

# ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

MICHEL TALAGRAND

**Les mesures vectorielles à valeurs dans  $L^0$  sont bornées**

*Annales scientifiques de l'É.N.S. 4<sup>e</sup> série*, tome 14, n° 4 (1981), p. 445-452

[http://www.numdam.org/item?id=ASENS\\_1981\\_4\\_14\\_4\\_445\\_0](http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1981_4_14_4_445_0)

© Gauthier-Villars (Éditions scientifiques et médicales Elsevier), 1981, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales scientifiques de l'É.N.S. » (<http://www.elsevier.com/locate/ansens>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

## LES MESURES VECTORIELLES A VALEURS DANS $L^0$ SONT BORNÉES

PAR MICHEL TALAGRAND

Soit  $(\Omega, \Sigma, P)$  un espace probabilisé. On désigne par  $L^0(P)$  l'ensemble des classes de fonctions mesurables sur  $\Omega$ , muni de la distance  $\xi$  donnée par  $\xi(f, g) = d(f - g)$ , où :

$$d(f) = \inf \{ a > 0; P \{ |f| \geq a \} \leq a \}$$

(où l'on note pour simplifier  $P \{ |f| \geq a \}$  au lieu de  $P \{ \{ \omega \in \Omega; |f(\omega)| > a \} \}$ ). C'est un espace vectoriel topologique métrisable complet, qui est très différent d'un espace localement convexe, puisque  $L^0(P)$  est l'enveloppe convexe de tout voisinage de zéro.

Soit  $(X, \mathcal{X})$  un espace mesurable, et  $E$  un espace vectoriel topologique. On appelle mesure vectorielle à valeurs dans  $E$  une application  $m : \mathcal{X} \rightarrow E$  qui est  $\sigma$ -additive, c'est-à-dire telle que  $m(\bigcup_n A_n) = \sum_n m(A_n)$  pour toute suite disjointe  $(A_n)$  de  $\mathcal{X}$ . On dit que la mesure  $m$  est bornée si l'ensemble des  $m(A)$ ,  $A \in \mathcal{X}$  est borné dans  $E$ . Il existe des classes d'espaces vectoriels topologiques, généralisant la classe des espaces localement convexes dans lesquels toutes les mesures vectorielles sont bornées [5]. D'autre part, P. Turpin a donné un bel exemple d'une mesure vectorielle à valeurs dans un espace vectoriel topologique métrisable séparable qui n'est pas bornée [4]. Puisque  $L^0(P)$  est un espace qui joue un rôle particulièrement important en théorie de la mesure, c'est un problème naturel de décider si toutes les mesures vectorielles à valeurs dans cet espace sont bornées. On va démontrer ici :

**THÉORÈME A** <sup>(1)</sup>. — *Toute mesure vectorielle à valeurs dans  $L^0(P)$  est bornée.*

Comme conséquence on aura :

**THÉORÈME B**. — *Soit  $m$  une mesure vectorielle à valeurs dans  $L^0(P)$ . Alors il existe une fonction  $g \in L^0(P)$ ,  $g \geq 0$ , et une mesure vectorielle  $\mu$  à valeurs dans  $L^2(P)$  telle que pour tout  $A \in \mathcal{X}$  on ait  $m(A) = g \mu(A)$ . En particulier,  $m$  admet une mesure de contrôle, c'est-à-dire qu'il existe une probabilité  $\lambda$  sur  $\mathcal{X}$  telle que :*

$$\forall \alpha > 0, \exists \varepsilon > 0; \quad \lambda(A) \leq \varepsilon \Rightarrow d(m(A)) \leq \alpha.$$

<sup>(1)</sup> Ce résultat a été obtenu indépendamment par N. J. Kalton, N. T. Peck et J. W. Roberts.

*Preuve.* — Le théorème A affirme que l'ensemble  $\{m(A); A \in \mathcal{X}\}$  est borné. Un résultat de Maurey et Pisier [2] affirme que son enveloppe convexe est alors bornée. Ainsi, si  $E$  désigne l'espace des fonctions mesurables étagées sur  $\mathcal{X}$ , le prolongement canonique  $T$  de  $m$  à  $E$  est continu lorsque  $E$  est muni de la norme uniforme. Ainsi  $T$  se prolonge au complété  $\tilde{E}$  de  $E$  pour la norme uniforme. Mais puisque  $\tilde{E}$  est isomorphe à un espace  $\mathcal{C}(K)$ , un résultat de Maurey [3] montre que  $T$  se factorise par  $L^2(P)$  au moyen d'un changement de densité, ce qui est le résultat annoncé.

Nous nous tournons maintenant vers la preuve du théorème A. Le plan d'attaque est le suivant : si l'on suppose que  $m$  est une mesure vectorielle non bornée dans  $L^0(P)$  on va extraire une suite disjointe  $(X_n)$  de  $\mathcal{X}$  telle que  $d(m(X_n)) > a > 0$ , ce qui contredit le fait que la série  $\sum m(X_n)$  converge. La construction des  $X_n$  se fera par induction. Pour pouvoir effectuer une telle construction, il faut en un sens assurer que la restriction de  $m$  à  $X \setminus \bigcup_{i \leq n} X_i$  reste non bornée de façon uniforme en  $n$ . Si  $Y \in \mathcal{X}$ , la façon naturelle de mesurer à quel point la mesure  $m$  est non bornée sur  $Y$  est par le nombre :

$$a(Y) = \sup \{ a > 0; \forall t > 0, \exists A \subset Y, A \in \mathcal{X}, d(tm(A)) > a \}.$$

En effet, l'ensemble  $\tilde{Y} = \{m(A); A \subset Y, A \in \mathcal{X}\}$  n'est pas borné, donc pour  $t \rightarrow 0$ , l'ensemble  $t\tilde{Y}$  ne tend pas vers zéro. Et  $a(Y)$  est l'inf sur  $t$  du sup de la distance de zéro à un point de  $t\tilde{Y}$ .

Malheureusement cette expression n'est pas maniable. On va donc commencer par lui trouver un équivalent plus agréable.

LEMME 1. — Soit  $\mathcal{P}$  une famille finie d'ensembles disjoints de  $X$ , et  $t > 0$ . Il existe alors une sous-famille  $\mathcal{P}'$  de  $\mathcal{P}$  dont la réunion  $B$  vérifie :

$$d(8\sqrt{t}m(B)) > \frac{1}{8}d\left(t \sum_{A \in \mathcal{P}} m^2(A)\right).$$

Ici bien sur  $m^2(A)$  est le carré de la fonction  $m(A) \in L^0(P)$ .

*Preuve.* — Soit  $a = d\left(t \sum_{A \in \mathcal{P}} m^2(A)\right)$  et soit :

$$\Omega' = \left\{ \omega; t \sum_{A \in \mathcal{P}} m^2(A)(\omega) \geq a \right\}.$$

Alors on a  $P(\Omega') \geq a$  par définition de  $d$ . Soit  $Q$  la mesure de pile-ou-face sur  $\{-1, 1\}^{\mathcal{P}}$ . Chaque  $\varepsilon \in \{-1, 1\}^{\mathcal{P}}$  est une famille  $(\varepsilon_A)_{A \in \mathcal{P}}$  avec  $\varepsilon_A \in \{-1, 1\}$ .

Une inégalité classique de Paley et Zygmund [1] nous donne :

$$\forall \omega \in \Omega', \quad Q \left\{ \varepsilon \in \{-1, 1\}^{\mathcal{P}}; \left| \sum_{A \in \mathcal{P}} \varepsilon_A m(A)(\omega) \right| \geq \frac{1}{4} \sqrt{\frac{a}{t}} \right\} \geq \frac{1}{4}.$$

Le théorème de Fubini montre qu'il existe  $\varepsilon \in \{-1, 1\}^{\mathcal{P}}$  avec :

$$P \left\{ \omega \in \Omega; \left| \sum_{A \in \mathcal{P}} \varepsilon_A m(A)(\omega) \right| \geq \frac{1}{4} \sqrt{\frac{a}{t}} \right\} \geq \frac{1}{4} a.$$

Soit :

$$B' = \cup \{A; \varepsilon_A = 1\}, \quad B'' = \cup \{A; \varepsilon_A = -1\}.$$

On a :

$$\sum_{A \in \mathcal{P}} \varepsilon_A m(A) = m(B') - m(B'').$$

Il existe donc un ensemble  $B$ , égal soit à  $B'$  soit à  $B''$  avec :

$$P \left\{ \omega \in \Omega; |m(B)(\omega)| \geq \frac{1}{8} \sqrt{\frac{a}{t}} \right\} \geq \frac{1}{8} a,$$

ce qui est le résultat cherché puisque  $\sqrt{a} \geq a$ .

Pour un ensemble  $Y \in \mathcal{X}$ , on posera :

$$b(Y) = \sup \left\{ a; \forall t > 0, \exists \mathcal{P} \text{ partition finie de } Y; \quad d\left(t \sum_{A \in \mathcal{P}} m^2(A)\right) \geq a \right\}.$$

LEMME 2. — Pour  $Y \in \mathcal{X}$ , on a  $b(Y)/8 \leq a(Y) \leq b(Y)$ .

*Preuve.* — La première inégalité résulte du lemme précédent. La seconde est très simple : si  $a < a(Y)$ , pour  $t > 0$  il existe  $A \in \mathcal{X}$ ,  $A \subset Y$  avec :

$$P \left\{ \sqrt{at} |m(A)| > a \right\} \geq a \quad \text{d'où} \quad P \{tm^2(A) > a\} \geq a.$$

Le nombre  $b(Y)$  est donc étroitement lié à  $a(Y)$ , et il mesure ainsi à quel point la restriction de  $m$  à  $Y$  n'est pas bornée.

La construction de  $X_n, X_1, \dots, X_{n-1}$  étant construits se fera par un choix aléatoire. On pose  $Y = X \setminus \bigcup_{i \leq n-1} X_i$ . On va construire une partition finie  $\mathcal{P}$  de  $Y$  ayant des propriétés convenables, puis on choisira  $X_n$  aléatoirement comme réunion de certains des éléments de  $\mathcal{P}$ , en montrant que pour beaucoup des choix aléatoires, l'ensemble obtenu possède des propriétés intéressantes. Puisque l'on veut que  $Y \setminus X_n$  soit « gros », au sens que  $b(Y \setminus X_n)$  soit proche de  $b(Y)$ , il convient d'affecter à chaque élément de  $\mathcal{P}$  une probabilité d'être inclus dans  $X_n$  suffisamment petite.

Plus précisément, pour  $0 < r < 1$ , soit  $Q_r$  la probabilité sur  $K = \{0, 1\}^{\mathcal{P}}$ , produit sur chaque facteur de la mesure qui donne masse  $r$  à 1 et masse  $1-r$  à zéro. Un  $\varepsilon \in K$  est une famille  $(\varepsilon_A)_{A \in \mathcal{P}}$  où  $\varepsilon_A \in \{0, 1\}$ . On lui associe l'ensemble aléatoire  $A_\varepsilon = \cup \{A \in \mathcal{P}, \varepsilon_A = 1\}$ .

LEMME 3. —  $Q_r \{ \varepsilon \in K; b(Y \setminus A_\varepsilon) \geq (1-10r)b(Y) \} \geq 8/9$ .

Naturellement les constantes 10 et 8/9 pourraient être remplacées par bien d'autres choix, mais celui-ci nous suffira.

*Preuve.* — Soit  $s = \text{card } \mathcal{P}$ . Pour  $a < b(Y)$ ,  $t > 0$ , il existe une partition  $\mathcal{B}$  de  $Y$  telle que :

$$d \left( \frac{t}{10s} \sum_{B \in \mathcal{B}} m^2(B) \right) > a.$$

Pour  $B \in \mathcal{B}$ , on a d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$m^2(B) \leq s \sum_{A \in \mathcal{P}} m^2(A \cap B).$$

Il en résulte que  $d(t/10 \sum_{A \in \mathcal{P}, B \in \mathcal{B}} m^2(A \cap B)) > a$ .

Posons :

$$f = t \sum_{A \in \mathcal{P}, B \in \mathcal{B}} m^2(A \cap B).$$

On a donc :

$$P(\Omega') > a \quad \text{où} \quad \Omega' = \{f \geq 10a\}.$$

Pour  $\varepsilon \in K$ ,  $\omega \in \Omega$ , posons :

$$f_\varepsilon = t \sum_{A \in \mathcal{P}, B \in \mathcal{B}} (1 - \varepsilon_A) m^2(A \cap B),$$

$$D_\omega = \{\varepsilon \in K; f_\varepsilon(\omega) \geq a\}.$$

On a pour  $\omega \in \Omega'$  :

$$(1-r)f(\omega) = \int f_\varepsilon(\omega) dQ_r(\varepsilon) = \int_{D_\omega} f_\varepsilon dQ_r + \int_{Q_r \setminus D_\omega} f_\varepsilon dQ_r \leq f(\omega) Q_r(D_\omega) + a(1 - Q_r(D_\omega)).$$

D'où  $(f(\omega) - a) Q_r(D_\omega) \geq (1-r)f(\omega) - a$ , d'où :

$$(1) \quad Q_r(D_\omega) \geq 1 - \frac{rf(\omega)}{f(\omega) - a} \geq 1 - \frac{10r}{9},$$

puisque  $f(\omega) \geq 10a$ .

L'idée du calcul est maintenant très simple : si :

$$C = \{(\omega, \varepsilon) \in \Omega' \times K; f_\varepsilon(\omega) \geq a\},$$

d'après (1) on a  $P \otimes Q_r(C) \geq (1 - (10r/9)) P(\Omega')$ . Le théorème de Fubini va alors montrer que pour beaucoup de  $\varepsilon$ , l'ensemble  $\{f_\varepsilon \geq a\}$  est grand. Plus précisément, si :

$$H_\varepsilon = \{\omega \in \Omega'; P(\Omega' \cap \{f_\varepsilon \geq a\}) \geq (1 - 10r) P(\Omega')\},$$

on a :

$$P \otimes Q_r(C) = \int_\varepsilon P(\Omega' \cap \{f_\varepsilon \geq a\}) dQ_r(\varepsilon) = \int_{\varepsilon \in H_\varepsilon} + \int_{\varepsilon \notin H_\varepsilon}$$

$$\leq P(\Omega') (Q_r(H_\varepsilon) + (1 - 10r)(1 - Q_r(H_\varepsilon))).$$

D'où il vient  $Q_r(H_\varepsilon) \geq 8/9$ .

Posons :

$$\mathcal{P}_\varepsilon = \{A \in \mathcal{P}; \varepsilon_A = 0\} = \{A \in \mathcal{P}; A \subset Y \setminus A_\varepsilon\}.$$

On a  $f_\varepsilon = t \sum_{A \in \mathcal{P}_\varepsilon, B \in \mathcal{B}} m^2(A \cap B)$ . Pour  $\varepsilon \in H_t$ , on a :

$$P(\{f_\varepsilon \geq a\}) \geq (1 - 10r)a.$$

La définition de  $b(\cdot)$  montre alors que si  $\varepsilon \in \bigcap_p \bigcup_{n \geq p} H_{n^{-1}}$ , on a :

$$b(Y \setminus A_\varepsilon) \geq (1 - 10r)a.$$

Mais l'ensemble de ces  $\varepsilon$  a pour  $Q_r$  une mesure  $\geq 8/9$ , ce qui termine la preuve.

Si la partition  $\mathcal{P}$  n'a pas été choisie convenablement, il n'y a aucune raison pour que  $d(m(A_\varepsilon))$  soit assez grand pour certains choix de  $\varepsilon$ .

Il va donc falloir effectuer un choix précis de  $\mathcal{P}$ . C'est ce que permet le lemme suivant, qui est le point clef de la démonstration.

LEMME 4. — Soit  $Y \in \mathcal{X}$ . Pour tout entier  $q$ , il existe une partition finie  $\mathcal{P}$  de  $Y$  telle que si on pose :

$$\Omega' = \{\omega \in \Omega; \text{card}\{A \in \mathcal{P}; |m(A)|(\omega) \geq 1\} \geq q\},$$

on ait  $P(\Omega') \geq a(Y)/5$ .

La signification de ce résultat est la suivante :

on pourrait penser que  $m$  se comporte comme la mesure  $[0, 1] \rightarrow L^0([0, 1])$  qui envoie  $A$  sur  $K \chi_A$ . Le lemme signifie au contraire que les ensembles  $\{|m(A)| \geq 1\}$  « s'étalent ». Ce phénomène est très lié à la structure de  $L^0$ .

*Preuve.* — On pose  $a = a(Y)$ .

*Première étape.* — Puisque  $a \leq 1$ , il existe un entier  $p$  tel que  $4q^2 \leq pa \leq 5q^2$ . Par induction sur  $i \leq p$ , on peut construire des sous-ensembles  $A_1, \dots, A_p$  de  $Y$ , et une suite  $0 < t_p < \dots < t_i < \dots < a/2^p$  tels que, si  $\mathcal{P}_i$  est la partition engendrée par  $A_1, \dots, A_i$ , on ait :

$$(2) \quad \forall A \in \mathcal{P}_i, \quad d(t_i m(A)) \leq 2^{-p-1} a$$

et

$$(3) \quad d(2^{-p-1} t_i m(A_{i+1})) > a,$$

pour  $i=0, 1, \dots, p-1$ , avec  $\mathcal{P}_0 = \{Y\}$ .

*Deuxième étape.* — Pour  $1 \leq i \leq p$ , soit :

$$T_i = \{\omega \in \Omega; \exists A_1, A_2 \in \mathcal{P}_i; A_1 \cup A_2 \in \mathcal{P}_{i-1}, |m(A_1)| \geq 2^p, |m(A_2)| \geq 2^p\}.$$

On va montrer que  $P(T_i) \geq a/2$ . On a, d'après (3) et (2) :

$$\begin{aligned} P\{t_{i-1} | m(A_i) | \geq 2^{p+1} a\} &\geq a, \\ \forall A \in \mathcal{P}_{i-1}, \quad P\{t_{i-1} | m(A) | \geq a\} &\leq 2^{-p-1} a. \end{aligned}$$

Puisque  $\text{card } \mathcal{P}_i = 2^i \leq 2^p$ , il suffit de montrer que :

$$T_i \supset \{t_{i-1} | m(A_i) | \geq 2^{p+1} a\} \setminus \bigcup_{A \in \mathcal{P}_{i-1}} \{t_{i-1} | m(A) | \geq a\}.$$

Mais si  $t_{i-1} | m(A_i)(\omega) | \geq 2^{p+1} a$ , il existe  $A \in \mathcal{P}_{i-1}$  avec  $t_{i-1} | m(A_i \cap A)(\omega) | \geq 2a$ . Si de plus  $t_{i-1} | m(A)(\omega) | \leq a$ , on a  $t_{i-1} | m(A \setminus A_i)(\omega) | \geq a$ , ce qui prouve l'assertion puisque  $t_{i-1} < a 2^{-p}$ .

*Troisième étape.* — Soit  $T = \{\omega \in \Omega; \text{card } \{i; \omega \in T_i\} \geq q^2\}$ . Alors  $P(T) \geq a/5$ . En effet on a :

$$2q^2 \leq p \frac{a}{2} \leq \int \sum_{i \leq p} \chi_{T_i} dP \leq \int_T + \int_{\Omega \setminus T} \leq p P(T) + q^2 (1 - P(T)),$$

d'où  $P(T) \geq q^2 / (p - q^2) \geq q^2 / p \geq a/5$ .

*Quatrième étape.* — Pour conclure, il suffit de montrer que pour  $\omega \in T$ , il existe  $n_1, \dots, n_q$  et des  $B_{n_i} \in \mathcal{P}_{n_i}$  disjoints de sorte que  $|m(B_{n_i})(\omega)| > 2^p$ . En effet,  $B_{n_i}$  étant réunion d'au plus  $2^{p-n_i}$  éléments de  $\mathcal{P}_p$ , pour l'un d'entre eux, soit  $B_i$ , on a  $|m(B_i)(\omega)| \geq 1$ , et les  $B_i$  sont disjoints.

L'argument est combinatoire. Puisque  $\omega \in B$ , il existe :

$$1 \leq s_1 < \dots < s_{q^2} \leq p \quad \text{et} \quad 1 \leq j \leq q^2$$

des ensembles distincts  $C_j^1, C_j^2$  de  $\mathcal{P}_{s_j}$  tels que :

$$|m(C_j^i)(\omega)| \geq 2^p \quad \text{pour } i=1, 2 \quad \text{et} \quad C_j^1 \cup C_j^2 \in \mathcal{P}_{s_{j-1}}.$$

Soit  $\mathcal{F}$  l'ensemble des  $C_j^1, 1 \leq j \leq q^2$ . Deux éléments de  $\mathcal{F}$  sont soit disjoints, soit l'un contient l'autre. Soit  $\mathcal{G}$  une famille maximale de  $\mathcal{F}$  formée d'éléments disjoints. Si  $\text{card } \mathcal{G} \geq q$ , la preuve est terminée. Dans le cas contraire, puisque tout élément de  $\mathcal{F}$  rencontre un élément de  $\mathcal{G}$ , il existe  $B \in \mathcal{G}$  tel que  $q$  des ensembles  $C_j^1$  rencontrent  $B$ . On a donc :

$$C_{j_1}^1 \supset C_{j_2}^1 \supset \dots \supset C_{j_q}^1 \quad \text{avec} \quad s_{j_1} < \dots < s_{j_q}.$$

Mais alors les ensembles  $C_{j_1}^2, \dots, C_{j_q}^2$  sont disjoints. En effet, pour  $1 \leq l < u \leq q$  on a  $C_{j_u}^1 \subset C_{j_l}^1$ , d'où puisque  $C_{j_u}^1 \cup C_{j_u}^2 \in \mathcal{P}_{s_{j_u-1}}$ , on a :

$$C_{j_u}^2 \subset C_{j_l}^1 \quad \text{et} \quad C_{j_l}^1 \cap C_{j_l}^2 = \emptyset.$$

La preuve est terminée.

LEMME 5. — Pour la partition précédente  $\mathcal{P}$ , on a avec les notations du lemme 3 :

$$Q_r \left\{ \varepsilon; P \left\{ \sum_{A \in \mathcal{P}} \varepsilon_A m^2(A) \geq 1 \right\} \geq \frac{a(Y)}{10} \right\} \geq 1 - 2(1-r)^q.$$

Preuve. — Pour  $\omega \in \Omega'$  on a, puisque les  $\varepsilon_A$  sont indépendants :

$$Q_r \left\{ \varepsilon; \sum_{A \in \mathcal{P}} \varepsilon_A m^2(A)(\omega) \geq 1 \right\} \geq 1 - (1-r)^q.$$

On utilise l'argument déjà utilisé deux fois : soit :

$$C = \{ (\omega, \varepsilon) \in \Omega' \times \{0, 1\}^{\mathcal{P}}; \sum_{A \in \mathcal{P}} \varepsilon_A m^2(A)(\omega) \geq 1 \}.$$

On a  $P \otimes Q_r(C) \geq P(\Omega')(1 - (1-r)^q)$ .

Soit :

$$H = \left\{ \varepsilon; P(\Omega' \cap \{ \sum_{A \in \mathcal{P}} \varepsilon_A m^2(A) \geq 1 \}) \geq \frac{1}{2} P(\Omega') \right\}.$$

Alors :

$$P \otimes Q_r(C) \leq P(\Omega') \left( Q_r(H) + \frac{1}{2}(1 - Q_r(H)) \right),$$

ce qui donne le résultat.

Passons à la preuve du théorème A. Supposant  $m$  non bornée, on va construire par induction sur  $n$  une suite disjointe  $(X_n)$  de  $\mathcal{X}$ , telle que si l'on pose  $Y_n = X \setminus \bigcup_{i \leq n} X_i$ , les conditions suivantes soient vérifiées pour  $n \geq 1$  :

$$(4) \quad b(Y_n) > \frac{1}{2} b(X),$$

$$(5) \quad d(m(X_n)) \geq 2^{-13} b(X).$$

Comme nous l'avons remarqué, l'existence d'une telle suite est contradictoire. Le premier pas est analogue au pas général. Supposons la construction de  $X_n$  effectuée. Soit  $r > 0$  tel que  $(1 - 10r)b(Y_n) > (1/2)b(X)$ . Soit  $q$  un entier assez grand pour que  $4(1-r)^q \leq 1/2$ . Soit  $\mathcal{P}$  la partition de  $Y_n$  fournie par le lemme 4. Puisque  $(8/9) + (1/2) > 1$ , il existe d'après les lemmes 3 et 5,  $\varepsilon \in \{0, 1\}^{\mathcal{P}}$  tel que :

$$b(Y_n \setminus A_\varepsilon) \geq (1 - 10r)b(Y_n) > \frac{1}{2} b(X),$$

$$P \left\{ \sum_{\substack{A \in \mathcal{P} \\ A \subset A_\varepsilon}} m^2(A) \geq 1 \right\} \geq \frac{a(Y_n)}{10}.$$



On a donc  $d(2^{-6} \sum_{\substack{A \in \mathcal{P} \\ A \subset A_\varepsilon}} m^2(A)) \geq \inf(a(Y_n)/10, 2^{-6})$ .

Le lemme 1, avec  $t=2^{-6}$ , montre qu'il existe  $X_{n+1} \subset A_\varepsilon$  avec :

$$d(m(X_{n+1})) \geq \inf(2^{-3} 10^{-1} a(Y_n), 2^{-9}) \geq 2^{-9} a(Y_n) \geq 2^{-12} b(Y_n) \geq 2^{-13} b(X).$$

Puisque  $b(Y_n \setminus X_{n+1}) \geq b(Y_n \setminus A_\varepsilon)$ , la preuve est terminée.

#### BIBLIOGRAPHIE

- [1] J. P. KAHANE, *Some Random Series of Functions*, D.C. Heath and Company.
- [2] B. MAUREY et G. PISIER, *Un théorème d'extrapolation et ses conséquences* (C. R. Acad. Sc., Paris, t. 277, série A, 1973, p. 39-42).
- [3] B. MAUREY, *Théorèmes de factorisation pour les opérateurs linéaires à valeurs dans un espace  $L^p$*  (Astérisque, II).
- [4] P. TURPIN, *Une mesure vectorielle non bornée* (C. R. Acad. Sc., Paris, t. 280, série A, 1975, p. 509).
- [5] P. TURPIN, *Colloque sur l'intégration vectorielle et multivoque*, Caen, 22 et 23 mai 1975, Offilib, Paris.

(Manuscrit reçu le 21 mars 1981,  
accepté le 12 mai 1981.)

M. TALAGRAND,  
Équipe d'Analyse, Tour 46,  
Université Paris-VI,  
4, place Jussieu,  
75230 Paris Cedex 05.