ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

J. BRIANÇON
M. GRANGER
J.-P. SPEDER

Sur le schéma de Hilbert d'une courbe plane

Annales scientifiques de l'É.N.S. 4^e série, tome 14, n° 1 (1981), p. 1-25
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1981_4_14_1_1_0>

© Gauthier-Villars (Éditions scientifiques et médicales Elsevier), 1981, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales scientifiques de l'É.N.S. » (http://www.elsevier.com/locate/ansens) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Ann. scient. Éc. Norm. Sup.
4ᵉ série, t. 14, 1981, p. 1 à 25.

SUR LE SCHÉMA DE HILBERT D'UNE COURBE PLANE

PAR J. BRIANÇON, M. GRANGER ET J. P. SPEDER

L'objet de ce travail est d'étudier le schéma de Hilbert $\mathrm{Hilb}^n C$ paramétrant les sous-espaces analytiques de dimension 0 et de longueur n d'un « germe » de courbe réduite C définie au voisinage de l'origine de $\mathbb{C}^2$ par une application $f \in \mathbb{C}\{x, y\}$.

Dans un premier temps (prop. 1.1 et 1.2), nous identifions le germe de $\mathrm{Hilb}^n \mathbb{C}^2$ (resp. $\mathrm{Hilb}^n C$) au voisinage du point z_I (resp. $z_{\bar{I}}$) paramétrant un idéal de définition I de $\mathbb{C}\{x, y\}$ [resp. $\bar{I} = I/(f)$ de l'algèbre analytique locale $\mathcal{O}_C = \mathbb{C}\{x, y\}/(f)$] de colongueur n, au platificateur local d'un morphisme [H.L.T.] canoniquement associé à la base standard verticale de I (resp. à f et à la base standard verticale de I ([B], déf. 1.1.10)). Ceci nous permet de donner des équations explicites de $\mathrm{Hilb}^n C$ comme sous-espace de $\mathrm{Hilb}^n \mathbb{C}^2$ et d'en déduire que la dimension de $\mathrm{Hilb}^n C$ est au moins égale à n. Mieux, comme le schéma de Hilbert $\mathrm{Hilb}^n \mathbb{C}\{x, y\}$ paramétrant les idéaux de définition de $\mathbb{C}\{x, y\}$ de colongueur n est de dimension au plus $n-1$ [I_1], nous pouvons alors montrer :

PROPOSITION 1.4. — $\mathrm{Hilb}^n C$ *est un espace analytique de dimension pure n, réduit, localement intersection complète. Tout point de* C *de colongueur n admet un germe de déformation plate qui le transforme en n points simples de la partie lisse de* C.

De plus, $\mathrm{Hilb}^n C$ est irréductible si et seulement si C est irréductible.

Ces derniers résultats ont déjà été obtenus par B. Altman, A. Iarrobino et S. Kleiman dans [A.I.K.].

Une seconde partie est consacrée à l'étude des singularités de $\mathrm{Hilb}^n C$. Nous cherchons donc à identifier les idéaux $\bar{I} = I/(f)$ de $\mathcal{O}_C$ tels que la dimension du $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_C}(\bar{I}, \mathcal{O}_C/\bar{I})$ (isomorphe à l'espace tangent de Zariski de $\mathrm{Hilb}^n C$ en $z_{\bar{I}}$) soit strictement plus grande que n. L'utilisation « intensive » des relations liant les éléments de la base standard verticale de I ([B.G.], prop. 2) permet de montrer que ce sont les idéaux $\bar{I}$ qui ne sont pas principaux (prop. 2.2).

Ainsi :

PROPOSITION 2.3. — *Les points singuliers de* $\mathrm{Hilb}^n C$ *sont ceux qui paramètrent les sous-espaces de* C *de dimension* 0 *contenant l'origine (lieu singulier du germe* C*), celle-ci n'étant pas définie par un idéal principal de* $\mathcal{O}_C$.

ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE. — 0012-9593/1981/ 1 /$ 5.00
© Gauthier-Villars

Dans la troisième partie, nous déterminons les composantes irréductibles (globales) de $\mathrm{Hilb}^n \mathbb{C}$ et nous donnons quelques renseignements, exemples et conjectures sur les composantes irréductibles locales du germe de $\mathrm{Hilb}^n \mathbb{C}$ en un point $z_{\overline{I}}$.

Enfin, dans la dernière partie, nous obtenons une minoration de la dimension en tout point du schéma de Hilbert $\mathrm{Hilb}^n \mathcal{O}_C$ paramétrant les idéaux de définition de $\mathcal{O}_C$ de colongueur n :

PROPOSITION 4.3. — *Soient* ν' *la multiplicité de* f *et* $z_{\overline{I}} \in \mathrm{Hilb}^n \mathcal{O}_C$ *le point paramétrant l'idéal de définition* $\overline{I}$ *de colongueur n de* $\mathcal{O}_C$. *La dimension du germe d'espace analytique* $(\mathrm{Hilb}^n \mathcal{O}_C, z_{\overline{I}})$ *est supérieure ou égale à* $\mathrm{Inf}(\nu'-1, n-1)$.

Tout notre travail utilise la « technique des escaliers » qui est la conséquence du théorème de préparation de Weierstrass selon la méthode de H. Hironaka. Nous renvoyons le lecteur au premier chapitre de [B] pour la présentation de ces notions et les résultats qu'on obtient dans le cas d'un idéal de définition de $\mathbb{C}\{x, y\}$ et à [G_2] pour utiliser le théorème de division à la recherche du platificateur local.

1. $\mathrm{Hilb}^n \mathbb{C}$ comme platificateur local. Désingularisation d'un point sur C

Notons, suivant [B] :

- E le sous-ensemble de $\mathbb{N}^2$ formé par les exposants privilégiés verticaux de I;
- $\Delta = \mathbb{N}^2 - E$ de cardinal n ([B], cor. 1.1.12);
- $F = \{(\alpha_0, \beta_0), (\alpha_1, \beta_1), \ldots, (\alpha_p, \beta_p)\}$ l'escalier vertical de I où :

$$\alpha_0 = 0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \ldots < \alpha_p$$

et :

$$\beta_0 > \beta_1 > \beta_2 > \ldots > \beta_{p-1} > \beta_p = 0;$$

- $(f_0, \ldots, f_p)$ la base standard verticale de I : le système de générateurs de I tel que, pour $i=0, \ldots, p$, on ait : exposant privilégié de $f_i = (\alpha_i, \beta_i)$:

$$f_i = x^{\alpha_i} y^{\beta_i} + \sum_{(\alpha, \beta) \in \Delta} f_{i,(\alpha,\beta)} x^\alpha y^\beta \qquad \text{où} \quad f_{i,(\alpha,\beta)} \in \mathbb{C};$$

- pour tout $i=0, \ldots, p$:

$$F_i = f_i + \sum_{(\alpha, \beta) \in \Delta} \zeta_{i,(\alpha,\beta)} x^\alpha y^\beta,$$

le germe de morphisme à l'origine de $\mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^{(p+1)n}$ [paramétré par $((x, y), (\zeta_{i,(\alpha,\beta)}), i=0, \ldots, p(\alpha, \beta) \in \Delta)$].

PROPOSITION 1.1. — *Soient* X *le germe de sous-espace analytique à l'origine de* $\mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^{(p+1)n}$ *défini par* $F_0 = F_1 = \ldots = F_p = 0$, S *le germe de* $\mathbb{C}^{(p+1)n}$ *à l'origine et* $\varphi : X \to S$ *la projection canonique. Alors, le germe* $(\mathrm{Hilb}^n \mathbb{C}^2, z_I)$ *est isomorphe au platificateur local* P *du morphisme* φ.

Preuve. — Soit $X_P = X \underset{S}{\times} P$ le germe de sous-espace analytique à l'origine de $\mathbb{C}^2 \times P$ obtenu à partir de X par le changement de base $P \overset{i}{\hookrightarrow} S$ et soit $\varphi_P : X_P \to P$ la projection canonique plate et de fibres de longueur n.

Il suffit de montrer que P satisfait au problème universel suivant : pour tout germe d'espace analytique T et tout germe Y de sous-espace analytique de $(\mathbb{C}^2, 0) \times T$ tel que la projection canonique $\psi : Y \to T$ soit plate et de fibre spéciale définie par I, il existe un germe de morphisme unique $\mu : T \to P$ tel que Y s'obtienne à partir de X_P par le changement de base μ.

Pour cela, il suffit de montrer qu'il existe un germe de morphisme unique $\lambda : T \to S$ tel que $Y = X \underset{S}{\times} T$: en effet, par définition du platificateur P, il existe alors un (et un seul) morphisme $\mu : T \to P$ tel que $\lambda = i \circ \mu$ et il vient :

$$Y = X \underset{S}{\times} T = (X \underset{S}{\times} P) \underset{P}{\times} T = X_P \underset{P}{\times} T.$$

Montrons donc l'existence de λ :

Comme ψ est un morphisme plat et que l'algèbre analytique locale de sa fibre spéciale admet la présentation $\mathbb{C}\{x, y\}/(f_0, \ldots, f_p)$ il existe, d'après une propriété bien connue de la platitude ([G_2], Annexe), une présentation de l'algèbre analytique locale $\mathcal{O}_Y$ du type suivant :

$$\mathcal{O}_Y = \mathcal{O}_T\{x, y\}/(\hat{F}_0, \ldots, \hat{F}_p) \qquad \text{avec} \quad \chi(\hat{F}_i) = f_i \quad (i = 0, \ldots, p),$$

où χ est la surjection canonique $\mathcal{O}_T\{x, y\} \to \mathbb{C}\{x, y\}$.

Dans ces conditions, appliquons, pour $i = 0, \ldots, p$, le théorème de division avec paramètres ([G_2], th. 1.2.7) de $x^{\alpha_i} y^{\beta_i}$ par la famille $(\hat{F}_0, \ldots, \hat{F}_p)$ et écrivons le reste (unique) obtenu sous la forme :

$$h_i = \sum_{(\alpha, \beta) \in \Delta} h_{i, (\alpha, \beta)} x^\alpha y^\beta \qquad \text{où} \quad h_{i, (\alpha, \beta)} \in \mathcal{O}_T.$$

Pour $i = 0, \ldots, p$ considérons alors :

$$\tilde{F}_i = f_i + \sum_{(\alpha, \beta) \in \Delta} \lambda_{i, (\alpha, \beta)} x^\alpha y^\beta,$$

où

$$\lambda_{i, (\alpha, \beta)} = \chi(h_{i\,(\alpha, \beta)}) - h_{i, (\alpha, \beta)}.$$

On a :

$$\chi(\tilde{F}_i) = f_i \qquad \text{et} \qquad \tilde{F}_i = x^{\alpha_i} y^{\beta_i} - h_i$$

car $\chi(x^{\alpha_i} y^{\beta_i} - h_i)$ est un élément de I d'exposant privilégié (α_i, β_i) et donc égal à f_i.

On en déduit que l'idéal de $\mathcal{O}_T\{x, y\}$ engendré par $(\tilde{F}_0, \ldots, \tilde{F}_p)$ est inclus dans celui engendré par $(\hat{F}_0, \ldots, \hat{F}_p)$ et comme ces deux idéaux ont même image par χ, ils sont égaux ([G_2], Annexe, lemme 3).

Notons alors $\lambda : T \to S$ le germe de morphisme défini par les $\lambda_{i, (\alpha, \beta)}$, $i = 0, \ldots, p (\alpha, \beta) \in \Delta$.

Comme $\mathcal{O}_Y = \mathcal{O}_T\{x, y\}/(\tilde{F}_0, \ldots, \tilde{F}_p)$ il s'ensuit immédiatement que $Y = X \underset{S}{\times} T$.

Reste à se persuader de l'unicité de λ : Si pour $\lambda^{(1)}: T \to S$, $Y = X \underset{S}{\times} T$, on a :

$$\mathcal{O}_Y = \mathcal{O}_T\{x, y\}/(\tilde{F}_0^{(1)}, \ldots, \tilde{F}_p^{(1)})$$

où pour $i=0, \ldots, p$,

$$\tilde{F}_i^{(1)} = f_i + \sum_{(\alpha, \beta)\in\Delta} \lambda_{i,(\alpha,\beta)}^{(1)} x^\alpha y^\beta.$$

D'où l'égalité des idéaux $(\tilde{F}_0, \ldots, \tilde{F}_p)$ et $(\tilde{F}_0^{(1)}, \ldots, \tilde{F}_p^{(1)})$ dans l'algèbre analytique locale $\mathcal{O}_T\{x, y\}$.

Appliquons alors le théorème de platitude et division ([G_2], th. 1.2.8). Comme $\mathcal{O}_Y$ est un $\mathcal{O}_T$ module plat, les restes des divisions de $\tilde{F}_0^{(1)}, \ldots, \tilde{F}_p^{(1)}$ par la famille $(\tilde{F}_0, \ldots, \tilde{F}_p)$ sont nuls. Or, pour $i=0, \ldots, p$, nous avons :

$$\tilde{F}_i^{(1)} = \tilde{F}_i + \sum_{(\alpha,\beta)\in\Delta} (\lambda_{i,(\alpha,\beta)}^{(1)} - \lambda_{i,(\alpha,\beta)}) x^\alpha y^\beta$$

et par conséquent $\lambda_{i,(\alpha,\beta)}^{(1)} = \lambda_{i,(\alpha,\beta)}$.

PROPOSITION 1.2. — *Supposons que $f \in I$ et soient X' le germe de sous-espace analytique à l'origine de $\mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^{(p+1)n}$ défini par $F_0 = F_1 = \ldots = F_p = f = 0$ et $\varphi': X' \to S$ la projection canonique. Alors, le germe* $(\mathrm{Hilb}^n C, z_1)$ *est isomorphe au platificateur local P' du morphisme φ'.*

Preuve. — Elle est semblable à celle de la proposition 1.1.

Prenons un germe d'espace analytique T' et un germe Y' de sous-espace analytique de $C \times T'$ tel que la projection canonique $\psi': Y' \to T'$ soit plate et que l'algèbre analytique locale de la fibre spéciale admette la présentation : $\mathbb{C}\{x, y\}/(f_0, \ldots, f_p)$. On en déduit alors, comme dans la proposition 1.1, l'existence et l'unicité d'un germe de morphisme $\lambda': T' \to S$ tel que $Y' = X \underset{S}{\times} T'$ c'est-à-dire :

$$\mathcal{O}_{Y'} = \mathcal{O}_{T'}\{x, y\}/(\tilde{F}_0', \ldots, \tilde{F}_p'),$$

où pour $i=0, \ldots, p$,

$$\tilde{F}_i' = f_i + \sum_{(\gamma,\beta)\in\Lambda} \lambda_{i,(\alpha,\beta)}' x^\alpha y^\beta.$$

Or, comme Y' est un sous-espace de $C \times T'$ d'algèbre analytique locale $\mathcal{O}_{T'}\{x, y\}/(f)$, on a $f \in (\tilde{F}_0', \ldots, \tilde{F}_p')$ de sorte que $Y' = X' \underset{S}{\times} T'$. On termine comme dans la proposition 1.1.

PROPOSITION 1.3. — *P' est le sous-espace de P défini par l'idéal $(h_{(\alpha,\beta)})_{(\alpha,\beta)\in\Delta}$ où $\sum_{(\alpha,\beta)\in\Delta} h_{(\alpha,\beta)} x^\alpha y^\beta$ est le reste de la division de f par la famille* $(F_0, \ldots, F_p)$.

Preuve. — Elle va résulter de la description explicite du platificateur local donnée dans [G_2], prop. 1.4.7 :

— si les $R_j = (g_{0,j}, \ldots, g_{p,j})$, où $j=1, \ldots, r$, forment un système de générateurs des relations liant $f_0, \ldots, f_p$, on forme les éléments $m_j = g_{0,j}F_0 + \ldots + g_{p,j}F_p$, on calcule le reste $\sum_{(\alpha,\beta)\in\Delta} h_{j,(\alpha,\beta)} x^\alpha y^\beta$ de la division de m_j par la famille $(F_0, \ldots, F_p)$ et alors, on a :

$$\mathcal{O}_P = \mathcal{O}_S/(h_{j,(\alpha,\beta)})_{j=1,\ldots,r,(\alpha,\beta)\in\Delta};$$

– dans ces conditions, si $f=g_0 f_0+g_1 f_1+\ldots+g_p f_p$ est la division de f par la famille $(f_0, \ldots, f_p)$, il est immédiat de voir que les R_j, $j=1, \ldots, r$, et R donnée par $-(g_0 f_0+\ldots+g_p f_p)+f=0$ forment un système de générateurs des relations liant $f_0, \ldots, f_p, f$.

De plus, comme $f \in I=(f_0, \ldots, f_p)$, diviser par la famille $(F_0, \ldots, F_p, f)$ revient à diviser par la famille $(F_0, \ldots, F_p)$. Par conséquent, pour définir P′ comme sous-espace de P, il suffit de former $m=-(g_0 F_0+\ldots+g_p F_p)+f$ et de calculer le reste :

$$h=\sum_{(\alpha, \beta)\in\Delta} h_{(\alpha, \beta)} x^\alpha y^\beta$$

de la division de m par la famille $(F_0, \ldots, F_p)$. Il est alors immédiat de constater que ce reste n'est rien d'autre que celui de la division de f par la famille $(F_0, \ldots, F_p)$.

COROLLAIRE DES PROPOSITIONS 1.1, 1.2, 1.3. – $(\mathrm{Hilb}^n C, z_{\overline{I}})$ est de dimension $\geqq n$.

En effet, d'après la proposition 1.1 et [F], th. 2.4, P est de dimension $2n$; d'où, d'après la proposition 1.3, P′ est de dimension $\geqq 2n-n$; la proposition 1.2 permet de conclure.

PROPOSITION 1.4. – $\mathrm{Hilb}^n C$ *est un espace analytique de dimension pure n, réduit, localement intersection complète.*

Tout point de C *de colongueur n admet un germe de déformation plate qui le transforme en n points simples de la partie lisse* C_{lisse} *de* C.

Preuve. – Si z est un point de $\mathrm{Hilb}^n C$ et C_z le sous-espace correspondant de C, soit $\mathrm{Support}(C_z)=\{P_1, \ldots, P_r\}$ et, pour $k=1, \ldots, r$, soit n_k la longueur du point P_k (muni de l'algèbre analytique locale $\mathcal{O}_{C_z, P_k}$). Pour tout $k=1, \ldots, r$, le point P_k est paramétré par un point z_k de $\mathrm{Hilb}^{n_k} C$ et on a un isomorphisme canonique de germes d'espaces analytiques :

$$(\mathrm{Hilb}^n C, z) \approx \prod_{k=1}^{r} (\mathrm{Hilb}^{n_k} C, z_k).$$

Dans le cas particulier où $n_k=1$ pour $k=1, \ldots, r$, on en déduit donc l'isomorphisme :

$$(\mathrm{Hilb}^n C, z) \approx \prod_{k=1}^{r} (C, P_k).$$

Ainsi, l'ensemble U des points de $\mathrm{Hilb}^n C$ qui paramètrent n points (simples) de C_{lisse} est un ouvert (semi-analytique) lisse de dimension n.

Grâce au « curve selection lemma » montrons que U est dense dans $\mathrm{Hilb}^n C$, c'est-à-dire que tout point z de $\mathrm{Hilb}^n C$ appartient à $\overline{U}$ (adhérence de U dans $\mathrm{Hilb}^n C$).

Pour cela, nous allons raisonner par récurrence sur la longueur n_0 de l'origine (lieu singulier du germe C) munie de l'algèbre analytique locale $\mathcal{O}_{C_z, 0}$.

Si $n_0=0$, le résultat est immédiat car il est trivial de déformer chaque point P_k de C_{lisse} de longueur n_k en n_k points simples de C_{lisse}.

Supposons donc l'hypothèse vérifiée pour toutes les longueurs de l'origine $\leqq m$ et montrons la pour $n_0=m+1$.

D'après le corollaire précédent, $\mathrm{Hilb}^{m+1}\,\mathrm{C}$ est un sous-espace de $\mathrm{Hilb}^{m+1}\,\mathbb{C}^2$ de dimension $\geqq m+1$ en le point z_0 paramétrant l'origine. Or, $\mathrm{Hilb}^{m+1}\,\mathbb{C}\{x, y\}$ est un sous-espace algébrique fermé de $\mathrm{Hilb}^{m+1}\,\mathbb{C}^2$ de dimension $\leqq m$ en tout point $[\mathrm{I}_1]$. Le « curve selection lemma » implique donc l'existence d'un germe de chemin analytique $\gamma:(\mathbb{C}, 0)\to(\mathrm{Hilb}^{m+1}\,\mathrm{C}, z_0)$ tel que, pour $t\neq 0$, $\gamma(t)\notin \mathrm{Hilb}^{m+1}\,\mathbb{C}\{x, y\}$. Ce chemin induit canoniquement un chemin noté encore $\gamma:(\mathbb{C}, 0)\to(\mathrm{Hilb}^{n}\,\mathrm{C}, z)$ tel que, pour $t\neq 0$, $\gamma(t)\in\overline{\mathrm{U}}$ par hypothèse de récurrence puisque la longueur de l'origine, munie de l'algèbre analytique locale $\mathrm{C}_{\gamma(t),0}$ (pour $t\neq 0$) est $<m+1$. Finalement, $z=\gamma(0)$ appartient aussi à $\overline{\mathrm{U}}$.

On en déduit que $\mathrm{Hilb}^{n}\,\mathrm{C}$ est un espace analytique de dimension pure n qui est localement une intersection complète par la proposition 1.3.

Montrons maintenant, et cela terminera la démonstration de la proposition 1.4, qu'un germe (H, z) d'espace analytique d'intersection complète (et plus généralement d'espace analytique sans composante immergée), tel que la partie lisse de H soit dense au voisinage de z, est réduit.

Nous pouvons supposer l'espace analytique réduit sous-jacent à H, $\mathrm{H}^{\mathrm{red}}$, irréductible (quitte à démontrer la propriété pour chaque composante); soit f non nul dans le nil radical de $\mathcal{O}_{\mathrm{H}}$; l'annulateur de f, $\mathrm{Ann}(f)$, définit un sous-espace analytique A de H inclus dans l'ensemble des points où H n'est pas réduit [*voir* par exemple Abhyankar, *Local Analytic Geometry* (42.11)]. D'autre part, $\mathrm{H}^{\mathrm{red}}$ étant irréductible et H de dimension pure, 0 est un idéal primaire de $\mathcal{O}_{\mathrm{H}}$ et donc $\sqrt{\mathrm{Ann}(f)}=\sqrt{0}$; par conséquent $\mathrm{A}=\mathrm{H}$, ce qui montre que H n'est réduit en aucun point dans un voisinage de z, contrairement à l'hypothèse.

2. Étude du lieu singulier de $\mathrm{Hilb}^{n}\,\mathrm{C}$

PROPOSITION 2.1. — *Soient* φ *un morphisme* $\mathbb{C}\{x, y\}$*-linéaire de* I *dans* $\mathbb{C}\{x, y\}/\mathrm{I}$ *et* M *l'idéal maximal de* $\mathbb{C}\{x, y\}$. *Si* I *n'est pas un idéal intersection complète de* $\mathbb{C}\{x, y\}$ (*i.e. ne peut être engendré par deux éléments*) *alors* $\varphi(\mathrm{I})$ *est inclus dans* M/I.

Preuve. — Il suffit de montrer que les images de $f_0, f_1, \ldots, f_p$ par φ appartiennent à M/I.

En ce qui concerne $\varphi(f_1), \ldots, \varphi(f_p)$. — d'après [B-G], prop. 2, pour tout $i=0, \ldots, p-1$, il existe des polynômes $u_{i,i+1}, u_{i,i+2}, \ldots, u_{i,p}$ de $\mathbb{C}\{x\}[y]$ vérifiant la relation :

$$\mathscr{R}_i:\quad x^{\alpha_{i+1}-\alpha_i} f_i = u_{i,i+1} f_{i+1} + u_{i,i+2} f_{i+2} + \ldots + u_{i,p} f_p,$$

où $u_{i,i+1}$ est un polynôme distingué de degré $\beta_i-\beta_{i+1}$;

remarquons tout de suite que, comme I n'est pas un idéal intersection complète, il existe au moins un indice $i=0, \ldots, p-1$ tel que $u_{i,i+2}\in\mathrm{M}$. En effet, sinon :

$$\mathscr{R}_{p-2} \;\Rightarrow\; f_p\in\mathrm{M}(f_{p-1}, f_{p-2}),$$

alors

$$\mathscr{R}_{p-3} \;\Rightarrow\; f_{p-1}\in\mathrm{M}(f_{p-2}, f_{p-3})$$

et donc $f_p \in \mathrm{M}(f_{p-2}, f_{p-3})$; ainsi de suite jusqu'à $f_2, f_3, \ldots, f_p \in \mathrm{M}(f_0, f_1)$ qui implique que I est engendré par f_0 et f_1.

Nous allons montrer que, dans le $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathbb{C}\{x, y\}/\mathrm{I}$ de dimension n engendré par les classes de $x^\alpha y^\beta$ pour $(\alpha, \beta) \in \Delta$ ([B], cor. 1.1.12) $\varphi(f_i)$, pour $i=1, \ldots, p$, n'a pas de composantes en $\dot{1}, \dot{y}, \ldots, \dot{y}^{\beta_0-1-\beta_{i-1}}$ et même en $\dot{y}^{\beta_0-\beta_{i-1}}$ dès qu'il existe $j \geqq i$ tel que $u_{j-1, j+1} \in \mathrm{M}$. Ceci impliquera donc que $\varphi(f_1), \ldots, \varphi(f_p)$ n'ont pas de composante en 1.

Remarquons d'abord :

1° pour $v \in \mathbb{C}\{x, y\}$ et tout $k \in \mathbb{N}^*$, la classe de $x^k v$ n'a pas de composantes en $\dot{1}, \dot{y}, \ldots, \dot{y}^{\beta_0-1}$: soit :

$$x^k v = \sum_{i=0}^{p} g_i f_i + \sum_{(\alpha, \beta) \in \Delta} h_{(\alpha, \beta)} x^\alpha y^\beta$$

la division de $x^k v$ par la famille $(f_0, \ldots, f_p)$; en faisant $x=0$ dans cette identité, il vient :

$$g_0(0, y) y^{\beta_0} + \sum_{\beta=0}^{\beta_0-1} h_{(0, \beta)} y^\beta = 0$$

et donc $h_{(0, \beta)}=0$ pour $\beta=0, \ldots, \beta_0-1$. Ainsi les classes $x^{\alpha_{i+1}-\alpha_i}\varphi(f_i)$ n'ont pas de composantes en $\dot{1}, \dot{y}, \ldots, \dot{y}^{\beta_0-1}$;

2° pour tout $\beta \geqq \beta_0$, la classe $\dot{y}^\beta$ n'a pas de composantes en $\dot{1}, \dot{y}, \ldots, \dot{y}^{\beta_0-1}$ à cause de la remarque 1° et du fait que f_0 est un polynôme distingué de degré β_0 en y.

Considérons alors $\mathscr{R}_{p-1}$. Comme $u_{p-1, p}$ est un polynôme distingué en y de degré β_{p-1}, $\varphi(f_p)$ n'a pas de composantes en $\dot{1}, \dot{y}, \ldots, \dot{y}^{\beta_0-1-\beta_{p-1}}$. Supposons maintenant, par hypothèse de récurrence, que pour $k=i+1, \ldots, p$, $\varphi(f_k)$ n'a pas de composantes en $1, \dot{y}, \ldots, \dot{y}^{\beta_0-1-\beta_{k-1}}$ et considérons $\mathscr{R}_{i-1}$. Comme $u_{i-1, i}$ est un polynôme distingué de degré $\beta_{i-1}-\beta_i$, $\varphi(f_i)$ n'a pas alors de composantes en $\dot{1}, \dot{y}, \ldots, \dot{y}^{\beta_0-1-\beta_{i-1}}$. Si, de plus, $u_{i-1, i+1} \in \mathrm{M}$, $u_{i-1, i+1}\varphi(f_{i+1})$ n'a pas de composantes en $\dot{1}, \dot{y}, \ldots, \dot{y}^{\beta_0-\beta_i}$ de sorte que $\varphi(f_i)$ n'a pas de composantes en $\dot{1}, \dot{y}, \ldots, \dot{y}^{\beta_0-\beta_{i-1}}$ et alors, pour tout $l=1, \ldots, i$, $\varphi(f_l)$ n'aura pas de composantes en $\dot{1}, \dot{y}, \ldots, \dot{y}^{\beta_0-\beta_{l-1}}$.

Cette méthode ne donne malheureusement directement aucun renseignement au sujet de $\varphi(f_0)$. Néanmoins, les résultats ainsi obtenus vont nous servir à nous tirer d'affaire.

En ce qui concerne $\varphi(f_0)$. — Soit q un entier tel que

$$f_0(x^q, y) = (y-\varphi_1(x)) \ldots (y-\varphi_{\beta_0}(x)),$$

où $\varphi_\beta \in \mathbb{C}\{x\}$ pour $\beta=1, \ldots, \beta_0$ (d'après le théorème de Puiseux).

Préliminaires. — Considérons alors la transformation (monomorphisme d'anneau local) $\tau : \mathbb{C}\{x, y\} \to \mathbb{C}\{x, y\}$ définie par $\tau(g)(x, y) = g(x^q, y)$ et soit $\tilde{\mathrm{I}}$ l'idéal de $\mathbb{C}\{x, y\}$ engendré par $\tau(\mathrm{I})$ et donc aussi par $\tau(f_0), \ldots, \tau(f_p)$.

En utilisant le fait que, pour tout $h \in \mathbb{C}\{x, y\}$, il existe $h_0, \ldots, h_{q-1} \in \mathbb{C}\{x, y\}$ uniques tels que :

$$h(x, y) = \sum_{j=0}^{q-1} x^j h_j(x^q, y),$$

on peut montrer sans difficultés les propriétés suivantes :

– l'ensemble des relations liant les images par τ d'une famille d'éléments de $\mathbb{C}\{x, y\}$ est engendré par l'ensemble des transformées par τ des relations liant cette famille d'éléments;

– toute application $\mathbb{C}\{x, y\}$-linéaire $\varphi : I \to \mathbb{C}\{x, y\}/I$ induit une application $\mathbb{C}\{x, y\}$-linéaire unique $\tilde{\varphi} : \tilde{I} \to \mathbb{C}\{x, y\}/\tilde{I}$ telle que, pour tout $h \in I$, $\tilde{\varphi}(\tau(h)) = \hat{\tau}(\varphi(h))$ où $\hat{\tau}$ s'obtient à partir de τ par passage au quotient. De plus, pour tout $h \in I$, $\varphi(h) \in M/I$ si et seulement si $\tilde{\varphi}(\tau(h)) \in M/\tilde{I}$;

– l'ensemble des exposants privilégiés verticaux de $\tilde{I}$ résulte de celui de I par l'affinité d'axe, l'axe des ordonnées, et de rapport q. Par conséquent $(\tau(f_0), \ldots, \tau(f_p))$ est la base standard verticale de $\tilde{I}$;

– à l'aide de [B], prop. 2.2.2 :

$$\text{I idéal intersection complète} \Leftrightarrow I=(f_0, f_1) \Leftrightarrow \tilde{I}=(\tau(f_0), \tau(f_1)) \Leftrightarrow \tilde{I} \text{ idéal intersection complète.}$$

Voici pour les préliminaires. Prenons alors $(X = y - \varphi_1(x), Y = x)$ comme système de coordonnées au voisinage de 0 dans $\mathbb{C}^2$ et soient $(g_0, \ldots, g_s)$ la base standard verticale de $\tilde{I}$ dans ces coordonnées et :

$$\tau(f_0) = \sum_{k=0}^{s} v_k g_k$$

une décomposition de $\tau(f_0)$ dans cette base standard.

Si l'on fait $X=0$ dans cette identité, il vient une identité du type $0 = v_0(0, Y) Y^{\beta'}$ et par conséquent $v_0 \in M$. Finalement $v_0 \tilde{\varphi}(g_0) \in M/\tilde{I}$ et $\tilde{\varphi}(g_1), \ldots, \tilde{\varphi}(g_s) \in M/\tilde{I}$ [d'après ce que nous avons montré dans la première partie de cette démonstration mais appliquée cette fois à $\tilde{I}$, $\tilde{\varphi}$, $(g_0, \ldots, g_s)$ base standard verticale de $\tilde{I}$ dans les coordonnées (X, Y)] d'où :

$$\tilde{\varphi}(\tau(f_0)) = \sum_{k=0}^{s} v_k \tilde{\varphi}(g_k) \in M/\tilde{I}$$

et par conséquent $\varphi(f_0) \in M/I$.

Remarque. – Une autre démonstration de la proposition 2.1 résulte du fait que $\mathbb{C}\{x, y\}/I$ est « déterminantiel ».

Plus précisément, M. Schaps ([S], th. 1) montre, en utilisant un théorème de Burch, que, pour tout système de générateurs $(\xi_0, \ldots, \xi_m)$ de I, il existe une base $(\rho_1 = (\rho_{0,1}, \ldots, \rho_{m,1}), \ldots, \rho_m = (\rho_{0,m}, \ldots, \rho_{m,m}))$ du module libre des relations entre $\xi_0, \ldots, \xi_m$ telle que : $\xi_i = \det(e_i, \rho_1, \ldots, \rho_m)$ où $(e_0, \ldots, e_m)$ est la base canonique de $\mathbf{C}\{x, y\}^{m+1}$.

Supposons alors que le système de générateurs $(\xi_0, \ldots, \xi_m)$ de I soit minimal et qu'il existe $\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}\{x,y\}}(I, \mathbb{C}\{x, y\}/I)$ tel que $\varphi(\xi_0) \notin M/I$. Quitte à remplacer ξ_i (pour $i=1, \ldots, m$) par $\xi_i - (\eta_i/\eta_0)\xi_0$ [où $\eta_i = \varphi(\xi_i)$] nous pouvons supposer que $\varphi(\xi_i) = 0$ pour $i=1, \ldots, m$.

D'autre part, puisque le système de générateurs est minimal, les coefficients $(\rho_{i,j})$, $i=0, \ldots, m$, $j=1, \ldots, m$ sont dans M, il en résulte que si $m \geqq 2$, $(\xi_1, \ldots, \xi_m)$ appartiennent à l'idéal $M(\rho_{0,1}, \ldots, \rho_{0,m})$ et, par conséquent, il existe un entier j tel que $\rho_{0,j} \notin I$ puisque $\xi_1, \ldots, \xi_m$ n'appartiennent pas à MI [$(\xi_0, \ldots, \xi_m)$ système minimal de générateurs de $I \Leftrightarrow$(classe (ξ_0), ..., classe (ξ_m)) base du $\mathbb{C}$ espace vectoriel I/MI]. Mais la relation $\rho_{0,j}\xi_0 + \ldots + \rho_{m,j}\xi_m = 0$ implique $\rho_{0,j}\varphi(\xi_0) = 0$ et, par conséquent, $\rho_{0,j} \in I$ d'où une contradiction. Ainsi $m=1$ et $I=(\xi_0, \xi_1)$ est une intersection complète.

PROPOSITION 2.2. — *Le point $z_{\bar{I}}$ est un point régulier de* Hilb^n C *si et seulement si* $\bar{I}$ *est un idéal principal de* $\mathcal{O}_C$.

Preuve. — Comme Hilb^n C est de dimension pure n d'après la proposition 1.4, le point $z_{\bar{I}}$ est un point régulier de Hilb^n C si et seulement si l'espace tangent de Zariski à Hilb^n C en $z_{\bar{I}}$, soit $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_C}(\bar{I}, \mathcal{O}_C/\bar{I})$ est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension n. Or, $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_C}(\bar{I}, \mathcal{O}_C/\bar{I})$ s'identifie de façon évidente au sous-espace de $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}\{x,y\}}(I, \mathbb{C}\{x, y\}/I)$ (de dimension $2n$ d'après [F], th. 2.4) formé par les homomorphismes φ tels que $\varphi(f)=0$.

Supposons d'abord que $\bar{I}$ soit un idéal principal de $\mathcal{O}_C$. Alors I est un idéal intersection complète engendré par f et un autre élément de $\mathbb{C}\{x, y\}$, disons g. Comme les relations liant f et g sont « triviales », les homomorphismes $\varphi_{(\alpha,\beta)}$, définis par $\varphi_{(\alpha,\beta)}(f)=0$ et $\varphi_{(\alpha,\beta)}(g)=\dot{x}^\alpha \dot{y}^\beta$, pour $(\alpha, \beta) \in \Delta$, forment une base de $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_C}(\bar{I}, \mathcal{O}_C/\bar{I})$.

Supposons maintenant que $\bar{I}$ ne soit pas un idéal principal de $\mathcal{O}_C$. Si I n'est pas un idéal intersection complète de $\mathbb{C}\{x, y\}$, alors, pour tout $\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}\{x,y\}}(I, \mathbb{C}\{x, y\}/I)$, $\varphi(f) \in M/I$ d'après la proposition 2.1. Si I est un idéal intersection complète de $\mathbb{C}\{x, y\}$, I est engendré par f_0 et f_1, f s'écrit sous la forme $f = v_0 f_0 + v_1 f_1$ où v_0 et $v_1 \in M$ car $\bar{I}$ n'est pas un idéal principal et, pour tout $\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}\{x,y\}}(I, \mathbb{C}\{x, y\}/I)$, $\varphi(f)$ est encore un élément de M/I. Ainsi, le sous-espace vectoriel $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_C}(\bar{I}, \mathcal{O}_C/\bar{I})$ est défini dans l'espace vectoriel $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}\{x,y\}}(I, \mathbb{C}\{x, y\}/I)$ de dimension $2n$ par $n-1$ équations linéaires correspondant aux composantes en $\dot{x}^\alpha \dot{y}^\beta$ de l'image de f, pour $(\alpha, \beta) \in \Delta(\alpha, \beta) \neq (0,0)$; par conséquent : $\dim_{\mathbb{C}} \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_C}(\bar{I}, \mathcal{O}_C/\bar{I}) \geqq n+1$.

PROPOSITION 2.3. — *Les points singuliers de* Hilb^n C *sont ceux qui paramètrent les sous-espaces de* C *contenant l'origine (lieu singulier du germe* C*), celle-ci n'étant pas définie par un idéal principal de* $\mathcal{O}_C$.

Preuve. — L'espace tangent de Zariski à Hilb^n C en un point z est isomorphe au produit des espaces tangents de Zariski aux Hilb^{n_k} C en les points z_k pour $k=1, \ldots, r$ (où r, les n_k et les z_k sont définis comme dans la preuve de la proposition 1.4).

Ainsi, un point z est un point singulier de Hilb^n C si et seulement s'il existe $k=1, \ldots, r$ tel que z_k soit un point singulier de Hilb^{n_k} C. La proposition 2.2 permet alors de conclure si l'on veut bien remarquer que tout point $P_k \in C_{\text{lisse}}$ est défini par un idéal principal de $\mathcal{O}_C$.

3. Composantes irréductibles de $\mathrm{Hilb}^n\,\mathrm{C}$

Nous allons d'abord décrire les composantes irréductibles du schéma de Hilbert $\mathrm{Hilb}^n\,\mathrm{C}$ pour une courbe réduite C de dimension de plongement au plus 2 en tout point.

PROPOSITION 3.1. — *Si la courbe* C *est irréductible (resp. connexe),* $\mathrm{Hilb}^n\,\mathrm{C}$ *est irréductible (resp. connexe).*

Preuve. — Soient U l'ouvert des points de $\mathrm{Hilb}^n\,\mathrm{C}$ qui paramètrent n points simples de $\mathrm{C}_{\mathrm{lisse}}$,

$$\Delta = \{(\mathrm{P}_1, \ldots, \mathrm{P}_n) \in (\mathrm{C}_{\mathrm{lisse}})^n;\ \exists\, i \neq j\ \mathrm{P}_i = \mathrm{P}_j\};$$

il résulte de l'isomorphisme :

$$(\mathrm{Hilb}^n\,\mathrm{C}, \{\mathrm{P}_1, \ldots, \mathrm{P}_n\}) \approx \prod_{i=1}^{n} (\mathrm{C}_{\mathrm{lisse}}, \mathrm{P}_i),$$

l'isomorphisme global :

$$\mathrm{U} \approx (\mathrm{C}^n_{\mathrm{lisse}} - \Delta)/\mathfrak{S}_n;$$

si C est irréductible, $\mathrm{C}_{\mathrm{lisse}}$ est connexe, donc U également. De la proposition 1.4 on déduit que $\overline{\mathrm{U}} = \mathrm{Hilb}^n\,\mathrm{C}$ et $\mathrm{Hilb}^n\,\mathrm{C}$ est donc irréductible.

Soit $\mathrm{V} = (\mathrm{C}^n - \Delta)/\mathfrak{S}_n \supset \mathrm{U}$, l'ouvert paramétrant n points distincts de C. Si C est connexe, deux points de U peuvent être joints par un chemin dans V (puisque C privé d'un nombre fini de points de $\mathrm{C}_{\mathrm{lisse}}$ est connexe); la connexité de $\mathrm{Hilb}^n\,\mathrm{C}$ en résulte alors; c'est un cas particulier de la proposition 2.3 montrée par J. Fogarty dans [F]; *voir* également le corollaire (7) de [A.I.K.].

Soient $\mathrm{C}_1, \ldots, \mathrm{C}_r$ les composantes irréductibles de C et $n_1, \ldots, n_r$ des entiers tels que $n_1 + \ldots + n_r = n$; soit $\mathrm{U}_{n_1, \ldots, n_r}$ l'ensemble des $z = \{\mathrm{P}_1, \ldots, \mathrm{P}_n\} \in \mathrm{U}$ tels que :

$$\# \{\mathrm{P}_1, \ldots, \mathrm{P}_n\} \cap (\mathrm{C}_{\mathrm{lisse}} \cap \mathrm{C}_i) = n_i.$$

PROPOSITION 3.2. — *Les adhérences* $\overline{\mathrm{U}}_{n_1, n_2, \ldots, n_r}$ *des ouverts* $\mathrm{U}_{n_1, n_2, \ldots, n_r}$ *sont les composantes irréductibles de* $\mathrm{Hilb}^n\,\mathrm{C}$.

Preuve. — Il suffit de remarquer que les $\mathrm{U}_{n_1, \ldots, n_r}$ sont ouverts connexes et forment une partition de U, donc la partition de U en composantes connexes. La proposition résulte alors de R. Narasimhan, *Introduction to the Theory of Analytic Spaces*, chap. IV, th. 1.

Nous revenons maintenant au cas local, où C est un germe de courbe réduite à l'origine de $\mathbb{C}^2$, définie par $f \in \mathbb{C}\{x, y\}$; étant donné l'idéal de définition $\bar{\mathrm{I}}$ de colongueur n de $\mathcal{O}_{\mathrm{C}} = \mathbb{C}\{x, y\}/(f)$, nous nous proposons d'étudier les composantes irréductibles du germe $(\mathrm{Hilb}^n\,\mathrm{C}, z_{\bar{\mathrm{I}}})$.

Exemple 3.3. — L'irréductibilité de (C, 0) n'implique pas l'irréductibilité de (Hilb^n C, $z_{\bar{I}}$) comme le prouve l'exemple suivant :

$$f(x, y)=y^4-x^5, \qquad I=(x, y^2);$$

nous allons montrer que dans cet exemple on trouve deux composantes irréductibles.

Fixons un représentant du germe paramétré par $x=t^4$, $y=t^5$, $|t|<\lambda$ où $\lambda>0$ et notons $D_\varepsilon=\{x\in\mathbb{C}/|x|<\varepsilon\}$. Il existe $\varepsilon>0$ tel que pour $(a, b)\in D_\varepsilon\times(D_\varepsilon-\{0\})$ l'équation : $t^4+at^5+b=0$ a quatre solutions simples t_i, $|t_i|<\lambda$, $i=1, \ldots, 4$; les t_i paramètrent $C\cap D_{a,b}$ où $D_{a,b}$ désigne la droite $x+ay+b=0$.

Munissons Hilb$^2\,\mathbb{C}^2$ des coordonnées locales dans $\mathbb{C}^4$:

$$(a, b, a', b')\mapsto z_J, \qquad J=(x+ay+b,\ y^2+a'y+b').$$

Si $|\varepsilon\lambda|<1/2$ on a :

$$\frac{1}{2}|t_i|^4\leqq|t_i|^4|1-\lambda\varepsilon|\leqq|t_i^4|.|1+at_i|=|b|<\varepsilon;$$

donc $|y_i|=|t_i|^5<\varepsilon'=(2\varepsilon)^{5/4}$.

A chacun des doublets (t_i, t_j), pour $(a, b)\in D_\varepsilon\times(D_\varepsilon-\{0\})$, on associe l'idéal $J=(x+ay+b,\ (y-t_i^5)\ (y-t_j^5))$ qui définit un point z_J de Hilb^2 C, point appartenant au voisinage $W=D_\varepsilon\times D_\varepsilon\times D_{2\varepsilon'}\times D_{\varepsilon'^2}$ de $z_{\bar{I}}$.

Comme $D_{a,0}\cap C=\{0\}$, $z\in U\cap W$ si et seulement si $z\in W\cap$ Hilb^2 C et $b\neq0$, d'où un revêtement à six feuilles : $U\cap W\xrightarrow{\alpha}D_\varepsilon\times(D_\varepsilon-\{0\})$ défini par $\alpha(z_J)=(a, b)$. Comme $D_\varepsilon\times(D_\varepsilon-\{0\})$ est isomorphe au produit de $S_{b_0}=\{b\in\mathbb{C}/|b|=b_0=\varepsilon/2\}$ par un espace contractile, le nombre de composantes connexes de $U\cap W$ est égal à celui de $\alpha^{-1}(S_{b_0})$ qui est aussi le nombre d'orbites de $\alpha^{-1}(S_{b_0})$ sous l'action de $\Pi_1(S_{b_0})$. Les points de $D_{b_0e^{i\theta},0}\cap C$ sont les points $m_j(\theta)$ de paramètre :

$$t_j(\theta)=e^{i(\theta/4)}\,t_j \qquad \text{où} \quad t_j=b_0^{1/4}\,e^{i((\Pi/4)+j(\Pi/2))}$$

paramètre $m_j=m_j(0)$ (pour $j=1, \ldots, 4$). On en déduit que le générateur de $\Pi_1(S_{b_0})$ opère sur $\{m_1, m_2, m_3, m_4\}$ par permutation circulaire et que $\alpha^{-1}(b_0)$ a deux orbites :

$$\{\{m_1, m_2\}, \{m_2, m_3\}, \{m_3, m_4\}, \{m_1, m_4\}\} \qquad \text{et} \qquad \{\{m_1, m_3\}, \{m_2, m_4\}\}.$$

Ce même raisonnement s'applique à une courbe C irréductible de multiplicité $\nu'\geqq4$ transverse à $x=0$, et à l'idéal (x, y^n), $2\leqq n\leqq\nu'-2$.

Exemple 3.4. — Lorsque C est le « cusp » défini par $f(x, y)=y^2-x^3$, on peut démontrer que le germe de Hilb^n C en tout point $z_{\bar{I}}$ paramétrant un idéal $\bar{I}$ non principal de $\mathcal{O}_C$ est un germe d'hypersurface irréductible.

Soient $C_1, C_2, \ldots, C_r$ les composantes irréductibles de C, $\overline{U}_{n_1,\ldots,n_r}$ les composantes irréductibles de $\mathrm{Hilb}^n C$, $f=h_1 \ldots h_r$ où, pour $i=1, \ldots, r$, $C_i=h_i^{-1}(0)$. On note, pour $1 \leqq i_1 < \ldots < i_k \leqq r$,

$$m_{i_1,i_2,\ldots,i_k}=\mathrm{codim}_{\mathbb{C}}[(h_{i_1} \ldots h_{i_k})+I].$$

Des conditions nécessaires pour que $z_{\overline{I}}$ appartienne à $\overline{U}_{n_1,\ldots,n_r}$ sont :

$$(S) \qquad \begin{cases} n=n_1+n_2+\ldots+n_r, \\ n_{i_1}+n_{i_2}+\ldots+n_{i_k} \leqq m_{i_1,i_2,\ldots,i_k}, \qquad 1 \leqq i_1 < \ldots < i_k \leqq r. \end{cases}$$

ceci d'après la semi-continuité de la colongueur de l'idéal $(h_{i_1} \ldots h_{i_k})+I$.

L'existence d'au moins une solution $(n_1, \ldots, n_r)$ du système (S) implique $n \leqq m_1+\ldots+m_r$.

PROPOSITION 3.5. — *Soient* $I \subset \mathbb{C}\{x, y\}$ *un idéal de définition,* $f=h_1 \ldots h_r \in I$ *avec* $r \geqq 2$ *et pour tout* $i=1, \ldots, r$, $h_i(0)=0$. *Si* $m_i=\mathrm{codim}_{\mathbb{C}}((h_i)+I)$, $n=\mathrm{codim}_{\mathbb{C}}(I)$, *l'égalité* $n=m_1+m_2+\ldots+m_r$ *a lieu si et seulement si* $\overline{I}=I/(f)$ *est un idéal principal de* $\mathcal{O}_C=\mathbb{C}\{x, y\}/(f)$.

N. B. — On ne suppose pas $h_1, \ldots, h_r$ irréductibles.

Preuve. — Supposons d'abord $r=2$; on note :

$$(I : h_1)=\{h \in \mathbb{C}\{x, y\}/hh_1 \in I\}.$$

On a une suite exacte :

$$0 \to (I : h_1)/I \to \mathbb{C}\{x, y\}/I \xrightarrow{xh_1} I+(h_1)/I \to 0$$

comme $I+(h_2) \subset (I : h_1)$, on a :

$$m_1=\dim \mathbb{C}\{x, y\}/I+(h_1) = \dim (I : h_1)/I \geqq \dim I+(h_2)/I=n-m_2.$$

Ainsi on trouve l'inégalité $(\star)$: $n \leqq m_1+m_2$, et une formulation équivalente de l'hypothèse de la proposition 3.5 :

$$n=m_1+m_2 \quad \Leftrightarrow \quad I+(h_2)=(I : h_1) \quad \Leftrightarrow \quad I+(h_1)=(I : h_2).$$

Considérons l'endomorphisme τ de $\mathbb{C}\{x, y\}$ défini par $\tau(x)=x^q$ et $\tau(y)=y$ (*voir* preuve de la proposition 2.1) $\tau(h_1)$, $\tau(h_2)$ et $\tau_*(I)$ satisfont encore aux hypothèses de la proposition 3.5. Pour q convenablement choisi, on peut écrire (d'après le théorème de Puiseux) que $\tau(h_1)=l_1 \ldots l_s$, avec l_i de multiplicité 1 dans $\mathbb{C}\{x, y\}$. Dans le lemme 3.6 ci-dessous, on montre que l_1 et $l_2 \ldots l_s\, \tau(h_2)$ satisfont aux hypothèses de la proposition 3.5.

Comme $I/(f)$ est principal si et seulement si $\tau_*(I)/\tau(f)$ l'est, il restera à démontrer la proposition ($r=2$) dans le cas $h_1=x$, ce qui est l'objet du lemme 3.7.

LEMME 3.6. — *Soient* A *un anneau local d'idéal maximal* M, $l_1, l_2 \in M$, $h_1 = l_1 l_2$, $h_2 \in M$ *et* I *un idéal de* A. *Si* $h_1 h_2 \in I$ *et si* $(I : h_1) = I + (h_2)$, $(I : h_2) = I + (h_1)$. *On a* $(I : l_1) = I + (l_2 h_2)$.

Preuve. — Comme A est local et $h_2 \in M$, il suffit de montrer que :

$$\frac{(I : l_1)}{I + (l_2 h_2)} \subset h_2 \frac{(I : l_1)}{I + (l_2 h_2)}.$$

Ceci résulte du diagramme commutatif exact suivant dans lequel les flèches verticales sont induites par la multiplication par h_2 :

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & & 0 & & & & \\ & & & & \uparrow & & & & \\ 0 & \to & \dfrac{(I : l_1)}{I + (l_2 h_2)} & \to & \dfrac{I + (h_2)}{I + (l_2 h_2)} & \xrightarrow{\times l_1} & \dfrac{I + (l_1 h_2)}{I} & (\to & 0) \\ & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\ 0 & \to & (I : l_1) + (l_2) & \to & A & \xrightarrow{\times l_1} & \dfrac{I + (l_1)}{I + (h_1)} & (\to & 0) \\ & & & & & & \uparrow & & \\ & & & & & & 0 & & \end{array}$$

Précisément ce diagramme permet de montrer que la première flèche verticale est surjective, ce qu'il faut.

LEMME 3.7. — *Soient* A *un anneau local d'idéal maximal* M, I *un idéal de* A, $l \in M$, $g \in A$ *tels que* $lg \in I$ *et* $(I : l) = I + (g)$. *Si* $(I + (l))/(l)$ *est principal, alors* $I/(lg)$ *est principal.*

Preuve. — La suite de sujections :

$$\frac{I + (l)}{(l)} \to \frac{I}{l(I : l)} \tilde{\to} \frac{I}{(lg) + lI} \tilde{\to} \frac{I/(lg)}{l.I/(lg)}$$

montre que $I/(lg)/l.I/(lg)$ est principal, donc $I/(lg)$ est principal car $l \in M$.

Le cas $r > 2$ résulte immédiatement du cas $r = 2$ et des inégalités $n \leqq m_1 + m_{2,\ldots,r} \leqq m_1 + \ldots + m_r = n$ obtenues à partir de ($\star$).

La réciproque résulte du fait que si $I = (f, g)$, $f = h_1 \ldots h_r$, la colongueur de $(h_{i_1} \ldots h_{i_k}) + I$ est la multiplicité d'intersection :

$$(h_{i_1} \ldots h_{i_k}; g) = \sum_{j=1}^{k} (h_{i_j}; g).$$

CONJECTURE 3.8. — Si C est un germe de courbe plane réductible et z un point singulier de $\mathrm{Hilb}^n C$, le germe de $\mathrm{Hilb}^n C$ en z est réductible.

Soit $f=h_1, h_2, \ldots, h_r \in \mathbb{C}\{x, y\}$, où les $h_i (i=1, \ldots, r)$ sont réduits et deux à deux premiers entre eux (non nécessairement irréductibles); on peut encore définir les $\overline{U}_{n_1, n_2, \ldots, n_r}$, comme précédemment, qui sont des réunions de composantes irréductibles de $\mathrm{Hilb}^n \mathrm{C}$ et on a encore les conditions nécessaires (S) pour que $z_{\overline{I}}$ appartienne à $\overline{U}_{n_1, n_2, \ldots, n_r}$.

CONJECTURE 3.9. — Les conditions (S) sont suffisantes pour que $z_{\overline{I}}$ appartienne à $\overline{U}_{n_1, n_2, \ldots, n_r}$.

En utilisant la proposition 3.5, on constate que la conjecture 3.8 serait une conséquence de la conjecture 3.9 (pour $r=2$). Dans les exemples suivants, nous allons montrer que la conjecture 3.9 est vérifiée.

Exemple 3.10. — $f(x, y)=xy, h_1=x, h_2=y$. Les points de $\mathrm{Hilb}^n \mathcal{O}_C$ paramètrent les idéaux de la forme :

$$I_{p, q, a}=(y^q+ax^{p-1}, xy, x^p),$$

avec $p+q-1=n$, $p \geqq 1$, $q \geqq 1$, $a \in \mathbb{C}$ et $a=0$ si $p=1$. Les composantes irréductibles de $(\mathrm{Hilb}^n \mathcal{O}_C)^{\mathrm{red}}$ sont :

$$X_p=\{I_{p, q, a}, a \in \mathbb{C}\} \cup \{I_{p-1, q+1, 0}\} \approx \mathbb{P}^1 \mathbb{C},$$

avec $2 \leqq p \leqq n$. On a :

$$X_p \cap X_{p+1}=I_{p, q, 0} \qquad \text{pour} \quad 2 \leqq p \leqq n-1.$$

$I_{p, q, a}$ est non principal si et seulement si $a=0$. Soit $I=I_{p, q, 0}$; $m_1=p, m_2=q$; dès que (n_1, n_2) satisfait au système (S) $(n_1 \leqq p, n_2 \leqq q, n_1+n_2=p+q-1)$ on a $z_{\overline{I}} \in \overline{U}_{n_1, n_2}$: il suffit d'expliciter dans les deux cas possibles une déformation I_t de I telle que $\mathrm{codim}(I_t+(h_i))=n_i$ (pour $(i=1, 2)$ dès que $t \neq 0$:

$$I_t=(y^q+tx^{p-1}, xy, x^p) \qquad \text{pour} \quad n_1=p-1, \quad n_2=q,$$

$$I_t=(y^q, xy, x^p+ty^{q-1}) \qquad \text{pour} \quad n_1=p, \quad n_2=q-1.$$

Un calcul explicite montre que $(\mathrm{Hilb}^n \mathrm{C}, z_{\overline{I}_{p, q, 0}})$ est isomorphe à la réunion de deux hyperplans transverses dans $\mathbb{C}^{n+1}$ et le lieu singulier est le $(n-1)$ plan décrit par :

$$(y^q+b_{q-1}\, y^{q-1}+\ldots+b_1\, y, xy, x^p+c_{p-1}\, x^{p-1}+\ldots+c_1\, x).$$

Exemple 3.11. — $I=(x, y^n), f=h_1 \ldots h_r \in I$. Supposons d'abord que x ne divise pas f et notons m_i' la valuation de $h_i(0, y)$; on a $m_i=\inf(n, m_i')$. La droite $x=t^{N!}$, $N=m_1' \ldots m_r'$, coupe $C_i=h_i^{-1}(0)$ en m_i' points $(t^{N!}, y_{i, k}(t))$, $1 \leqq k \leqq m_i'$ (tendant vers zéro lorsque t tend vers zéro). Quels que soient $n_1, \ldots, n_r$ satisfaisant aux conditions (S), donc à $n_i \leqq m_i \leqq m_i' (i=1, \ldots, r)$, la déformation de I :

$$I_t=\left(x-t^{N!}, \prod_{i=1}^{r}\left(\prod_{k=1}^{n_i}(y-y_{i, k}(t))\right)\right),$$

où, pour $t \neq 0$, $z_{\overline{I}_t} \in U_{n_1, \ldots, n_r}$ montre que $z_{\overline{I}} \in \overline{U}_{n_1, \ldots, n_r}$.

Si x divise f, on remarque que $I=(x-\lambda y^n, y^n)$ et on choisit λ de manière que $X=x-\lambda y^n$ ne divise pas f.

Exemple 3.12. — $f=h_1 \ldots h_r$ et on suppose que pour tout $i=1, \ldots, r$, $h_i \in M^n$.

Dans ce cas, $h_i \in I$ et $m_i=n$; les conditions (S) se réduisent à $n_1+\ldots+n_r=n$. D'après [B], th. 5.3.2, I appartient à l'adhérence, dans $\mathrm{Hilb}^n \mathbb{C}\{x, y\}$, des idéaux isomorphes à (x, y^n) et la conjecture 3.9 est satisfaite d'après l'exemple 3.11.

4. Etude de la dimension de $\mathrm{Hilb}^n \mathcal{O}_C$

Lorsque A est une algèbre analytique locale d'idéal maximal M, nous prenons par définition $\mathrm{Hilb}^n A=\mathrm{Hilb}^n(\mathrm{Specan}(A/M^n))$ qui est un espace analytique connexe d'après [F], prop. 2.2.

Nous pouvons alors, par exemple en utilisant des platificateurs locaux comme dans la proposition 1.2, obtenir les inclusions canoniques :

$$\begin{array}{ccccc} & & \mathrm{Hilb}^n C & & \\ & \nearrow & & \searrow & \\ \mathrm{Hilb}^n \mathcal{O}_C=\mathrm{Hilb}^n \mathbb{C}\{x,y\} \cap \mathrm{Hilb}^n C & & & & \mathrm{Hilb}^n \mathbb{C}^2 \\ & \searrow & & \nearrow & \\ & & \mathrm{Hilb}^n \mathbb{C}\{x,y\} & & \end{array}$$

La dimension de $\mathrm{Hilb}^n \mathcal{O}_C$ en tout point est donc au plus $n-1$; dès que la multiplicité ν' de f est au moins n, $\mathrm{Hilb}^n \mathcal{O}_C=\mathrm{Hilb}^n \mathbb{C}\{x, y\}$ ([I_2], lemme 1.1) et est donc irréductible de dimension pure $n-1$ ([B], cor. 5.3.3).

Remarquons que $\mathrm{Hilb}^n \mathcal{O}_C$ n'est pas toujours de dimension pure :

Exemple 4.1. — Choisissons : $f=y^3-x^2 y, n=6, I_1=(y, x^6)$ et $I_2=(y^3-x^2 y, x^2)$. Au point z_{I_1}, $\mathrm{Hilb}^6 \mathbb{C}\{x, y\}$ est lisse de dimension 5 paramétré par $I_{a_1, a_2, \ldots, a_5}=(y+a_1 x+\ldots+a_5 x^5, x^6)$; en écrivant que le reste de la division de f par le couple $(y+a_1 x \ldots+a_5 x^5, x^6)$ est nul, on trouve qu'au point z_{I_1}, $\mathrm{Hilb}^6 \mathcal{O}_C$ est lisse de *dimension* 2 paramétré par $I_{0,0,0,a_4,a_5}=(y+a_4 x^4+a_5 x^5, x^6)$.

D'autre part, au voisinage de z_{I_2}, $\mathrm{Hilb}^6 C$ est paramétré par

$$J_{a_0, a_1, b_0, b_1, c_0, c_1}=(y^3-x^2 y, x^2+a_0 x+a_1+(b_0+b_1 x) y+(c_0+c_1 x) y^2);$$

un calcul élémentaire montre que cet idéal est de colongueur 6 dans $\mathbb{C}\{x, y\}$ si et seulement si $a_0=a_1=b_0=0$; par conséquent, en z_{I_2}, $\mathrm{Hilb}^6 \mathcal{O}_C$ est lisse de *dimension* 3 [paramétré par

$$J_{0,0,0,b_1,c_0,c_1}=(y^3-x^2 y, x^2+b_1 xy+(c_0+c_1 x) y^2)].$$

PROPOSITION 4.2. — *On suppose que f est de multiplicité ν' et $\overline{T}$ principal dans $\mathcal{O}_C$. Alors $(\mathrm{Hilb}^n \mathcal{O}_C)^{\mathrm{red}}$ est lisse en $z_{\overline{I}}$ de dimension au moins égale à $\nu'-1$.*

Preuve. — Grâce à un choix générique des coordonnées, nous pouvons supposer que f est un polynôme en y distingué de degré ν' :

$$f=y^{\nu'}+u_1(x) y^{\nu'-1}+\ldots+u_{\nu'}(x),$$

avec pour $i=1, \ldots, \nu'$, $u_i(x)$ de valuation au moins i.

Par hypothèse $I=(f,g)$, où g est un polynôme en y de degré strictement inférieur à ν' (quitte à le remplacer par son reste dans la division par f).

Au point $z_{\overline{1}}$, $\mathrm{Hilb}^n C$ est paramétré par :

$$I_{(a_{\alpha,\beta})}=(f,G=g+\sum_{(\alpha,\beta)\in\Delta} a_{\alpha,\beta}\,x^\alpha y^\beta),$$

où Δ désigne toujours l'ensemble des couples d'indices (α, β) situés sous l'escalier de I. Le polynôme f étant distingué, l'idéal $I_{(a_{\alpha,\beta})}$ définit $\{0\}$ si et seulement si le résultant des polynômes f et G est de valuation n dans $\mathbb{C}\{x\}$. Notons $\Delta^*=\Delta-(0,0)$:

$$G^*=g+\sum_{(a,\beta)\in\Delta^*} a_{\alpha,\beta}\,x^\alpha y^\beta;$$

sachant que les racines $(\xi_1,\ldots,\xi_{\nu'})$ de f dans une clôture algébrique de $\mathbb{C}\{x\}$, $\bigcup_{q\in\mathbb{N}}\mathbb{C}\{x^{1/q}\}$, sont de valuation au moins 1, le résultant de f et G^* s'écrit :

$$\mathrm{Res}\,(f,G^*)=\prod_{i=1}^{\nu'} G^*(x,\xi_i(x))=\rho_{\nu'}x^{\nu'}+\rho_{\nu'+1}x^{\nu'+1}+\ldots,$$

où $\rho_{\nu'}, \rho_{\nu'+1}\ldots\rho_{n-1}$ sont des fonctions des variables $(a_{\alpha,\beta})_{(\alpha,\beta)\in\Delta^*}$ qui s'annulent en 0. Par conséquent, $(\mathrm{Hilb}^n\mathcal{O}_C)^{\mathrm{red}}$ qui est défini ensemblistement au voisinage de $z_{\overline{1}}$ par l'annulation de $(\rho_{\nu'},\ldots,\rho_{n-1})$ dans $\mathbb{C}^{n-1}$, est de dimension au moins $\nu'-1$.

Démontrons maintenant la lissité de $(\mathrm{Hilb}^n\mathcal{O}_C)^{\mathrm{red}}$ en $z_{\overline{1}}$. Soit $f=h_1\ldots h_r$ la décomposition de f en facteurs irréductibles et notons $n_k=\mathrm{col}(h_k,g)$, $n_1+\ldots+n_r=n$. Considérons une normalisation de $C_k=h_k^{-1}(0)$, $(\mathbb{C},0)\xrightarrow{\pi_k}(C_k,0)$, $\pi_k(t)=(x_k(t),y_k(t))$.

Pour que $I_{(a_{\alpha,\beta})}$ définisse un élément de $\mathrm{Hilb}^n(\mathcal{O}_C)$ il faut et il suffit que h_k et G engendrent un idéal de colongueur n_k soit :

$$v(G(x_k(t),y_k(t)))\geqq n_k,$$

où v est la valuation naturelle de $\mathbb{C}\{t\}$; ceci équivaut encore, puisque $v(g(x_k(t),y_k(t)))=n_k$, à :

$$v\Big(\sum_{(\alpha,\beta)\in\Delta} a_{\alpha,\beta}(x_k(t))^\alpha(y_k(t))^\beta\Big)\geqq n_k.$$

Il existe $u_{k,\omega,\alpha,\beta}\in\mathbb{C}$ *déterminés par* f tels que :

$$x_k(t)^\alpha y_k(t)^\beta=\sum_{\omega\in\mathbb{N}} u_{k,\omega,\alpha,\beta}\,t^\omega;$$

$(\mathrm{Hilb}^n(\mathcal{O}_C))^{\mathrm{red}}$ est donc défini au voisinage de $z_{\overline{1}}$ par les équations linéaires :

$$\sum_{(\alpha,\beta)\in\Delta} a_{\alpha,\beta}\,u_{k,\omega,\alpha,\beta}=0,\qquad \omega=0,\ldots,n_k-1,\quad k=1,\ldots,r$$

donc en particulier est lisse.

PROPOSITION 4.3. — *Soient* ν' *la multiplicité de* f, $z_{\overline{I}} \in \mathrm{Hilb}^n \mathcal{O}_C$ *le point paramétrant l'idéal de définition* $\overline{I}$ *de colongueur* n *de* $\mathcal{O}_C$; *la dimension du germe d'espace analytique* $(\mathrm{Hilb}^n \mathcal{O}_C, z_{\overline{I}})$ *est supérieure ou égale à* $\inf(\nu'-1, n-1)$.

Preuve. — Nous supposons $\nu' < n$ et nous allons établir la proposition par récurrence sur *l'ordre* $\nu \leqq \nu'$ *de l'idéal* I.

(A) $\nu = 1$. — Par un choix convenable du système de coordonnées, on a $I = (y, x^n)$ et la valuation de $f(x, 0)$ est au moins n. La famille :

$$I_{\underline{a}} = (y + a_1 x^{n-\nu'+1} + a_2 x^{n-\nu'+2} + \ldots + a_{\nu'-1} x^{n-1}, x^n)$$

lorsque $\underline{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_{\nu'-1})$ varie au voisinage de 0 dans $\mathbb{C}^{\nu'-1}$ décrit un sous-espace lisse de dimension $\nu'-1$ de $\mathrm{Hilb}^n \mathbb{C}\{x, y\}$. Or la valuation de $f(x, -a_1 x^{n-\nu'+1} \ldots - a_{\nu'-1} x^{n-1})$ est au moins n, donc f appartient à l'idéal $I_{\underline{a}}$. Il en résulte que $I_{\underline{a}}$ décrit une famille à $\nu'-1$ paramètres de $\mathrm{Hilb}^n \mathcal{O}_C$ qui est donc de dimension au moins $\nu'-1$ en $z_{\overline{I}}$. Remarquons que cette dimension est exactement $\nu'-1$ si f contient un terme en $x^{\nu'-1} y$.

Nous supposons maintenant la proposition établie pour tous les idéaux d'ordre strictement inférieur à ν ($\nu \geqq 2$) et soient I un idéal de définition de $\mathbb{C}\{x, y\}$ de colongueur n, d'ordre ν contenant f, $\alpha = \{(0, \nu), (\alpha_1, \nu-1), \ldots, (\alpha_\nu, 0)\}$ *l'escalier générique* de I ([G_1], th. 2 et p. 563), $(f_0, f_1, \ldots, f_\nu)$ la base standard de I dans un système générique de coordonnées avec $f_i = x^{\alpha_i} g_i$ pour $i = 0, \ldots, \nu$ où g_i est un polynôme distingué en y de degré $\nu - i$ et d'ordre $\nu - i$ ([B], remarque 1.3.2).

La fonction d'Hilbert Samuel de $\mathbb{C}\{x, y\}/I$;

$$H^0_\alpha(k) = \dim_C \left(\frac{I + M^k}{I + M^{k+1}} \right),$$

est déterminée par l'escalier générique α de I; nous notons $S(H_\alpha)$ la strate d'Hilbert Samuel formée par les points de $\mathrm{Hilb}^n \mathbb{C}\{x, y\}$ paramétrant les idéaux ayant l'escalier générique α. Cette strate $S(H_\alpha)$ est lisse et sa dimension est donnée par :

$$\dim S(H_\alpha) = n - \nu - \sum_{k \geqq \nu-1} \frac{\delta_\alpha(k)[\delta_\alpha(k)-1]}{2},$$

où :

$$\delta_\alpha(k) = H^0_\alpha(k) - H^0_\alpha(k+1)$$

(*voir* [I_2], th. 2.12 et [B], th. 3.3.1). Remarquons que les $\delta_\alpha(k)$ représentent les hauteurs entre deux « paliers » de l'escalier de I et que, par conséquent, $\sum_{k \geqq \nu-1} \delta_\alpha(k) = \nu$ (voir *fig.* 1 et [B], déf. 3.1.7 pour les détails).

La strate $S(H_\alpha)$ est paramétrée au voisinage de z_I par $(F_0 = G_0, \ldots, F_i = x^{\alpha_i} G_i, \ldots)$ où, pour tout $i = 0, \ldots, \nu$, G_i est un polynôme distingué de degré $\nu - i$ et d'ordre $\nu - i$, déformation de g_i([B], preuve du lemme 3.3.2).

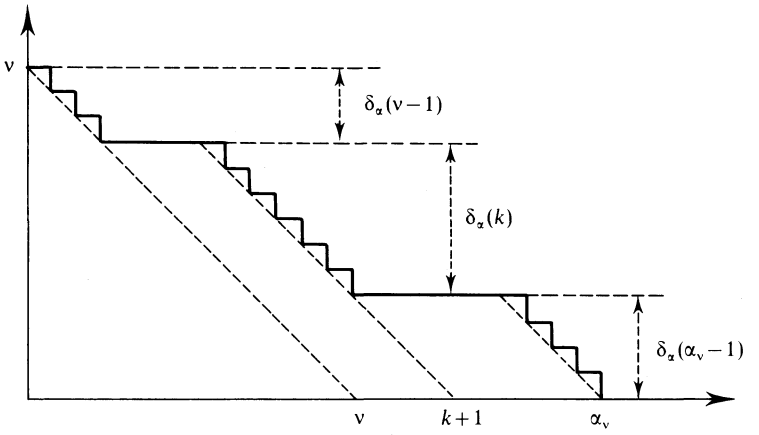

Fig. 1

Lorsqu'on fait la division de f par $(F_0, \ldots, F_\nu)$, on obtient un reste d'ordre au moins ν', somme de monômes $\lambda_{\alpha,\beta} x^\alpha y^\beta$ où $(\alpha, \beta) \in \Delta$: ceci se démontre comme le point 3° de [B], th. 1.1.9, en remarquant que, pour toute valeur des paramètres, $(F_0, \ldots, F_\nu)$ est la base standard pour la direction « canonique » avec un escalier constant α.

En annulant les coefficients $\lambda_{\alpha,\beta}$, on obtient au plus :

$$n - H^1_\alpha(\nu'-1) = n - \dim_{\mathbb{C}}\left(\frac{\mathbb{C}\{x, y\}}{I+M^{\nu'}}\right),$$

équations par rapport aux paramètres, donc une famille de $\mathrm{Hilb}^n \mathcal{O}_{\mathbb{C}}$ de dimension au moins $\dim(S(H_\alpha)) - (n - H^1_\alpha(\nu'-1))$:

$$\text{(H)} \qquad \dim(\mathrm{Hilb}^n \mathcal{O}_{\mathbb{C}}, z_1) \geqq H^1_\alpha(\nu'-1) - \nu - \sum_{k \geqq \nu-1} \frac{\delta_\alpha(k)[\delta_\alpha(k)-1]}{2}.$$

Nous allons distinguer plusieurs cas selon la forme de l'escalier α et la position de ν' par rapport à α_ν, et démontrer la minoration cherchée dans chacun des cas, soit directement soit en utilisant l'hypothèse de récurrence.

(B) $\nu' \leqq \alpha_\nu$.

(B_1) Il existe un entier $p \in \{0, 1, \ldots, \nu-1\}$ tel que :

$$\alpha_{p+1} - \alpha_p \geqq 2,$$
$$\alpha_p + (\nu - p) \leqq \nu' \leqq \alpha_{p+1} + (\nu - p - 1),$$
$$\nu' > \nu \quad \text{si} \quad p = 0.$$

Dans ce cas, nous obtenons les inégalités (*fig.* B_1) :

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{k \geqq \nu-1} \frac{\delta_\alpha(k)[\delta_\alpha(k)-1]}{2} \leqq \frac{p(p-1)}{2} + \frac{(\nu-p)(\nu-p-1)}{2}, \\ H^1_\alpha(\nu'-1) \geqq (1+2+\ldots+p) + (\nu' + (\nu'-1) + \ldots + (\nu'-\nu+p+1)). \end{cases}$$

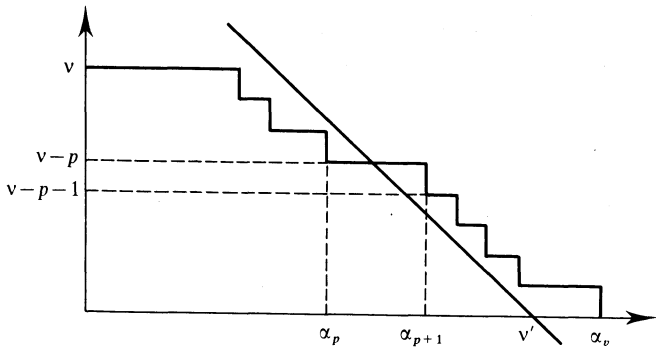

Fig. B_1

Donc, en utilisant (H) :

$$\dim (\mathrm{Hilb}^n \mathcal{O}_C, z_1) \geqq \left[\frac{p(p+1)}{2} + (\nu-p)\nu' - \frac{(\nu-p)(\nu-p-1)}{2}\right] - \left[\frac{p(p-1)}{2} + \frac{(\nu-p)(\nu-p-1)}{2}\right] - \nu,$$

c'est-à-dire :

$$\dim (\mathrm{Hilb}^n \mathcal{O}_C, z_1) \geqq (\nu'-1) + (\nu-p-1)(\nu'-\nu+p-1).$$

Ce qui permet de conclure dès que $p \geqq 1$, ou $\nu' \geqq \nu+1$.

(B_2) $\nu' = \nu$ et il existe $p \in \{1, \ldots, \nu-1\}$ tel que $\alpha_{p+1} - \alpha_p \geqq 2$. Comme :

$$\frac{p(p-1)}{2} + \frac{(\nu-p)(\nu-p-1)}{2} \leqq \frac{(\nu-1)(\nu-2)}{2},$$

on obtient dans ce cas, d'après (H) :

$$\dim (\mathrm{Hilb}^n \mathcal{O}_C, z_1) \geqq \frac{\nu(\nu+1)}{2} - \nu - \frac{(\nu-1)(\nu-2)}{2} = \nu-1.$$

(B_3) Le cas restant est $I = f + M^{\alpha_\nu}$, $\nu = \nu'$.

Soit (x, y) un système de coordonnées tel que $f(0, y) = y^\nu$ et que $f(x, 0)$ soit d'ordre au moins $\nu+1$.

On constate alors que :

$$f_0 = f, \qquad f_1 = x^{\alpha_\nu - \nu + 1} y^{\nu-1}, \ \ldots, f_{\nu-1} = x^{\alpha_\nu - 1} y,$$
$$F_\nu = x^{\alpha_\nu} + a_1 x^{\alpha_\nu - \nu} y^{\nu-1} + \ldots + a_i x^{\alpha_\nu - \nu + i - 1} y^{\nu-i} + \ldots + a_{\nu-1} x^{\alpha_\nu - 2} y$$

définit une déformation à $\nu-1$ paramètres $I_{\underline{a}}$, $\underline{a} = (a_1, \ldots, a_{\nu-1})$ de $I = I_0$, contenue dans $\mathrm{Hilb}^n \mathcal{O}_C$.

Pour voir la platitude de I_a, il suffit de constater que, dès que $a_1 \neq 0$, l'ensemble des points de $\mathbb{N}^2$ sous l'escalier de I_a est, grâce au choix du système de coordonnées (x, y) :

$$\Delta_{\underline{a}} = (\Delta_0 - \{(\alpha_\nu - \nu, \nu - 1)\}) \cup \{(\alpha_\nu, 0)\}.$$

Ainsi, $I_{\underline{a}}$ est de colongueur n quel que soit $\underline{a} \in \mathbb{C}^{\nu-1}$.

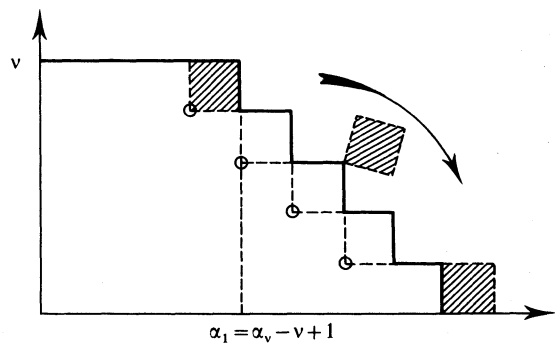

Fig. B_3

(C) $\nu' > \alpha_\nu$. — Traitons d'abord le cas où, pour tout entier p, $1 \leqq p \leqq \nu - 1$, $\alpha_{p+1} - \alpha_p \geqq 2$: on peut alors trouver une déformation I_t de I telle que, pour t non nul assez petit, l'escalier générique de I_t soit encore α et que I_t soit une intersection complète ([B], prop. 3.2.1). L'idéal I_t contient M^{α_ν}, donc f et il suffit alors d'appliquer la proposition 4.2 à I_t et de passer à la limite (semi-continuité de la dimension).

Désormais, nous notons p le plus petit entier *strictement positif* tel que $\alpha_{p+1} - \alpha_p = 1$. Énonçons alors un lemme de division dont nous laissons la démonstration pour la fin, ceci pour ne pas rompre la récurrence.

LEMME 4.4. — *Il existe une déformation* $I_t = (F_0, F_1, \ldots, F_{p-1}, f_p, \ldots, f_\nu)$ *à un paramètre de* I *vérifiant :*

(*a*) *pour tout t non nul assez petit,* I_t *est d'ordre* $\nu - 1$;

(*b*) *pour tout couple d'entiers* (α, β) *tel que* $\alpha + \beta \geqq \alpha_\nu$ *et* $2\alpha + \beta \geqq \alpha_p + \alpha_\nu$, $x^\alpha y^\beta$ *appartient à* I_t.

(C_1) $\nu' \geqq \alpha_p + \alpha_\nu$. — Utilisons le lemme 4.4 : f appartient à I_t et on peut appliquer l'hypothèse de récurrence à I_t et passer à la limite.

(C_2) $\nu' = \alpha_p + \alpha_\nu - 1$. — On choisit l'axe des y tangent à la courbe C et on considère un germe de chemin σ_u dans $GL(2, \mathbb{C})$ tel que $\sigma_0 = \mathrm{Id}$ et $I_u = \sigma_u^*(I)$ ait son escalier générique dans le système de coordonnées (x, y) pour u fixé non nul ([B], th. 1.2.1). Appliquons à I_u le lemme 4.4 : I_u admet une déformation à un paramètre d'ordre $\nu - 1$, contenant f; d'après l'hypothèse de récurrence la dimension en $z_{\overline{I_u}}$ de $\mathrm{Hilb}^n \mathcal{O}_C$ est au moins $\nu' - 1$ et par conséquent aussi en $z_{\overline{I}} = z_{\overline{I_0}}$.

$(C_3)\ \nu' < \alpha_p + \alpha_\nu - 1$:

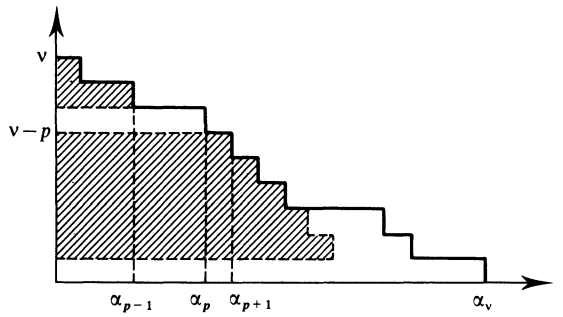

Fig. C_3

Reprenons l'inégalité (H) :

$$\dim(\mathrm{Hilb}^n \mathcal{O}_C, z_{\bar{1}}) \geqq n - \nu - \sum_{k \geqq \nu - 1} \frac{\delta_\alpha(k)[\delta_\alpha(k)-1]}{2}.$$

Par définition de p :

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_{p-1} \geqq 1 + 3 + \ldots + (2p-3) = (p-1)^2,$$

$$\alpha_{p+1} + \ldots + \alpha_{\nu-1} \geqq (\nu - p - 1)\alpha_p + \frac{(\nu-p-1)(\nu-p)}{2},$$

$$\sum_{k \geqq \nu-1} \frac{\delta_\alpha(k)[\delta_\alpha(k)-1]}{2} \leqq \frac{(\nu-p+1)(\nu-p)}{2}.$$

On en déduit l'inégalité :

$$\dim(\mathrm{Hilb}^n \mathcal{O}_C, z_{\bar{1}}) \geqq (\alpha_p + \alpha_\nu) + (p-1)^2 + \frac{(\nu-p)(\nu-p-1)}{2} + (\nu-p-1)\alpha_p - \nu - \frac{(\nu-p)(\nu-p+1)}{2},$$

c'est-à-dire :

$$(K)\ \dim(\mathrm{Hilb}^n \mathcal{O}_C, z_{\bar{1}}) \geqq (\alpha_p + \alpha_\nu) + (\nu - p - 1)\alpha_p + p^2 - p + 1 - 2\nu.$$

Tout revient à montrer que :

Or : $$\lambda(p, \nu) = (\nu - p - 1)\alpha_p + p^2 - p + 1 - 2\nu \geqq -3.$$

– si $p = 1$:

$$\alpha_1 \geqq 3 \qquad \text{car} \quad \alpha_\nu < \nu' < \alpha_1 + \alpha_\nu - 1,$$

d'où :

$$\lambda(p, \nu) \geqq (\nu - 2)3 + 1 - 2\nu = \nu - 5 \geqq -3;$$

– si $p > 1$:

$$\nu \geqq 3 \qquad \text{et} \qquad \alpha_p \geqq 2p - 1,$$

d'où

$$\lambda(p, \nu) \geqq (\nu - p - 1)(2p-1) + p^2 - p + 1 - 2\nu = -p^2 + 2p(\nu - 1) - 3\nu + 2.$$

Si l'on pose :

$$\lambda_1(p, \nu) = -p^2 + 2p(\nu-1) - 3\nu + 2,$$

on a :

$$\lambda_1(2, \nu) = \nu - 6 \geqq -3, \qquad \lambda_1(\nu-1, \nu) = \nu^2 - 5\nu + 3 \geqq -3$$

et finalement $\lambda(p, \nu) \geqq -3$ pour $2 \leqq p \leqq \nu - 1$.

Ceci termine la démonstration de la proposition 4.3, il reste, cependant, à donner la :

Preuve du lemme 4.4. — Étant donné un élément :

$$h = \sum_{(\alpha, \beta) \in \mathbb{N}^2} h_{\alpha, \beta} x^\alpha y^\beta \text{ de } \mathbb{C}\{x, y\},$$

on pose :

$$\rho(h) = \inf\{\rho(\alpha, \beta), h_{\alpha, \beta} \neq 0\},$$

où

$$\rho(\alpha, \beta) = \inf(2\alpha + \beta - 2\alpha_p, \alpha + \beta - \alpha_p).$$

On peut ordonner $\mathbb{N}^2$ en définissant $(\alpha, \beta) < (\alpha', \beta')$ par $\rho(\alpha, \beta) < \rho(\alpha', \beta')$ ou $\rho(\alpha, \beta) = \rho(\alpha', \beta')$ et $\alpha < \alpha'$. On appelle exposant privilégié de h pour ρ et on note $\exp^\rho(h)$ le plus petit couple $(\alpha, \beta) \in \mathbb{N}^2$ pour lequel $h_{\alpha, \beta} \neq 0$.

Notons encore $E' = \{(\alpha, \beta)/\rho(\alpha, \beta) \geqq \alpha_\nu - \alpha_p\}$ (*fig.* 2).

Construisons maintenant la déformation distinguée de I :

$$I_t = (F_0 = G_0, F_1 = x^{\alpha_1} G_1, \ldots, F_{p-1} = x^{\alpha_{p-1}} G_{p-1}, f_p = x^{\alpha_p} g_p, \ldots, f_\nu = x^{\alpha_\nu})$$

en définissant par récurrence décroissante ([B], prop. 2.1.1) :

$$G_k = g_k \qquad \text{pour} \quad k \geqq p,$$

$$G_{p-1} = v_{p-1, p} g_p + (v_{p-1, p+1} + at) x g_{p+1} + v_{p-1, p+2} x^{\alpha_{p+2} - \alpha_p} g_{p+2} + \ldots + v_{p-1, \nu} x^{\alpha_\nu - \alpha_p},$$

$$G_k = v_{k, k+1} G_{k+1} + v_{k, k+2} x^{\alpha_{k+2} - \alpha_{k+1}} G_{k+2} + \ldots + v_{k, \nu} x^{\alpha_\nu - \alpha_{k+1}}$$

pour $0 \leqq k < p-1$.

Lorsque $k \leqq p-1$, G_k est distingué en y de degré $\nu - k$ et d'ordre $\nu - k - 1$: le diagramme de Newton de F_k est contenu dans l'ensemble des couples $(\alpha, \beta) \in \Delta$ tels que :

$$\alpha + \beta \geqq \alpha_k + (\nu - k) - 1, (2\alpha + \beta) \geqq 2\alpha_k + \nu - k \quad \text{(cf. } fig. \text{ 2)}$$

et on a :

$$\exp^\rho(F_k) = (\alpha_k, \nu - k).$$

Supposons que le diagramme de Newton de h soit contenu dans E', autrement dit que $\rho(h) \geqq \alpha_\nu - \alpha_p$; le couple $(\alpha, \beta) = \exp^\rho(h)$ vérifie donc : $\alpha + \beta \geqq \alpha_\nu$, $2\alpha + \beta \geqq \alpha_\nu + \alpha_p$. Soit k l'entier défini par $\alpha_k \leqq \alpha < \alpha_{k+1}$ (en posant $\alpha_{\nu+1} = +\infty$); on vérifie aisément que l'exposant privilégié de $x^{\alpha - \alpha_k} y^{\beta - (\nu - k)} F_k$ est (α, β) dans les deux cas $k < p$; $k \geqq p$ (*fig.* 2) et par conséquent $\exp^\rho(h - h_{\alpha, \beta} x^{\alpha - \alpha_k} y^{\beta - (\nu - k)}) > (\alpha, \beta)$.

Nous avons donc un algorithme formel de division; l'inclusion $\{ h/\rho(h) \geqq N \} \subset M^{N+\alpha_p} (\subseteq I_t$ pour $N+\alpha_p \geqq n)$ nous évite la démonstration de la convergence.

Remarque 4.5. — Bien que la minoration de la proposition 4.3 soit dans certains cas la meilleure possible [exemple 4.6, *voir* aussi la remarque terminant le cas (A) dans la preuve de la proposition 4.3], elle n'est quelquefois pas très bonne : par exemple, pour un idéal dont

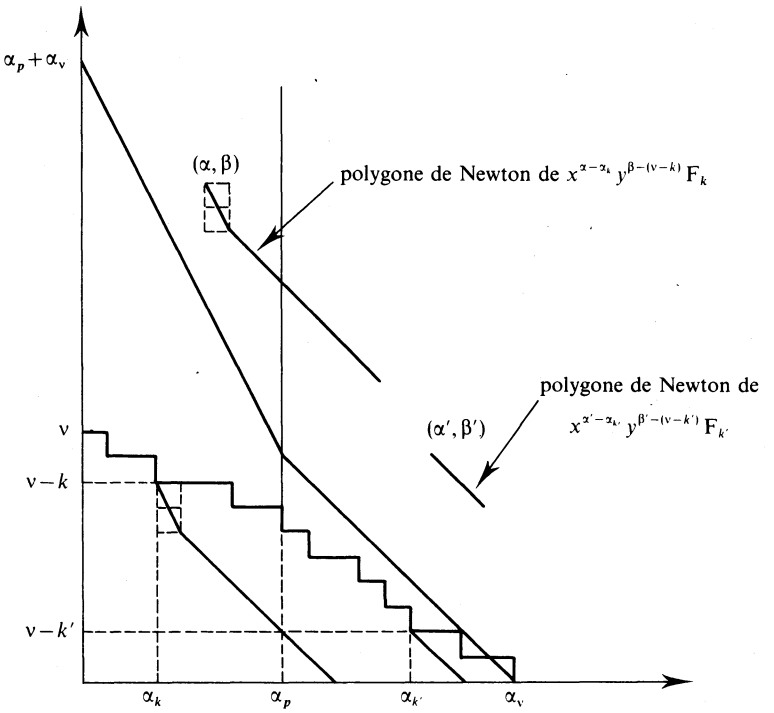

Fig. 2

l'escalier générique vérifie $\alpha_{p+1}-\alpha_p \geqq 2$ pour $p \geqq 1$, et c'est le cas lorsque I est intersection complète, on obtient d'après la démonstration de la proposition 4.3 :

$$\dim (\mathrm{Hilb}^n \mathcal{O}_C, z_{\bar{I}}) \geqq \sup (H^1(\nu'-1)-\nu, \nu'-1) \qquad \text{pour} \quad \nu' \leqq n \quad (\textit{fig. 3}).$$

Exemple 4.6. — Reprenons l'exemple $f=xy$ et plaçons nous au point $z_{\bar{I}}$ de $\mathrm{Hilb}^n \mathcal{O}_C$ paramétrant l'idéal $I=(xy,\ y^p+ax^{q-1})$ avec $a \neq 0$, $n=p+q-1$. $\mathrm{Hilb}^n \mathcal{O}_C$ est lisse en $z_{\bar{I}}$ de dimension 1, paramétré par $I_t=(xy,\ y^p+(a+t)x^{q-1})$. Nous constatons que la famille d'automorphismes de $\mathcal{O}_C (Y=y,\ X=(a+t)^{1/q-1)}x)$ trivialise la famille d'idéaux I_t. Nous pouvons dire que l'algèbre $\mathcal{O}_C/I$ est « rigide relativement à $\mathcal{O}_C$ ». Il n'en va pas de même dans l'exemple $f=y^2-x^3$, $I=(f, xy, x^2)$: $\mathrm{Hilb}^3 \mathcal{O}_C$ est encore lisse de dimension 1 en $z_{\bar{I}}$, paramétré par $I_t=(f, xy, x^2+ty)$ mais pour $t \neq 0$, I_t n'est pas isomorphe à I.

Exemple 4.7. — Supposons f irréductible et $\bar{I}$ principal. Nous allons calculer la dimension de $\mathrm{Hilb}^n \mathcal{O}_C$ en $z_{\bar{I}}$ en fonction de n et du semi-groupe Γ des valuations de $\mathcal{O}_C$.

Soit $\pi : (\mathbb{C}, 0) \to (C, 0)$ une normalisation de C, $\pi(t) = (x(t), y(t))$; d'après la démonstration de la proposition 4.2, en notant :

$$x(t)^\alpha y(t)^\beta = \sum_{\omega \in \mathbb{N}} u_{\omega, \alpha, \beta} t^\omega,$$

des équations de $(\mathrm{Hilb}^n \mathcal{O}_C, z_1)^{\mathrm{red}}$ sont :

$$\sum_{(\alpha, \beta) \in \Delta} a_{\alpha, \beta} u_{\omega, \alpha, \beta} = 0, \qquad \omega \in \{0, 1, \ldots, n-1\}.$$

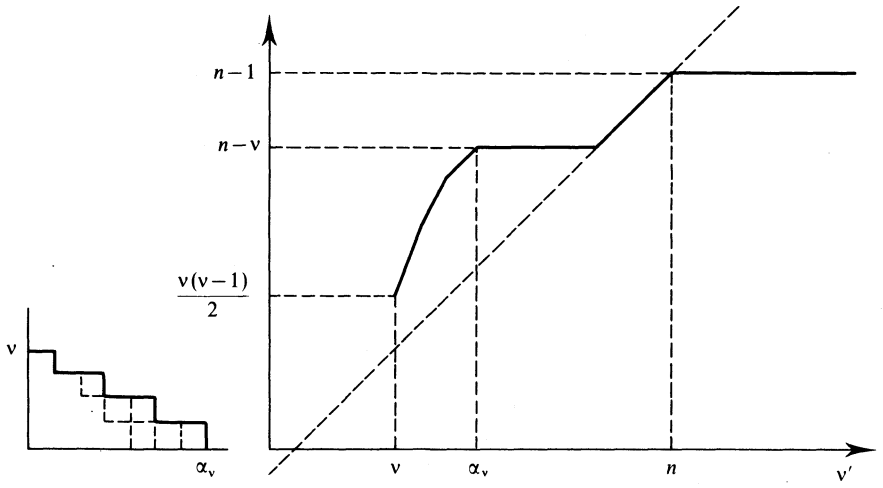

Fig. 3

Puisque la valuation de $G \circ \Pi$ est dans Γ, les équations précédentes sont impliquées par :

$$(E_\omega) \quad \sum_{(\alpha, \beta) \in \Delta} a_{\alpha, \beta} u_{\omega, \alpha, \beta} = 0, \qquad \omega \in \Gamma \cap \{0, 1, \ldots, n-1\}.$$

Ces dernières équations sont indépendantes : en effet, pour tout entier $\omega \in \Gamma \cap \{0, 1, \ldots, n-1\}$, il existe $(a^\omega_{\alpha, \beta})_{(\alpha, \beta) \in \Delta}$ tels que :

$$v\Big(\sum_{(\alpha, \beta) \in \Delta} a^\omega_{\alpha, \beta} x(t)^\alpha y(t)^\beta\Big) = \omega$$

[choisir $\varphi \in \mathbb{C}\{x, y\}$ tel que $v(\varphi(x(t), y(t))) = \omega$ et l'écrire sous la forme :

$$\varphi = \lambda f + \mu g + \sum_{(\alpha, \beta) \in \Delta} a^\omega_{\alpha, \beta} x^\alpha y^\beta];$$

ainsi $(a^\omega_{\alpha, \beta})_{(\alpha, \beta) \in \Delta}$ est solution de $(E_{\omega'})_{\omega' < \omega}$ et n'est pas solution de (E_ω). La dimension de $\mathrm{Hilb}^n \mathcal{O}_C$ en z_1 est donc :

$$n - \#\{\omega \in \Gamma / \omega \leqq n-1\} = \#\{\omega \leqq n-1 / \omega \notin \Gamma\}.$$

BIBLIOGRAPHIE

[A.I.K.] A. B. ALTMAN, A. IARROBINO and S. L. KLEIMAN, *Irreducibility of the Compactified Jacobian* [*Proceedings of the Nordic Summer School N.A.V.F.*, (*Symposium in Mathematics*, Oslo, 1976)].

[B] J. BRIANÇON, *Description de* Hilb^n $\mathbb{C}\{x, y\}$ (*Invent. Math.*, vol. 41, 1977, p. 45-89).

[B.G.] J. BRIANÇON et A. GALLIGO, *Déformations distinguées d'un point de* $\mathbb{C}^2$ *ou* $\mathbb{R}^2$ (*Astérisque*, vol. 7 et 8, 1973, p. 129-138).

[G_1] A. GALLIGO, *A propos du théorème de préparation de Weierstrass. Fonctions de plusieurs variables complexes* (*Lecture Notes in Mathématics*, n° 409, 1970-1973).

[G_2] A. GALLIGO, *Théorème de division et stabilité en géométrie analytique locale* (*Ann. Inst. Fourier*, tome XXIX, fasc. 2, 1979).

[F] J. FOGARTY, *Algebraic Families on an Algebraic Surface* (*Am. J. Math.*, vol. 10, 1968, p. 511-521).

[H.L.T.] H. HIRONAKA, M. LEJEUNE, et B. TEISSIER, *Platificateur Local* (*Astérisque* vol. 7 et 8, 1973 p. 441-463).

[I_1] A. IARROBINO, *Punctual Hilbert Schemes* (*Bull. Am. Math. Soc.*,vol. 78, 1972, p. 819-823).

[I_2] A. IARROBINO, *Punctual Hilbert Schemes* (*Memoirs Am. Math. Society*, vol. 10, n. 188, 1977).

(Manuscrit reçu le 20 décembre 1979,
révisé le 17 octobre 1980).

J. BRIANÇON
M. GRANGER
et J. P. SPEDER,
Université de Nice,
Département de Mathématique,
Parc Valrose,
06034 Nice Cedex.