_1 induit un morphisme $g_1 : U_2 \rightarrow U_1$.

Les foncteurs f_{1+} et $\mathbb{D}_{T_1} \circ f_{1+} \circ \mathbb{D}_{T_2}$ induisent alors des foncteurs $F\text{-}\mathfrak{C}_{\mathfrak{X}_2, T_2, Z_2}^+ \rightarrow F\text{-}\mathfrak{C}_{\mathfrak{X}_1, T_1, Z_1}^+$. De plus, les foncteurs $\mathbb{R}\Gamma_{Z_2}^\dagger \circ (\dagger T_2) \circ f_1^!$ et $\mathbb{D}_{T_2} \circ \mathbb{R}\Gamma_{Z_2}^\dagger \circ (\dagger T_2) \circ f_1^! \circ \mathbb{D}_{T_1}$ induisent des foncteurs $F\text{-}\mathfrak{C}_{\mathfrak{X}_1, T_1, Z_1}^+ \rightarrow F\text{-}\mathfrak{C}_{\mathfrak{X}_2, T_2, Z_2}^+$. Ces foncteurs seront notés abusivement g_{1+} , $g_{1!}$, $g_1^!$ et g_1^+ (en fait, ces notations ne sont pas toujours abusives : voir la remarque 4.9). On les appellera respectivement « image directe », « image directe extraordinaire », « image inverse extraordinaire » et « image inverse » par g_1 .

De plus, soient $f_2 : \mathfrak{X}_3 \rightarrow \mathfrak{X}_2$ (resp. $f_3 : \mathfrak{X}_4 \rightarrow \mathfrak{X}_3$) un morphisme propre de \mathcal{V} -schémas formels lisses et, pour $i = 3, 4$, T_i et Z_i deux sous-schémas fermés de X_i et $U_i := Z_i \setminus T_i$. On suppose que le morphisme f_2 (resp. f_3) induit un morphisme $g_2 : U_3 \rightarrow U_2$ (resp. $g_3 : U_4 \rightarrow U_3$).

On dispose alors de l'isomorphisme de transitivité canonique $g_2^! \circ g_1^! \xrightarrow{\sim} (g_1 \circ g_2)^!$. Celui-ci vérifie la condition d'associativité : les deux isomorphismes composés $g_3^! \circ g_2^! \circ g_1^! \xrightarrow{\sim} g_3^! \circ (g_1 \circ g_2)^! \xrightarrow{\sim} (g_1 \circ g_2 \circ g_3)^!$ et $g_3^! \circ g_2^! \circ g_1^! \xrightarrow{\sim} (g_2 \circ g_3) \circ g_1^! \xrightarrow{\sim} (g_1 \circ g_2 \circ g_3)^!$ sont identiques.

De même, pour les foncteurs images inverses, images directes ou images directes extraordinaires, on bénéficie d'isomorphismes de transitivité canoniques analogues, ces isomorphismes vérifiant la condition d'associativité correspondante.

Démonstration. – Commençons par prouver que les factorisations sont valables. Soient $\mathcal{E}_1 \in F\text{-}\mathfrak{C}_{\mathfrak{X}_1, T_1, Z_1}^+$, $\mathcal{E}_2 \in F\text{-}\mathfrak{C}_{\mathfrak{X}_2, T_2, Z_2}^+$. Par 3.9, $f_{1+}(\mathcal{E}_2)$ est un complexe surholonome. D'après 4.6, on peut supposer que Z_2 est l'adhérence schématique de U_2 dans X_2 . Il en résulte l'inclusion $Z_2 \subset f_1^{-1}(Z_1)$. Le complexe $f_{1+}(\mathcal{E}_2)$ est donc à support dans Z_1 . En outre, puisque $U_2 \cap f_1^{-1}(T_1) = \emptyset$, grâce à 4.6, quitte à remplacer T_2 par $T_2 \cup f_1^{-1}(T_1)$, on se ramène au cas où T_2 contient $f_1^{-1}(T_1)$. Ainsi $\mathbb{R}\Gamma_{T_1}^\dagger \circ f_{1+}(\mathcal{E}_2) \xrightarrow{\sim} f_{1+} \circ \mathbb{R}\Gamma_{f_1^{-1}(T_1)}^\dagger(\mathcal{E}_2) \xrightarrow{\sim} 0$ (voir 1.15.7 pour le premier isomorphisme et 1.15.1 pour le second). Nous avons ainsi vérifié que $f_{1+}(\mathcal{E}_2) \in F\text{-}\mathfrak{C}_{\mathfrak{X}_1, T_1, Z_1}^+$. Puisque le foncteur \mathbb{D}_{T_1} (resp. \mathbb{D}_{T_2}) préserve $F\text{-}\mathfrak{C}_{\mathfrak{X}_1, T_1, Z_1}^+$ (resp. $F\text{-}\mathfrak{C}_{\mathfrak{X}_2, T_2, Z_2}^+$), on en déduit que $\mathbb{D}_{T_1} \circ f_{1+} \circ \mathbb{D}_{T_2}(\mathcal{E}_2) \in F\text{-}\mathfrak{C}_{\mathfrak{X}_1, T_1, Z_1}^+$. De manière analogue, via la stabilité de la surholonomie par image inverse extraordinaire et foncteur cohomologique local (voir 3.3.5, 3.8), on établit que $\mathbb{R}\Gamma_{Z_2}^\dagger \circ (\dagger T_2) \circ f_1^!(\mathcal{E}_1), \mathbb{D}_{T_2} \circ \mathbb{R}\Gamma_{Z_2}^\dagger \circ (\dagger T_2) \circ f_1^! \circ \mathbb{D}_{T_1}(\mathcal{E}_1) \in F\text{-}\mathfrak{C}_{\mathfrak{X}_2, T_2, Z_2}^+$.

Concernant la transitivité du foncteur image directe par g_1 et la condition d'associativité correspondante, cela découle par définition de 3.12. Avec l'isomorphisme de bidualité (voir 4.5), on en déduit que les propriétés analogues sont aussi satisfaites pour le foncteur image directe extraordinaire par g_1 .

Construisons maintenant l'isomorphisme de transitivité du foncteur images inverses extraordinaires. Par commutation aux images inverses extraordinaires des foncteurs cohomologiques locaux à support strict et des foncteurs de localisation (voir 1.15.6) et des propriétés usuelles de composition (voir 1.15.1, 1.15.4), on obtient :

$$(\mathbb{R}\Gamma_{Z_3}^\dagger \circ (\dagger T_3) \circ f_2^!) \circ (\mathbb{R}\Gamma_{Z_2}^\dagger \circ (\dagger T_2) \circ f_1^!) \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}\Gamma_{Z_3 \cap f_2^{-1}(Z_2)}^\dagger \circ (\dagger T_3 \cup f_2^{-1}(T_2)) \circ f_2^! \circ f_1^!.$$

D'après 1.7, on bénéficie de l'isomorphisme de transitivité $f_2^! \circ f_1^! \xrightarrow{\sim} (f_1 \circ f_2)^!$. De plus, comme $Z_3 \setminus T_3 = Z_3 \cap f_2^{-1}(Z_2) \setminus (T_3 \cup f_2^{-1}(T_2))$, par 4.6, 1.15.1 et 1.15.4, on en déduit :

$$(\mathbb{R}\Gamma_{Z_3}^\dagger \circ (\dagger T_3) \circ f_2^!) \circ (\mathbb{R}\Gamma_{Z_2}^\dagger \circ (\dagger T_2) \circ f_1^!) \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}\Gamma_{Z_3}^\dagger \circ (\dagger T_3) \circ (f_1 \circ f_2)^!,$$

ce qui donne par définition l'isomorphisme canonique : $g_2^! \circ g_1^! \xrightarrow{\sim} (g_1 \circ g_2)^!$. La condition d'associativité de cet isomorphisme résulte des différents cas particuliers 1.7, 1.15.2, 4.7 (il s'agit de vérifier la commutativité d'un diagramme que l'on décompose en carrés élémentaires commutatifs grâce aux différents cas particuliers).

Enfin, on déduit du cas de l'image inverse extraordinaire, via l'isomorphisme de bidualité (voir 4.5), que les propriétés analogues sont aussi satisfaites pour le foncteur image inverse par g_1 . \square

REMARQUES 4.9. – Avec les notations 4.8, d'après la proposition 4.19, lorsque \mathfrak{X}_1 et \mathfrak{X}_2 sont propres, les foncteurs g_{1+} , g_{11} , $g_1^!$ et g_1^+ ne dépendent que de g_1 . Avec cette hypothèse de propreté, les notations g_{1+} , g_{11} , $g_1^!$ et g_1^+ de 4.8 ne sont donc plus abusives.

THÉORÈME 4.10. – Soient $f : \mathfrak{X}_2 \rightarrow \mathfrak{X}_1$ un morphisme propre et lisse de \mathcal{V} -schémas formels lisses et, pour $i = 1, 2$, T_i un diviseur de X_i et Z_i un sous-schéma fermé de X_i . On suppose de plus que f induit l'isomorphisme $Z_2 \setminus T_2 \xrightarrow{\sim} Z_1 \setminus T_1$. On se donne $\mathcal{E}_1 \in (F^-)\mathfrak{M}_{\mathfrak{X}_1, T_1, Z_1}^+$ et $\mathcal{E}_2 \in (F^-)\mathfrak{M}_{\mathfrak{X}_2, T_2, Z_2}^+$. Alors,

1. Pour tout $l \neq 0$, $\mathcal{H}^l(f_+)(\mathcal{E}_2) = 0$ et $\mathcal{H}^l((\dagger T_2) \circ \mathbb{R}\Gamma_{Z_2}^\dagger \circ f^!(\mathcal{E}_1)) = 0$.
2. On dispose d'isomorphismes canoniques $f_+ \circ (\dagger T_2) \circ \mathbb{R}\Gamma_{Z_2}^\dagger \circ f^!(\mathcal{E}_1) \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}_1$ et $\mathcal{E}_2 \xrightarrow{\sim} (\dagger T_2) \circ \mathbb{R}\Gamma_{Z_2}^\dagger \circ f^! \circ f_+(\mathcal{E}_2)$.

Les foncteurs f_+ (i.e. avec les notations de 4.8, Id_+) et $\mathbb{R}\Gamma_{Z_2}^\dagger \circ f^!$ (i.e. $\text{Id}^!$) induisent donc des équivalences quasi-inverses entre les catégories $(F^-)\mathfrak{M}_{\mathfrak{X}_2, T_2, Z_2}^+$ et $(F^-)\mathfrak{M}_{\mathfrak{X}_1, T_1, Z_1}^+$. Lorsque Z_2 est l'adhérence schématique de $Z_2 \setminus T_2$ dans X_2 , le foncteur $(\dagger T_2)$ est inutile.

On dispose des mêmes résultats en remplaçant « \mathfrak{M}^+ » par « \mathfrak{M} ».

Démonstration. – En notant Z_2' l'adhérence schématique de $Z_2 \setminus T_2$ dans X_2 , comme $Z_2' \setminus f_0^{-1}(T_1) = Z_2 \setminus T_2$, grâce à 4.6 (et 1.15.1, 1.15.4), on vérifie que pour tout $\mathcal{E}_1 \in (F^-)\mathfrak{M}_{\mathfrak{X}_1, T_1, Z_1}$ (et donc pour tout $\mathcal{E}_1 \in (F^-)\mathfrak{M}_{\mathfrak{X}_1, T_1, Z_1}^+$) le morphisme canonique

$$(4.10.1) \quad \mathbb{R}\Gamma_{Z_2'}^\dagger \circ f^!(\mathcal{E}_1) \rightarrow (\dagger T_2) \circ \mathbb{R}\Gamma_{Z_2}^\dagger \circ f^!(\mathcal{E}_1)$$

est un isomorphisme. On se ramène ainsi au cas où Z_2 est l'adhérence schématique de $Z_2 \setminus T_2$ dans X_2 . Dans ce cas, le foncteur $(\dagger T_2)$ est bien inutile. Le cas où « \mathfrak{M}^+ » est remplacé par « \mathfrak{M} » a été traité dans [11, 3.2.6] (l'énoncé de [11, 3.2.6] est correct lorsque Z_2 est l'adhérence schématique de $Z_2 \setminus T_2$ dans X_2 , autrement il faut rajouter le foncteur $(\dagger T_2)$). Rappelons que d'après [11, 3.2.2.1], le théorème [11, 3.2.6] reste valable sans structure de Frobenius. Le cas non respectif, i.e. celui concernant « \mathfrak{M}^+ », s'en déduit aussitôt grâce à la stabilité de la surholonomie par image inverse extraordinaire et image directe par un morphisme propre, par foncteur cohomologique local à support strict et foncteur de localisation (voir 3.3, 3.8, 3.9). \square

La proposition 4.12 ci-dessous nous sera nécessaire dans la procédure de recollement de 5.2 (qui permet d'après 5.5 de construire, pour toute variété U , la catégorie $(F^-)\mathfrak{M}_U^+$). Cette proposition 4.12 est une conséquence du théorème 4.10 ainsi que du lemme ci-après.

LEMME 4.11. – Soient \mathfrak{X} un \mathcal{V} -schéma formel lisse, T un diviseur de X , Z un sous-schéma fermé de X et $U := Z \setminus T$. Soient n diviseurs T_1, \dots, T_n de X tels que $\cup_{i=1, \dots, n} U_i = U$, avec $U_i := Z \setminus T_i$. Soit $\mathcal{E} \in D_{\text{coh}}^b(\mathcal{D}_{\mathfrak{X}, \mathbb{Q}}^\dagger)$ à support dans Z . Si, pour tout $i = 1, \dots, n$, $(\dagger T_i)(\mathcal{E}) = 0$, alors $(\dagger T)(\mathcal{E}) = 0$.

Démonstration. – Comme $(\dagger T)(\mathcal{E}) \in D_{\text{coh}}^b(\mathcal{D}_{\mathfrak{X}}^{\dagger}(\dagger T)_{\mathbb{Q}})$, il résulte de 1.9 que $(\dagger T)(\mathcal{E}) = 0$ si et seulement si \mathcal{E} est nul en dehors de T . On se ramène ainsi au cas où T est vide. D'après [11, 2.2.9], comme \mathcal{E} est à support dans Z , $\mathbb{R}\Gamma_Z^{\dagger}(\mathcal{E}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}$. De plus, pour tout $i = 1, \dots, n$, le triangle de localisation en T_i (voir 1.15.3) donne $\mathbb{R}\Gamma_{T_i}^{\dagger}(\mathcal{E}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}$. Par 1.15.1, on en déduit : $\mathbb{R}\Gamma_{Z \cap \cap_{i=1, \dots, n} T_i}^{\dagger}(\mathcal{E}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}$. Comme $Z \cap \cap_{i=1, \dots, n} T_i = \emptyset$, $\mathbb{R}\Gamma_{Z \cap \cap_{i=1, \dots, n} T_i}^{\dagger}(\mathcal{E}) = 0$. D'où $\mathcal{E} = 0$. \square

PROPOSITION 4.12. – *Soient $f : \mathfrak{X}' \rightarrow \mathfrak{X}$ un morphisme propre et lisse de \mathcal{V} -schémas formels lisses, T (resp. T') un diviseur de X (resp. X'), Z (resp. Z') un sous-schéma fermé de X (resp. X') et $U := Z \setminus T$ (resp. $U' := Z' \setminus T'$). On suppose que f induit une immersion ouverte $j : U' \hookrightarrow U$.*

Pour tout $\mathcal{E} \in (F-)\mathfrak{M}_{\mathfrak{X}, T, Z}$, pour tout $l \neq 0$, $\mathcal{H}^l((\dagger T')\mathbb{R}\Gamma_{Z'}^{\dagger} \circ f^l(\mathcal{E})) = 0$. Le foncteur $j^! := (\dagger T')\mathbb{R}\Gamma_{Z'}^{\dagger} \circ f^!$ induit donc le foncteur $j^! : (F-)\mathfrak{M}_{\mathfrak{X}, T, Z} \rightarrow (F-)\mathfrak{M}_{\mathfrak{X}', T', Z'}$. De même en remplaçant la surcohérence par la surholonomie, i.e. « \mathfrak{M} » par « \mathfrak{M}^+ ».

Démonstration. – Comme un module surholonome est surcohérent, le cas surholonome découle immédiatement du cas surcohérent. Traitons donc ce dernier. Soit $\mathcal{E} \in (F-)\mathfrak{M}_{\mathfrak{X}, T, Z}$. Comme le morphisme canonique $\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}(\dagger T)$ est un isomorphisme, avec 1.15.4 et 1.15.6, on obtient l'isomorphisme $(\dagger T')\mathbb{R}\Gamma_{Z'}^{\dagger} \circ f^l(\mathcal{E}) \xrightarrow{\sim} (\dagger T' \cup f_0^{-1}(T))\mathbb{R}\Gamma_{Z'}^{\dagger} \circ f^l(\mathcal{E})$. Comme $Z' \setminus T' = Z' \setminus (T' \cup f_0^{-1}(T))$, par 4.10, $(F-)\mathfrak{M}_{\mathfrak{X}', T', Z'} = (F-)\mathfrak{M}_{\mathfrak{X}', T' \cup f_0^{-1}(T), Z'}$. Quitte à remplacer T' par $T' \cup f_0^{-1}(T)$, on peut donc supposer $f_0^{-1}(T) \subset T'$. Par stabilité de la surcohérence par image inverse extraordinaire et foncteur cohomologique local, $(\dagger T')\mathbb{R}\Gamma_{Z'}^{\dagger} \circ f^l(\mathcal{E}) \in D_{\text{coh}}^b(\mathcal{D}_{\mathfrak{X}'}^{\dagger}(\dagger T')_{\mathbb{Q}})$. On en déduit, d'après 1.9, que $\mathcal{H}^l((\dagger T')\mathbb{R}\Gamma_{Z'}^{\dagger} \circ f^l(\mathcal{E})) = 0$ si et seulement si sa restriction en dehors de T' est nulle et donc si et seulement si sa restriction en dehors de $f_0^{-1}(T)$ est nulle. Quitte à remplacer f par le morphisme propre et lisse induit $\mathfrak{X}' \setminus f_0^{-1}(T) \rightarrow \mathfrak{X} \setminus T$, on se ramène ainsi au cas où T est vide, i.e. $U = Z$.

Comme $j : U' \hookrightarrow Z$ est une immersion ouverte, $Z \setminus j(U')$ est un sous-schéma fermé de X . Il existe donc des diviseurs T_1, \dots, T_n de X tels que $\cap_{i=1, \dots, n} T_i = Z \setminus j(U')$. Pour tout $i = 1, \dots, n$, notons $T'_i := T' \cup f_0^{-1}(T_i)$ les diviseurs de X' correspondants et $U'_i := Z' \setminus T'_i$. L'immersion ouverte j induit donc, pour tout $i = 1, \dots, n$, l'isomorphisme $U'_i \xrightarrow{\sim} j(U') \setminus T_i$. Or, comme $Z \setminus T_i \subset Z \setminus \cap_{i=1, \dots, n} T_i = j(U')$, on obtient $Z \setminus T_i \subset j(U') \setminus T_i$. D'où $Z \setminus T_i = j(U') \setminus T_i$. Le morphisme f induit donc l'isomorphisme $U'_i \xrightarrow{\sim} Z \setminus T_i$. Ainsi, d'après 4.10, $(F-)\mathfrak{M}_{\mathfrak{X}', T'_i, Z'} \cong (F-)\mathfrak{M}_{\mathfrak{X}, T_i, Z}$ et, pour tout $l \neq 0$, comme $\mathcal{E}(\dagger T_i) \in (F-)\mathfrak{M}_{\mathfrak{X}, T_i, Z}$, alors $\mathcal{H}^l((\dagger T'_i)\mathbb{R}\Gamma_{Z'}^{\dagger} \circ f^l(\mathcal{E}(\dagger T_i))) = 0$. Comme T'_i est un diviseur, le foncteur $(\dagger T'_i)$ est exact sur la catégorie des modules cohérents (voir 1.10.1). On obtient donc, via aussi 1.15.4 et 1.15.6, l'isomorphisme canonique

$$(\dagger T'_i)(\mathcal{H}^l(\mathbb{R}\Gamma_{Z'}^{\dagger} \circ f^l(\mathcal{E}))) \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}^l((\dagger T'_i)\mathbb{R}\Gamma_{Z'}^{\dagger} \circ f^l(\mathcal{E}(\dagger T_i))) = 0.$$

D'après 4.11, comme $\cup_{i=1, \dots, n} U'_i = U'$, on obtient alors $(\dagger T')(\mathcal{H}^l(\mathbb{R}\Gamma_{Z'}^{\dagger} \circ f^l(\mathcal{E}))) = 0$. Comme T' est un diviseur, il en résulte

$$\mathcal{H}^l((\dagger T')\mathbb{R}\Gamma_{Z'}^{\dagger} \circ f^l(\mathcal{E})) \xrightarrow{\sim} (\dagger T')(\mathcal{H}^l(\mathbb{R}\Gamma_{Z'}^{\dagger} \circ f^l(\mathcal{E}))) = 0. \quad \square$$

REMARQUES 4.13. – Dans la proposition 4.12, le fait que T et T' soient des diviseurs est indispensable. En effet, voici un contre-exemple : soient \mathfrak{X} un \mathcal{V} -schéma formel lisse tel que $\dim X \geq 2$, T un sous-schéma fermé lisse de X de codimension pure égale à 2. On obtient

ainsi une immersion ouverte $j : X \setminus T \subset X$. D'après 7.3, $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}, \mathbb{Q}} \in F\text{-}\mathfrak{M}_{\mathfrak{X}, \emptyset, X}^+$. Avec les notations analogues à 4.12, on pose $j^!(\mathcal{O}_{\mathfrak{X}, \mathbb{Q}}) := \mathcal{O}_{\mathfrak{X}, \mathbb{Q}}(\dagger T)$. On vérifie grâce au triangle distingué de localisation (voir 1.15.3)

$$\mathbb{R}\Gamma_T^\dagger(\mathcal{O}_{\mathfrak{X}, \mathbb{Q}}) \rightarrow \mathcal{O}_{\mathfrak{X}, \mathbb{Q}} \rightarrow \mathcal{O}_{\mathfrak{X}, \mathbb{Q}}(\dagger T) \rightarrow \mathbb{R}\Gamma_T^\dagger(\mathcal{O}_{\mathfrak{X}, \mathbb{Q}})[1],$$

que $\mathcal{H}^1(\mathcal{O}_{\mathfrak{X}, \mathbb{Q}}(\dagger T)) \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}_T^2(\mathcal{O}_{\mathfrak{X}, \mathbb{Q}}) \neq 0$. En effet, si $u : \mathcal{T} \hookrightarrow \mathfrak{X}$ est un relèvement de $T \hookrightarrow X$ (ce qui est localement sur \mathfrak{X} possible, par exemple lorsque \mathfrak{X} est affine), $\mathcal{H}_T^2(\mathcal{O}_{\mathfrak{X}, \mathbb{Q}}) \xrightarrow{\sim} u_+(\mathcal{O}_{\mathcal{T}, \mathbb{Q}}) \neq 0$. En d'autres termes, $\mathcal{H}^1(j^!(\mathcal{O}_{\mathfrak{X}, \mathbb{Q}})) \neq 0$.

4.14. – Pour $i = 1, 2$, soient \mathfrak{X}_i un \mathcal{V} -schéma formel propre et lisse, T_i un diviseur de X_i , Z_i un sous-schéma fermé de X_i . On suppose en outre que $Z_2 \setminus T_2 = Z_1 \setminus T_1$. Les catégories $(F\text{-})\mathfrak{M}_{\mathfrak{X}_1, T_1, Z_1}^+$ et $(F\text{-})\mathfrak{M}_{\mathfrak{X}_2, T_2, Z_2}^+$ sont alors canoniquement isomorphes.

En effet, de manière analogue à [11, 3.2.9], quitte à remplacer \mathfrak{X}_2 par $\mathfrak{X}_1 \times \mathfrak{X}_2$ (et utiliser les projections de $\mathfrak{X}_1 \times \mathfrak{X}_2$ sur \mathfrak{X}_1 et \mathfrak{X}_2), on se ramène grâce à 4.10 au cas où il existe un morphisme propre et lisse $f : \mathfrak{X}_2 \rightarrow \mathfrak{X}_1$ induisant l'identité sur $Z_2 \setminus T_2$. Le théorème 4.10 nous permet dans ces conditions de conclure.

DÉFINITION 4.15. – D'après 4.14, si U est une variété telle qu'il existe un \mathcal{V} -schéma formel \mathfrak{X} propre et lisse, un diviseur T de X , un sous-schéma fermé Z de X tels que $U = Z \setminus T$, la catégorie $(F\text{-})\mathfrak{M}_{\mathfrak{X}, T, Z}^+$ ne dépend canoniquement que de U . On la notera donc simplement $(F\text{-})\mathfrak{M}_U^+$.

Ses objets seront nommés « $(F\text{-})\mathcal{D}_U$ -modules arithmétiques surholonomes ». Ils constituent un analogue p -adique de la catégorie des $\mathcal{D}_{U_{\mathbb{C}}}$ -modules holonomes, où $U_{\mathbb{C}}$ est une variété sur le corps des complexes \mathbb{C} . Nous étendrons dans 5 la construction de $(F\text{-})\mathfrak{M}_U^+$ pour une variété U quelconque.

THÉORÈME 4.16. – Soient $f : \mathfrak{X}_2 \rightarrow \mathfrak{X}_1$ un morphisme propre de \mathcal{V} -schémas formels lisses, T_1 et Z_1 deux sous-schémas fermés de X_1 , T_2 et Z_2 deux sous-schémas fermés de X_2 . De plus, on suppose que f induit l'isomorphisme $Z_2 \setminus T_2 \xrightarrow{\sim} Z_1 \setminus T_1$.

Alors, les foncteurs f_+ et $(\dagger T_2) \circ \mathbb{R}\Gamma_{Z_2}^\dagger \circ f^!$ induisent des équivalences quasi-inverses entre les catégories $(F\text{-})\mathfrak{C}_{\mathfrak{X}_2, T_2, Z_2}^+$ et $(F\text{-})\mathfrak{C}_{\mathfrak{X}_1, T_1, Z_1}^+$. Lorsque Z_2 est l'adhérence schématique de $Z_2 \setminus T_2$ dans X_2 , le foncteur $(\dagger T_2)$ est inutile. On dispose des mêmes résultats en remplaçant « \mathfrak{C}^+ » par « \mathfrak{C} ».

Démonstration. – L'isomorphisme 4.10.1 (de la preuve de 4.10) reste valable pour $\mathcal{E}_1 \in (F\text{-})\mathfrak{C}_{\mathfrak{X}_1, T_1, Z_1}$. On se ramène alors (de manière analogue à 4.10) au cas où Z_2 est l'adhérence schématique de $Z_2 \setminus T_2$ dans X_2 . Dans ce cas, le foncteur $(\dagger T_2)$ est inutile et le théorème a alors déjà été traité pour les complexes surcohérents dans [11, 3.2.8]. Le cas concernant « \mathfrak{C}^+ » (à la place de « \mathfrak{C} ») en résulte grâce à la stabilité de la surholonomie. \square

REMARQUES 4.17. – La différence entre les deux théorèmes 4.10 et 4.16 est que le premier concerne les « modules » tandis que le second traite des « complexes ». Pour que les foncteurs que nous utilisons dans ces deux théorèmes (i.e. ceux de la forme f_+ et $(\dagger T_2) \circ \mathbb{R}\Gamma_{Z_2}^\dagger \circ f^!$) préservent bien le fait d'être un module (i.e. la condition 4.10.1 doit être vérifiée), les hypothèses de 4.10 sont alors plus fortes que celles de 4.16 : le morphisme f est lisse en plus d'être propre et les sous-schémas fermés T_1 et T_2 sont en outre des diviseurs. Le fait que T_1 et T_2 soient des

diviseurs permet d'utiliser 1.9, ce qui est techniquement très appréciable (dans la preuve de [11, 3.2.6], cela permet de traiter assez facilement le cas où $Z_2 \setminus T_2$ est lisse). De plus, l'hypothèse de lissité de f permet de conserver des diviseurs, i.e. le sous-schéma fermé $f^{-1}(T_1)$ est alors un diviseur de X_2 . Enfin, le contre-exemple de 4.13 indique que l'hypothèse que T_1 et T_2 soient des diviseurs permet (dans le cas des modules) de travailler dans un cadre plus adéquat.

DÉFINITION 4.18. – Soit U une variété telle qu'il existe un \mathcal{V} -schéma formel \mathfrak{X} propre et lisse, deux sous-schémas fermés Z, T de X tels que $U = Z \setminus T$. De façon similaire à 4.15 ou à [11, 3.2.9], il découle de 4.16 que la catégorie $(F-)\mathfrak{C}_{\mathfrak{X}, T, Z}^+$ est indépendante de \mathfrak{X}, T et Z , ne dépend que de U et sera désignée par $(F-)\mathcal{D}_{\text{surhol}}^b(\mathcal{D}_U)$. Ses objets sont appelés « $(F-)$ complexes de \mathcal{D} -modules arithmétiques surholonomes sur U » ou simplement « $(F-)$ complexes surholonomes sur U ». Elles correspondent à un analogue p -adique de la catégorie des complexes à cohomologie bornée et holonome sur une variété complexe $U_{\mathbb{C}}$ notée $D_{\text{hol}}^b(\mathcal{D}_{U_{\mathbb{C}}})$.

PROPOSITION 4.19. – Soient $g : U_2 \rightarrow U_1$ un morphisme de variétés. On suppose que, pour $i = 1, 2$, U_i se plonge dans un \mathcal{V} -schéma formel propre et lisse \mathfrak{X}_i . On note alors Z_i l'adhérence schématique de U_i dans X_i et $T_i := Z_i \setminus U_i$.

On dispose alors des foncteurs canoniques $g_+, g! : F\text{-}\mathcal{D}_{\text{surhol}}^b(\mathcal{D}_{U_2}) \rightarrow F\text{-}\mathcal{D}_{\text{surhol}}^b(\mathcal{D}_{U_1})$ et $g^!, g^+ : F\text{-}\mathcal{D}_{\text{surhol}}^b(\mathcal{D}_{U_1}) \rightarrow F\text{-}\mathcal{D}_{\text{surhol}}^b(\mathcal{D}_{U_2})$. Ces foncteurs ne dépendent canoniquement que de g et sont respectivement « l'image directe », « l'image directe extraordinaire », « l'image inverse extraordinaire » et « l'image inverse » par g .

Lorsqu'il existe un morphisme $f : \mathfrak{X}_2 \rightarrow \mathfrak{X}_1$ propre et lisse prolongeant g , alors ceux-ci correspondent à ceux définis dans 4.8, i.e. $g_+ = f_+, g! = \mathbb{D}_{T_1} \circ f_+ \circ \mathbb{D}_{T_2}, g^! = \mathbb{R}\Gamma_{Z_2}^\dagger \circ (\dagger T_2) \circ f^!, g^+ = \mathbb{D}_{T_2} \circ \mathbb{R}\Gamma_{Z_2}^\dagger \circ (\dagger T_2) \circ f^! \circ \mathbb{D}_{T_1}$.

Démonstration. – Quitte à remplacer \mathfrak{X}_2 par $\mathfrak{X}_2 \times \mathfrak{X}_1, T_2$ par la réunion des images inverses de T_1 et T_2 sur $X_2 \times X_1, Z_2$ par l'adhérence schématique de U_2 dans $X_2 \times X_1$, grâce à 4.16, on peut supposer qu'il existe un morphisme propre et lisse $f : \mathfrak{X}_2 \rightarrow \mathfrak{X}_1$ prolongeant g .

On vérifie à présent que les foncteurs définis dans 4.8 ne dépendent canoniquement pas du prolongement f . En effet, soit $f' : \mathfrak{X}'_2 \rightarrow \mathfrak{X}'_1$ un second morphisme de \mathcal{V} -schémas formels propres et lisses prolongeant g . Pour $i = 1, 2$, on note de même Z'_i l'adhérence schématique de U_i dans X'_i et $T'_i := Z'_i \setminus U_i$.

Alors, quitte à remplacer \mathfrak{X}'_i par $\mathfrak{X}'_i \times \mathfrak{X}_i, T'_i$ par la réunion des images inverses de T_i et T'_i sur $X'_i \times X_i, Z'_i$ par l'adhérence schématique de U_i dans $X'_i \times X_i$, on peut supposer qu'il existe deux morphismes $u_1 : \mathfrak{X}'_1 \rightarrow \mathfrak{X}_1$ et $u_2 : \mathfrak{X}'_2 \rightarrow \mathfrak{X}_2$ propres et lisses induisant l'identité sur U_1 et U_2 respectivement, tels que $f \circ u_2 = u_1 \circ f'$ et tels que les foncteurs u_{i+} et $(\dagger T'_i) \circ \mathbb{R}\Gamma_{Z'_i}^\dagger \circ u_i^!$ induisent des équivalences quasi-inverses $F\text{-}\mathfrak{C}_{\mathfrak{X}'_i, T'_i, Z'_i}^+ \cong F\text{-}\mathfrak{C}_{\mathfrak{X}_i, T_i, Z_i}^+$ (voir 4.16).

Soit $\mathcal{E}'_2 \in F\text{-}\mathfrak{C}_{\mathfrak{X}'_2, T'_2, Z'_2}^+$. Il lui correspond canoniquement $\mathcal{E}_2 = u_{2+}(\mathcal{E}'_2) \in F\text{-}\mathfrak{C}_{\mathfrak{X}_2, T_2, Z_2}^+$. On obtient alors l'isomorphisme canonique $f'_+(\mathcal{E}'_2) \xrightarrow{\sim} u_{1+}f_+(\mathcal{E}_2)$. En d'autres termes, le foncteur g_+ est canoniquement indépendant du choix du prolongement f . On procède de même pour les trois autres foncteurs. \square

REMARQUES 4.20. – Avec les notations de 4.19 et de sa preuve, lorsque g est propre, on peut même supposer que le prolongement f vérifie $T_2 = f_0^{-1}(T_1)$.

En effet, d'après [23, II.4.8.(e)], le fait que g soit propre implique que l'immersion ouverte $U_2 \hookrightarrow Z_2 \setminus f_0^{-1}(T_1)$ est un morphisme propre. Comme U_2 est dense dans Z_2 , on obtient alors $U_2 = Z_2 \setminus f_0^{-1}(T_1)$. D'où : $F\text{-}\mathfrak{C}_{\mathfrak{X}_2, T_2, Z_2}^+ = F\text{-}\mathfrak{C}_{\mathfrak{X}_2, f_0^{-1}(T_1), Z_2}^+$ (voir 4.6).

PROPOSITION 4.21. – Soit U une variété qui se plonge dans un \mathcal{V} -schéma formel propre et lisse \mathfrak{X} . Soient $u : Y \hookrightarrow U$ une immersion fermée et $j : U \setminus Y \subset U$ l'immersion ouverte induite. On dispose alors, pour tout $\mathcal{E} \in F\text{-}D_{\text{surhol}}^b(\mathcal{D}_U)$, du triangle distingué de localisation :

$$(4.21.1) \quad u_+ u^!(\mathcal{E}) \rightarrow \mathcal{E} \rightarrow j_+ j^!(\mathcal{E}) \rightarrow u_+ u^!(\mathcal{E})[1].$$

Démonstration. – Notons Z (resp. Z') l'adhérence schématique de U (resp. Y) dans X et $T := Z \setminus U$. Considérons \mathcal{E} comme un élément de $F\text{-}\mathfrak{C}_{\mathfrak{X}, T, Z}^+$. On dispose du triangle de localisation (voir 1.15.3) :

$$\mathbb{R}\Gamma_{Z'}^{\dagger}(\mathcal{E}) \rightarrow \mathcal{E} \rightarrow (\dagger Z')(\mathcal{E}) \rightarrow \mathbb{R}\Gamma_Z^{\dagger}(\mathcal{E})[1].$$

Comme $Y = Z' \setminus T$, on remarque que $F\text{-}\mathfrak{C}_Y^+ = F\text{-}\mathfrak{C}_{\mathfrak{X}, T, Z'}^+$. Par définition (voir 4.19), $u^!(\mathcal{E}) = \mathbb{R}\Gamma_{Z'}^{\dagger}(\mathcal{E})$ et $u_+(\mathbb{R}\Gamma_{Z'}^{\dagger}(\mathcal{E})) = \mathbb{R}\Gamma_Z^{\dagger}(\mathcal{E})$. De même, comme $U \setminus Y = Z \setminus (T \cup Z')$, alors $F\text{-}\mathfrak{C}_{U \setminus Y}^+ = F\text{-}\mathfrak{C}_{\mathfrak{X}, T \cup Z', Z}^+$, $j^!(\mathcal{E}) = (\dagger Z')(\mathcal{E})$ et $j_+((\dagger Z')(\mathcal{E})) = (\dagger Z')(\mathcal{E})$. \square

4.22. Isomorphisme de dualité relative

On garde les notations de 4.19. Comme il est encore conjectural que l'isomorphisme de dualité relative d'un morphisme propre (voir 1.11.1, puis 4.5) soit compatible à Frobenius, il n'est pas clair que le foncteur $\mathbb{D}_{\mathfrak{X}_1, T_1, Z_1} : F\text{-}\mathfrak{C}_{\mathfrak{X}_1, T_1, Z_1}^+ \rightarrow F\text{-}\mathfrak{C}_{\mathfrak{X}_1, T_1, Z_1}^+$ soit indépendant, à isomorphisme canonique près, du choix de \mathfrak{X}_1, T_1 et Z_1 tels que $U_1 = Z_1 \setminus T_1$. La construction d'un foncteur dual sur $F\text{-}D_{\text{surhol}}^b(\mathcal{D}_{U_1})$ devient donc problématique.

Pour y remédier, on construit alors la catégorie $F\text{-}D_{\text{surhol}}^{\text{bv}}(\mathcal{D}_{U_1})$ ainsi que le foncteur dual \mathbb{D}_{U_1} induisant l'équivalence de catégories $\mathbb{D}_{U_1} : F\text{-}D_{\text{surhol}}^b(\mathcal{D}_{U_1}) \cong F\text{-}D_{\text{surhol}}^{\text{bv}}(\mathcal{D}_{U_1})$ de la manière suivante.

De façon analogue au théorème 4.16, lorsque g est un isomorphisme, on vérifie que les foncteurs $f_!$ et $\mathbb{D} \circ (\dagger T_2) \circ \mathbb{R}\Gamma_{Z_2}^{\dagger} \circ f^! \circ \mathbb{D}$ induisent des équivalences quasi-inverses entre les catégories $(F\text{-})\mathfrak{C}_{\mathfrak{X}_2, T_2, Z_2}^+$ et $(F\text{-})\mathfrak{C}_{\mathfrak{X}_1, T_1, Z_1}^+$. Il résulte de cette « version dualisée » du théorème 4.16 que la catégorie $(F\text{-})\mathfrak{C}_{\mathfrak{X}_1, T_1, Z_1}^+$ est alors indépendante du choix de \mathfrak{X}_1, T_1 et Z_1 tels que $U_1 = Z_1 \setminus T_1$ à isomorphisme canonique près (ces isomorphismes canoniques sont dans cette deuxième construction de la forme $f_!$ ou $\mathbb{D} \circ (\dagger T_2) \circ \mathbb{R}\Gamma_{Z_2}^{\dagger} \circ f^! \circ \mathbb{D}$). On la note alors $(F\text{-})D_{\text{surhol}}^{\text{bv}}(\mathcal{D}_U)$.

Le foncteur $\mathbb{D}_{\mathfrak{X}_1, T_1} : F\text{-}\mathfrak{C}_{\mathfrak{X}_1, T_1, Z_1}^+ \rightarrow F\text{-}\mathfrak{C}_{\mathfrak{X}_1, T_1, Z_1}^+$ induit alors les équivalences de catégories

$$\mathbb{D}_{U_1} : F\text{-}D_{\text{surhol}}^b(\mathcal{D}_{U_1}) \cong F\text{-}D_{\text{surhol}}^{\text{bv}}(\mathcal{D}_{U_1}) \text{ et } \mathbb{D}_{U_1} : F\text{-}D_{\text{surhol}}^{\text{bv}}(\mathcal{D}_{U_1}) \cong F\text{-}D_{\text{surhol}}^b(\mathcal{D}_{U_1}).$$

En effet, via le théorème de bidualité qui commute à Frobenius (voir 1.10.7), on vérifie que le foncteur \mathbb{D}_{U_1} ne dépend pas à isomorphisme canonique près du choix du triplet $(\mathfrak{X}_1, T_1, Z_1)$ tel que $U_1 = Z_1 \setminus T_1$.

En oubliant Frobenius (voir 4.3), on a

$$D_{\text{surhol}}^{\text{bv}}(\mathcal{D}_{U_1}) = D_{\text{surhol}}^{\text{b}}(\mathcal{D}_{U_1}) \text{ et } \mathbb{D}_{U_1} : D_{\text{surhol}}^{\text{b}}(\mathcal{D}_{U_1}) \cong D_{\text{surhol}}^{\text{b}}(\mathcal{D}_{U_1}).$$

Lorsque g est propre, il découle de 4.5 que l'on dispose de l'isomorphisme de foncteurs $D_{\text{surhol}}^{\text{b}}(\mathcal{D}_{U_2}) \rightarrow D_{\text{surhol}}^{\text{bv}}(\mathcal{D}_{U_1})$:

$$(4.22.1) \quad \mathbb{D}_{U_1} \circ g_+ \xrightarrow{\sim} g_+ \circ \mathbb{D}_{U_2}.$$

Cet isomorphisme est par définition « l'isomorphisme de dualité relative ».

Enfin, si l'isomorphisme de dualité relative de 1.11.1 est compatible à Frobenius, alors celui de 4.22.1 l'est aussi et donc $F\text{-}D_{\text{surhol}}^{\text{bv}}(\mathcal{D}_{U_1}) = F\text{-}D_{\text{surhol}}^{\text{b}}(\mathcal{D}_{U_1})$ (car alors l'isomorphisme $f_! \xrightarrow{\sim} f_+$ commute à Frobenius).

4.23. Coefficient constant

Soient \mathfrak{X} un \mathcal{V} -schéma formel propre et lisse, T et Z deux sous-schémas fermés de X , $U := Z \setminus T$. Le « coefficient constant associé à U » est défini en posant $\mathcal{O}_U := \mathbb{R}\Gamma_Z^\dagger(\dagger T)(\mathcal{O}_{\mathfrak{X}, \mathbb{Q}})[-d_{U/X}]$. Celui-ci ne dépend pas du choix du triplet (\mathfrak{X}, T, Z) tel que $Z \setminus T = U$. En effet, d'après 7.3, ce complexe est un objet de $F\text{-}D_{\text{surhol}}^{\text{b}}(\mathcal{D}_U)$. Cela résulte alors de 4.19 en remarquant que $\mathcal{O}_U = j^!(\mathcal{O}_{\mathfrak{X}, \mathbb{Q}})[-d_{U/X}]$. Notons que le foncteur $j^![-d_{U/X}]$ est un analogue de $\mathbb{L}j^*$.

Lorsque U est lisse et T est un diviseur, le complexe $\mathcal{O}_U = \mathbb{R}\Gamma_Z^\dagger(\dagger T)(\mathcal{O}_{\mathfrak{X}, \mathbb{Q}})[-d_{U/X}]$ est réduit à un terme. En effet, en notant $\mathcal{Y} := \mathfrak{X} \setminus T$, il suffit d'après 1.9 de le voir en dehors de T . Or, $\mathbb{R}\Gamma_Z^\dagger(\dagger T)(\mathcal{O}_{\mathfrak{X}, \mathbb{Q}})[-d_{U/X}]|_{\mathcal{Y}} \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}\Gamma_U^\dagger(\mathcal{O}_{\mathcal{Y}, \mathbb{Q}})[-d_{U/X}]$. Ce dernier est réduit à un terme car U est lisse. Dans ces conditions, \mathcal{O}_U est un $F\text{-}\mathcal{D}_U$ -module arithmétique surholonome. Par exemple, si $Z = X$, $\mathcal{O}_U = \mathcal{O}_{\mathfrak{X}}(\dagger T)_{\mathbb{Q}}$.

5. \mathcal{D} -modules arithmétiques surholonomes sur une variété quelconque

Soit U une variété. Lorsqu'il n'existe pas de \mathcal{V} -schéma formel propre et lisse \mathfrak{X} , de sous-schéma fermé Z de X et de diviseur T de X tels que $U = Z \setminus T$, on peut néanmoins étendre la construction de $(F\text{-})\mathfrak{M}_U$, $(F\text{-})\mathfrak{M}_U^+$ par recollement. Nous détaillons la procédure dans cette section.

NOTATIONS 5.1. – On choisit un recouvrement fini ouvert $(U_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$ de U , tel que, pour tout $\alpha \in \Lambda$, il existe un \mathcal{V} -schéma formel propre et lisse \mathfrak{X}_α , un sous-schéma fermé Z_α de X_α et un diviseur T_α de X_α tel que $U_\alpha = Z_\alpha \setminus T_\alpha$. De tels recouvrements existent bien. En effet, si U_α est un ouvert affine de U , il existe une immersion fermée de la forme $U_\alpha \hookrightarrow \mathbb{A}_k^n$. Il suffit alors de prendre \mathfrak{X}_α égal au complété p -adique de l'espace projectif \mathbb{P}_k^n , T_α le diviseur de \mathbb{P}_k^n complémentaire de \mathbb{A}_k^n et Z_α l'adhérence schématique de U_α dans \mathbb{P}_k^n .

Pour tous α, β et $\gamma \in \Lambda$, on note $p_1^{\alpha\beta} : \mathfrak{X}_\alpha \times_{\mathcal{S}} \mathfrak{X}_\beta \rightarrow \mathfrak{X}_\alpha$ et $p_2^{\alpha\beta} : \mathfrak{X}_\alpha \times_{\mathcal{S}} \mathfrak{X}_\beta \rightarrow \mathfrak{X}_\beta$ les projections canoniques, $Z_{\alpha\beta}$ l'adhérence schématique de $U_\alpha \cap U_\beta$ dans $X_\alpha \times X_\beta$ (via l'immersion $U_\alpha \cap U_\beta \hookrightarrow U_\alpha \times U_\beta \hookrightarrow X_\alpha \times X_\beta$), $T_{\alpha\beta} = p_1^{\alpha\beta-1}(T_\alpha) \cup p_2^{\alpha\beta-1}(T_\beta)$. On remarque que $(F\text{-})\mathfrak{M}_{U_\alpha \cap U_\beta}^+ = (F\text{-})\mathfrak{M}_{\mathfrak{X}_\alpha \times \mathfrak{X}_\beta, T_{\alpha\beta}, Z_{\alpha\beta}}^+$. De même, en notant $Z_{\alpha\beta\gamma}$ l'adhérence schématique de $U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma$ dans $X_\alpha \times X_\beta \times X_\gamma$, et $T_{\alpha\beta\gamma}$ la réunion des images inverses de T_α, T_β et T_γ par les projections de $\mathfrak{X}_\alpha \times \mathfrak{X}_\beta \times \mathfrak{X}_\gamma$ sur $\mathfrak{X}_\alpha, \mathfrak{X}_\beta$ et \mathfrak{X}_γ , on remarque que $(F\text{-})\mathfrak{M}_{U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma}^+ = (F\text{-})\mathfrak{M}_{\mathfrak{X}_\alpha \times \mathfrak{X}_\beta \times \mathfrak{X}_\gamma, T_{\alpha\beta\gamma}, Z_{\alpha\beta\gamma}}^+$.

Soient $j_1^{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \subset U_\alpha$, $j_2^{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \subset U_\beta$, $j_{12}^{\alpha\beta\gamma} : U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma \subset U_\alpha \cap U_\beta$, $j_{23}^{\alpha\beta\gamma} : U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma \subset U_\beta \cap U_\gamma$ et $j_{13}^{\alpha\beta\gamma} : U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma \subset U_\alpha \cap U_\gamma$ les immersions ouvertes.

DÉFINITION 5.2. – Avec les notations 5.1, on définit la catégorie $(F-)\mathfrak{M}^+(U, (U_\alpha, \mathfrak{X}_\alpha, T_\alpha, Z_\alpha)_{\alpha \in \Lambda})$ de la façon suivante :

- Un objet est constitué par la donnée, pour tout $\alpha \in \Lambda$, d'un objet \mathcal{E}_α de $(F-)\mathfrak{M}_{\mathfrak{X}_\alpha, T_\alpha, Z_\alpha}^+$ et, pour tous $\alpha, \beta \in \Lambda$, d'un isomorphisme $\theta_{\alpha\beta} : j_2^{\alpha\beta}(\mathcal{E}_\beta) \xrightarrow{\sim} j_1^{\alpha\beta}(\mathcal{E}_\alpha)$ de $(F-)\mathfrak{M}_{U_\alpha \cap U_\beta}^+$ (i.e. d'un isomorphisme $\mathcal{D}_{\mathfrak{X}_\alpha \times_S \mathfrak{X}_\beta, \mathbb{Q}}^\dagger$ -linéaire $\mathbb{R}\Gamma_{Z_{\alpha\beta}}^\dagger \circ (\dagger T_{\alpha\beta}) \circ p_2^{\alpha\beta}(\mathcal{E}_\beta) \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}\Gamma_{Z_{\alpha\beta}}^\dagger \circ (\dagger T_{\alpha\beta}) \circ p_1^{\alpha\beta}(\mathcal{E}_\alpha)$), ces isomorphismes vérifiant dans $(F-)\mathfrak{M}_{U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma}^+$ la condition de cocycle $j_{13}^{\alpha\beta\gamma}(\theta_{\alpha\gamma}) = j_{12}^{\alpha\beta\gamma}(\theta_{\alpha\beta}) \circ j_{23}^{\alpha\beta\gamma}(\theta_{\beta\gamma})$. La famille d'isomorphismes $(\theta_{\alpha\beta})_{\alpha, \beta \in \Lambda}$ est appelée « donnée de recollement » de $(\mathcal{E}_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$.
- Une flèche $((\mathcal{E}_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}, (\theta_{\alpha\beta})_{\alpha, \beta \in \Lambda}) \rightarrow ((\mathcal{E}'_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}, (\theta'_{\alpha\beta})_{\alpha, \beta \in \Lambda})$ de la catégorie $(F-)\mathfrak{M}^+(U, (U_\alpha, \mathfrak{X}_\alpha, T_\alpha, Z_\alpha)_{\alpha \in \Lambda})$ est une famille de morphismes $\mathcal{E}_\alpha \rightarrow \mathcal{E}'_\alpha$ com-mutant aux données de recollement respectives.

On remarque grâce à 4.12 que les foncteurs $j_1^{\alpha\beta}$, $j_{12}^{\alpha\beta\gamma}$ etc. sont exacts, ce qui donne un sens à notre définition.

PROPOSITION 5.3. – La catégorie $(F-)\mathfrak{M}^+(U, (U_\alpha, \mathfrak{X}_\alpha, T_\alpha, Z_\alpha)_{\alpha \in \Lambda})$ ne dépend pas du choix de $(U_\alpha, \mathfrak{X}_\alpha, T_\alpha, Z_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$ vérifiant les conditions de 5.1.

Démonstration. – La preuve se fait en trois étapes suivantes :

i) S'il existe un \mathcal{V} -schéma formel propre et lisse \mathfrak{X} , un diviseur T de X tel que $U = Z \setminus T$ où Z est l'adhérence de U dans X alors, pour tout recouvrement fini ouvert $(\mathfrak{X}_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$ de \mathfrak{X} , tel que, quitte à prendre un recouvrement plus fin, $T_\alpha := X \setminus [(X \setminus T) \cap X_\alpha]$ soit un diviseur de X (par exemple, puisque X est propre et lisse, si $(X \setminus T) \cap X_\alpha$ est affine : [15, 1.3.1]), on dispose, en notant $U_\alpha := X_\alpha \cap U$, d'une équivalence entre les catégories $(F-)\mathfrak{M}_{\mathfrak{X}, T, Z}^+$ et $(F-)\mathfrak{M}^+(U, (U_\alpha, \mathfrak{X}, T_\alpha, Z)_{\alpha \in \Lambda})$.

En effet, soient p_1 et $p_2 : \mathfrak{X} \times_S \mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{X}$ les projections respectives à gauche et droite canoniques, $T_{\alpha\beta} = p_1^{-1}(T_\alpha) \cup p_2^{-1}(T_\beta)$, Z' l'adhérence de U dans $X \times_k X$, $(\mathcal{E}_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$ une famille d'objets de $(F-)\mathfrak{M}_{\mathfrak{X}, T_\alpha, Z}^+$, munie d'isomorphismes $\mathcal{D}_{\mathfrak{X} \times_S \mathfrak{X}, \mathbb{Q}}^\dagger$ -linéaires, $\theta_{\alpha\beta} : \mathbb{R}\Gamma_{Z'}^\dagger \circ (\dagger T_{\alpha\beta}) \circ p_2^!(\mathcal{E}_\beta) \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}\Gamma_{Z'}^\dagger \circ (\dagger T_{\alpha\beta}) \circ p_1^!(\mathcal{E}_\alpha)$, ceux-ci vérifiant la condition de cocycle. En notant $\delta : \mathfrak{X} \hookrightarrow \mathfrak{X} \times_S \mathfrak{X}$ l'immersion fermée diagonale, comme $p_1 \circ \delta = p_2 \circ \delta$, il résulte de 1.15, 1.15.6, 1.15.7 que $\delta^!(\theta_{\alpha\beta})$ est canoniquement isomorphe à un isomorphisme de la forme $\eta_{\alpha\beta} : (\dagger T_\alpha)(\mathcal{E}_\beta) \xrightarrow{\sim} (\dagger T_\beta)(\mathcal{E}_\alpha)$. La famille $\eta_{\alpha\beta}$ vérifie en outre la condition de cocycle $(\dagger T_\beta)(\eta_{\alpha\gamma}) = (\dagger T_\gamma)(\eta_{\alpha\beta}) \circ (\dagger T_\alpha)(\eta_{\beta\gamma})$. On conclut alors l'étape i) via le lemme suivant.

LEMME 5.4. – Avec les notations ci-dessus, soit $(\mathcal{E}_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$ une famille de $\mathcal{D}_{\mathfrak{X}}^\dagger(\dagger T_\alpha)_{\mathbb{Q}}$ -modules surholonomes munie d'isomorphismes $\eta_{\alpha\beta} : (\dagger T_\alpha)(\mathcal{E}_\beta) \xrightarrow{\sim} (\dagger T_\beta)(\mathcal{E}_\alpha)$ avec $\alpha, \beta \in \Lambda$ et vérifiant, pour tous $\alpha, \beta, \gamma \in \Lambda$, l'égalité $(\dagger T_\beta)(\eta_{\alpha\gamma}) = (\dagger T_\gamma)(\eta_{\alpha\beta}) \circ (\dagger T_\alpha)(\eta_{\beta\gamma})$. Il existe alors un unique $\mathcal{D}_{\mathfrak{X}}^\dagger(\dagger T)_{\mathbb{Q}}$ -module \mathcal{E} (à isomorphisme canonique près) qui soit surholonome et muni d'une famille d'isomorphismes $\eta_\alpha : (\dagger T_\alpha)(\mathcal{E}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}_\alpha$ telle que $(\dagger T_\beta)(\eta_\alpha) \circ (\dagger T_\alpha)(\eta_\beta^{-1}) = \eta_{\alpha\beta}$.

Démonstration. – On pose $\mathcal{E} = \ker(\bigoplus_{\alpha \in \Lambda} \mathcal{E}_\alpha \xrightarrow{\quad} \bigoplus_{\alpha, \beta \in \Lambda} (\dagger T_\beta)(\mathcal{E}_\alpha))$, où la première flèche est induite par les morphismes canoniques $\mathcal{E}_\alpha \rightarrow (\dagger T_\beta)(\mathcal{E}_\alpha)$ tandis que la deuxième se construit terme à terme via les flèches de la forme $\mathcal{E}_\beta \rightarrow (\dagger T_\alpha)(\mathcal{E}_\beta) \xrightarrow{\eta_{\alpha\beta}} (\dagger T_\beta)(\mathcal{E}_\alpha)$. Comme, pour tout $\alpha, T \subset T_\alpha$, \mathcal{E} est muni d'une structure canonique de $\mathcal{D}_{\mathfrak{X}}^\dagger(\dagger T)_{\mathbb{Q}}$ -module. Par 3.5, \mathcal{E} est en outre surholonome (en tant que $\mathcal{D}_{\mathfrak{X}, \mathbb{Q}}^\dagger$ -module). Comme le morphisme canonique $\mathcal{E}_\alpha \rightarrow (\dagger T_\alpha)(\mathcal{E}_\alpha)$ est un isomorphisme (car, par 1.9, c'est le cas en dehors de T_α), la projection $\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}_\alpha$ induit le morphisme canonique $(\dagger T_\alpha)(\mathcal{E}) \rightarrow \mathcal{E}_\alpha$ que l'on note η_α . Vérifions à présent que η_α est un isomorphisme et que la formule $(\dagger T_\beta)(\eta_\alpha) \circ (\dagger T_\alpha)(\eta_\beta^{-1}) = \eta_{\alpha\beta}$ est correcte. Comme cela est local en \mathfrak{X} , supposons donc \mathfrak{X} affine. Pour tous α, β , pour toute section e_α de \mathcal{E}_α , notons $(\dagger T_\beta)(e_\alpha)$ l'image de e_α dans $(\dagger T_\beta)(\mathcal{E}_\alpha)$ via le morphisme canonique $\mathcal{E}_\alpha \rightarrow (\dagger T_\beta)(\mathcal{E}_\alpha)$. L'ensemble des sections globales de \mathcal{E} est $\{(e_\alpha)_\alpha, \text{ avec } e_\alpha \in \mathcal{E}_\alpha \text{ tels que } \forall \beta, \alpha \in \Lambda, \eta_{\alpha\beta}((\dagger T_\alpha)(e_\beta)) = (\dagger T_\beta)(e_\alpha)\}$. On calcule alors que la projection $(\dagger T_\alpha)(\mathcal{E}) \rightarrow (\dagger T_\alpha)(\mathcal{E}_\alpha)$ est un isomorphisme (en effet, e_α détermine alors $(\dagger T_\alpha)(e_\beta)$). Ainsi, η_α est un isomorphisme. On calcule de même que la formule $(\dagger T_\beta)(\eta_\alpha) \circ (\dagger T_\alpha)(\eta_\beta^{-1}) = \eta_{\alpha\beta}$ est correcte.

Traitons à présent l'unicité. Soit \mathcal{E}' un $\mathcal{D}_{\mathfrak{X}, \mathbb{Q}}^\dagger(\dagger T)$ -module surholonome muni d'une famille d'isomorphismes $\eta'_\alpha : (\dagger T_\alpha)(\mathcal{E}') \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}_\alpha$ telle que $(\dagger T_\beta)(\eta'_\alpha) \circ (\dagger T_\alpha)(\eta'^{-1}_\beta) = \eta_{\alpha\beta}$. Il en découle les morphismes $\mathcal{E}' \rightarrow (\dagger T_\alpha)(\mathcal{E}') \xrightarrow{\eta'_\alpha} \mathcal{E}_\alpha$ qui induisent le morphisme $\mathcal{E}' \rightarrow \ker(\bigoplus_{\alpha \in \Lambda} \mathcal{E}_\alpha \xrightarrow{\quad} \bigoplus_{\alpha, \beta \in \Lambda} (\dagger T_\beta)(\mathcal{E}_\alpha)) = \mathcal{E}$. Comme, pour tout $\alpha \in \Lambda$, $(\dagger T_\alpha)(\mathcal{E}') \xrightarrow{\sim} (\dagger T_\alpha)(\mathcal{E})$, on obtient $\mathcal{E}' \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}$. \square

ii) Soit un recouvrement fini ouvert $(U_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$ (resp. $(U'_{\alpha'})_{\alpha' \in \Lambda'}$) de U tel qu'il existe un \mathcal{V} -schéma formel propre et lisse \mathfrak{X}_α (resp. $\mathfrak{X}'_{\alpha'}$), un sous-schéma fermé Z_α de X_α (resp. $Z'_{\alpha'}$ de $X'_{\alpha'}$) et un diviseur T_α de X_α (resp. $T'_{\alpha'}$ de $X'_{\alpha'}$) tel que $U_\alpha = Z_\alpha \setminus T_\alpha$ (resp. $U'_{\alpha'} = Z'_{\alpha'} \setminus T'_{\alpha'}$). Grâce à i), quitte à prendre un recouvrement plus fin que $(U_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$ et $(U'_{\alpha'})_{\alpha' \in \Lambda'}$, on se ramène à traiter le cas où $\Lambda = \Lambda'$ et $U_\alpha = U'_{\alpha'}$.

iii) Quitte à remplacer $\mathfrak{X}'_{\alpha'}$ par $\mathfrak{X}'_{\alpha'} \times_S \mathfrak{X}_\alpha$, on peut supposer qu'il existe un morphisme propre et lisse $\mathfrak{X}'_{\alpha'} \rightarrow \mathfrak{X}_\alpha$ dont la restriction à U_α induit l'identité de U_α . On obtient ainsi des foncteurs canoniques (4.8) $\text{Id}_\alpha^! : (F-) \mathfrak{M}_{\mathfrak{X}_\alpha, Z_\alpha, T_\alpha}^+ \rightarrow (F-) \mathfrak{M}_{\mathfrak{X}'_{\alpha'}, Z'_{\alpha'}, T'_{\alpha'}}^+$ et $\text{Id}_{\alpha+} : (F-) \mathfrak{M}_{\mathfrak{X}'_{\alpha'}, Z'_{\alpha'}, T'_{\alpha'}}^+ \rightarrow (F-) \mathfrak{M}_{\mathfrak{X}_\alpha, Z_\alpha, T_\alpha}^+$. Dans ce cas, si $(\mathcal{E}_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$ est une famille d'objets \mathcal{E}_α de $(F-) \mathfrak{M}_{\mathfrak{X}_\alpha, Z_\alpha, T_\alpha}^+$, munie d'une donnée de recollement, on lui associe la famille $(\text{Id}_\alpha^!(\mathcal{E}_\alpha))_{\alpha \in \Lambda}$, qui est munie d'une structure canonique induite de donnée de recollement (grâce aux isomorphismes de transitivité de l'image inverse extraordinaire de 4.8 et à son associativité). De façon analogue, on construit un foncteur quasi-inverse en remplaçant $\text{Id}_\alpha^!$ par $\text{Id}_{\alpha+}$. \square

DÉFINITION 5.5. – Avec les notations 5.1, on désigne par $(F-) \mathfrak{M}_U^+$, la catégorie $(F-) \mathfrak{M}^+(U, (U_\alpha, \mathfrak{X}_\alpha, T_\alpha, Z_\alpha)_{\alpha \in \Lambda})$ qui ne dépend canoniquement que de U (voir 5.3). Un objet de $(F-) \mathfrak{M}_U^+$ sera nommé « $(F-) \mathcal{D}_U$ -module arithmétique surholonome ». En remplaçant « \mathfrak{M}^+ » par « \mathfrak{M} », on construit de même la catégorie $(F-) \mathfrak{M}_U$ des « $(F-) \mathcal{D}_U$ -modules arithmétiques surcohérents ».

DÉFINITION 5.6. – Avec les notations 5.1, lorsque U est lisse, la famille $(\mathbb{R}\Gamma_{Z_\alpha}^\dagger(\dagger T_\alpha)(\mathcal{O}_{\mathfrak{X}_\alpha, \mathbb{Q}}[-d_{U_\alpha/X_\alpha}]))_{\alpha \in \Lambda}$ est canoniquement munie d'une donnée de recollement. Cet objet de $F\text{-}\mathfrak{M}_U^+$ sera noté de \mathcal{O}_U (on vérifie que cela ne dépend pas du choix de la famille de quadruplet $(U_\alpha, \mathfrak{X}_\alpha, Z_\alpha, T_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$) et sera appelé *coefficient constant associé à U* .

On termine cette section par la description des catégories $(F\text{-})D^b(\mathfrak{M}_U)$ et $(F\text{-})D^b(\mathfrak{M}_U^+)$.

5.7. – On conserve les notations de 5.1. On désigne par $C^b(\mathfrak{M}_{\mathfrak{X}_\alpha, T_\alpha, Z_\alpha})$ la sous-catégorie pleine de $C^b(\mathcal{D}_{\mathfrak{X}_\alpha}^\dagger(\dagger T_\alpha)_{\mathbb{Q}})$ des complexes \mathcal{E}^\bullet tels que $\mathcal{E}^n \in \mathfrak{M}_{\mathfrak{X}_\alpha, T_\alpha, Z_\alpha}$. D'après 4.12, on dispose du foncteur exact $j_1^{\alpha\beta!} : \mathfrak{M}_{\mathfrak{X}_\alpha, T_\alpha, Z_\alpha} \rightarrow \mathfrak{M}_{\mathfrak{X}_\alpha \times \mathfrak{X}_\beta, T_{\alpha\beta}, Z_{\alpha\beta}}$. Il induit donc un foncteur $j_1^{\alpha\beta!} : C^b(\mathfrak{M}_{\mathfrak{X}_\alpha, T_\alpha, Z_\alpha}) \rightarrow C^b(\mathfrak{M}_{\mathfrak{X}_\alpha \times \mathfrak{X}_\beta, T_{\alpha\beta}, Z_{\alpha\beta}})$. On obtient aussi un foncteur $j_2^{\alpha\beta!} : C^b(\mathfrak{M}_{\mathfrak{X}_\alpha, T_\alpha, Z_\alpha}) \rightarrow C^b(\mathfrak{M}_{\mathfrak{X}_\alpha \times \mathfrak{X}_\beta, T_{\alpha\beta}, Z_{\alpha\beta}})$ et de même pour $j_{12}^{\alpha\beta\gamma!}(\theta_{\alpha\gamma}), j_{13}^{\alpha\beta\gamma!}(\theta_{\alpha\gamma}), j_{23}^{\alpha\beta\gamma!}(\theta_{\alpha\gamma})$. On dispose de foncteurs analogues en remplaçant « \mathfrak{M} » par « \mathfrak{M}^+ ».

DÉFINITION 5.8. – Avec les notations de 5.7, on définit la catégorie $C^b(\mathfrak{M}(U, (U_\alpha, \mathfrak{X}_\alpha, T_\alpha, Z_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}))$ de la manière suivante :

- Un objet est une famille $\mathcal{E} = (\mathcal{E}_\alpha^\bullet, \theta_{\alpha\beta})_{\alpha, \beta \in \Lambda}$ où $\mathcal{E}_\alpha^\bullet \in C^b(\mathfrak{M}_{\mathfrak{X}_\alpha, T_\alpha, Z_\alpha})$ $\theta_{\alpha\beta} : j_2^{\alpha\beta!}(\mathcal{E}_\beta^\bullet) \xrightarrow{\sim} j_1^{\alpha\beta!}(\mathcal{E}_\alpha^\bullet)$ est un isomorphisme de $C^b(\mathfrak{M}_{\mathfrak{X}_\alpha \times \mathfrak{X}_\beta, T_{\alpha\beta}, Z_{\alpha\beta}})$ satisfaisant la condition de cocycle $j_{13}^{\alpha\beta\gamma!}(\theta_{\alpha\gamma}) = j_{12}^{\alpha\beta\gamma!}(\theta_{\alpha\beta}) \circ j_{23}^{\alpha\beta\gamma!}(\theta_{\beta\gamma})$. La famille d'isomorphismes $\theta_{\alpha\beta}$ est dite des *données de recollement*.
- Un morphisme $f : (\mathcal{E}_\alpha^\bullet, \theta_{\alpha\beta})_{\alpha, \beta \in \Lambda} \rightarrow (\mathcal{F}_\alpha^\bullet, \theta'_{\alpha\beta})_{\alpha, \beta \in \Lambda}$ est une famille de morphismes $f_\alpha : \mathcal{E}_\alpha^\bullet \rightarrow \mathcal{F}_\alpha^\bullet$ de $C^b(\mathfrak{M}_{\mathfrak{X}_\alpha, T_\alpha, Z_\alpha})$ commutant aux données de recollement respectives.

De manière analogue à 5.3, on vérifie que $C^b(\mathfrak{M}(U, (U_\alpha, \mathfrak{X}_\alpha, T_\alpha, Z_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}))$ ne dépend pas, à équivalence canonique de catégories près, du choix de $(U_\alpha, \mathfrak{X}_\alpha, T_\alpha, Z_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$ vérifiant les conditions de 5.1 et est d'ailleurs canoniquement équivalente à $C^b(\mathfrak{M}_U)$, où \mathfrak{M}_U est la catégorie abélienne de 5.5. On pourra donc les identifier.

Un morphisme $f : (\mathcal{E}_\alpha^\bullet, \theta_{\alpha\beta})_{\alpha, \beta \in \Lambda} \rightarrow (\mathcal{F}_\alpha^\bullet, \theta'_{\alpha\beta})_{\alpha, \beta \in \Lambda}$ est un *quasi-isomorphisme* si, pour tout $\alpha \in \Lambda$, le morphisme $f_\alpha : \mathcal{E}_\alpha^\bullet \rightarrow \mathcal{F}_\alpha^\bullet$ est un quasi-isomorphisme.

Si f et g sont deux morphismes $(\mathcal{E}_\alpha^\bullet, \theta_{\alpha\beta})_{\alpha, \beta \in \Lambda} \rightarrow (\mathcal{F}_\alpha^\bullet, \theta'_{\alpha\beta})_{\alpha, \beta \in \Lambda}$, on dit que f et g sont *homotopes* s'il existe une famille de morphismes $k_\alpha : \mathcal{E}_\alpha^\bullet \rightarrow \mathcal{F}_\alpha^\bullet[-1]$ de $C^b(\mathfrak{M}_{\mathfrak{X}_\alpha, T_\alpha, Z_\alpha})$ commutant aux données de recollement respectives et telle que $f_\alpha - g_\alpha = dk_\alpha + k_\alpha d$, où d sont les différentielles des complexes respectifs. L'homotopie est une relation d'équivalence et se préserve par composition. Lorsque deux morphismes sont homotopes et si l'un est un quasi-isomorphisme, alors l'autre l'est également.

On définit la catégorie $K^b(\mathfrak{M}(U, (U_\alpha, \mathfrak{X}_\alpha, T_\alpha, Z_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}))$ dont les objets sont ceux de $C^b(\mathfrak{M}(U, (U_\alpha, \mathfrak{X}_\alpha, T_\alpha, Z_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}))$ et dont les morphismes sont les classes d'homotopie de ceux de $C^b(\mathfrak{M}(U, (U_\alpha, \mathfrak{X}_\alpha, T_\alpha, Z_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}))$. On vérifie aussi que $K^b(\mathfrak{M}(U, (U_\alpha, \mathfrak{X}_\alpha, T_\alpha, Z_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}))$ est canoniquement équivalente à $K^b(\mathfrak{M}_U)$.

Si $f = (f_\alpha)_{\alpha \in \Lambda} : (\mathcal{E}_\alpha^\bullet, \theta_{\alpha\beta})_{\alpha, \beta \in \Lambda} \rightarrow (\mathcal{F}_\alpha^\bullet, \theta'_{\alpha\beta})_{\alpha, \beta \in \Lambda}$ est une flèche de $K^b(\mathfrak{M}(U, (U_\alpha, \mathfrak{X}_\alpha, T_\alpha, Z_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}))$, on définit son cône \mathcal{C}_f de la manière suivante : en notant \mathcal{C}_{f_α} le cône de f_α , la famille $\mathcal{C}_f := (\mathcal{C}_{f_\alpha})_{\alpha \in \Lambda}$ est canoniquement un objet de $K^b(\mathfrak{M}(U, (U_\alpha, \mathfrak{X}_\alpha, T_\alpha, Z_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}))$. Un triangle distingué de $K^b(\mathfrak{M}(U, (U_\alpha, \mathfrak{X}_\alpha, T_\alpha, Z_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}))$ est par définition un triangle isomorphe à un triangle de la forme $\mathcal{E} \xrightarrow{f} \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{C}_f \rightarrow \mathcal{E}[1]$.

La catégorie $K^b(\mathfrak{M}(U, (U_\alpha, \mathfrak{X}_\alpha, T_\alpha, Z_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}))$ devient triangulée. En localisant cette catégorie par rapport aux quasi-isomorphismes, on obtient une catégorie triangulée que l'on notera $D^b(\mathfrak{M}(U, (U_\alpha, \mathfrak{X}_\alpha, T_\alpha, Z_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}))$. De même, $D^b(\mathfrak{M}(U, (U_\alpha, \mathfrak{X}_\alpha, T_\alpha, Z_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}))$ est canoniquement équivalente à $D^b(\mathfrak{M}_U)$.

On définit un foncteur

$$F^* : D^b(\mathfrak{M}(U, (U_\alpha, \mathfrak{X}_\alpha, T_\alpha, Z_\alpha)_{\alpha \in \Lambda})) \rightarrow D^b(\mathfrak{M}(U, (U_\alpha, \mathfrak{X}_\alpha, T_\alpha, Z_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}))$$

en posant, pour tout $(\mathcal{E}_\alpha^\bullet, \theta_{\alpha\beta})_{\alpha, \beta \in \Lambda} \in D^b(\mathfrak{M}(U, (U_\alpha, \mathfrak{X}_\alpha, T_\alpha, Z_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}))$, $F^*((\mathcal{E}_\alpha^\bullet, \theta_{\alpha\beta})_{\alpha, \beta \in \Lambda}) := (F^*\mathcal{E}_\alpha^\bullet, \theta'_{\alpha\beta})_{\alpha, \beta \in \Lambda}$, où $\theta'_{\alpha\beta}$ est construit par commutativité du diagramme :

$$\begin{array}{ccc} F^*j_2^{\alpha\beta!}(\mathcal{E}_\beta^\bullet) & \xrightarrow[\sim]{F^*\theta_{\alpha\beta}} & F^*j_1^{\alpha\beta!}(\mathcal{E}_\alpha^\bullet) \\ \sim \downarrow & & \sim \downarrow \\ j_2^{\alpha\beta!}(F^*\mathcal{E}_\beta^\bullet) & \xrightarrow[\sim]{\theta'_{\alpha\beta}} & j_1^{\alpha\beta!}(F^*\mathcal{E}_\alpha^\bullet). \end{array}$$

On définit ensuite la catégorie $F\text{-}D^b(\mathfrak{M}(U, (U_\alpha, \mathfrak{X}_\alpha, T_\alpha, Z_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}))$ dont les objets sont les couples (\mathcal{E}, ϕ) avec $\mathcal{E} \in D^b(\mathfrak{M}(U, (U_\alpha, \mathfrak{X}_\alpha, T_\alpha, Z_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}))$ et ϕ est un isomorphisme $F^*(\mathcal{E}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}$ dans $D^b(\mathfrak{M}(U, (U_\alpha, \mathfrak{X}_\alpha, T_\alpha, Z_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}))$.

La catégorie $F\text{-}D^b(\mathfrak{M}(U, (U_\alpha, \mathfrak{X}_\alpha, T_\alpha, Z_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}))$ est canoniquement équivalente à $F\text{-}D^b(\mathfrak{M}_U)$.

En remplaçant « \mathfrak{M} » par « \mathfrak{M}^+ », on définit de même la catégorie $(F\text{-})D^b(\mathfrak{M}^+(U, (U_\alpha, \mathfrak{X}_\alpha, T_\alpha, Z_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}))$. Cette catégorie est canoniquement équivalente à $(F\text{-})D^b(\mathfrak{M}_U^+)$.

REMARQUES 5.9. – Lorsqu'il existe un \mathcal{V} -schéma formel propre et lisse \mathfrak{X} , un sous-schéma fermé Z de X et un diviseur T de X tels que $U = Z \setminus T$, de manière analogue au cas des \mathcal{D} -modules sur les variétés complexes (voir par exemple [9, VI.1.13, 2.10, 2.11]), il est raisonnable de conjecturer que les foncteurs canoniques $D^b(\mathfrak{M}_U) \rightarrow D_{\text{surcoh}}^b(\mathcal{D}_U)$, $D^b(\mathfrak{M}_U^+) \rightarrow D_{\text{surhol}}^b(\mathcal{D}_U)$ sont des équivalences de catégories. On s'intéressera à cette question dans un prochain travail.

6. Application aux fonctions L

On suppose dans cette section que k est un corps fini à p^s éléments et F désigne toujours la puissance s -ième de l'endomorphisme de Frobenius. Soit U une variété qui se plonge dans un \mathcal{V} -schéma formel \mathfrak{X} propre et lisse. Pour tout point fermé y de U , on note $i_y : \text{Spec } k(y) \hookrightarrow U$ l'immersion fermée induite, $p : U \rightarrow \text{Spec } k$ et $p_y : \text{Spec } k(y) \rightarrow \text{Spec } k$ les morphismes structuraux.

DÉFINITION 6.1. – Soient $\mathcal{E} \in F\text{-}D_{\text{surhol}}^{\text{bv}}(\mathcal{D}_U)$ (voir 4.22) et S un sous-ensemble de points de U . On note S^0 le sous-ensemble des points fermés de S . On définit respectivement

la fonction L associée à \mathcal{E} au-dessus de S et la fonction cohomologique P associée à \mathcal{E} en posant :

$$L(S, \mathcal{E}, t) := \prod_{y \in S^0} \prod_{j \in \mathbb{Z}} \det_K (1 - tF|\mathcal{H}^j(p_{y+}i_y^+(\mathcal{E})))^{(-1)^{j+1}},$$

$$P(U, \mathcal{E}, t) := \prod_{j \in \mathbb{Z}} \det_K (1 - tF|\mathcal{H}^j(p_!\mathcal{E}))^{(-1)^{j+1}},$$

où $F|\mathcal{H}^j(p_{y+}i_y^+(\mathcal{E}))$ désigne l'action de Frobenius sur $\mathcal{H}^j(p_{y+}i_y^+(\mathcal{E}))$ et $F|\mathcal{H}^j(p_!\mathcal{E})$ celle sur $\mathcal{H}^j(p_!\mathcal{E})$ (celles-ci résultant des théorèmes de commutations de Frobenius aux opérations cohomologiques).

REMARQUES 6.2. – S'il existe un diviseur T de X et un sous-schéma fermé Z de X tels que $U = Z \setminus T$, nous avons défini la catégorie $F\text{-}\mathfrak{C}_U^\vee$ (voir [11, 3.3.1]). On retrouve alors, modulo l'inclusion $F\text{-}D_{\text{surhol}}^{\text{bv}}(\mathcal{D}_U) \subset F\text{-}\mathfrak{C}_U^\vee$, les fonctions L et P de [11, 3.3.3 et 3.3.4]. Nous avons établi l'égalité $L = P$ sur $F\text{-}\mathfrak{C}_U^\vee$ (voir [11, 3.3.8]).

En général, il existe toujours deux sous-schémas fermés Z et T de X tels que $U = Z \setminus T$ (on prend $Z = \bar{Y}$ et $T = Z \setminus U$). Mais on ne peut pas toujours choisir T égal à un diviseur. Par exemple, si U est le complémentaire d'un sous-schéma fermé de X de codimension égale à 2.

LEMME 6.3. – Soit $\mathcal{E}' \rightarrow \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}'' \rightarrow \mathcal{E}'[1]$ un triangle distingué de $F\text{-}D_{\text{surhol}}^{\text{bv}}(\mathcal{D}_U)$. On a alors les deux égalités

$$(6.3.1) \quad L(U, \mathcal{E}, t) = L(U, \mathcal{E}', t) \times L(U, \mathcal{E}'', t),$$

$$(6.3.2) \quad P(U, \mathcal{E}, t) = P(U, \mathcal{E}', t) \times P(U, \mathcal{E}'', t).$$

Démonstration. – De manière analogue à [14, 3.2.1], cela résulte du caractère multiplicatif en les suites exactes du déterminant. \square

LEMME 6.4. – Soient $j : U' \hookrightarrow U$ une immersion de variétés, $\mathcal{E}' \in F\text{-}D_{\text{surhol}}^{\text{bv}}(\mathcal{D}_{U'})$. On dispose alors des égalités :

$$(6.4.1) \quad L(U', \mathcal{E}', t) = L(U, j_!(\mathcal{E}'), t),$$

$$(6.4.2) \quad P(U', \mathcal{E}', t) = P(U, j_!(\mathcal{E}'), t).$$

Démonstration. – L'égalité $P(U', \mathcal{E}', t) = P(U, j_!(\mathcal{E}'), t)$ résulte de la transitivité du foncteur image directe extraordinaire. Traitons à présent l'égalité $L(U', \mathcal{E}', t) = L(U, j_!(\mathcal{E}'), t)$. Soient Z (resp. Z') l'adhérence de U (resp. U') dans X , T le complémentaire de U dans Z (resp. T' le complémentaire de U' dans Z'). Alors, $j_!(\mathcal{E}') = \mathbb{D}_T \mathbb{D}_{T'}(\mathcal{E}')$ et $j^+ j_!(\mathcal{E}') = \mathbb{D}_{T'} \mathbb{R}\Gamma_{Z'}^\dagger(\dagger T') \mathbb{D}_T(j_!(\mathcal{E}'))$. On obtient ainsi l'isomorphisme $j^+ j_!(\mathcal{E}') \xrightarrow{\sim} \mathbb{D}_{T'} \mathbb{R}\Gamma_{Z'}^\dagger(\dagger T') \mathbb{D}_{T'}(\mathcal{E}') \xrightarrow{\sim} \mathbb{D}_{T'} \mathbb{D}_{T'}(\mathcal{E}') \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}'$ (on utilise l'isomorphisme de bidualité de 4.5). Pour tout point y' de U' , notons $i'_{y'}$ l'immersion fermée $\text{Spec } k(y') \hookrightarrow U'$. Pour tout $y' \in U'$, on en déduit $i'_{y'}(j_!(\mathcal{E}')) \xrightarrow{\sim} i'_{y'}(j^+ j_!(\mathcal{E}')) \xrightarrow{\sim} i'_{y'}(\mathcal{E}')$. Pour finir la preuve, il reste à établir que si $y \in U \setminus U'$ alors $i_y^+(j_!(\mathcal{E}')) = 0$. Or, dans ce cas, soit $y \notin Z'$, soit $y \in T'$. En notant $\iota_y : \text{Spf } \mathcal{V}(y) \hookrightarrow \mathfrak{X}$ un relèvement de l'immersion fermée canonique $\text{Spec } k(y) \hookrightarrow X$, on obtient, via l'isomorphisme de bidualité, l'isomorphisme $i_y^+(j_!(\mathcal{E}')) \xrightarrow{\sim} \mathbb{D}_{\iota_y} \mathbb{D}_{T'}(\mathcal{E}')$. Le

cas $y \notin Z'$ résulte du fait que $\mathbb{D}_{T'}(\mathcal{E}')$ soit à support dans Z' . Lorsque $y \in T'$, on obtient $\mathbb{D}l_y^! \mathbb{D}_{T'}(\mathcal{E}') = \mathbb{D}l_y^!(\dagger T') \mathbb{D}(\mathcal{E}') = 0$ car $l_y^! \circ (\dagger T') \xrightarrow{\sim} (\dagger \text{Spec } k(y)) \circ l_y^! = 0$ (voir 1.15.6). \square

THÉORÈME 6.5. – *Pour tout $\mathcal{E} \in F\text{-}D_{\text{surhol}}^{\text{bv}}(\mathcal{D}_U)$, l'égalité $L(U, \mathcal{E}, t) = P(U, \mathcal{E}, t)$ est validée.*

Démonstration. – Afin de se ramener au cas déjà étudié (voir 6.2 ou [11, 3.3.8]), on procède par récurrence sur la dimension de U . Lorsque $\dim U = 0$, cela découle de [11, 3.3.8] et de l'égalité $F\text{-}D_{\text{surhol}}^{\text{bv}}(\mathcal{D}_U) = F\text{-}\mathcal{C}_U^{\vee}$.

Soit U' un ouvert affine, lisse et dense dans U et $Y := U \setminus U'$ le sous-schéma fermé réduit induit. Notons $i : Y \hookrightarrow U$ et $j : U' \subset U$ les morphismes canoniques. En dualisant 4.21.1 (i.e. en appliquant le foncteur dual au triangle de localisation de 4.21.1 appliqué au dual de \mathcal{E}), on obtient le triangle de localisation

$$(6.5.1) \quad j_! j^+(\mathcal{E}) \rightarrow \mathcal{E} \rightarrow u_! u^+(\mathcal{E}) \rightarrow j_! j^+(\mathcal{E})[1].$$

Comme U' est affine et lisse, il existe un \mathcal{V} -schéma formel propre et lisse \mathfrak{X}' , un diviseur T' de X' et Z' un sous-schéma fermé de X' tel que $U' = Z' \setminus T'$ (voir le début de 5.1). Grâce à [11, 3.3.8] et comme $F\text{-}D_{\text{surhol}}^{\text{bv}}(\mathcal{D}_{U'}) \subset F\text{-}\mathcal{C}_{U'}^{\vee}$, on en déduit que $L(U', j^+(\mathcal{E}), t) = P(U', j^+(\mathcal{E}), t)$. De plus, comme $\dim Y < \dim U$, par hypothèse de récurrence, $L(Y, u^+(\mathcal{E}), t) = P(Y, u^+(\mathcal{E}), t)$. On conclut grâce à 6.3, 6.5.1. \square

7. Surholonomie des F -isocristaux surconvergeants unités

Soient \mathcal{P} un \mathcal{V} -schéma formel séparé et lisse, X un sous-schéma fermé lisse de P , T un diviseur de P tel que $T_X := T \cap X$ soit un diviseur de X . On note $Y := X \setminus T_X$, $u_0 : X \hookrightarrow P$ l'immersion fermée canonique.

LEMME 7.1. – *Soient $f_0 : X' \rightarrow X$ un morphisme projectif, surjectif génériquement fini et étale de k -schémas lisses tel que $f_0^{-1}(T_X)$ soit un diviseur de X' . Soient E un isocristal sur Y surconvergent le long de T_X et $E' := f_0^*(E)$ l'isocristal sur $X' \setminus f_0^{-1}(T_X)$ surconvergent le long de $f_0^{-1}(T_X)$ déduit.*

1. *Il existe alors un morphisme propre et lisse $g : \mathcal{P}' \rightarrow \mathcal{P}$ et une immersion fermée $u'_0 : X' \hookrightarrow \mathcal{P}'$ telle que $g_0 \circ u'_0 = u_0 \circ f_0$.*
2. *Pour tout $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, en notant $T' := g_0^{-1}(T)$, si $\text{sp}_{X' \hookrightarrow \mathcal{P}', T', +}(E')$ (défini dans 1.17) est n -surholonome (resp. $\text{sp}_{X' \hookrightarrow \mathcal{P}', T', +}(E')$ et $\mathbb{D}\text{sp}_{X' \hookrightarrow \mathcal{P}', T', +}(E')$ sont n -surholonomes) alors $\text{sp}_{X \hookrightarrow \mathcal{P}, T, +}(E)$ (resp. $\text{sp}_{X \hookrightarrow \mathcal{P}, T, +}(E)$ et $\mathbb{D}\text{sp}_{X \hookrightarrow \mathcal{P}, T, +}(E)$) est n -surholonome (resp. sont n -surholonomes).*

Démonstration. – L'assertion 1 est immédiate : on choisit une immersion fermée $X' \hookrightarrow \mathbb{P}_X^r$, dont le composé avec la projection $\mathbb{P}_X^r \rightarrow X$ donne f_0 , puis on prend u'_0 égal au composé $X' \hookrightarrow \mathbb{P}_X^r \hookrightarrow \mathbb{P}_P^r$, \mathcal{P}' égal à l'espace projectif formel de dimension r au-dessus de \mathcal{P} et $g : \mathcal{P}' \rightarrow \mathcal{P}$ égal à la projection. Notons $\mathcal{E} := \text{sp}_{X \hookrightarrow \mathcal{P}, T, +}(E)$ et $\mathcal{E}' := \text{sp}_{X' \hookrightarrow \mathcal{P}', T', +}(E')$.

Traitons maintenant 2. Comme la n -surholonomie en tant que $\mathcal{D}_{\mathcal{P}, \mathbb{Q}}^{\dagger}$ -module est locale en \mathcal{P} , on peut supposer \mathcal{P} affine. Dans ce cas, u_0 se relève en une immersion fermée $u : \mathfrak{X} \hookrightarrow \mathcal{P}$ de \mathcal{V} -schémas formels lisses. Comme $u_T^!(\mathcal{E}) \xrightarrow{\sim} \text{sp}_{X \hookrightarrow \mathfrak{X}, T, +}(E)$ (voir [10, 2.8] ou [17, 4.1.8]),

via le théorème de Berthelot-Kashiwara (voir 1.14), $\mathcal{E} \xrightarrow{\sim} u_{T,+}(\mathrm{sp}_{X \hookrightarrow \mathfrak{X},T,+}(E))$. En utilisant l'isomorphisme canonique $u_{T,+} \xrightarrow{\sim} u_+$ (voir 1.6.3), le théorème de dualité relative (voir 1.11.1), la préservation de la n -surholonomie par image directe par un morphisme propre, on se ramène ainsi au cas où $X = P$.

Prouvons à présent que \mathcal{E} est un facteur direct de $g_{T,+}(\mathcal{E}')$. Par 1.11.2, on dispose du morphisme d'adjonction $g_{T,+} \circ g_T^!(\mathcal{E}) \rightarrow \mathcal{E}$. En composant avec $g_{T,+} \circ \mathbb{R}\Gamma_{X'}^\dagger \circ g_T^!(\mathcal{E}) \rightarrow g_{T,+} \circ g_T^!(\mathcal{E})$, on obtient ainsi le morphisme canonique

$$(7.1.1) \quad g_{T,+} \circ \mathbb{R}\Gamma_{X'}^\dagger \circ g_T^!(\mathcal{E}) \rightarrow \mathcal{E}.$$

En remplaçant, dans 7.1.1, \mathcal{E} par $\mathbb{D}_T(\mathcal{E})$, il s'ensuit le morphisme canonique $g_{T,+} \circ \mathbb{R}\Gamma_{X'}^\dagger \circ g_T^! \circ \mathbb{D}_T(\mathcal{E}) \rightarrow \mathbb{D}_T(\mathcal{E})$. En appliquant le foncteur dual \mathbb{D}_T à ce morphisme, via l'isomorphisme de bidualité et l'isomorphisme de dualité relative (voir 1.10.7 et 1.11.1), cela donne

$$(7.1.2) \quad \mathcal{E} \rightarrow g_{T,+} \circ \mathbb{D}_{T'} \circ \mathbb{R}\Gamma_{X'}^\dagger \circ g_T^! \circ \mathbb{D}_T(\mathcal{E}).$$

Or, avec [17, 4.1.8] et [17, 4.3.5], on dispose des isomorphismes :

$$\begin{aligned} \mathbb{D}_{T'} \circ \mathbb{R}\Gamma_{X'}^\dagger \circ g_T^! \circ \mathbb{D}_T(\mathcal{E}) &\xrightarrow{\sim} \mathrm{sp}_{X' \hookrightarrow \mathcal{P}',T',+}((f_0^*(E^\vee))^\vee) \\ &\xrightarrow{\sim} \mathrm{sp}_{X' \hookrightarrow \mathcal{P}',T',+}(E') \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}\Gamma_{X'}^\dagger \circ g_T^!(\mathcal{E}). \end{aligned}$$

Il en découle que le morphisme 7.1.2 est de la forme $\mathcal{E} \rightarrow g_{T,+} \circ \mathbb{R}\Gamma_{X'}^\dagger \circ g_T^!(\mathcal{E})$. En le composant avec 7.1.1, on obtient un morphisme canonique : $\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$, que l'on note θ . Pour vérifier que \mathcal{E} est un facteur direct de $g_{T,+}(\mathcal{E}')$, il suffit d'établir que θ est un isomorphisme.

Par 1.9, il suffit de vérifier que θ est un isomorphisme en dehors de T . On se ramène ainsi à supposer T vide. De plus, comme $\mathcal{E} = \mathrm{sp}_*(E)$ (où $\mathrm{sp} : \mathcal{P}_K \rightarrow \mathcal{P}$ est le morphisme de spécialisation), d'après 1.17, ce morphisme θ est l'image par sp_* d'un morphisme d'isocristaux surconvergens de la forme $E \rightarrow E$. Comme le foncteur restriction à un ouvert dense est fidèle sur la catégorie des isocristaux convergens (cela résulte par exemple [34, 4.1.3]), pour vérifier que θ est un isomorphisme, on peut alors en outre supposer que le morphisme f_0 est fini et étale. Comme X' est alors affine, l'immersion fermée $u'_0 : X' \hookrightarrow P'$ se relève en une immersion fermée de \mathcal{V} -schémas formels lisses $u' : \mathfrak{X}' \hookrightarrow \mathcal{P}'$.

Comme $u'^! \circ g^!(\mathcal{E}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{sp}_*(f_0^*(E))$ est un isocristal convergent sur X' (i.e. via 1.17, est un $\mathcal{D}_{\mathfrak{X}',\mathbb{Q}}^\dagger$ -module cohérent $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}',\mathbb{Q}}$ -cohérent), c'est en particulier un $\mathcal{D}_{\mathfrak{X}',\mathbb{Q}}^\dagger$ -module cohérent. On vérifie alors (de manière analogue à [11, 3.1.12]) que l'on dispose d'un isomorphisme canonique (d'ailleurs compatible à Frobenius) $u'_+ u'^!(g^!(\mathcal{E})) \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}\Gamma_{X'}^\dagger(g^!(\mathcal{E}))$ s'inscrivant dans le diagramme canonique :

$$(7.1.3) \quad \begin{array}{ccc} u'_+ u'^!(g^!(\mathcal{E})) & \xrightarrow{\mathrm{adj}} & \mathcal{E} \\ \sim \downarrow & & \parallel \\ \mathbb{R}\Gamma_{X'}^\dagger(g^!(\mathcal{E})) & \longrightarrow & \mathcal{E}, \end{array}$$

où le morphisme du haut est le morphisme d'adjonction de u' (via 1.11.2), celui du bas est le morphisme canonique (par functorialité en X' de $\mathbb{R}\Gamma_{X'}^\dagger$).

Le morphisme $g_+ \circ \mathbb{R}\Gamma_{X'}^\dagger \circ g^!(\mathcal{E}) \rightarrow \mathcal{E}$ est ainsi canoniquement isomorphe au morphisme induit par adjonction entre les foncteurs images directes et images inverses extraordinaires par un morphisme propre (à savoir u' et g) : $g_+ \circ u'_+ \circ u'^! \circ g^!(\mathcal{E}) \rightarrow \mathcal{E}$. Par transitivité de

ces morphismes d'adjonction (voir 1.11 ou plus précisément [17, 1.2.11]), celui-ci est canoniquement isomorphe au morphisme d'adjonction $f_+ f^!(\mathcal{E}) \rightarrow \mathcal{E}$, où $f = g \circ u'$. Il en résulte, par construction de 7.1.2 à partir de 7.1.1, que $\mathcal{E} \rightarrow g_+ \circ \mathbb{R}\Gamma_{X'}^\dagger \circ g^!(\mathcal{E})$ est canoniquement isomorphe au morphisme canonique d'adjonction $\mathcal{E} \rightarrow f_! f^+(\mathcal{E}) \xrightarrow{\sim} f_+ \circ f^!(\mathcal{E})$.

Comme f_0 est fini et étale, on dispose d'un foncteur image directe f_{0*} de la catégorie des isocristaux convergents sur X' vers les isocristaux convergents sur X . Via l'équivalence de catégories 1.17 (ici, les diviseurs sont vides), f_{0*} (resp. f_0^*) correspond à f_+ ou $f_!$ (resp. $f^!$ ou f^+). De plus, le morphisme d'adjonction $f_{0*} f_0^*(E) \rightarrow E$ (resp. $E \rightarrow f_{0*} f_0^*(E)$) donne via cette correspondance le morphisme d'adjonction $f_+ f^!(\mathcal{E}) \rightarrow \mathcal{E}$ (resp. $\mathcal{E} \rightarrow f_+ f^!(\mathcal{E})$). Comme le morphisme composé $E \rightarrow f_{0*} f_0^*(E) \rightarrow E$ est égal à la multiplication par le degré de X' sur X , il en résulte que θ est un isomorphisme.

Ainsi, \mathcal{E} est un facteur direct de $g_{T,+}(\mathcal{E}')$. Si \mathcal{E}' est n -surholonome, comme la n -surholonomie est préservée par l'image directe d'un morphisme propre, cela implique que $g_{T,+}(\mathcal{E}') \xrightarrow{\sim} g_+(\mathcal{E}')$ (voir 1.6.3) est n -surholonome. Par 3.3.2, \mathcal{E} est donc n -surholonome.

Si \mathcal{E}' et $\mathbb{D}(\mathcal{E}')$ sont n -surholonomes, \mathcal{E} est donc n -surholonome. De plus, $\mathbb{D}(\mathcal{E})$ est un facteur direct de $\mathbb{D} \circ g_{T,+}(\mathcal{E}')$. Comme \mathcal{E}' est n -surholonome, en particulier \mathcal{E}' est $\mathcal{D}_{\mathcal{P},\mathbb{Q}}^\dagger$ -cohérent, on bénéficie donc de l'isomorphisme de dualité relative (voir 1.11.1) : $\mathbb{D} \circ g_+(\mathcal{E}') \xrightarrow{\sim} g_+ \circ \mathbb{D}(\mathcal{E}')$. Or, d'après 1.6.3, $g_{T,+}(\mathcal{E}') \xrightarrow{\sim} g_+(\mathcal{E}')$. Ainsi, $\mathbb{D}(\mathcal{E})$ est un facteur direct de $g_+ \circ \mathbb{D}(\mathcal{E}')$. La proposition 3.3.2 nous permet alors de conclure. \square

REMARQUES 7.2. – Avec les notations de 7.1, comme $\mathrm{sp}_{X' \hookrightarrow \mathcal{P}', T', +}(E') \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}\Gamma_{X'}^\dagger g_T^!(\mathrm{sp}_{X \hookrightarrow \mathcal{P}, T, +}(E))$ (voir [10, 2.8] ou [17, 4.1.8]), par 3.3 et 3.8, si $\mathrm{sp}_{X \hookrightarrow \mathcal{P}, T, +}(E)$ est n -surholonome, alors $\mathrm{sp}_{X' \hookrightarrow \mathcal{P}', T', +}(E')$ est n -surholonome.

Lorsque E est en outre muni d'une structure de Frobenius, on dispose alors d'un résultat analogue à 7.1 dans un cadre plus général (voir [13, 6.3.1]). En effet, la structure de Frobenius permet d'utiliser le théorème de pleine fidélité de Kedlaya (voir [25]).

PROPOSITION 7.3. – *Pour tout isocristal convergent G sur X , le $\mathcal{D}_{\mathcal{P},\mathbb{Q}}^\dagger$ -module $\mathrm{sp}_{X \hookrightarrow \mathcal{P}, +}(G)$ est surholonome.*

Démonstration. – Comme X est somme de ses composantes irréductibles, il ne coûte rien de supposer X irréductible. Par récurrence sur $n \geq 0$, prouvons la propriété (P_n) suivante :

(P_n) : « Pour tout isocristal convergent G sur X ($X \hookrightarrow \mathcal{P}$ pouvant naturellement varier), le $\mathcal{D}_{\mathcal{P},\mathbb{Q}}^\dagger$ -module cohérent $\mathrm{sp}_{X \hookrightarrow \mathcal{P}, +}(G)$ associé est n -surholonome ».

L'assertion P_0 est un cas particulier de [11, 3.1.2.2] (ou alors, on remarque qu'il suffit d'adapter la preuve de $P_n \Rightarrow P_{n+1}$, i.e. on enlève les foncteurs \mathbb{D} pour établir P_0). Pour $n \geq 0$, en supposant P_n vraie, démontrons P_{n+1} .

Par [17, 4.1.8], si $g : \mathcal{P}' \rightarrow \mathcal{P}$ est un morphisme lisse de \mathcal{V} -schémas formels lisses, $X' := g_0^{-1}(X)$, $f : X' \rightarrow X$ est le morphisme de k -schémas lisses induit par g et $d_{X'/X}$ est la dimension relative de X' sur X , alors, pour tout isocristal convergent G sur X , $\mathrm{sp}_{X' \hookrightarrow \mathcal{P}', +}(f^*(G))[d_{X'/X}] \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}\Gamma_{X'}^\dagger \circ g^!(\mathrm{sp}_{X \hookrightarrow \mathcal{P}, +}(G))$. Or, comme $g^!(\mathrm{sp}_{X \hookrightarrow \mathcal{P}, +}(G))$ est à support dans X' , le morphisme canonique $\mathbb{R}\Gamma_{X'}^\dagger \circ g^!(\mathrm{sp}_{X \hookrightarrow \mathcal{P}, +}(G)) \rightarrow g^!(\mathrm{sp}_{X \hookrightarrow \mathcal{P}, +}(G))$ est un isomorphisme. D'où, $\mathrm{sp}_{X' \hookrightarrow \mathcal{P}', +}(f^*(G))[d_{X'/X}] \xrightarrow{\sim} g^!(\mathrm{sp}_{X \hookrightarrow \mathcal{P}, +}(G))$. Il en résulte qu'il suffit de prouver que pour tout isocristal convergent G sur X , pour tout diviseur T de \mathcal{P} , $\mathbb{D} \circ (\dagger T) \circ \mathrm{sp}_{X \hookrightarrow \mathcal{P}, +}(G)$ est n -surholonome. De plus, puisque X est irréductible,

soit $T \cap X = X$, soit $T \cap X$ est un diviseur de X . Le cas où $T \cap X = X$ implique alors $\mathbb{D} \circ (\dagger T) \circ \mathrm{sp}_{X \hookrightarrow \mathcal{P},+}(G) = 0$, qui est n -surholonome. On se ramène donc au cas où $T \cap X$ est un diviseur de X .

Comme le fait que, pour tout isocrystal convergent G sur X , pour tout diviseur T de P , $\mathbb{D} \circ (\dagger T) \circ \mathrm{sp}_{X \hookrightarrow \mathcal{P},+}(G)$ soit n -surholonome est locale en \mathcal{P} , on se ramène au cas où \mathcal{P} est affine. L'immersion fermée $X \hookrightarrow P$ se relève alors en un morphisme $u : \mathfrak{X} \hookrightarrow \mathcal{P}$ de \mathcal{V} -schémas formels lisses. Dans ce cas, $\mathrm{sp}_{X \hookrightarrow \mathcal{P},+}(G) \xrightarrow{\sim} u_+ \circ \mathrm{sp}_*(G)$, où $\mathrm{sp} : \mathfrak{X}_K \rightarrow \mathfrak{X}$ est le morphisme de spécialisation. Comme le foncteur u_+ commute aux foncteurs de localisation (voir 1.15.7) et au foncteur dual (voir 1.11.1), on obtient donc $\mathbb{D} \circ (\dagger T) \circ \mathrm{sp}_{X \hookrightarrow \mathcal{P},+}(G) \xrightarrow{\sim} u_+ \circ \mathbb{D} \circ (\dagger T \cap X) \circ \mathrm{sp}_*(G)$.

La n -surholonomie étant stable par image directe par un morphisme propre de \mathcal{V} -schémas formels lisses, on se ramène ainsi au cas où $X = P$. On pose alors $\mathfrak{X} := \mathcal{P}$ et $\mathcal{G} = \mathrm{sp}_*(G)$. Il s'agit de prouver que $\mathbb{D} \circ (\dagger T)(\mathcal{G})$ est n -surholonome.

i) Supposons dans un premier temps que $T = \emptyset$. D'après [12], le foncteur sp_* commute aux foncteurs duaux, i.e. $\mathbb{D} \circ \mathrm{sp}_*(G) \xrightarrow{\sim} \mathrm{sp}_*(G^\vee)$, où G^\vee désigne l'isocrystal convergent sur X dual de G . On conclut alors par hypothèse de récurrence.

ii) Traitons maintenant le cas où T est un diviseur lisse. Comme T est affine et lisse, il existe un relèvement de \mathcal{V} -schémas formels affines et lisses $i : \mathfrak{T} \hookrightarrow \mathfrak{X}$ de l'immersion fermée $T \hookrightarrow X$. Or, en appliquant le foncteur dual \mathbb{D} au triangle de localisation de \mathcal{G} en T , on obtient le triangle distingué

$$(7.3.1) \quad \mathbb{D}(\dagger T)(\mathcal{G}) \rightarrow \mathbb{D}(\mathcal{G}) \rightarrow \mathbb{D} \circ \mathbb{R}\Gamma_T^\dagger(\mathcal{G}) \rightarrow \mathbb{D}(\dagger T)(\mathcal{G})[1].$$

On sait que $i_+ \circ i^!(\mathcal{G}) \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}\Gamma_T^\dagger(\mathcal{G})$ (voir 1.15.10 ou [7, 4.4.5.2]). Comme $i^!(\mathcal{G})$ est cohérent (car isomorphe à $\mathrm{sp}_*(i^*G)[-1]$), en utilisant le théorème de dualité relative (voir 1.11.1), il en découle $\mathbb{D} \circ \mathbb{R}\Gamma_T^\dagger(\mathcal{G}) \xrightarrow{\sim} i_+ \circ \mathbb{D} \circ i^!(\mathcal{G})$. Or, d'après respectivement [17, 4.3.5] et [17, 4.1.8], le foncteur sp_* commute aux images inverses (extraordinaires) et aux foncteurs duaux. Ainsi, $\mathbb{D} \circ i^!(\mathcal{G}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{sp}_*(i^*(G^\vee))[1]$. D'où : $\mathbb{D} \circ \mathbb{R}\Gamma_T^\dagger(\mathcal{G}) \xrightarrow{\sim} i_+(\mathrm{sp}_*i^*(G^\vee)[1])$. Comme l'hypothèse de récurrence implique que $\mathrm{sp}_*(i^*(G^\vee))$ est n -surholonome, il découle alors du théorème 3.9 que $i_+(\mathrm{sp}_*i^*(G^\vee)[1])$ est n -surholonome et donc que $\mathbb{D} \circ \mathbb{R}\Gamma_T^\dagger(\mathcal{G})$ est n -surholonome.

Il résulte alors du triangle distingué 7.3.1 et du cas i), que le faisceau $\mathbb{D}(\dagger T)(\mathcal{G})$ est n -surholonome.

iii) Supposons à présent que T soit un diviseur à croisements normaux stricts, i.e. (voir [24, 2.4]), un diviseur tel que T soit non vide, pour tout $x \in T$, l'anneau local $\mathcal{O}_{T,x}$ soit régulier, T soit un schéma réduit, autrement dit $T = \cup_{i=1}^r T_i$ avec T_i composantes irréductibles et distinctes de T , et pour tout sous-ensemble non-vidé $J \subset I$, le sous-schéma fermé $T_J := \cap_{j \in J} T_j$ soit régulier et de codimension dans X égale au cardinal de J .

Effectuons alors une (deuxième) récurrence sur $r \geq 1$, où r est l'entier qui apparaît dans l'expression $T = \cup_{i=1}^r T_i$. Le cas où $r = 1$ a été traité dans ii). Considérons le triangle distingué de Mayer-Vietoris (1.15.8) :

$$(7.3.2) \quad \mathbb{R}\Gamma_{\cup_{i=2}^r T_1 \cap T_i}^\dagger(\mathcal{G}) \rightarrow \mathbb{R}\Gamma_{T_1}^\dagger(\mathcal{G}) \oplus \mathbb{R}\Gamma_{\cup_{i=2}^r T_i}^\dagger(\mathcal{G}) \rightarrow \mathbb{R}\Gamma_{\cup_{i=1}^r T_i}^\dagger(\mathcal{G}) \rightarrow \mathbb{R}\Gamma_{\cup_{i=2}^r T_1 \cap T_i}^\dagger(\mathcal{G})[1].$$

Notons $i_1 : \mathfrak{X}_1 \hookrightarrow \mathfrak{X}$, un relèvement de l'immersion fermée $T_1 \hookrightarrow X$. Comme $\mathbb{R}\Gamma_{T_1}^\dagger \xrightarrow{\sim} i_{1+}i_1^\dagger$ (voir 1.15.10), par 1.15.1, on obtient l'isomorphisme

$$\mathbb{R}\Gamma_{\cup_{i=2}^r T_1 \cap T_i}^\dagger(\mathcal{G}) \xrightarrow{\sim} i_{1+}i_1^\dagger \mathbb{R}\Gamma_{\cup_{i=2}^r T_1 \cap T_i}^\dagger(\mathcal{G}).$$

Comme l'image inverse extraordinaire commute au foncteur cohomologique local (voir 1.15.6), cela implique l'isomorphisme : $\mathbb{R}\Gamma_{\cup_{i=2}^r T_1 \cap T_i}^\dagger(\mathcal{G}) \xrightarrow{\sim} i_{1+} \circ \mathbb{R}\Gamma_{\cup_{i=2}^r T_1 \cap T_i}^\dagger(i_1^\dagger \mathcal{G})$. Comme $\cup_{i=2}^r T_1 \cap T_i$ est un diviseur à croisements normaux stricts de T_1 et puisque $i_1^\dagger(\mathcal{G}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{sp}_*(i_1^*(\mathcal{G}))[-1]$, l'hypothèse de récurrence sur r implique que $\mathbb{D} \circ (\dagger \cup_{i=2}^r T_1 \cap T_i)(i_1^\dagger(\mathcal{G}))$ est n -surholonome. Il résulte alors du cas i) (via un triangle de localisation de $i_1^\dagger(\mathcal{G})$ en $\cup_{i=2}^r T_1 \cap T_i$) que $\mathbb{D} \circ \mathbb{R}\Gamma_{\cup_{i=2}^r T_1 \cap T_i}^\dagger(i_1^\dagger(\mathcal{G}))$ est n -surholonome. Grâce au théorème de dualité relative (voir 1.11.1) et à la préservation de la n -surholonomie par image directe par un morphisme propre (voir 3.9), il s'ensuit que $\mathbb{D} \circ \mathbb{R}\Gamma_{\cup_{i=2}^r T_1 \cap T_i}^\dagger(\mathcal{G}) \xrightarrow{\sim} i_{1+} \circ \mathbb{D} \circ \mathbb{R}\Gamma_{\cup_{i=2}^r T_1 \cap T_i}^\dagger(i_1^\dagger \mathcal{G})$ est n -surholonome. On obtient en outre (via aussi un triangle de localisation) par hypothèse de récurrence sur r que $\mathbb{D} \circ \mathbb{R}\Gamma_{T_1}^\dagger(\mathcal{G}) \oplus \mathbb{D} \circ \mathbb{R}\Gamma_{\cup_{i=2}^r T_i}^\dagger(\mathcal{G})$ est n -surholonome. En appliquant le foncteur \mathbb{D} au triangle distingué 7.3.2, il en découle que le complexe $\mathbb{D} \circ \mathbb{R}\Gamma_T^\dagger(\mathcal{G})$ est n -surholonome. Puis, en appliquant \mathbb{D} au triangle distingué de localisation en T de \mathcal{G} , via le cas i), il en résulte que $\mathbb{D} \circ (\dagger T)(\mathcal{G})$ est n -surholonome.

iv) Enfin, passons au cas où T est un diviseur quelconque mais différent de l'ensemble vide. Grâce au théorème de de Jong sur les altérations de variétés algébriques [24], il existe un k -schéma lisse X' et un morphisme $f_0 : X' \rightarrow X$ projectif, surjectif et génériquement fini et étale, tels que $f_0^{-1}(T)$ soit un diviseur à croisements normaux stricts de X' . Désignons par $j^\dagger G$ l'isocrystal sur Y surconvergent le long de T_X canoniquement déduit de G . Comme $\mathbb{D}\mathrm{sp}_{X \hookrightarrow \mathcal{P}, T, +}(j^\dagger G) \xrightarrow{\sim} \mathbb{D}(\dagger T)(\mathcal{G})$, il suffit de prouver que $\mathbb{D}\mathrm{sp}_{X \hookrightarrow \mathcal{P}, T, +}(j^\dagger G)$ est n -surholonome.

D'après 7.1.1, il existe un morphisme propre et lisse $g : \mathcal{P}' \rightarrow \mathcal{P}$ et une immersion fermée $u'_0 : X' \hookrightarrow \mathcal{P}'$ telle que $g_0 \circ u'_0 = u_0 \circ f_0$. Or, en notant $T' := g_0^{-1}(T)$, $f_0^* j^\dagger G$ est un isocrystal sur $X' \setminus T'$ surconvergent le long du diviseur à croisements normaux stricts $T' \cap X'$ de X' et $\mathrm{sp}_{X' \hookrightarrow \mathcal{P}', T', +}(f_0^* j^\dagger G) \xrightarrow{\sim} (\dagger T')\mathrm{sp}_{X' \hookrightarrow \mathcal{P}', T', +}(f_0^* G)$. Le cas iii) implique alors que $\mathrm{sp}_{X' \hookrightarrow \mathcal{P}', T', +}(f_0^* j^\dagger G)$ et $\mathbb{D}\mathrm{sp}_{X' \hookrightarrow \mathcal{P}', T', +}(f_0^* j^\dagger G)$ sont n -surholonomes. Il découle alors de 7.1.2 que $\mathbb{D}\mathrm{sp}_{X \hookrightarrow \mathcal{P}, T, +}(j^\dagger G)$ est n -surholonome. \square

THÉORÈME 7.4. – *Soit E un F -isocrystal unité sur Y surconvergent le long de T_X . Le faisceau $\mathrm{sp}_{X \hookrightarrow \mathcal{P}, T, +}(E)$ est surholonome.*

Démonstration. – On peut supposer X intègre. D'après le théorème de monodromie génériquement finie de Tsuzuki [34, 1.3.1], il existe un k -schéma lisse X' et un morphisme $f : X' \rightarrow X$ propre, surjectif et génériquement fini et étale, tels que, si on pose $Y' = f^{-1}(Y)$, $T' = X' \setminus Y'$ et j' l'immersion ouverte $Y' \hookrightarrow X'$, alors il existe G' , un (unique) F -isocrystal convergent sur X' vérifiant l'isomorphisme $f^*(E) \xrightarrow{\sim} (j')^\dagger G'$ de F -isocristaux sur Y' surconvergent le long de T' . En utilisant le théorème de désingularisation de de Jong [24], on peut en outre supposer que le morphisme f est projectif et que T' est un diviseur de X' .

D'après 7.1, il existe alors un morphisme propre et lisse $g : \mathcal{P}' \rightarrow \mathcal{P}$ et une immersion fermée $u'_0 : X' \hookrightarrow \mathcal{P}'$ telle que $g_0 \circ u'_0 = u_0 \circ f$. En notant $T'' := g_0^{-1}(T)$, comme $\mathrm{sp}_{X' \hookrightarrow \mathcal{P}', T'', +}(j')^\dagger(G')$ $\xrightarrow{\sim}$ $(\dagger T'')\mathrm{sp}_{X' \hookrightarrow \mathcal{P}', T'', +}(G')$, il résulte de 7.3 et de 3.3.5 que

$\mathrm{sp}_{X' \hookrightarrow \mathcal{P}', T'', +}(j')^\dagger(G')$ est surholonome. Puisque $f^*(E) \xrightarrow{\sim} (j')^\dagger G'$, il découle de 7.1 que $\mathrm{sp}_{X \hookrightarrow \mathcal{P}, T, +}(E)$ est surholonome. \square

THÉORÈME 7.5. – Soient U un k -schéma séparé et lisse, E un F -isocristal unité sur U et $\mathcal{E} := \mathrm{sp}_{U, +}(E)$ l'objet de $F\text{-Isoc}^{\dagger\dagger}(U/K)$ associé (voir 1.20). Alors $\mathcal{E} \in F\text{-}\mathfrak{M}_U^+$, i.e. \mathcal{E} est un $F\text{-}\mathcal{D}_U$ -module arithmétique surholonome.

Démonstration. – Par construction de $\mathrm{sp}_{U, +}$, de $F\text{-Isoc}^{\dagger\dagger}(U/K)$ et de $F\text{-}\mathfrak{M}_U^+$ (constructions qui s'établissent par recollement via un recouvrement de U par des ouverts affines), on peut supposer U affine et intègre. Il existe donc un plongement de U dans un \mathcal{V} -schéma formel \mathfrak{X} propre et lisse, un diviseur T de X tels que $U = Z \setminus T$, où Z est l'adhérence de U dans P (voir par exemple le début de 5.1). D'après le théorème de désingularisation de de Jong de [24], il existe un k -schéma lisse Z' et un morphisme $f_0 : Z' \rightarrow Z$ projectif, surjectif et génériquement fini et étale, tels que $f_0^{-1}(T \cap Z)$ soit un diviseur à croisements normaux stricts dans Z' . De manière analogue à 7.1.1, il existe un morphisme propre et lisse $g : \mathfrak{X}' \rightarrow \mathfrak{X}$ et une immersion fermée $u'_0 : Z' \hookrightarrow P'$ telle que $g_0 \circ u'_0 = u_0 \circ f_0$. Notons $U' := Z' \setminus f_0^{-1}(T \cap Z)$, $\mathcal{Y} := \mathfrak{X}' \setminus T$, $\mathcal{Y}' := \mathfrak{X}' \setminus g_0^{-1}(T)$, $h : \mathcal{Y}' \rightarrow \mathcal{Y}$ le morphisme induit par g , E' le F -isocristal surconvergent unité sur U' déduit de E , \widehat{E} (resp. \widehat{E}') le F -isocristal convergent sur U (resp. U') déduit de E (resp. E').

D'après [13, 6.3.1], $\mathbb{R}\Gamma_{Z'}^\dagger g^1(\mathcal{E})$ est dans l'image essentielle de $\mathrm{sp}_{Z' \hookrightarrow \mathfrak{X}', g_0^{-1}(T), +}$ (pour plus de précisions, voir la remarque 7.6). De plus, on dispose des isomorphismes :

$$(7.5.1) \quad \mathbb{R}\Gamma_{Z'}^\dagger g^1(\mathcal{E})|_{\mathcal{Y}'} \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}\Gamma_{U'}^\dagger h^1(\mathcal{E}|_{\mathcal{Y}}) \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}\Gamma_{U'}^\dagger h^1(\mathrm{sp}_{U \hookrightarrow \mathcal{Y}, +}(\widehat{E})) \xrightarrow{\sim} \mathrm{sp}_{U' \hookrightarrow \mathcal{Y}', +}(\widehat{E}'),$$

le dernier isomorphisme provenant de [10] ou de [17, 4.1.8].

Grâce au théorème de pleine fidélité de Kedlaya du foncteur restriction en dehors du lieu de surconvergence (voir [25]) et à la pleine fidélité du foncteur $\mathrm{sp}_{Z' \hookrightarrow \mathfrak{X}', g_0^{-1}(T), +}$, pour vérifier que l'on dispose d'un isomorphisme de la forme $\mathbb{R}\Gamma_{Z'}^\dagger g^1(\mathcal{E}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{sp}_{Z' \hookrightarrow \mathfrak{X}', g_0^{-1}(T), +}(E')$, il suffit alors de le voir en dehors de $g_0^{-1}(T)$, ce qui découle de 7.5.1. Cela implique, d'après [13, 6.3.1], que \mathcal{E} est un facteur direct de $g_+ \mathrm{sp}_{Z' \hookrightarrow \mathfrak{X}', g_0^{-1}(T), +}(E')$. Via le théorème 7.4, $\mathrm{sp}_{Z' \hookrightarrow \mathfrak{X}', g_0^{-1}(T), +}(E')$ est surholonome. Les propriétés de stabilité de la surholonomie (voir 3.3.2 et 3.9) nous permettent de conclure. \square

REMARQUES 7.6. – Avec les notations de la preuve de 7.5, il résulte de la description de l'image essentielle du foncteur $\mathrm{sp}_{Z' \hookrightarrow \mathfrak{X}', g_0^{-1}(T), +}$ de [17, 4.1.9] et de celle de la dernière phrase du théorème de Berthelot de 1.17, qu'un $\mathcal{D}_{\mathfrak{X}'}^\dagger(g_0^{-1}(T))_{\mathbb{Q}}$ -cohérent et à support dans Z' est dans l'image essentielle de $\mathrm{sp}_{Z' \hookrightarrow \mathfrak{X}', g_0^{-1}(T), +}$ si et seulement si sa restriction en dehors de $g_0^{-1}(T)$ est dans l'image essentielle de $\mathrm{sp}_{U' \hookrightarrow \mathcal{Y}', +}$.

Ainsi, (si ce fait peut sembler quelque peu abrupte dans la preuve de [13, 6.3.1]), pour voir que $\mathbb{R}\Gamma_{Z'}^\dagger g^1(\mathcal{E})$ est dans l'image essentielle de $\mathrm{sp}_{Z' \hookrightarrow \mathfrak{X}', g_0^{-1}(T), +}$, il suffit alors d'invoquer l'isomorphisme : $\mathbb{R}\Gamma_{Z'}^\dagger g^1(\mathcal{E})|_{\mathcal{Y}'} \xrightarrow{\sim} \mathrm{sp}_{U' \hookrightarrow \mathcal{Y}', +}(\widehat{E}')$.

8. Sur les conjectures de la stabilité de l'holonomie

Soit $f : \mathfrak{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ un morphisme de \mathcal{V} -schémas formels lisses. Considérons les conjectures suivantes :

- A) On suppose que \mathfrak{X} se plonge dans un \mathcal{V} -schéma formel propre et lisse. Si \mathcal{E} est un objet de $F\text{-}\mathcal{D}_{\text{hol}}^{\text{b}}(\mathcal{D}_{\mathfrak{X}, \mathbb{Q}}^{\dagger})$ à support propre sur \mathcal{Y} , alors l'image directe $f_+(\mathcal{E})$ appartient à $F\text{-}\mathcal{D}_{\text{hol}}^{\text{b}}(\mathcal{D}_{\mathcal{Y}, \mathbb{Q}}^{\dagger})$.
- A') Si f est propre et \mathcal{E} est un objet de $F\text{-}\mathcal{D}_{\text{hol}}^{\text{b}}(\mathcal{D}_{\mathfrak{X}, \mathbb{Q}}^{\dagger})$, alors $f_+(\mathcal{E})$ appartient à $F\text{-}\mathcal{D}_{\text{hol}}^{\text{b}}(\mathcal{D}_{\mathcal{Y}, \mathbb{Q}}^{\dagger})$.
- B) Si \mathcal{F} est un objet de $F\text{-}\mathcal{D}_{\text{hol}}^{\text{b}}(\mathcal{D}_{\mathcal{Y}, \mathbb{Q}}^{\dagger})$, alors l'image inverse extraordinaire $f^!(\mathcal{F})$ appartient à $F\text{-}\mathcal{D}_{\text{hol}}^{\text{b}}(\mathcal{D}_{\mathfrak{X}, \mathbb{Q}}^{\dagger})$.
- C) Si Z est un fermé de X et si \mathcal{E} appartient $F\text{-}\mathcal{D}_{\text{hol}}^{\text{b}}(\mathcal{D}_{\mathcal{Y}, \mathbb{Q}}^{\dagger})$, alors $\mathbb{R}\Gamma_Z^{\dagger}(\mathcal{E})$ appartient à $F\text{-}\mathcal{D}_{\text{hol}}^{\text{b}}(\mathcal{D}_{\mathcal{Y}, \mathbb{Q}}^{\dagger})$.
- C') Si Z est un fermé de X et si \mathcal{E} appartient $F\text{-}\mathcal{D}_{\text{hol}}^{\text{b}}(\mathcal{D}_{\mathcal{Y}, \mathbb{Q}}^{\dagger})$, alors $(\dagger Z)(\mathcal{E})$ appartient à $F\text{-}\mathcal{D}_{\text{hol}}^{\text{b}}(\mathcal{D}_{\mathcal{Y}, \mathbb{Q}}^{\dagger})$.

Rappelons que, dans [7, 5.3.6], Berthelot a énoncé les conjectures A (sans l'hypothèse « \mathfrak{X} se plonge dans un \mathcal{V} -schéma formel propre et lisse »), B et C ci-dessus. D'après [7, 5.3.6], les conjectures B et C sont équivalentes. De plus, via le triangle de localisation en Z , on remarque que les conjectures C et C' sont équivalentes.

LEMME 8.1. – *On suppose la conjecture B vérifiée. Alors, pour tout \mathcal{V} -schéma formel lisse \mathfrak{X} , un $F\text{-}\mathcal{D}_{\mathfrak{X}, \mathbb{Q}}^{\dagger}$ -module cohérent est holonome si et seulement s'il est à fibres extraordinaires finies (voir 2.1).*

Démonstration. – Comme la conjecture B est supposée vérifiée, il est clair qu'un $F\text{-}\mathcal{D}_{\mathfrak{X}, \mathbb{Q}}^{\dagger}$ -module holonome est à fibres extraordinaires finies. Réciproquement, soit \mathcal{E} un $F\text{-}\mathcal{D}_{\mathfrak{X}, \mathbb{Q}}^{\dagger}$ -module cohérent à fibres extraordinaires finies. Prouvons par récurrence sur la dimension de son support, noté Z , que celui-ci est holonome. D'après 2.4, $\mathcal{E}' := \mathcal{H}^0\mathbb{D} \circ \mathcal{H}^0\mathbb{D}(\mathcal{E})$ est le plus grand sous- $F\text{-}\mathcal{D}_{\mathfrak{X}, \mathbb{Q}}^{\dagger}$ -module holonome de \mathcal{E} . D'après [7, 5.3.5(ii)], le terme du milieu d'une suite exacte courte de $F\text{-}\mathcal{D}_{\mathfrak{X}, \mathbb{Q}}^{\dagger}$ -modules cohérents est holonome si et seulement si les deux autres termes le sont. Pour obtenir l'holonomie de \mathcal{E} , il suffit alors de prouver celle de \mathcal{E}/\mathcal{E}' . Or, la conjecture B étant supposée vraie, \mathcal{E}' est à fibres extraordinaires finies. Comme \mathcal{E}' et \mathcal{E} sont alors à fibres extraordinaires finies, il en est donc de même de \mathcal{E}/\mathcal{E}' . Par hypothèse de récurrence, il suffit alors de vérifier que la dimension du support de \mathcal{E}/\mathcal{E}' est strictement inférieure à celle de Z . Or, on déduit de 2.2 que l'inclusion $\mathcal{E}' \subset \mathcal{E}$ est un isomorphisme au-dessus d'un ouvert \mathcal{U} de \mathfrak{X} induisant un ouvert dense de Z . Par conséquent, \mathcal{E}/\mathcal{E}' est nulle au-dessus de \mathcal{U} et son support est de dimension strictement inférieure à celle de Z . D'où le résultat. \square

PROPOSITION 8.2. – *Les assertions suivantes sont équivalentes :*

- 1) *La conjecture B est exacte.*

- 2) Pour tout \mathcal{V} -schéma formel lisse \mathfrak{X} , un F -complexe \mathcal{E} de $F-D_{\text{coh}}^b(\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}^\dagger)$ est holonome si et seulement s'il est surcohérent.
- 3) Pour tout \mathcal{V} -schéma formel lisse \mathfrak{X} , un F -complexe \mathcal{E} de $F-D_{\text{coh}}^b(\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}^\dagger)$ est holonome si et seulement s'il est surholonome.

Démonstration. – Prouvons d'abord 1) \Rightarrow 2). Comme la conjecture B est supposée vraie, il est clair qu'un F -complexe de $F-D_{\text{hol}}^b(\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}^\dagger)$ est surcohérent. Réciproquement, soit $\mathcal{E} \in F-D_{\text{surcoh}}^b(\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}^\dagger)$. Pour tout entier l , $\mathcal{H}^l(\mathcal{E})$ sont alors des $F-D_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}^\dagger$ -modules surcohérents (voir 1.16). En particulier, ils sont alors à fibres extraordinaires finies. Il résulte alors du lemme 8.1 que pour tout entier l , $\mathcal{H}^l(\mathcal{E})$ sont des $F-D_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}^\dagger$ -modules holonomes. Ainsi, \mathcal{E} est holonome.

Vérifions 2) \Rightarrow 3). Comme l'holonomie est stable par foncteur dual (voir [35, III.4.4]), l'assertion 2) implique que la surcohérence est stable par foncteur dual. Il en résulte que les notions de surcohérence et de surholonomie sont équivalentes (voir la deuxième remarque 3.2). D'où : 2) \Rightarrow 3).

Enfin, l'implication 3) \Rightarrow 1) découle de la stabilité par image inverse extraordinaire de la surholonomie (3.8). \square

REMARQUES 8.3. – Il résulte de 8.2 que si la conjecture B est exacte alors les notions d'holonomie, de surcohérence et de surholonomie sont équivalentes.

PROPOSITION 8.4. – Soient T le diviseur de X , \mathcal{E} et $\mathcal{F} \in F-D_{\text{coh}}^b(\mathcal{D}_{\mathfrak{X}}^\dagger(\dagger T)_{\mathbb{Q}}) \cap F-D_{\text{hol}}^b(\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}^\dagger)$. Si la conjecture B est validée, alors

1. le F -complexe $\mathbb{D}_T(\mathcal{E})$ appartient à $F-D_{\text{coh}}^b(\mathcal{D}_{\mathfrak{X}}^\dagger(\dagger T)_{\mathbb{Q}}) \cap F-D_{\text{hol}}^b(\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}^\dagger)$,
2. le F -complexe $\mathcal{E} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}(\dagger T)_{\mathbb{Q}}}^\mathbb{L} \mathcal{F}$ (voir 1.10.4) appartient à

$$F-D_{\text{coh}}^b(\mathcal{D}_{\mathfrak{X}}^\dagger(\dagger T)_{\mathbb{Q}}) \cap F-D_{\text{hol}}^b(\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}^\dagger).$$

Démonstration. – D'après 1.9, comme \mathcal{E} et $(\dagger T)(\mathcal{E})$ sont des complexes à cohomologie $\mathcal{D}_{\mathfrak{X}}^\dagger(\dagger T)_{\mathbb{Q}}$ -cohérente, le morphisme canonique $\mathcal{E} \rightarrow (\dagger T)(\mathcal{E})$ est un isomorphisme car il l'est en dehors de T . Cela implique l'isomorphisme : $\mathbb{D}_T(\mathcal{E}) \xleftarrow{\sim} \mathbb{D}_T(\dagger T)(\mathcal{E})$. Le foncteur dual commutant à l'extension des scalaires, il en résulte $\mathbb{D}_T(\mathcal{E}) \xrightarrow{\sim} (\dagger T)\mathbb{D}(\mathcal{E})$. Le foncteur \mathbb{D} stabilisant l'holonomie, $\mathbb{D}(\mathcal{E})$ est holonome. Comme la conjecture B équivaut à la conjecture C, elle implique la stabilité de l'holonomie par le foncteur $(\dagger T)$. Ainsi, $(\dagger T)\mathbb{D}(\mathcal{E})$ est holonome. D'où 1).

Passons à la deuxième propriété. Soient $p_1, p_2 : \mathfrak{X} \times_S \mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{X}$ les projections respectives à gauche et à droite, $\delta : \mathfrak{X} \hookrightarrow \mathfrak{X} \times_S \mathfrak{X}$ l'immersion diagonale. Comme en particulier $\mathcal{E}, \mathcal{F} \in F-D_{\text{coh}}^b(\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}^\dagger)$, il existe $\mathcal{E}^{(\bullet)}, \mathcal{F}^{(\bullet)} \in LD_{\mathbb{Q},\text{coh}}^b(\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}}^{(\bullet)})$ tels que $\mathcal{E} \xrightarrow{\sim} \lim_{\rightarrow} \mathcal{E}^{(\bullet)}, \mathcal{F} \xrightarrow{\sim} \lim_{\rightarrow} \mathcal{F}^{(\bullet)}$ (voir 1.8). Par commutation (à un décalage près) du foncteur image inverse extraordinaire au produit tensoriel interne (cela résulte de [6, 3.3.1] ou de [11, 1.2.22]), on obtient :

$$(8.4.1) \quad \delta^!(\mathcal{E}^{(\bullet)} \boxtimes_{\mathcal{O}_S}^\mathbb{L} \mathcal{F}^{(\bullet)}) = \delta^!(p_1^!(\mathcal{E}^{(\bullet)}) \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X} \times_S \mathfrak{X}, \mathbb{Q}}}^\mathbb{L} p_2^!(\mathcal{F}^{(\bullet)})[-2d_{\mathfrak{X}}]) \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}^{(\bullet)} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}, \mathbb{Q}}}^\mathbb{L} \mathcal{F}^{(\bullet)}[-d_{\mathfrak{X}}].$$

Or, d'après 1.4.2, le foncteur $(\dagger T)$ est canoniquement isomorphe au foncteur $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}(\dagger T)_{\mathbb{Q}} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}, \mathbb{Q}}}^{\mathbb{L}\dagger} -$. On en déduit l'isomorphisme :

$$(8.4.2) \quad (\dagger T)(\mathcal{E}(\bullet)) \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}, \mathbb{Q}}}^{\mathbb{L}\dagger} \mathcal{F}(\bullet) \xrightarrow{\sim} (\dagger T)(\mathcal{E}(\bullet)) \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}(\dagger T)_{\mathbb{Q}}}^{\mathbb{L}\dagger} (\dagger T)(\mathcal{F}(\bullet)).$$

Comme l'holonomie est stable par produit tensoriel externe (voir [7, 5.3.5.(v)]), par image inverse extraordinaire et par foncteur de localisation, il résulte de 8.4.1 et de 8.4.2, que $\lim_{\rightarrow} ((\dagger T)(\mathcal{E}(\bullet)) \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}(\dagger T)_{\mathbb{Q}}}^{\mathbb{L}\dagger} (\dagger T)(\mathcal{F}(\bullet)))$ est holonome. Comme $\mathcal{E} \xrightarrow{\sim} (\dagger T)(\mathcal{E}) \xrightarrow{\sim} \lim_{\rightarrow} (\dagger T)(\mathcal{E}(\bullet))$ et aussi $\mathcal{F} \xrightarrow{\sim} \lim_{\rightarrow} (\dagger T)(\mathcal{F}(\bullet))$, on obtient :

$$\lim_{\rightarrow} ((\dagger T)(\mathcal{E}(\bullet)) \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}(\dagger T)_{\mathbb{Q}}}^{\mathbb{L}\dagger} (\dagger T)(\mathcal{F}(\bullet))) \xrightarrow{\sim} \lim_{\rightarrow} (\dagger T)(\mathcal{E}(\bullet)) \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}(\dagger T)_{\mathbb{Q}}}^{\mathbb{L}\dagger} \lim_{\rightarrow} (\dagger T)(\mathcal{F}(\bullet)) \xrightarrow{\sim} \mathcal{E} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}(\dagger T)_{\mathbb{Q}}}^{\mathbb{L}\dagger} \mathcal{F}.$$

Ainsi, $\mathcal{E} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}(\dagger T)_{\mathbb{Q}}}^{\mathbb{L}\dagger} \mathcal{F}$ est holonome. \square

LEMME 8.5. – Soient Z un sous-schéma fermé intègre d'un k -schéma lisse X et Z' un sous-schéma fermé de Z . On suppose que $\dim Z' < \dim Z < \dim X$. Il existe alors un diviseur T de X tel que $T \supset Z'$ et $T \not\supset Z$.

Démonstration. – Soit $(X_i)_i$ une partie d'ouverts affines de X telle que $Z' \cap X_i \neq \emptyset$ et $Z' \subset \cup_i X_i$. En choisissant un élément non nul de l'idéal de définition de $Z' \cap X_i$ dans X_i qui n'appartient pas à celui de $Z \cap X_i$ dans X_i , on lui associe un diviseur T_i de X_i tel que $T_i \supset Z' \cap X_i$ et $T_i \not\supset Z \cap X_i$. En notant \overline{T}_i l'adhérence schématique de T_i dans X , on pose $T := \cup_i \overline{T}_i$. On a $T \supset Z'$. Supposons par l'absurde que $T \supset Z$. Comme Z est intègre, il existe un i tel que $\overline{T}_i \supset Z$. D'où $T_i = \overline{T}_i \cap X_i \supset Z \cap X_i$. Contradiction. \square

LEMME 8.6. – Soient $b : \mathfrak{Y}' \rightarrow \mathfrak{Y}$ un morphisme étale de \mathcal{V} -schémas formels lisses de dimension relative nulle et $\mathcal{E} \in D_{\text{coh}}^b(\mathcal{D}_{\mathfrak{Y}, \mathbb{Q}}^{\dagger})$. On dispose de l'isomorphisme canonique $b^! \mathbb{D}_{\mathfrak{Y}}(\mathcal{E}) \xrightarrow{\sim} \mathbb{D}_{\mathfrak{Y}'} b^!(\mathcal{E})$ compatible à Frobenius.

Démonstration. – Comme b est étale, $b^!(\mathcal{E}) = \mathcal{D}_{\mathfrak{Y}', \mathbb{Q}}^{\dagger} \otimes_{b^{-1} \mathcal{D}_{\mathfrak{Y}, \mathbb{Q}}^{\dagger}} b^{-1} \mathcal{E}$. Notons $(\mathcal{D}_{\mathfrak{Y}, \mathbb{Q}}^{\dagger} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{Y}, \mathbb{Q}}} \omega_{\mathfrak{Y}, \mathbb{Q}}^{-1})_t$ le $\mathcal{D}_{\mathfrak{Y}, \mathbb{Q}}^{\dagger}$ -bimodule à gauche égal à $\mathcal{D}_{\mathfrak{Y}, \mathbb{Q}}^{\dagger} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{Y}, \mathbb{Q}}} \omega_{\mathfrak{Y}, \mathbb{Q}}^{-1}$ mais dont on a inversé les structures droite et gauche. De même avec des primes. Avec ces notations, on obtient alors l'isomorphisme canonique : $b_d^!((\mathcal{D}_{\mathfrak{Y}, \mathbb{Q}}^{\dagger} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{Y}, \mathbb{Q}}} \omega_{\mathfrak{Y}, \mathbb{Q}}^{-1})_t) \xrightarrow{\sim} (\mathcal{D}_{\mathfrak{Y}', \mathbb{Q}}^{\dagger} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{Y}', \mathbb{Q}}} \omega_{\mathfrak{Y}', \mathbb{Q}}^{-1})_t$ où l'indice « d » signifie que nous choisissons la structure droite de $\mathcal{D}_{\mathfrak{Y}, \mathbb{Q}}^{\dagger}$ -module à gauche sur $(\mathcal{D}_{\mathfrak{Y}, \mathbb{Q}}^{\dagger} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{Y}, \mathbb{Q}}} \omega_{\mathfrak{Y}, \mathbb{Q}}^{-1})_t$ pour calculer le foncteur $b^!$. On bénéficie des isomorphismes :

$$\begin{aligned} b^! \mathbb{R} \text{Hom}_{\mathcal{D}_{\mathfrak{Y}, \mathbb{Q}}^{\dagger}}(\mathcal{E}, (\mathcal{D}_{\mathfrak{Y}, \mathbb{Q}}^{\dagger} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{Y}, \mathbb{Q}}} \omega_{\mathfrak{Y}, \mathbb{Q}}^{-1})_t)[d_V] & \\ \xrightarrow{\sim} \mathbb{R} \text{Hom}_{b^{-1} \mathcal{D}_{\mathfrak{Y}, \mathbb{Q}}^{\dagger}}(b^{-1}(\mathcal{E}), b_d^!((\mathcal{D}_{\mathfrak{Y}, \mathbb{Q}}^{\dagger} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{Y}, \mathbb{Q}}} \omega_{\mathfrak{Y}, \mathbb{Q}}^{-1})_t))[d_V] & \\ \xrightarrow{\sim} \mathbb{R} \text{Hom}_{b^{-1} \mathcal{D}_{\mathfrak{Y}, \mathbb{Q}}^{\dagger}}(b^{-1}(\mathcal{E}), (\mathcal{D}_{\mathfrak{Y}', \mathbb{Q}}^{\dagger} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{Y}', \mathbb{Q}}} \omega_{\mathfrak{Y}', \mathbb{Q}}^{-1})_t)[d_V] & \\ \xrightarrow{\sim} \mathbb{R} \text{Hom}_{\mathcal{D}_{\mathfrak{Y}', \mathbb{Q}}^{\dagger}}(b^!(\mathcal{E}), (\mathcal{D}_{\mathfrak{Y}', \mathbb{Q}}^{\dagger} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{Y}', \mathbb{Q}}} \omega_{\mathfrak{Y}', \mathbb{Q}}^{-1})_t)[d_V], & \end{aligned}$$

où, pour calculer les foncteurs $\mathbb{R} \text{Hom}$, nous prenons les structures gauches respectives (des bimodules à gauche) et où le premier isomorphisme se déduit par exemple de [12, 2.1.12.(i)]. On conclut ensuite via les deux isomorphismes de transposition compatibles à Frobenius $(\mathcal{D}_{\mathfrak{Y}, \mathbb{Q}}^{\dagger} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{Y}, \mathbb{Q}}} \omega_{\mathfrak{Y}, \mathbb{Q}}^{-1})_t \xrightarrow{\sim} \mathcal{D}_{\mathfrak{Y}, \mathbb{Q}}^{\dagger} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{Y}, \mathbb{Q}}} \omega_{\mathfrak{Y}, \mathbb{Q}}^{-1}$ et $(\mathcal{D}_{\mathfrak{Y}', \mathbb{Q}}^{\dagger} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{Y}', \mathbb{Q}}} \omega_{\mathfrak{Y}', \mathbb{Q}}^{-1})_t \xrightarrow{\sim} \mathcal{D}_{\mathfrak{Y}', \mathbb{Q}}^{\dagger} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{Y}', \mathbb{Q}}} \omega_{\mathfrak{Y}', \mathbb{Q}}^{-1}$ (voir [12, 2.1.7]). \square

8.7. – Soient $b : \mathfrak{Y}' \rightarrow \mathfrak{Y}$ un morphisme fini, étale et surjectif de \mathcal{V} -schémas formels lisses et $\mathcal{E} \in D_{\text{coh}}^b(\mathcal{D}_{\mathfrak{Y},\mathbb{Q}}^\dagger) \cap D_{\text{coh}}^b(\mathcal{O}_{\mathfrak{Y},\mathbb{Q}})$. Le foncteur $b_+ : D_{\text{coh}}^b(\mathcal{D}_{\mathfrak{Y}',\mathbb{Q}}^\dagger) \rightarrow D_{\text{coh}}^b(\mathcal{D}_{\mathfrak{Y},\mathbb{Q}}^\dagger)$ est adjoint à gauche (resp. à droite) de $b^!$ (resp. b^+) : $D_{\text{coh}}^b(\mathcal{D}_{\mathfrak{Y},\mathbb{Q}}^\dagger) \rightarrow D_{\text{coh}}^b(\mathcal{D}_{\mathfrak{Y}',\mathbb{Q}}^\dagger)$. Or, d'après 8.6, $b^+ \xrightarrow{\sim} b^!$. On obtient donc les morphismes d'adjonction $\mathcal{E} \rightarrow b_+b^!(\mathcal{E}) \rightarrow \mathcal{E}$. Le composé $\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ est la multiplication par le degré de b et est en particulier un isomorphisme.

En effet, avec le théorème de dualité de Grothendieck, le foncteur $b_* : D_{\text{coh}}^b(\mathcal{D}_{\mathfrak{Y}',\mathbb{Q}}^\dagger) \cap D_{\text{coh}}^b(\mathcal{O}_{\mathfrak{Y}',\mathbb{Q}}) \rightarrow D_{\text{coh}}^b(\mathcal{D}_{\mathfrak{Y},\mathbb{Q}}^\dagger) \cap D_{\text{coh}}^b(\mathcal{O}_{\mathfrak{Y},\mathbb{Q}})$ est adjoint à droite et à gauche de $b^* : D_{\text{coh}}^b(\mathcal{D}_{\mathfrak{Y},\mathbb{Q}}^\dagger) \cap D_{\text{coh}}^b(\mathcal{O}_{\mathfrak{Y},\mathbb{Q}}) \rightarrow D_{\text{coh}}^b(\mathcal{D}_{\mathfrak{Y}',\mathbb{Q}}^\dagger) \cap D_{\text{coh}}^b(\mathcal{O}_{\mathfrak{Y}',\mathbb{Q}})$. De plus, le composé $\mathcal{E} \rightarrow b_*b^*(\mathcal{E}) \rightarrow \mathcal{E}$, induit par adjonction, est la multiplication par le degré de b . Comme $b_* = b_+$, par unicité des foncteurs adjoints, il en découle que $\mathcal{E} \rightarrow b_+b^!(\mathcal{E}) \rightarrow \mathcal{E}$ est la multiplication par le degré de b .

PROPOSITION 8.8. – *Les conjectures A' et B impliquent la conjecture A.*

Démonstration. – Soit \mathcal{E} un objet de $F\text{-}D_{\text{hol}}^b(\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}^\dagger)$ tel que son support noté Z soit propre sur \mathcal{Y} . Notons $u_0 : Z \hookrightarrow X$ l'immersion fermée canonique.

Étape 1. Dans un premier temps, supposons que le support Z de \mathcal{E} soit lisse. Par hypothèse, il existe une immersion $\rho : \mathfrak{X} \hookrightarrow \mathcal{P}$ avec \mathcal{P} un \mathcal{V} -schéma formel propre et lisse. On pose $\delta = (\rho, f) : \mathfrak{X} \hookrightarrow \mathcal{P} \times \mathcal{Y}$. Comme la projection $\mathcal{P} \times \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{Y}$ est propre, via la conjecture A' que nous supposons exacte, pour prouver que $f_+(\mathcal{E})$ est holonome, il suffit de vérifier que $\delta_+(\mathcal{E})$ est holonome. Comme cela est local en $\mathcal{P} \times \mathcal{Y}$, on peut supposer $\mathcal{P} \times \mathcal{Y}$ affine. Puisque Z et $\mathcal{P} \times \mathcal{Y}$ sont propres sur Y , la Y -immersion $\delta_0 \circ u_0 = (\rho_0 \circ u_0, f_0 \circ u_0) : Z \hookrightarrow \mathcal{P} \times Y$ est propre, donc fermée. Il en résulte que Z est aussi affine et donc que $Z \hookrightarrow X$ se relève en un morphisme $u : \mathcal{Z} \hookrightarrow \mathfrak{X}$ de \mathcal{V} -schémas formels lisses. D'après le théorème de Berthelot-Kashiwara (voir 1.14), \mathcal{E} est de la forme $u_+(\mathcal{F})$, avec $\mathcal{F} \in F\text{-}D_{\text{hol}}^b(\mathcal{D}_{\mathcal{Z},\mathbb{Q}}^\dagger)$. D'où : $\delta_+(\mathcal{E}) \xrightarrow{\sim} \delta_+u_+(\mathcal{F}) \xrightarrow{\sim} (\delta \circ u)_+(\mathcal{F})$. Comme $\delta \circ u$ est une immersion fermée, on conclut via le théorème de Berthelot-Kashiwara (voir 1.14) que $\delta_+(\mathcal{E})$ est holonome.

Étape 2. Prouvons maintenant, par récurrence sur la dimension de Z , que $f_+(\mathcal{E})$ appartient à $F\text{-}D_{\text{hol}}^b(\mathcal{D}_{\mathcal{Y},\mathbb{Q}}^\dagger)$. Lorsque $\dim Z = 0$, Z est lisse et cela résulte alors du premier cas. Supposons donc $\dim Z > 0$ et le théorème vrai lorsque $\dim Z$ est strictement inférieure.

Étape 3 (Réduction au cas où \mathcal{E} est « associé » à un F -isocrystal surconvergent). En considérant la deuxième suite spectrale d'hypercohomologie du foncteur f_+ , on se ramène au cas où \mathcal{E} est réduit à un terme. Soient Z_1, \dots, Z_n les composantes irréductible de Z . Quitte à les réordonner, supposons $\dim Z_1 = \dim Z$. Posons $Z' = \cup_{i=2, \dots, n} Z_i$. Comme on suppose la conjecture B vraie, les complexes du triangle distingué de Mayer-Vietoris (voir 1.15.8) :

$$(8.8.1) \quad \mathbb{R}\Gamma_{Z_1 \cap Z'}^\dagger(\mathcal{E}) \rightarrow \mathbb{R}\Gamma_{Z_1}^\dagger(\mathcal{E}) \oplus \mathbb{R}\Gamma_{Z'}^\dagger(\mathcal{E}) \rightarrow \mathbb{R}\Gamma_Z^\dagger(\mathcal{E}) \rightarrow \mathbb{R}\Gamma_{Z_1 \cap Z'}^\dagger(\mathcal{E})[1]$$

sont holonomes et à support propre sur Y . De plus, comme \mathcal{E} est à support dans Z , le morphisme canonique $\mathbb{R}\Gamma_Z^\dagger(\mathcal{E}) \rightarrow \mathcal{E}$ est un isomorphisme (voir [11, 2.2.9]). En appliquant f_+ à 8.8.1, quitte à procéder à une seconde récurrence sur le nombre de composantes irréductibles de dimension $\dim Z$, on se ramène alors au cas où Z est intègre.

D'après le théorème de désingularisation de de Jong ([24]), il existe un morphisme $h_0 : Z' \rightarrow Z$ surjectif, projectif, génériquement fini et étale tel que Z' soit intègre et lisse. Le morphisme h_0 se décompose en une immersion fermée $Z' \hookrightarrow \mathbb{P}_Z^r$ suivie de la projection $\mathbb{P}_Z^r \rightarrow Z$. En notant \mathfrak{X}' le complété p -adique de $\mathbb{P}_{\mathfrak{X}}^r$, $g : \mathfrak{X}' \rightarrow \mathfrak{X}$ la projection canonique, $u'_0 : Z' \hookrightarrow X'$ l'immersion fermée induite, on obtient l'égalité $g_0 \circ u'_0 = u_0 \circ h_0$.

Il existe un ouvert \mathfrak{U} de \mathfrak{X} tel que $V := Z \cap U$ soit un ouvert lisse non vide de Z et tel que V soit inclus dans un ouvert affine et lisse W de Z tel que $h_0^{-1}(W) \rightarrow W$ soit fini et étale. Notons $\mathfrak{U}' := g^{-1}(\mathfrak{U})$, $a : \mathfrak{U}' \rightarrow \mathfrak{U}$ le morphisme induit par g . Il existe alors des morphismes $b : \mathfrak{Y}' \rightarrow \mathfrak{Y}$, $v : \mathfrak{Y} \hookrightarrow \mathfrak{U}$ et $v' : \mathfrak{Y}' \hookrightarrow \mathfrak{U}'$ de \mathcal{V} -schémas formels lisses relevant de respectivement $h_0^{-1}(V) \rightarrow V$, $V \hookrightarrow U$ et $h_0^{-1}(V) \hookrightarrow U'_0$ tels que $a \circ v' = v \circ b$ (en effet, W se relève, donc V et V' aussi, puis on choisit un relèvement v , puis un autre de la forme $\mathfrak{Y}' \rightarrow \mathfrak{U}' \times_{\mathfrak{U}} \mathfrak{Y}$).

Grâce à [7, 5.3.5.(i)] (ou à 2.2 et 8.2), quitte à rétrécir \mathfrak{U} , on peut en outre supposer qu'il existe un isocrystal convergent G sur V vérifiant $\mathcal{E}|_{\mathfrak{U}} \xrightarrow{\sim} v_+ \text{sp}_*(G)$. Grâce au lemme 8.5 (appliqué à $X \supset Z \supset Z \setminus V$), quitte à rétrécir \mathfrak{U} , on se ramène au cas où $T := X \setminus U$ est le support d'un diviseur de X . On pose $T' := g_0^{-1}(T)$.

Comme Z' est intègre et lisse, que $Z' \cap T'$ ne contient pas Z' (car b_0 est fini et étale et $\dim Z \cap T < \dim Z$), $Z' \cap T'$ est un diviseur de Z' . On dispose donc du foncteur pleinement fidèle $\text{sp}_{Z' \hookrightarrow \mathfrak{X}', T'+}$.

Comme $\mathbb{R}\Gamma_T^\dagger \mathcal{E}$ est à support dans $T \cap Z$, son support est donc propre sur Y et de dimension plus petite que celle de Z . Par hypothèse de récurrence, $f_+(\mathbb{R}\Gamma_T^\dagger \mathcal{E})$ est donc holonome. En appliquant f_+ au triangle de localisation de \mathcal{E} en T , on se ramène ainsi à établir l'holonomie de $f_+(\mathbb{R}\Gamma_T^\dagger \mathcal{E})$.

Étape 4 : avec les notations de l'étape 3, on vérifie que $(\mathbb{R}\Gamma_T^\dagger \mathcal{E})$ est un facteur direct de $g_{T,+} \mathbb{R}\Gamma_{Z'}^\dagger g_T^1(\mathbb{R}\Gamma_T^\dagger \mathcal{E})$.

Via le théorème de Berthelot-Kashiwara (voir 1.14), on obtient le dernier isomorphisme de la suite d'isomorphismes compatibles à Frobenius :

$$(8.8.2) \quad (\mathbb{R}\Gamma_{Z'}^\dagger g_T^1(\mathbb{R}\Gamma_T^\dagger \mathcal{E}))|_{\mathfrak{U}} \xrightarrow{\sim} v'_+ v'^! a^! (\mathcal{E}|_{\mathfrak{U}}) \xrightarrow{\sim} v'_+ v'^! a^! v_+ \text{sp}_*(G) \xrightarrow{\sim} v'_+ b^! \text{sp}_*(G) \xrightarrow{\sim} v'_+ \text{sp}_*(b^*(G)).$$

De même, grâce au théorème de dualité relative compatible à Frobenius appliqué aux immersions fermées v et v' (voir [18, 2.4.3] ou son résumé), au théorème de Berthelot-Kashiwara (voir 1.14), à 8.6 et au théorème de bidualité ([35, II.3.5]), on obtient respectivement le deuxième, troisième, quatrième et cinquième isomorphisme compatible à Frobenius de la suite :

$$(8.8.3) \quad \begin{aligned} (\mathbb{D}_{\mathfrak{X}', T'} \circ \mathbb{R}\Gamma_{Z'}^\dagger g_T^1 \mathbb{D}_{\mathfrak{X}, T}(\mathbb{R}\Gamma_T^\dagger \mathcal{E}))|_{\mathfrak{U}} &\xrightarrow{\sim} \mathbb{D}_{\mathfrak{U}'} \circ v'_+ v'^! a^! \mathbb{D}_{\mathfrak{U}} v_+ \text{sp}_*(G) \\ &\xrightarrow{\sim} v'_+ \mathbb{D}_{\mathfrak{Y}'} v'^! a^! v_+ \mathbb{D}_{\mathfrak{Y}} \text{sp}_*(G) \xrightarrow[1.14]{\sim} v'_+ \mathbb{D}_{\mathfrak{Y}'} b^! \mathbb{D}_{\mathfrak{Y}} \text{sp}_*(G) \\ &\xrightarrow[8.6]{\sim} v'_+ \mathbb{D}_{\mathfrak{Y}'} \mathbb{D}_{\mathfrak{Y}'} b^! \text{sp}_*(G) \xrightarrow{\sim} v'_+ b^! \text{sp}_*(G) \xrightarrow{\sim} v'_+ \text{sp}_*(b^*(G)). \end{aligned}$$

On déduit de 8.8.2 et 8.8.3 que $\mathbb{R}\Gamma_{Z'}^\dagger g_T^1(\mathbb{R}\Gamma_T^\dagger \mathcal{E})$ et $\mathbb{D}_{\mathfrak{X}', T'} \circ \mathbb{R}\Gamma_{Z'}^\dagger g_T^1 \mathbb{D}_{\mathfrak{X}, T}(\mathbb{R}\Gamma_T^\dagger \mathcal{E})$ sont dans l'image essentielle de $\text{sp}_{Z' \hookrightarrow \mathfrak{X}', T'+}$ (voir la remarque 7.6). D'après [13, 5.3.1], comme d'après Kedlaya le foncteur restriction, qui à un F -isocrystal sur $Z' \setminus T'$ surconvergent le long de $T' \cap Z'$ associe le F -isocrystal convergent sur $Z' \setminus T'$ correspondant, est pleinement fidèle (voir par exemple [27, 4.2.1]), on en déduit que pour vérifier que $\mathbb{R}\Gamma_{Z'}^\dagger g_T^1(\mathbb{R}\Gamma_T^\dagger \mathcal{E})$ et $\mathbb{D}_{\mathfrak{X}', T'} \circ$

$\mathbb{R}\Gamma_{Z'}^{\dagger}, g_T^{\dagger} \mathbb{D}_{x, T}((\dagger T)\mathcal{E})$ sont isomorphes, il suffit de le voir en dehors de T' , ce qui est bien le cas d'après 8.8.2 et 8.8.3.

Or, d'après 1.11.2, on dispose des morphismes d'adjonction $g_{T,+} \mathbb{R}\Gamma_{Z'}^{\dagger}, g_T^{\dagger}((\dagger T)\mathcal{E}) \rightarrow (\dagger T)\mathcal{E}$ et $(\dagger T)\mathcal{E} \rightarrow g_{T,+} \mathbb{D}_{x', T'} \circ \mathbb{R}\Gamma_{Z'}^{\dagger}, g_T^{\dagger} \mathbb{D}_{x, T}((\dagger T)\mathcal{E})$ (pour le deuxième, on applique le foncteur dual et on utilise l'isomorphisme de dualité relative). On obtient ainsi la suite de morphismes :

$$(8.8.4) \quad (\dagger T)\mathcal{E} \rightarrow g_{T,+} \mathbb{R}\Gamma_{Z'}^{\dagger}, g_T^{\dagger}((\dagger T)\mathcal{E}) \rightarrow (\dagger T)\mathcal{E}.$$

Par 1.9, pour prouver que ce composé est un isomorphisme, il suffit de le vérifier au-dessus de \mathcal{U} . La flèche de droite de 8.8.4 restreinte à \mathcal{U} , est canoniquement isomorphe au morphisme induit par adjonction $a_+ v_+^{\dagger} v^{\dagger} a^{\dagger}(\mathcal{E}|\mathcal{U}) \rightarrow \mathcal{E}|\mathcal{U}$ (voir 3.13.1 et 8.3). Par transitivité des morphismes d'adjonction (voir [17, 1.2.11] ou 1.12), il est alors canoniquement isomorphe au morphisme construit par adjonction : $v_+ b_+ b^{\dagger} v^{\dagger}(\mathcal{E}|\mathcal{U}) \rightarrow \mathcal{E}|\mathcal{U}$. Avec le théorème de Berthelot-Kashiwara (voir 1.14), en lui appliquant v^{\dagger} , on obtient le morphisme : $b_+ b^{\dagger} v^{\dagger}(\mathcal{E}|\mathcal{U}) \rightarrow v^{\dagger}(\mathcal{E}|\mathcal{U})$. D'un autre côté, la flèche de gauche de 8.8.4 restreinte à \mathcal{U} est canoniquement isomorphe au morphisme induit par adjonction $\mathcal{E}|\mathcal{U} \rightarrow a_+ v_+^{\dagger} v^{\dagger} a^{\dagger}(\mathcal{E}|\mathcal{U})$. Par transitivité, il correspond au morphisme d'adjonction $\mathcal{E}|\mathcal{U} \rightarrow v_+ b_+ b^{\dagger} v^{\dagger}(\mathcal{E}|\mathcal{U})$. En lui appliquant v^{\dagger} , on obtient donc (modulo $v^{\dagger} v_{=} \xrightarrow{\sim} \text{Id}$) le morphisme $v^{\dagger}(\mathcal{E}|\mathcal{U}) \rightarrow b_+ b^{\dagger} v^{\dagger}(\mathcal{E}|\mathcal{U})$.

Or, comme $\mathcal{E} \xrightarrow{\sim} v_+ \text{sp}_*(G)$, le théorème de Berthelot-Kashiwara et l'isomorphisme de dualité relative donnent $v^{\dagger}(\mathcal{E}|\mathcal{U}) \xrightarrow{\sim} v^{\dagger}(\mathcal{E}|\mathcal{U}) \xrightarrow{\sim} \text{sp}_*(G)$. De plus, d'après 8.6, $b^{\dagger} \xrightarrow{\sim} b^{\dagger}$. En appliquant v^{\dagger} à la restriction sur \mathcal{U} de 8.8.4, on obtient donc la suite de morphismes construits par adjonction : $\text{sp}_*(G) \rightarrow b_+ b^{\dagger}(\text{sp}_*(G)) \rightarrow \text{sp}_*(G)$. D'après 8.7, ce composé est un isomorphisme. On a ainsi établi que le composé de 8.8.4 est un isomorphisme, ce qui implique que $((\dagger T)\mathcal{E})$ est un facteur direct de $g_{T,+} \mathbb{R}\Gamma_{Z'}^{\dagger}, g_T^{\dagger}((\dagger T)\mathcal{E})$.

Étape 5 (Conclusion). On déduit de l'étape 4 que $f_+((\dagger T)\mathcal{E})$ est un facteur direct de $f_+(g_{T,+} \mathbb{R}\Gamma_{Z'}^{\dagger}, g_T^{\dagger}((\dagger T)\mathcal{E}))$. Comme $f_+ g_{T,+} \xrightarrow{\sim} f_+ g_+ \xrightarrow{\sim} f \circ g_+$ et comme $\mathbb{R}\Gamma_{Z'}^{\dagger}, g_T^{\dagger}((\dagger T)\mathcal{E})$ est à support dans Z' qui est propre sur Y et lisse, d'après le cas lisse (i.e. l'étape 1), le F -complexe $f_+(g_{T,+} \mathbb{R}\Gamma_{Z'}^{\dagger}, g_T^{\dagger}((\dagger T)\mathcal{E}))$ est holonome. D'où le résultat. \square

THÉORÈME 8.9. – *La conjecture B implique les conjectures A et A'.*

Démonstration. – D'après 8.2, si la conjecture B est exacte alors les notions de surcohérence et d'holonomie sont équivalentes. Comme la surcohérence se préserve par l'image directe d'un morphisme propre ([11, 3.1.9]), il en serait de même pour l'holonomie, i.e. la conjecture A' est une conséquence de la conjecture B. Par 8.8, il en résulte que la conjecture B implique la conjecture A. \square

RÉFÉRENCES

- [1] P. BERTHELOT, Cohomologie cristalline des schémas de caractéristique $p > 0$, Lecture Notes in Math. **407**, Springer, 1974.
- [2] P. BERTHELOT, Cohomologie rigide et théorie des \mathcal{D} -modules, in *p-adic analysis (Trento, 1989)*, Lecture Notes in Math. **1454**, Springer, 1990, 80–124.

- [3] P. BERTHELOT, Cohérence différentielle des algèbres de fonctions surconvergentes, *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* **323** (1996), 35–40.
- [4] P. BERTHELOT, Cohomologie rigide et cohomologie rigide à support propre. Première partie, prépublication IRMAR 96-03, Université de Rennes, 1996.
- [5] P. BERTHELOT, \mathcal{D} -modules arithmétiques. I. Opérateurs différentiels de niveau fini, *Ann. Sci. École Norm. Sup.* **29** (1996), 185–272.
- [6] P. BERTHELOT, \mathcal{D} -modules arithmétiques II. Descente par Frobenius, *Mém. Soc. Math. Fr.* **81** (2000).
- [7] P. BERTHELOT, Introduction à la théorie arithmétique des \mathcal{D} -modules, *Astérisque* **279** (2002), 1–80.
- [8] P. BERTHELOT, \mathcal{D} -modules arithmétiques IV. Variété caractéristique, en préparation.
- [9] A. BOREL, P.-P. GRIVEL, B. KAUP, A. HAEFLIGER, B. MALGRANGE, F. EHLERS, *Algebraic D-modules*, Perspectives in Mathematics **2**, Academic Press Inc., 1987.
- [10] D. CARO, Cohérence différentielle des F -isocristaux unités, *C. R. Math. Acad. Sci. Paris* **338** (2004), 145–150.
- [11] D. CARO, \mathcal{D} -modules arithmétiques surcohérents. Application aux fonctions L , *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)* **54** (2004), 1943–1996.
- [12] D. CARO, Comparaison des foncteurs duaux des isocristaux surconvergentes, *Rend. Sem. Mat. Univ. Padova* **114** (2005), 131–211.
- [13] D. CARO, Dévissages des F -complexes de \mathcal{D} -modules arithmétiques en F -isocristaux surconvergentes, *Invent. Math.* **166** (2006), 397–456.
- [14] D. CARO, Fonctions L associées aux \mathcal{D} -modules arithmétiques. Cas des courbes, *Compos. Math.* **142** (2006), 169–206.
- [15] D. CARO, F -isocristaux surconvergentes et surcohérence différentielle, *Invent. Math.* **170** (2007), 507–539.
- [16] D. CARO, Log-isocristaux surconvergentes et holonomie, à paraître dans *Compos. Math.*
- [17] D. CARO, \mathcal{D} -modules arithmétiques associés aux isocristaux surconvergentes. Cas lisse, prépublication [arXiv:math/0510422](https://arxiv.org/abs/math/0510422).
- [18] D. CARO, Sur la compatibilité à Frobenius de l’isomorphisme de dualité relative, prépublication [arXiv:math/0509448](https://arxiv.org/abs/math/0509448).
- [19] D. CARO, Sur la stabilité par produits tensoriels des F -complexes de \mathcal{D} -modules arithmétiques, prépublication [arXiv:math/0605125](https://arxiv.org/abs/math/0605125).
- [20] D. CARO, N. TSUZUKI, Overholonomicity of overconvergent F -isocrystals over smooth varieties, prépublication [arXiv:0803.2105](https://arxiv.org/abs/0803.2105).
- [21] R. ELKIK, Solutions d’équations à coefficients dans un anneau hensélien, *Ann. Sci. École Norm. Sup.* **6** (1973), 553–603.
- [22] J.-Y. ÉTESSE, B. LE STUM, Fonctions L associées aux F -isocristaux surconvergentes. I. Interprétation cohomologique, *Math. Ann.* **296** (1993), 557–576.
- [23] R. HARTSHORNE, Algebraic geometry, Graduate Texts in Math. **52**, Springer, 1977.

- [24] A. J. DE JONG, Smoothness, semi-stability and alterations, *Publ. Math. I.H.É.S.* **83** (1996), 51–93.
- [25] K. S. KEDLAYA, Full faithfulness for overconvergent F -isocrystals, in *Geometric aspects of Dwork theory. Vol. I, II*, Walter de Gruyter GmbH & Co. KG, Berlin, 2004, 819–835.
- [26] K. S. KEDLAYA, Semistable reduction for overconvergent F -isocrystals. I. Unipotency and logarithmic extensions, *Compos. Math.* **143** (2007), 1164–1212.
- [27] K. S. KEDLAYA, Semistable reduction for overconvergent F -isocrystals. II. A valuation-theoretic approach, *Compos. Math.* **144** (2008), 657–672.
- [28] K. S. KEDLAYA, p -adic cohomology, prépublication [arXiv:math.NT/0601507](https://arxiv.org/abs/math/0601507).
- [29] K. S. KEDLAYA, Semistable reduction for overconvergent F -isocrystals, III : Local semistable reduction at monomial valuations, prépublication [arXiv:math/0609645](https://arxiv.org/abs/math/0609645).
- [30] K. S. KEDLAYA, Semistable reduction for overconvergent F -isocrystals, IV : Local semistable reduction at nonmonomial valuations, prépublication [arXiv:0712.3400](https://arxiv.org/abs/0712.3400).
- [31] B. LE STUM, *Rigid cohomology*, Cambridge Tracts in Mathematics **172**, Cambridge University Press, 2007.
- [32] C. NOOT-HUYGHE, Un théorème de comparaison entre les faisceaux d’opérateurs différentiels de Berthelot et de Mebkhout–Narváez-Macarro, *J. Algebraic Geom.* **12** (2003), 147–199.
- [33] C. NOOT-HUYGHE, Finitude de la dimension homologique d’algèbres d’opérateurs différentiels faiblement complètes et à coefficients surconvergents, *J. Algebra* **307** (2007), 499–540.
- [34] N. TSUZUKI, Morphisms of F -isocrystals and the finite monodromy theorem for unit-root F -isocrystals, *Duke Math. J.* **111** (2002), 385–418.
- [35] A. VIRRION, Dualité locale et holonomie pour les \mathcal{D} -modules arithmétiques, *Bull. Soc. Math. France* **128** (2000), 1–68.
- [36] A. VIRRION, Trace et dualité relative pour les \mathcal{D} -modules arithmétiques, in *Geometric aspects of Dwork theory. Vol. I, II*, Walter de Gruyter GmbH & Co. KG, Berlin, 2004, 1039–1112.

(Manuscrit reçu le 22 janvier 2008 ;
accepté le 25 août 2008.)

Daniel CARO
Université Paris-Sud
Arithmétique et Géométrie algébrique
Bâtiment 425
91405 Orsay Cedex, France
E-mail: daniel.caro@math.u-psud.fr