ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

G. PISIER

Un théorème sur les opérateurs linéaires entre espaces de Banach qui se factorisent par un espace de Hilbert

Annales scientifiques de l'É.N.S. 4e série, tome 13, nº 1 (1980), p. 23-43
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1980_4_13_1_23_0>

Ann. scient. Éc. Norm. Sup.
4e série, t. 13, 1980, p. 23 à 43.

UN THÉORÈME SUR LES OPÉRATEURS LINÉAIRES ENTRE ESPACES DE BANACH QUI SE FACTORISENT PAR UN ESPACE DE HILBERT

PAR G. PISIER

RÉSUMÉ. — Le principal résultat de cet article est le suivant : soient X, Y des espaces de Banach, si X′ et Y sont de cotype 2, alors tout opérateur $u : X \to Y$ qui est convenablement approximable par des opérateurs de rang fini peut être factorisé par un espace de Hilbert. Cet énoncé généralise le théorème de Grothendieck correspondant au cas $X = L^\infty$, $Y = L^1$. La principale application est la solution de la version fini-dimensionnelle du « problème des compacts non nucléaires ».

Introduction

Dans cet article, on s'intéresse au problème suivant : pour quels espaces de Banach X, Y est-il vrai que tout opérateur linéaire borné de X dans Y se factorise par un espace de Hilbert ?

Le premier exemple non trivial d'une telle situation a été donné par Grothendieck dans [6] : il s'agit du cas $X = C(K)$ ou bien $L^\infty(\mu)$ et $Y = L^1(\mu)$. Ce théorème a été généralisé par Maurey dans [15] : il suffit que $X = C(K)$ ou $L^\infty(\mu)$ et que Y soit un espace « de cotype 2 », c'est-à-dire un espace vérifiant une certaine forme de l'inégalité de Khintchine. Auparavant, Kwapién [13] avait donné comme condition suffisante que X soit « de type 2 » et Y « de cotype 2 »; le résultat de Kwapién généralise le cas $X = L^q$, $2 \leqq q < \infty$, et $Y = L^p$, $1 \leqq p \leqq 2$, mais il ne contient pas le théorème de Grothendieck car un espace $C(K)$ ou $L^\infty(\mu)$ n'est pas (en général) « de type 2 ».

Nous démontrons ci-dessous (§ 2) que, pour que tout opérateur de X dans Y se factorise par un Hilbert, il suffit que X′ et Y soient de cotype 2 et que X ou Y ait la propriété d'approximation. Ce résultat est la première généralisation « abstraite » du théorème de Grothendieck, en ce sens que l'on ne suppose pas que X ou Y soit un espace concret. D'autre part, cet énoncé unifie les résultats mentionnés ci-dessus. Ce théorème était conjecturé par Maurey (*cf.* [16], question 2) sans aucune hypothèse d'approximation; il est sans doute inutile de supposer que X ou Y a la propriété d'approximation, mais nous ne savons pas le démontrer.

Dans le paragraphe 3, nous considérons le « problème des compacts non nucléaires » posé par Grothendieck dans [6] : Soient X et Y des espaces de Banach, si tout opérateur compact de X dans Y est nucléaire, est-ce que nécessairement X ou Y est de dimension finie ? Autrement dit, existe-t-il toujours entre deux espaces de dimensions infinies un opérateur compact non nucléaire ? Nous donnons une réponse affirmative en supposant par exemple que X ou Y a une base de Schauder. En fait, les résultats du paragraphe 2 conduisent naturellement à la solution de la version fini-dimensionnelle du problème :

Soient $\{X_n\}$ et $\{Y_n\}$ deux suites d'espaces de Banach de dimension finie, soient $B(X_n, Y_n)$ et $N(X_n, Y_n)$ l'espace des opérateurs de X_n dans Y_n muni respectivement de la norme uniforme et de la norme nucléaire. Soit $j_n : B(X_n, Y_n) \to N(X_n, Y_n)$ l'application identité.

Si l'on suppose que $\sup_n \| j_n \| < \infty$, alors nécessairement :

$$\sup_n \min \{\dim X_n, \dim Y_n\} < \infty.$$

Nos résultats ont été annoncés par la note [23].

1. Définitions, notations et résultats préliminaires

Dans toute la suite nous noterons G le groupe compact $\{-1, +1\}^{\mathbb{N}}$ et m la mesure de Haar normalisée sur G [i. e. $m(G)=1$]. On notera $\varepsilon_n : \{-1, +1\}^{\mathbb{N}} \to \{-1, +1\}$ la n-ième coordonnée, de sorte que la suite $(\varepsilon_n)_n$ constitue sur l'espace de probabilité (G, m) une suite de variables aléatoires indépendantes équidistribuées prenant les valeurs -1 et $+1$ avec probabilité 1/2 (ce sont des « variables de Bernoulli »).

DÉFINITION 1.1. — Soit $u : X \to Y$ un opérateur entre espaces de Banach :

(i) On dit que u est de cotype q $(2 \leqq q < \infty)$ s'il existe une constante λ telle que

$$(1.1)\qquad \begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall \{x_1, \ldots, x_n\} \subset X, \\ \left(\sum_1^n \| u(x_i) \|^q \right)^{1/q} \leqq \lambda \left(\int \left\| \sum_1^n \varepsilon_i x_i \right\|^2 dm \right)^{1/2}. \end{cases}$$

On note $C_q(u)$ la plus petite constante λ vérifiant (1.1).

(ii) On dit que u est de type p $(1 < p \leqq 2)$ s'il existe une constante λ telle que

$$(1.2)\qquad \begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall \{x_1, \ldots, x_n\} \subset X, \\ \left(\int \left\| \sum_1^n \varepsilon_i u(x_i) \right\|^2 dm \right)^{1/2} \leqq \lambda \left(\sum_1^n \| x_i \|^p \right)^{1/p}. \end{cases}$$

On note $T_p(u)$ la plus petite constante λ vérifiant (1.2).

(iii) On dit que u se factorise par un Hilbert s'il existe un espace de Hilbert H et des opérateurs bornés $v:X\to H$ et $w:H\to Y$, tels que $u=wv$; on pose alors :

$$\gamma_2(u)=\inf\{\|v\|\,.\,\|w\|\},$$

où l'infimum porte sur toutes les factorisations de cette forme. On note $\Gamma_2(X, Y)$ l'espace des opérateurs de X dans Y qui se factorisent par un Hilbert. Ces trois notions sont liées par le résultat suivant dû à Kwapién [13] :

THÉORÈME 1.2. — *Soient* X, Y, Z *trois espaces de Banach.*

Soient $u:X\to Y$ *un opérateur de type* 2 *et* $v:Y\to Z$ *un opérateur de cotype* 2.

Alors le composé vu *se factorise par un Hilbert et*

$$\gamma_2(vu)\leqq T_2(u)\,C_2(v). \tag{1.3}$$

Remarque. — En réalité, le résultat n'est démontré dans [13] que pour $u=v=$ l'identité d'un espace de Banach, mais l'extension au cas précédent est facile. Une autre démonstration du théorème 1.2 est donnée dans [17]; le lecteur vérifiera facilement (*cf.* 1.4 ci-dessous) que notre définition des opérateurs de type 2 ou de cotype 2 implique la définition donnée dans [17].

DÉFINITION 1.3. — Un espace de Banach X est dit de cotype q (resp. de type p) si l'opérateur identité sur X, noté Id_X, est de cotype q (resp. de type p). On note simplement $C_q(X)$ et $T_p(X)$ au lieu de $C_q(\mathrm{Id}_X)$ et $T_p(\mathrm{Id}_X)$.

Nous renvoyons à [18] pour plus de renseignements sur ces notions. Signalons que d'après le théorème 1.2 un espace X ne peut être à la fois de type 2 et de cotype 2 que si il est isomorphe à un espace de Hilbert (*cf.* [13]).

1.4. Soit (g_n) une suite de variables aléatoires réelles gaussiennes indépendantes sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$, normalisée de sorte que $\mathbb{E}|g_n|^2=1$. Comme $\forall(\xi_n)_n\in\{-1, +1\}^{\mathbb{N}}$ la suite $(\xi_n g_n)_n$ a la même distribution que la suite $(g_n)_n$, on voit facilement que si $u:X\to Y$ est de cotype $q\geqq 2$, alors :

$$\forall\{x_1, \ldots, x_n\}\subset X,\quad \left(\sum\|u(x_i)\|^q\right)^{1/q}\leqq C_q(u)\left(\int\left\|\sum g_i x_i\right\|^2 d\mathbb{P}\right)^{1/2}.$$

On a un résultat analogue si u est de type $p\leqq 2$.

1.5. Soient X, Y deux espaces de Banach.

Rappelons la définition de la norme nucléaire sur $X'\otimes Y$:

$$\forall z\in X'\otimes Y,\quad \|z\|_\wedge=\inf\left\{\sum_1^m\|x_i'\|\,.\,\|y_i\|\right\},$$

où l'infimum porte sur toutes les représentations de la forme

$$z=\sum_1^m x_i'\otimes y_i\qquad\text{avec}\quad x_i'\in X',\quad y_i\in Y.$$

Par définition, le produit tensoriel projectif $X' \hat{\otimes}_\pi Y$ (noté parfois $X' \hat{\otimes} Y$) est la complétion de $X' \otimes Y$ pour la norme $\| \, . \, \|_\wedge$. Tout élément de $X' \hat{\otimes}_\pi Y$ définit de manière naturelle un opérateur borné de X dans Y; un opérateur $u : X \to Y$ est dit nucléaire s'il provient d'un élément de $X' \hat{\otimes}_\pi Y$. La norme nucléaire de u, notée $N(u)$, est définie par $N(u) = \inf \{ \| z \|_\wedge \}$ où l'infimum porte sur tous les z de $X' \hat{\otimes}_\pi Y$ admettant u pour opérateur associé.

On notera respectivement $B(X, Y)$, $C(X, Y)$ et $N(X, Y)$ l'espace des opérateurs bornés, compacts et nucléaires de X dans Y muni de la norme correspondante. On notera toujours simplement $\| u \|$ la norme uniforme d'un opérateur borné u.

Soit $p > 0$. Un opérateur $u : X \to Y$ est dit p-sommant s'il existe une constante λ telle que

$$(1.4) \qquad \left\{ \begin{array}{c} \forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall \{ x_1, \ldots, x_n \} \subset X, \\ \sum_1^n \| u(x_i) \|^p \leqq \lambda^p \sup \left\{ \sum_1^n | \langle \xi, x_i \rangle |^p, \ \xi \in X', \ \| \xi \| \leqq 1 \right\}. \end{array} \right.$$

On note $\pi_p(u)$ la plus petite constante λ vérifiant (1.4), et $\Pi_p(X, Y)$ l'espace des opérateurs p-sommants de X dans Y.

1.6. Rappelons un fait bien connu : soit Y un sous-espace d'un espace Z, soit $i : Y \to Z$ l'injection canonique, et soit $u \in B(X, Y)$. Alors :

$$iu \in N(X, Z) \quad \Rightarrow \quad u \in \Pi_1(X, Y) \qquad \text{et} \qquad \pi_1(u) \leqq N(iu) \qquad \text{(démonstration facile).}$$

Pour plus de détails sur ces notions, *cf.* [19]. Nous ne considérons dans la suite que des espaces de Banach sur le corps des réels, mais tous les résultats s'étendent aisément au cas complexe.

1.7. Soit A une partie finie de $\mathbb{N}$, on posera

$$\forall x \in G, \quad w_A(x) = \prod_{k \in A} \varepsilon_k(x),$$

si A est vide, on pose $w_A(x) \equiv 1$.

Soit $\mathscr{A}_n$ la tribu engendrée sur G par $\{ \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n \}$. On voit facilement que les 2^n fonctions $\{ w_A \mid A \subset \{ 1, 2, \ldots, n \} \}$ forment une base orthonormale de l'espace $L^2(G, \mathscr{A}_n, dm)$ [mis à part l'indexation choisie, ce n'est autre que le système dit de Fourier-Walsh, car les fonctions (w_A) sont les caractères du groupe compact $G = \{ -1, +1 \}^{\mathbb{N}}$].

Pour tout ensemble A, on note $| A |$ le cardinal de A.

Enfin, on notera P_n l'ensemble des 2^n parties de $\{ 1, 2, \ldots, n \}$.

2. Le théorème de factorisation

2.1. Pour plus de généralité, introduisons une notation supplémentaire :

Soit $u: X \to Y$ un opérateur entre espaces de Banach; on suppose qu'il existe une constante λ telle que

$$(2.1)\qquad \left\{\begin{array}{l} \forall n \in \mathbb{N},\quad \forall \{x_A \mid A \in P_n\} \subset X, \\ \text{on a} \\ \displaystyle\int \Big\| \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i u(x_{\{i\}}) \Big\|^2 dm \leqq \lambda^2 \int \| \sum_{A \in P_n} w_A x_A \|^2 dm. \end{array}\right.$$

Dans ces conditions, on note $R(u)$ la plus petite constante vérifiant (2.1). S'il n'existe pas de telle constante, on pose $R(u) = +\infty$.

Notons simplement L^2 l'espace $L^2(G, m)$ et $L^2(X)$ l'espace $L^2(G, m; X)$; soit $P: L^2 \to L^2$ la projection orthogonale sur le sous-espace engendré dans L^2 par la suite $\{\varepsilon_n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Le lecteur vérifiera aisément que $R(u) < \infty$ si et seulement si l'opérateur $P \otimes u: L^2 \otimes X \to L^2 \otimes Y$ s'étend en un opérateur borné $\widetilde{P \otimes u}$ de $L^2(X)$ dans $L^2(Y)$; on a de plus $R(u) = \|\widetilde{P \otimes u}\|$.

Cette définition étend aux opérateurs la notion d'espace « K-convexe » discutée à la remarque 2.10 de [18].

Proposition 2.2. — *Soit $u: X \to Y$ un opérateur entre espaces de Banach, on suppose que X' et Y sont de cotype 2. Alors u se factorise par un Hilbert si (et seulement si) $R(u) < \infty$ et on a dans ce cas*

$$(2.2)\qquad \gamma_2(u) \leqq R(u)\, C_2(X')\, C_2(Y).$$

Démonstration. — La partie « seulement si » est évidente puisque si u est l'identité sur un Hilbert, alors trivialement $R(u) = 1$.

Supposons donc que $R(u) < \infty$ et démontrons (2.2) :

d'après le théorème de Kwapień (théorème 1.2 ci-dessus) il suffit de montrer que (2.3) $T_2(u) \leqq R(u)\, C_2(X')$.

Puisque X' est de cotype 2, on a

$$\forall n \in \mathbb{N},\quad \forall \{\xi_1, \ldots, \xi_n\} \subset X', \qquad \Big(\sum \|\xi_i\|^2\Big)^{1/2} \leqq C_2(X') \left(\int \| \sum \varepsilon_i \xi_i \|^2 dm \right)^{1/2}.$$

D'où en dualisant : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall \{x_1, \ldots, x_n\} \subset X$,

$$(2.4)\qquad \sup \left\{ \sum_{1}^{n} \langle x_i, \xi_i \rangle \,\middle|\, (\xi_i)_{i \leqq n} \in \mathscr{R}_n \right\} \leqq C_2(X') \left(\sum_{1}^{n} \| x_i \|^2 \right)^{1/2},$$

où l'on a noté $\mathscr{R}_n$ l'ensemble des n-uples $(\xi_i)_{i \leqq n}$ dans X' tels que

$$\int \Big\| \sum_{1}^{n} \varepsilon_i \xi_i \Big\|^2 dm \leqq 1.$$

Pour conclure la démonstration, nous aurons besoin d'un lemme élémentaire :

LEMME 2.3. — *Avec les notations précédentes*

$$\sup\left\{\sum_1^n \langle x_i, \xi_i \rangle \,\middle|\, (\xi_i)_{i \leqq n} \in \mathcal{R}_n\right\},$$

est égal à la borne inférieure de

$$\left(\int \left\| \sum_1^n \varepsilon_i x_i + \sum_{\substack{A \in P_n \\ |A| \neq 1}} w_A x_A \right\|^2 dm\right)^{1/2}.$$

sur toutes les suites finies $(x_A)_{A \in P_n, |A| \neq 1}$ *d'éléments de* X.

L'inégalité (2.3) est alors immédiate :

par définition de $R(u)$ on a toujours

$$\int \left\| \sum_1^n \varepsilon_i u(x_i) \right\|^2 dm \leqq R(u)^2 \int \left\| \sum_1^n \varepsilon_i x_i + \sum_{|A| \neq 1} w_A x_A \right\|^2 dm,$$

donc d'après (2.4) et le lemme 2.3 :

$$\leqq R(u)^2 C_2(X')^2 \sum \| x_i \|^2.$$

On a donc bien $T_2(u) \leqq R(u) C_2(X')$, ce qui termine la démonstration de la proposition 2.2.

Démonstration du lemme 2.3. — Fixons n. Notons E l'espace X^n muni de la norme

$$\|(x_1, \ldots, x_n)\|_E = \inf\left\{\left(\int \left\| \sum_1^n \varepsilon_i x_i + \sum_{\substack{A \in P_n \\ |A| \neq 1}} w_A x_A \right\|^2 dm\right)^{1/2}\right\},$$

où l'infimum porte sur tous les $(x_A)_{A \in P_n, |A| \neq 1}$ dans X.

On peut remarquer que E s'identifie au quotient de $L^2(m; X)$ par l'orthogonal du sous-espace de $L^2(m; X')$ formé par les fonctions de la forme $\sum_1^n \varepsilon_i \xi_i$ avec $\{\xi_1, \ldots, \xi_n\} \subset X'$. Par conséquent, on peut identifier le dual E' de E à l'espace X'^n muni de la norme

$$\|(\xi_1, \ldots, \xi_n)\|_{E'} = \left(\int \left\| \sum_1^n \varepsilon_i \xi_i \right\|^2 dm\right)^{1/2}.$$

L'identité du lemme 2.3 est donc un cas particulier de l'égalité bien connue

$$\| z \|_E = \sup\{\langle z, z' \rangle \mid z' \in E', \| z' \|_{E'} \leqq 1\}.$$

Remarque. — Signalons en passant une généralisation facile de la proposition 2.2 : soient $w : W \to Z$, $v : Z \to X$, $u : X \to Y$ trois opérateurs entre espaces de Banach, si w' et u sont de cotype 2 et si $R(v) < \infty$, alors uvw se factorise par un Hilbert et $\gamma_2(uvw) \leqq C_2(u) R(v) C_2(w')$.

On note $M(G)$ l'espace des mesures bornées sur G. Soit $\mu \in M(G)$, on note $\|\mu\|$ la masse totale de μ.

Pour toute partie finie A de $\mathbb{N}$, on posera

$$\hat{\mu}(A) = \int w_A(x)\,\mu(dx).$$

$\hat{\mu}(A)$ est le coefficient de Fourier de μ correspondant au caractère w_A de G.

Soit ε dans l'intervalle $0 < \varepsilon \leqq 1$. Dans toute la suite, nous noterons $\omega(\varepsilon)$ la plus petite constante >0 pour laquelle il existe au moins une mesure μ dans $M(G)$ vérifiant les trois propriétés suivantes :

$$\hat{\mu}(\{n\}) = 1, \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \tag{2.5}$$

$$|\hat{\mu}(A)| \leqq \varepsilon \quad \text{pour toute partie finie A de } \mathbb{N} \text{ avec } |A| \neq 1, \tag{2.6}$$

$$\|\mu\| \leqq \omega(\varepsilon). \tag{2.7}$$

Nous verrons plus loin (remarques 2.5 et 2.11) des majorations de $\omega(\varepsilon)$.

LEMME 2.4. — *Tout opérateur $u : X \to Y$ entre espaces de Banach, qui se factorise par un Hilbert, vérifie :*

$$\forall \varepsilon \in]0, 1], \quad R(u) \leqq \omega(\varepsilon)\|u\| + \varepsilon \gamma_2(u). \tag{2.8}$$

Démonstration. — Soit $\{x_A \mid A \in P_n\}$ des éléments de X.

On considère la fonction $\Phi : G \to X$ définie par

$$\forall t \in G, \quad \Phi(t) = \sum_{A \in P_n} w_A(t)\,x_A.$$

On pose

$$\Phi \star \mu(t) = \int \Phi(ts^{-1})\,\mu(ds)$$

(remarquer que Φ est en fait à valeurs fini-dimensionnelles, toutes les intégrales sont donc définies sans problème).

On note simplement $L^2(X)$ l'espace $L^2(G, m; X)$.

On a

$$\|\Phi \star \mu(t)\|_X \leqq \int \|\Phi(ts^{-1})\|_X\,|\mu|(ds),$$

d'où (puisque la convolution par $|\mu|$ est un opérateur borné sur L^2 de norme $\leqq \|\mu\|$) :

$$\|\Phi \star \mu\|_{L^2(X)} \leqq \|\mu\| \cdot \|\Phi\|_{L^2(X)}.$$

A fortiori :

$$\|u(\Phi) \star \mu\|_{L^2(Y)} \leqq \|u\| \cdot \|\mu\| \cdot \|\Phi\|_{L^2(X)}. \tag{2.9}$$

On vérifie aisément que

$$u(\Phi)\star\mu=\sum_{A\in P_n} u(x_A)\hat{\mu}(A)w_A.$$

Posons

$$R=\sum_{\substack{A\in P_n\\|A|\neq 1}} w_A\, u(x_A)\hat{\mu}(A).$$

D'après (2.5), on a simplement

$$u(\Phi)\star\mu=\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i u(x_{\{i\}})+R.$$

Il nous suffit donc pour démontrer (2.8) de prouver que

$$\|R\|_{L^2(Y)}\leqq\varepsilon\gamma_2(u)\|\Phi\|_{L^2(X)}. \tag{2.10}$$

En effet, on aura alors :

$$\left\|\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i u(x_{\{i\}})\right\|_{L^2(Y)}\leqq\|u(\Phi)\star\mu\|_{L^2(Y)}+\|R\|_{L^2(Y)},$$

soit d'après (2.7), (2.9) et (2.10) :

$$\leqq[\|u\|\omega(\varepsilon)+\varepsilon\gamma_2(u)]\|\Phi\|_{L^2(X)},$$

ce qui équivaut à (2.8) par définition de $R(u)$.

Reste donc à établir (2.10) : soit H un espace de Hilbert et soient $S:X\to H$, $T:H\to Y$ tels que $TS=u$.

Par un argument d'orthogonalité, on voit aisément que

$$\int\Big\|\sum_{\substack{A\in P_n\\|A|\neq 1}} w_A\, S(x_A)\hat{\mu}(A)\Big\|_H^2\,dm=\sum_{\substack{A\in P_n\\|A|\neq 1}}\|S(x_A)\hat{\mu}(A)\|_H^2,$$

donc d'après (2.6) :

$$\leqq\varepsilon^2\sum_{A\in P_n}\|S(x_A)\|_H^2,$$

de nouveau, par orthogonalité

$$\sum_{A\in P_n}\|S(x_A)\|_H^2=\int\|S(\Phi)\|_H^2\,dm\leqq\|S\|^2\|\Phi\|_{L^2(X)}^2.$$

On a donc

$$\|R\|_{L^2(Y)}\leqq\|T\|\,.\,\Big\|\sum_{\substack{A\in P_n\\|A|\neq 1}} w_A\, S(x_A)\hat{\mu}(A)\Big\|_{L^2(H)}\leqq\varepsilon\|T\|\,.\,\|S\|\,.\,\|\Phi\|_{L^2(X)},$$

ce qui établit (2.10) d'après la définition de $\gamma_2(u)$.

Remarque 2.5. — Pour tout ε dans $]0, 1]$, il existe une mesure μ dans $M(G)$ vérifiant (2.5), (2.6) et $\|\mu\| \leqq 1/\sqrt{\varepsilon}$; on a donc

$$\omega(\varepsilon) \leqq 1/\sqrt{\varepsilon}. \tag{2.11}$$

En effet, posons $\theta = \sqrt{\varepsilon}$ et soit $\mu_n \in M(G)$ la mesure définie par $d\mu_n = \Pi_n \, dm$ avec pour densité Π_n la fonction

$$\Pi_n = \frac{1}{2\theta}\left(\prod_{i=1}^{n}(1+\theta\varepsilon_i) - \prod_{1}^{n}(1-\theta\varepsilon_i)\right).$$

En développant, on voit que

$$\Pi_n = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i + \theta^2 \sum_{\substack{A \in P_n \\ |A|=3}} w_A + \theta^4 \sum_{\substack{A \in P_n \\ |A|=5}} w_A + \ldots$$

Donc $\hat{\mu}_n(A) = 1$ si $A = \{i\}$ avec $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ et $|\hat{\mu}_n(A)| \leqq \theta^2$ sinon. D'autre part $\prod_{i=1}^{n}(1 \pm \theta\varepsilon_i) \geqq 0$ puisque $|\theta| \leqq 1$, donc

$$\int \left|\prod_{1}^{n}(1-\theta\varepsilon_i)\right| dm = \int \left|\prod_{1}^{n}(1+\theta\varepsilon_i)\right| dm = \prod_{1}^{n} \int (1+\theta\varepsilon_i)\, dm = 1,$$

par conséquent

$$\|\mu_n\| \leqq \theta^{-1} = \varepsilon^{-1/2}.$$

Finalement, tout point adhérent μ à la suite (μ_n) pour la topologie vague vérifie (2.5), (2.6) et (2.7) avec $\omega(\varepsilon) = 1/\sqrt{\varepsilon}$.

Remarque 2.6. — Soit $u : X \to Y$ un opérateur qui se factorise par un Hilbert; d'après (2.2) et (2.8), on a

$$\forall \varepsilon \in]0, 1], \quad \gamma_2(u) \leqq C_2(X')\, C_2(Y)\,(\omega(\varepsilon)\|u\| + \varepsilon\gamma_2(u)),$$

d'où si $\varepsilon < (C_2(X')\, C_2(Y))^{-1}$:

$$\gamma_2(u) \leqq \frac{C_2(X')\, C_2(Y)\, \omega(\varepsilon)}{1 - \varepsilon\, C_2(X')\, C_2(Y)} \|u\|. \tag{2.12}$$

Avec l'estimation $\omega(\varepsilon) \leqq 1/\sqrt{\varepsilon}$ et le choix de $\varepsilon = (3\, C_2(X')\, C_2(Y))^{-1}$, on obtient :

$$\gamma_2(u) \leqq \frac{3\sqrt{3}}{2}(C_2(X')\, C_2(Y))^{3/2} \|u\|. \tag{2.13}$$

On en déduit le principal résultat :

THÉORÈME 2.7. — *Soient* X, Y *deux espaces de Banach. On suppose que* X' *et* Y *sont de cotype* 2. *Soit* $\lambda \geqq 1$. *Nous dirons qu'un opérateur* $u : X \to Y$ *est* λ*-approximable s'il existe un filtre* $(u_i)_{i \in I}$ *formé d'opérateurs* $u_i : X \to Y$ *de rang fini tels que :* $\forall x \in X$, $u_i(x) \to u(x)$ *et*

$\sup_i \|u_i\| \leqq \lambda \|u\|$. *Alors tout opérateur* λ*-approximable* $u: X \to Y$ *se factorise par un Hilbert et vérifie :*

$$\gamma_2(u) \leqq \lambda C \|u\| \qquad \textit{avec} \quad C = \frac{3\sqrt{3}}{2}(C_2(X')C_2(Y))^{3/2}.$$

Démonstration. — On peut évidemment appliquer (2.13) aux opérateurs u_i, d'où $\gamma_2(u_i) \leqq \lambda C \|u\|$. Par un argument standard, on peut passer à la limite et on trouve $\gamma_2(u) \leqq \lambda C \|u\|$.

Rappel. — On dit qu'un espace de Banach E a la propriété d'approximation (resp. d'approximation bornée) si l'identité de E est limite sur tout compact d'un filtre d'opérateurs de rang fini sur E (resp. et de norme uniformément bornée).

Les corollaires suivants sont immédiats :

COROLLAIRE 2.8. — *Si* X' *et* Y *sont de cotype* 2 *et si* X *ou* Y *a la propriété d'approximation bornée, alors tout opérateur borné* $u: X \to Y$ *se factorise par un Hilbert.*

COROLLAIRE 2.9. — *Si* X *et* X' *sont de cotype* 2 *et si* X *a la propriété d'approximation bornée alors* X *est isomorphe à un espace de Hilbert.*

Ce dernier résultat résout partiellement le problème 123 de [15].

Remarque 2.10. — Il est important de signaler que si un opérateur u de X dans Y se factorise par un Hilbert, alors cet opérateur est nécessairement $\gamma_2(u)$-approximable puisque l'identité d'un espace de Hilbert est 1-approximable. Par conséquent, supprimer les hypothèses d'approximation dans les énoncés précédents revient à démontrer qu'elles sont toujours vérifiées. Nous ignorons si c'est le cas.

Remarque 2.11. — On peut améliorer l'estimation (2.11). En effet, après avoir eu connaissance de notre travail, W. Johnson et V. Milman ont remarqué que l'on a

$$\forall \alpha > 0, \quad \sup_{0<\varepsilon\leqq 1} \varepsilon^\alpha \omega(\varepsilon) < \infty,$$

et même

$$\omega(\varepsilon) < \exp \frac{1}{4}\left(\operatorname{Log}\operatorname{Log}\frac{1}{\varepsilon}\right)^2 \tag{2.14}$$

pour tout ε assez petit.

En fait, après avoir été informé de leur résultat, je me suis aperçu que l'estimation (2.14) est démontrée explicitement dans l'article [8] (*cf.* [8], th. 2 et 3). Il serait intéressant de connaître exactement l'ordre de grandeur de $\omega(\varepsilon)$ quand $\varepsilon \to 0$ (1).

(1) Tout récemment, j'ai appris que J. F. Méla a démontré :

$$\forall \varepsilon \in \left]0, \frac{1}{2}\right], \quad C_2 \operatorname{Log}\frac{1}{\varepsilon} \leqq \omega(\varepsilon) \leqq C_1 \operatorname{Log}\frac{1}{\varepsilon},$$

pour des constantes $C_1, C_2 > 0$. Il en résulte que pour tout espace X de dimension n, on a $R(\mathrm{Id}_X) \leqq K \operatorname{Log}(n+1)$, où K est une constante numérique.

Si X est un espace de Banach de dimension finie égale à n, on sait (*cf.* [9]), que $\gamma_2(\mathrm{Id}_X) \leqq \sqrt{n}$; d'après (2.8) on a $R(\mathrm{Id}_X) \leqq \omega(\varepsilon) + \varepsilon\sqrt{n}$, d'où d'après (2.14) :

$$R(\mathrm{Id}_X) \leqq \exp\left(\frac{1}{4}\operatorname{Log}\operatorname{Log}\sqrt{n}\right)^2 + 1$$

quand n est assez grand. On trouve ainsi une croissance plutôt lente des constantes $R(\mathrm{Id}_X)$ en fonction de la dimension de X. Il me paraît plausible que l'on ait toujours $R(\mathrm{Id}_X) \leqq K(\operatorname{Log}(n+1))^{1/2}$ pour une constante universelle K.

Remarque 2.12. — Il est faux en général qu'un quotient d'un espace de cotype q soit de cotype q. On peut se demander néanmoins si un espace de cotype q admet « beaucoup » de quotients qui le sont encore : nous dirons qu'un espace X est fortement de cotype q de constante λ s'il existe une famille filtrante décroissante $(M_i)_{i\in I}$ formé de sous-espaces de codimension finie de X tels que

$$\bigcap_{i\in I} M_i = \{0\} \qquad \text{et} \qquad \sup_{i\in I} C_q(X/M_i) \leqq \lambda.$$

Il est facile de voir que si X′ est de type p avec $(1/p)+(1/q)=1$, alors X est fortement de cotype q de constante $T_p(X)$ (mais l'inverse est faux, par exemple si $X=l^1$). Par ailleurs, si l'espace X possède une propriété d'approximation convenable, par exemple s'il a une base de Schauder, alors X est fortement de cotype q dès qu'il est de cotype q. Nous ignorons si tout espace de cotype q est nécessairement fortement de cotype q. Le lecteur peut vérifier que si X′ et Y sont tous deux de cotype 2 et si l'un d'eux est fortement de cotype 2, alors tout opérateur borné de X dans Y se factorise par un Hilbert.

Remarque 2.13. — L'utilisation d'un « produit de Riesz » Π_n dans la démonstration du théorème 2.7, nous a été suggéré par la démonstration de l'inégalité de Khintchine qui est exploitée dans [25] pour établir que le dual d'une C*-algèbre est de cotype 2. Dans un contexte similaire, les produits de Riesz sont utilisés dans [1]. Le schéma de la démonstration du théorème 2.7 rappelle aussi la méthode d'extrapolation développée dans [20] et [21]. Les articles [20], [21] et [22] fournissent d'ailleurs des cas « concrets » d'application du théorème 2.7 (mais ce dernier ne redonne pas les informations de [20] et [21] sur la forme particulière de la factorisation).

Remarque 2.14. — Si X ou Y est isomorphe à un Hilbert, alors tout opérateur de X dans Y se factorise trivialement par un espace de Hilbert, i. e. $B(X, Y)=\Gamma_2(X, Y)$. Compte tenu de la remarque 2.12, le théorème 2.7 couvre tous les cas connus de couples X, Y vérifiant $B(X, Y)=\Gamma_2(X, Y)$ et tels que ni X, ni Y, n'est isomorphe à un espace de Hilbert.

Pour tout espace E, posons suivant [18] :

$$p_E = \sup\{p \mid E \text{ est de type } p\} \qquad \text{et} \qquad q_E = \inf\{q \mid E \text{ est de cotype } q\}.$$

On peut vérifier que les résultats de [18] ont pour conséquence le fait suivant (qui indique que le théorème 2.7 est « presque » optimal) :

Si $B(X, Y)=\Gamma_2(X, Y)$, alors l'un au moins des trois cas suivants se produit :

(*a*) $p_{X'} = q_{X'} = 2$;

(*b*) $p_Y = q_Y = 2$;

(*c*) $q_{X'} = q_Y = 2$.

Grossièrement parlant, (*a*) [resp. (*b*)] signifie que X (resp. Y) est « presque » isomorphe à un Hilbert, tandis que (*c*) signifie que X′ et Y sont « presque » de cotype 2.

Il serait intéressant de caractériser précisément les couples X, Y tels que

$$B(X, Y)=\Gamma_2(X, Y).$$

Le reste du paragraphe doit être considéré comme un appendice : nous y donnons une version duale du théorème 2.7; ce nouveau point de vue a l'avantage de permettre une amélioration technique (on peut remplacer « approximation bornée » par « approximation » dans les énoncés précédents), mais il a l'inconvénient de masquer les principales idées. Nous avons donc choisi de développer en détail le théorème 2.7 et d'esquisser seulement ci-dessous la démonstration de la version améliorée.

Soient X, Y deux espaces de Banach. On définit une norme notée γ_2^* sur $Y'\otimes X$ par

$$\forall z\in Y'\otimes X,\quad \gamma_2^*(z)=\inf\left\{\left(\sum_1^n \|y_i'\|^2\right)^{1/2}\left(\sum_1^n \|x_i\|^2\right)^{1/2}\right\},$$

où l'infimum porte sur toutes les suites finies $(y_i')_{i\leq n}$ et $(x_i)_{i\leq n}$ telles que (2.15) $z=\sum_1^n y_i'\otimes x_i$ et telles que

$$(2.16)\qquad \forall y\in Y,\quad \forall x'\in X',\qquad |\langle z, y\otimes x'\rangle|\leq\left(\sum|\langle x_i, x'\rangle|^2\sum|\langle y_i', y\rangle|^2\right)^{1/2}.$$

On note $Y'\hat{\otimes}_{\gamma_2^*}X$ le complété de $Y'\otimes X$ muni de la norme γ_2^*. A tout élément z de $Y'\hat{\otimes}_{\gamma_2^*}X$ est associé de la manière habituelle un opérateur noté $\tilde{z}$ de Y dans X. Il est bien connu [14] qu'un opérateur $u: X\to Y$ se factorise par un Hilbert si et seulement si $\exists\lambda>0$ tel que

$$\forall z\in Y'\otimes X,\quad |\operatorname{tr}\tilde{z}u|\leq\lambda\gamma_2^*(z).$$

De plus, la norme $\gamma_2(u)$ coïncide avec la plus petite constante λ vérifiant cette propriété.

Nous renvoyons à [14] et [19] pour plus de détails.

THÉORÈME 2.15. — *Si* X′ *et* Y *sont de cotype* 2, *pour tout* v *dans* $Y'\hat{\otimes}_{\gamma_2^*}X$, *l'opérateur associé* $\tilde{v}: Y\to X$ *est nucléaire et vérifie* $N(\tilde{v})\leq C\gamma_2^*(v)$, *où* C *est comme au théorème* 2.7.

Démonstration. — Soit $z\in Y'\otimes X$ tel que $\gamma_2^*(z)<1$.

Il existe alors $(x_i)_{i\leq n}$ et $(y_i')_{i\leq n}$ vérifiant (2.15), (2.16) et

$$\sum\|x_i\|^2<1,\qquad \sum\|y_i'\|^2<1.$$

Posons $K=C_2(X')C_2(Y)$. Nous allons montrer que : $\forall\varepsilon\in]0, 1], \exists z_1, \delta_2\in Y'\otimes X$ tels que $z=z_1+\delta_2$, avec $\|z_1\|_\wedge\leq K\omega(\varepsilon)$ et $\gamma_2^*(\delta_2)\leq K\varepsilon$. En appliquant à nouveau cette décomposition n fois, on obtient $z_1, \ldots, z_n$ et δ_{n+1} dans $Y'\otimes X$ tels que $z=\sum_1^n z_i+\delta_{n+1}$ avec

$$\forall i=1, 2, \ldots, n,\quad \|z_i\|_\wedge\leq K\omega(\varepsilon)(K\varepsilon)^{i-1}\qquad\text{et}\qquad \gamma_2^*(\delta_{n+1})\leq(K\varepsilon)^n.$$

Finalement, en choisissant $\varepsilon < 1/K$, on voit que l'opérateur $\tilde{z}$ défini par z vérifie $N(\tilde{z}) \leqq K\,\omega(\varepsilon) \sum_{i=0}^{\infty} (K\,\varepsilon)^i$, ce qui établit le théorème 2.12.

Indiquons brièvement comment on obtient la décomposition annoncée : soit (g_n) une suite comme en 1.4.

L'inégalité (2.16) implique l'existence d'éléments $\bar{x}_i$ de X tels que

$$z = \sum_1^n y'_i \otimes \bar{x}_i \qquad \text{et} \qquad \forall x' \in X', \quad \sum |\langle x', \bar{x}_i \rangle|^2 \leqq \sum |\langle x', x_i \rangle|^2.$$

On pose

$$\forall \xi_1, \ldots, \xi_n \in X', \quad g(\xi_1, \ldots, \xi_n) = \left(\mathbb{E} \left\| \sum_1^n g_i \xi_i \right\|^2 \right)^{1/2}$$

et

$$g^*(x_1, \ldots, x_n) = \sup \left\{ \sum_1^n \langle x_i, \xi_i \rangle \,\middle|\, g(\xi_1, \ldots, \xi_n) \leqq 1 \right\}.$$

En utilisant l'invariance rotationnelle des mesures gaussiennes, on voit que (2.17) $g^*(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n) \leqq g^*(x_1, \ldots, x_n)$ (*cf.* par exemple [24], prop. 2.3); d'autre part, le fait que X' est de cotype 2 assure (*cf.* 1.4) que

(2.18) $$g^*(x_1, \ldots, x_n) \leqq C_2(X') (\sum \| x_i \|^2)^{1/2} < C_2(X').$$

En utilisant (2.17), (2.18) et le fait que la suite $(\varepsilon_i g_i)_{i \leqq n}$ a la même distribution sur $(G, m) \times (\Omega, \mathbb{P})$ que la suite $(g_i)_{i \leqq n}$, on trouve $R \in L^2(m \otimes \mathbb{P}; X)$ tel que

$$\int R\, \varepsilon_i g_i \, dm \, d\mathbb{P} = 0, \qquad \forall i = 1, 2, \ldots, n$$

et

$$\left\| \sum_1^n \varepsilon_i g_i \bar{x}_i + R \right\|_{L^2(m \otimes \mathbb{P};\, X)} < C_2(X').$$

D'autre part, puisque Y est de cotype 2, on a

$$\forall \omega \in \Omega, \quad \exists\, y'_A(\omega) \in Y' \qquad (A \in P_n, |A| \neq 1),$$

tels que

$$\int \left\| \sum_1^n \varepsilon_i g_i(\omega) y'_i + \sum_{|A| \neq 1} y'_A(\omega) w_A \right\|^2 dm \leqq C_2(Y)^2 \sum \| y'_i \|^2 |g_i(\omega)|^2.$$

En convolant avec une mesure μ vérifiant (2.5), (2.6) et (2.7), on trouve, en posant

$$R' = \sum_{\substack{A \in P_n \\ |A| \neq 1}} y'_A(\omega) \hat{\mu}(A) w_A,$$

$$\left\| \sum_1^n \varepsilon_i g_i y'_i + R' \right\|_{L^2(m \otimes \mathbb{P};\, X)} \leqq \omega(\varepsilon) C_2(Y).$$

Finalement on a

$$z=\sum_1^n y_i'\otimes x_i=z_1+\delta_2,$$

avec

$$z_1=\int\left(\sum_1^n \varepsilon_i g_i y_i'+\mathrm{R}'\right)\otimes\left(\sum_1^n \varepsilon_i g_i \bar{x}_i+\mathrm{R}\right)dm\,d\mathbb{P}\qquad \text{et}\qquad \delta_2=-\int \mathrm{R}'\otimes \mathrm{R}\,dm\,d\mathbb{P}.$$

On voit facilement que cette décomposition a les propriétés annoncées. Il en résulte immédiatement par dualité :

Corollaire 2.16. — *Si* X′ *et* Y *sont de cotype* 2, *tout opérateur* $u:\mathrm{X}\to\mathrm{Y}$ *qui est approchable uniformément sur tout compact par des opérateurs de rang fini se factorise par un Hilbert et* $\gamma_2(u)\leqq \mathrm{C}\,\|u\|$; *les corollaires* 2.8 *et* 2.9 *restent donc vrais si l'on supprime « bornée ».*

3. Le problème des compacts non nucléaires

Il s'agit du problème suivant : existe-t-il toujours entre deux espaces de Banach X, Y de dimensions infinies un opérateur compact non nucléaire ?

Ce problème (posé dans [6]) est toujours ouvert, même dans le cas particulier X = Y. Sous des hypothèses supplémentaires, des réponses positives sont données dans [26], [11], [10] et [2].

Nous pouvons démontrer une version fini-dimensionnelle de la conjecture :

Théorème 3.1. — *Soient* $\{\mathrm{X}_n\,|\,n\in\mathbb{N}\}$ *et* $\{\mathrm{Y}_n\,|\,n\in\mathbb{N}\}$ *deux suites d'espaces de Banach de dimensions finies. Supposons qu'il existe une constante* K *telle que :* $\forall n, \forall u, \mathrm{X}_n\to\mathrm{Y}_n$, $\mathrm{N}(u)\leqq \mathrm{K}\,\|u\|$ *alors nécessairement* $\sup_n \min\{\dim \mathrm{X}_n, \dim \mathrm{Y}_n\}<\infty$.

Bien entendu, si $\sup_n \min\{\dim \mathrm{X}_n, \dim \mathrm{Y}_n\}=\mathrm{M}<\infty$, on a trivialement $\forall n, \forall u, \mathrm{X}_n\to\mathrm{Y}_n$, $\mathrm{N}(u)\leqq \mathrm{M}\,\|u\|$. Le théorème précédent signifie que seul ce cas trivial est possible.

Remarque 3.2. — Si $\mathrm{X}_n=\mathrm{Y}_n$ pour tout n dans le théorème 3.1, le résultat est évident car l'identité sur X_n est de norme uniforme $\leqq 1$ et de norme nucléaire $\geqq \dim \mathrm{X}_n$.

De même, si $\dim \mathrm{X}=\infty$ et si X possède la propriété d'approximation, on peut montrer facilement qu'il existe un opérateur compact non nucléaire de X dans lui-même.

Nous aurons besoin de notations supplémentaires :

Soient n un entier et p dans $[1, \infty]$. On note l_n^p l'espace $\mathbb{R}^n$ muni de la norme

$$\|(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)\|=(\sum|\alpha_i|^p)^{1/p}(=\sup_{i\leqq n}|\alpha_i| \text{ si } p=\infty).$$

Si E et F sont deux espaces de Banach isomorphes, on note $d(\mathrm{E}, \mathrm{F})$ la borne inférieure de $\|\mathrm{T}\|.\|\mathrm{T}^{-1}\|$ quand T décrit l'ensemble des isomorphismes de E sur F.

Soient X un espace de Banach et n un entier. On notera $\Delta_n(X)$ la borne inférieure de $\{\|\alpha\|.\|\beta\|\}$ portant sur toutes les factorisations possibles de l'identité de l_n^∞ de la forme $l_n^\infty \xrightarrow{\alpha} X \xrightarrow{\beta} l_n^\infty$.

Dans l'article [18], le résultat suivant est démontré explicitement : soit q avec $2<q<\infty$; si un espace X n'est pas de cotype q alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall \varepsilon>0, \quad \exists x_1, \ldots, x_n \in X,$$

tels que

$$\forall (\alpha_i) \in \mathbb{R}^n, \quad \sup|\alpha_i| \leqq \left\|\sum_1^n \alpha_i x_i\right\| \leqq (1+\varepsilon)\left(\sum_1^n |\alpha_i|^q\right)^{1/q}.$$

D'après le théorème de Hahn-Banach, il existe un opérateur $\beta : X \to l_n^\infty$ tel que

$$\|\beta\| \leqq 1 \qquad \text{et} \qquad \beta\left(\sum_1^n \alpha_i x_i\right) = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n),$$

par conséquent, on a alors $\Delta_n(X) \leqq n^{1/q}$ pour tout entier n.

Il est très facile de vérifier que les arguments de [18] prouvent aussi une version fini-dimensionnelle de ce dernier résultat :

THÉORÈME 3.3. — *Soit* $\{X_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ *une suite d'espaces de Banach et soit q dans l'intervalle* $2<q<\infty$ *:*

(i) *si* $\sup_n C_q(X_n)=\infty$, *alors il existe une suite d'entiers* (k_n) *telle que* $k_n \to \infty$ *si* $n \to \infty$ *et vérifiant :*

$$\sup_n \{\sup_{k \leqq k_n} k^{-1/q} \Delta_k(X_n)\} < \infty;$$

(ii) *de plus, si* $a_q = \sup C_q(X_n) < \infty$, *alors il existe une constante* A_q (*ne dépendant que de* a_q) *telle que*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall N \in \mathbb{N}, \quad \forall \{x_1, \ldots, x_N\} \in X_n,$$

on a

$$\int \left\|\sum_1^N g_i x_i\right\|^2 d\mathbb{P} \leqq A_q^2 \int \left\|\sum_1^N \varepsilon_i x_i\right\|^2 dm \tag{3.1}$$

(*avec les notations* 1.4).

Pour démontrer (i) le lecteur n'a qu'à reprendre la démonstration du théorème 1.1 de [18], p. 58, en remplaçant partout $\varphi_q^E(n)$ par $\sup_m \varphi_q^{X_m}(n)$. On pourrait aussi déduire (i) du résultat de [18] par une technique d'ultraproduits.

Par contre, la partie (ii) résulte directement du corollaire 1.3 de [18], si l'on remarque que l'espace $l^2(\{X_n \mid n \in \mathbb{N}\})$ [i. e. l'espace des suites $(x_n)_n$ telles que $x_n \in X_n$ et $\sum \|x_n\|^2 < \infty$, muni de sa norme naturelle] est de cotype q si $\sup_n C_q(X_n) < \infty$.

Remarque 3.4. — L'inégalité (3.1) a une autre conséquence :

Définissons, pour tout espace X, la constante $\tilde{C}_q(X)$ comme la plus petite constante λ vérifiant la propriété suivante :

$$\forall N \in \mathbb{N}, \quad \forall \{x_1, \ldots, x_N\} \subset X, \qquad (\sum \|x_i\|^q)^{1/q} \leqq \lambda \left(\int \| \sum g_i x_i \|^2 \, d\mathbb{P} \right)^{1/2}.$$

Nous avons signalé en (1.4) que l'inégalité

$$\tilde{C}_q(X) \leqq C_q(X), \tag{3.2}$$

est facile; inversement, il résulte de (3.1) que

$$\forall r \geqq 2, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \qquad C_r(X_n) \leqq A_q \tilde{C}_r(X_n). \tag{3.3}$$

Nous utiliserons le lemme suivant dû à Figiel, Lindenstrauss et Milman :

LEMME 3.5 ([5], lemme 6.1). — *Pour tout espace de Banach de dimension finie on a*

$$\tilde{C}_2(E) \leqq (\dim E)^{1-2/q} \tilde{C}_q(E).$$

L'exposant intervenant dans ce lemme a été amélioré dans [12] (*cf.* aussi [24]).

Remarque 3.6. — Soit $q > 2$ et soit $\{X_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ une suite d'espaces de dimension finie telle que

$$M = \sup_n C_q(X_n) < \infty \qquad \text{et} \qquad M' = \sup_n C_q(X'_n) < \infty.$$

D'après (3.2), (3.3) et le lemme précédent, on a

$$C_2(X_n) \leqq \tilde{C}_2(X_n) A_q \leqq A_q (\dim X_n)^{1-2/q} C_q(X_n).$$

Et de même $\exists A'_q$ tel que

$$C_2(X'_n) \leqq A'_q (\dim X_n)^{1-2/q} C_q(X'_n).$$

Si l'on applique alors le théorème 2.7 on trouve

$$\text{si} \quad m_n = \dim X_n, \qquad d(X_n, l^2_{m_n}) \leqq B_q (\dim X_n)^{3(1-2/q)}, \tag{3.4}$$

où B_q est une constante indépendante de n.

Démonstration du théorème 3.1. — Il est clair (par dualité) que l'inégalité $N(u) \leqq K \|u\|$ reste vraie $\forall u$, $Y_n \to X_n$ et aussi (par transposition) $\forall u$, $X'_n \to Y'_n$ ou bien $\forall u$, $Y'_n \to X'_n$. Supposons que $\min\{\dim X_n, \dim Y_n\} \to \infty$, nous aboutirons à une contradiction.

Tout d'abord, nous allons montrer par un argument standard que les espaces X_n, X'_n, Y_n et Y'_n sont de cotype q, uniformément en n, pour tout $q > 2$.

Considérons deux factorisations

$$l^\infty_k \xrightarrow{\alpha} X_n \xrightarrow{\beta} l^\infty_k \qquad \text{et} \qquad l^\infty_k \xrightarrow{\gamma} Y_n \xrightarrow{\delta} l^\infty_k,$$

de l'identité de l_k^∞ telles que

$$\|\alpha\|.\|\beta\| \leqq \Delta_k(X_n) \qquad \text{et} \qquad \|\gamma\|.\|\delta\| \leqq \Delta_k(Y_n).$$

On peut écrire :

$$k = \operatorname{tr} \delta\gamma\beta\alpha \leqq \|\delta\| N(\gamma\beta) \|\alpha\| \leqq K \|\delta\|.\|\gamma\beta\|.\|\alpha\| \leqq K\,\Delta_k(X_n)\,\Delta_k(Y_n). \tag{3.5}$$

Par un raisonnement similaire, on trouve

$$k \leqq K\,\Delta_k(X'_n)\,\Delta_k(Y'_n). \tag{3.6}$$

Posons $d_n = \min\{\dim X_n, \dim Y_n\}$.

D'après le lemme de Dvoretzky-Rogers (*cf.* [4], lemma 2), nous savons que

$$\text{si} \quad k \leqq \frac{1}{2}\sqrt{\dim X_n} \qquad \text{alors} \quad \Delta_k(X_n) \leqq 2\sqrt{k} \quad \text{et} \quad \Delta_k(X'_n) \leqq 2\sqrt{k}$$

et de même pour Y_n et Y'_n.

Par conséquent si $k \leqq 1/2\sqrt{d_n}$, on a d'après (3.5) et (3.6) :

$$\min\{\Delta_k(X_n), \Delta_k(X'_n), \Delta_k(Y_n), \Delta_k(Y'_n)\} \geqq \frac{\sqrt{k}}{2K}.$$

Puisque nous supposons que $d_n \to \infty$ quand $n \to \infty$, d'après le théorème 3.3, la dernière inégalité implique :

$$\forall q > 2, \quad \sup_n \max\{C_q(X_n), C_q(X'_n), C_q(Y_n), C_q(Y'_n)\} < \infty.$$

En appliquant deux fois (3.4), on trouve $\forall q > 2$,

$$d(X_n, l^2_{\dim X_n}) \leqq B_q(\dim X_n)^{3(1-2/q)}$$

et

$$d(Y_n, l^2_{\dim Y_n}) \leqq B_q(\dim Y_n)^{3(1-2/q)}.$$

On a donc montré que les espaces X_n et Y_n étaient, en un certain sens, uniformément proches d'espaces euclidiens; ce fait va nous conduire finalement à une contradiction.

Du fait de la symétrie du problème, nous pouvons supposer par exemple que $\dim X_n \leqq \dim Y_n$ pour tout n. D'après [5] (th. 5.2), il existe un sous-espace E_n de Y_n de dimension $p_n \geqq \eta_q(\dim Y_n)^{2/q}$ et tel que $d(E_n, l^2_{p_n}) \leqq 2$ [où $\eta_q \leqq 1$ est une constante positive ne dépendant que de q, par l'intermédiaire de $\sup_n C_q(Y_n)$]. Notons j_n l'injection de E_n dans Y_n. D'après l'hypothèse de départ, on a

$$\forall u, \quad X_n \to E_n, \qquad N(j_n u) \leqq K\|u\|.$$

D'après 1.6 on a *a fortiori* $\pi_1(u) \leqq K \| u \|$.

Par conséquent (rappelons que $m_n = \dim X_n$) :

$$\forall u, \quad l^2_{m_n} \to l^2_{p_n},$$

on doit avoir

$$\pi_1(u) \leqq 2 B_q K m_n^{3(1-2/q)} \| u \|,$$

mais si l'on choisit pour u une projection orthogonale de $l^2_{m_n}$ sur un sous-espace de dimension $\delta_n = \inf(m_n, p_n)$ considéré comme plongé dans $l^2_{p_n}$, on a évidemment $\| u \| = 1$ et $\pi_1(u) \geqq \sqrt{\delta_n}$.

On doit donc avoir nécessairement :

$$\sqrt{\delta_n} \leqq 2 B_q (m_n)^{3-6/q} K,$$

noter que puisque

$$p_n \geqq \eta_q (\dim Y_n)^{2/q} \geqq \eta_q (m_n)^{2/q},$$

on a

$$\delta_n \geqq \eta_q (m_n)^{2/q},$$

d'où finalement

$$(\dim X_n)^{(1/q)-3(1-2/q)} \leqq 2 B_q (\eta_q)^{-1/2} K.$$

On peut choisir q assez proche de 2 pour que : $(1/q)-3(1-2/q)>0$, de sorte que $\dim X_n$ reste borné quand $n \to \infty$, ce qui est bien la contradiction annoncée.

Remarque 3.7. — Au cours de la démonstration précédente, on a établi le fait suivant : Toute suite $\{X_n\}$ d'espaces de Banach de dimension finie possède nécessairement au moins l'une des trois propriétés suivantes :

(i) $\exists q > 2$ et $k_n \to \infty$ tels que

$$\sup_n \sup_{1 \leqq k \leqq k_n} k^{-1/q} \Delta_k(X_n) < \infty,$$

(ii) $\exists q > 2$ et $k_n \to \infty$ tels que

$$\sup_n \sup_{1 \leqq k \leqq k_n} k^{-1/q} \Delta_k(X'_n) < \infty,$$

(iii) $\forall \varepsilon > 0$, $\exists K_\varepsilon$ tel que

$$\forall n, \quad d(X_n, l^2_{\dim X_n}) \leqq K_\varepsilon (\dim X_n)^\varepsilon.$$

Donnons une conséquence immédiate :

COROLLAIRE 3.8. — *Supposons que l'un des deux espaces de dimensions infinies* X *ou* Y *possède une base de Schauder, ou seulement qu'il existe dans* X *ou* Y *une suite de projections* (P_n) *de rangs finis telles que*

$$\sup_n \| P_n \| < \infty \qquad \textit{et} \qquad \textit{rang } P_n \to \infty \qquad \textit{si} \quad n \to \infty.$$

Dans ces conditions, il existe un opérateur compact non nucléaire de X *dans* Y.

En fait, on peut beaucoup raffiner ce corollaire :

THÉORÈME 3.9. — *Soient* X, Y *de dimensions infinies tels que tout opérateur compact de* X *dans* Y *est nucléaire.*

Alors nécessairement :

(i) *les espaces* X, X′, Y, Y′ *sont de cotype* q *pour tout* $q>2$;

(ii) *tout opérateur de rang fini* $T : X \to X$ *vérifie* $\forall \varepsilon>0$:

$$\|T\| \geqq C_\varepsilon |\operatorname{tr} T| (\operatorname{rang} T)^{-((1/2)+\varepsilon)},$$

où $C_\varepsilon>0$ *est une constante indépendante de* T.

En particulier, tout projecteur $P : X \to X$ *de rang fini vérifie :*

$$\|P\| \geqq C_\varepsilon (\operatorname{rang} P)^{(1/2)-\varepsilon}.$$

En outre, les opérateurs sur Y *jouissent des mêmes propriétés.*

Démonstration. — La partie (i) se démontre par un argument standard exactement comme au début de la preuve du théorème 3.1. Montrons (ii) :

Soit $T : X \to X$ un opérateur de rang n. T se factorise en

$$T: \quad X \xrightarrow{\sigma} X/\operatorname{Ker} T \xrightarrow{\tilde{T}} T(X) \xrightarrow{j} X,$$

où σ et j sont respectivement la surjection et l'injection canonique.

Puisque $\forall q>2$, $C_q(X)<\infty$ et $C_q(X')<\infty$, on a d'après le lemme 3.5 et la remarque 3.4, une estimation du type

$$\forall \varepsilon>0, \quad C_2((X/\operatorname{Ker} T)') \leqq K_\varepsilon n^\varepsilon \qquad \text{et} \qquad C_2(T(X)) \leqq K_\varepsilon n^\varepsilon,$$

où K_ε ne dépend que de X et ε (mais pas de T).

Donc, d'après le théorème 2.7, il existe une constante K'_ε telle que

$$\gamma_2(\tilde{T}) \leqq K'_\varepsilon n^\varepsilon \|\tilde{T}\| = K'_\varepsilon n^\varepsilon \|T\|.$$

D'où une factorisation de $T : X \xrightarrow{A} l_n^2 \xrightarrow{B} X$ avec $\|A\|.\|B\| \leqq K'_\varepsilon n^\varepsilon \|T\|$.

On sait que l'on peut factoriser l'identité de l_n^2 à travers un espace arbitraire de dimension infinie, par exemple Y, de façon que : $\mathrm{Id}_{l_n^2} = uv$ avec $v : l_n^2 \to Y$ et $u : Y \to l_n^2$ vérifiant $\|u\|.\|v\| \leqq 2\sqrt{n}$ (*cf.* [4], lemma 2) on a donc : $T=(Bu)(vA)$. D'après l'hypothèse du théorème 3.9 et le théorème du graphe fermé $\exists k$ tel que $\forall U$, $X \to Y$ de rang fini, on a $N(U) \leqq K \|U\|$. Par dualité, on en déduit : $\forall V$, $Y \to X$ de rang fini, on a $I_1(V) \leqq K \|V\|$, où I_1 est la norme intégrale au sens de [7]. D'autre part, d'après un résultat classique ([7], chap. II, p. 15; ou plus généralement : [11], prop. 2.2), on a

$$|\operatorname{tr} T| = |\operatorname{tr}(Bu)(vA)| \leqq N(Bu) I_1(vA),$$

donc

$$\leqq K^2 \| Bu \| . \| vA \| \leqq K^2 \| B \| . \| A \| . \| u \| . \| v \| \leqq 2 K^2 K'_\varepsilon n^{(1/2)+\varepsilon} \| T \|,$$

d'où le résultat annoncé, avec $C_\varepsilon = (2 K^2 K'_\varepsilon)^{-1}$.

La démonstration avec Y au lieu de X est évidemment la même.

Pour finir, nous discutons deux questions voisines du problème des compacts non nucléaires.

Si tout opérateur compact de X dans Y est nucléaire et si $\dim X = \dim Y = \infty$, on voit facilement grâce au théorème de Dvoretzky (*cf.* [4], [5]) que tout opérateur de Z dans l^2 est 1-sommant quand $Z = X$, X', Y ou bien Y'. En particulier, il en résulte (par dualité) que tout opérateur de l^∞ dans X' est 2-sommant, donc que tout opérateur de X dans l^1 se factorise par l^2 et par conséquent est 1-sommant. Il en est de même pour Y. D'où le

PROBLÈME 3.10. — Si tout opérateur d'un espace de Banach X dans l^1 est 1-sommant, est-ce que $\dim X < \infty$?

Le lecteur vérifiera aisément à l'aide de la remarque 3.7 que si X a une base de Schauder, ou seulement s'il existe une suite (P_n) comme au corollaire 3.8, alors la question précédente à une réponse affirmative.

On peut expliciter l'hypothèse du problème 3.10 de la manière suivante :

$$\exists K \quad \text{tel que} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall \{x_1, \ldots, x_n\} \subset X, \quad \forall \{x'_1, \ldots, x'_n\} \subset X',$$

$$\sum_{1 \leqq i, j \leqq n} |\langle x'_i, x_j \rangle| \leqq K \max_{\substack{x' \in X' \\ \|x'\| \leqq 1}} \sum_1^n |\langle x', x_j \rangle| . \max_{\substack{x \in X \\ \|x\| \leqq 1}} \sum_1^n |\langle x'_i, x \rangle|.$$

Cette formulation explicite pourrait peut-être faciliter la recherche d'un contre-exemple.

Par ailleurs, pour résoudre le problème des compacts non nucléaires et le problème 3.10, il suffirait de savoir répondre à la question suivante posée dans [3] :

PROBLÈME 3.11. — Si $B(l^\infty, X) = \Pi_2(l^\infty, X)$ et $B(l^\infty, X') = \Pi_2(l^\infty, X')$, est-ce que X est nécessairement isomorphe à un espace de Hilbert ?

Le corollaire 2.9 ci-dessus suggère que la réponse est positive, mais nous ne savons pas le démontrer même avec des hypothèses d'approximation (par exemple si X a une base de Schauder).

BIBLIOGRAPHIE

[1] R. BLEI, *A Uniformity Property for* $\Lambda(2)$ *Sets and Grothendieck's Inequality* (*Symposia Math.*, vol. 22, 1977, p. 321-336).

[2] W. DAVIS et W. B. JOHNSON, *Compact, Non-Nuclear Operators* (*Studia Math.*, vol. 51, 1974, p. 81-85).

[3] E. DUBINSKY, A. PEŁCZYŃSKI et H. P. ROSENTHAL, *On Banach Spaces* X *for which* $\Pi_2(\mathscr{L}_\infty, X) = B(\mathscr{L}_\infty, X)$ (*Studia Math.*, vol. 44, 1972, p. 617-648).

[4] A. DVORETZKY, *Some Results on Convex Bodies and Banach Spaces* (*Proc. Symp. on Linear Spaces*, Jérusalem, 1961, p. 123-160).

[5] T. FIGIEL, J. LINDENSTRAUSS et V. MILMAN, *The Dimensions of Almost Spherical Sections of Convex Bodies* (*Acta Math.*, vol. 139, 1977, p. 53-94).

[6] A. GROTHENDIECK, *Résumé de la théorie métrique des produits tensoriels topologiques* (*Bol. Soc. Matem.*, Sao Paulo, vol. 8, 1956, p. 1-79).

[7] A. GROTHENDIECK, *Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires* (*Memoirs A.M.S.*, Providence, Rhode Island, n° 16, 1955).

[8] C. S. HERZ, *Drury's Lemma and Helson Sets* (*Studia Math.*, vol. 42, 1972, p. 205-219).

[9] F. JOHN, *Extremum Problems with Inequalities as Subsidiary Conditions*, courant Anniversary Volume, Interscience, New York, 1948, p. 187-204.

[10] W. B. JOHNSON, *On Finite Dimensional Subspaces of Banach Spaces with Local Unconditional Structure* (*Studia Math.*, vol. 51, 1974, p. 225-240).

[11] W. B. JOHNSON, H. KÖNIG, B. MAUREY et R. RETHERFORD, *Eigenvalues of p-Summing and l_p-Type Operators in Banach Spaces* (*J. Funct. Anal.*, vol. 32, 1979, p. 353-380).

[12] H. KÖNIG, R. RETHERFORD et N. TOMCZAK, *Jaegermann, Eigenvalues of $(p, 2)$-Summing Operators and Constants Associated with Normed Spaces* [*J. Funct. Anal.* (à paraître)].

[13] S. KWAPIEŃ, *Isomorphic Characterizations of Inner Product Spaces* [*Studia Math.*, vol. 44, 1972, p. 187-199 (*voir* aussi l'exposé 8 du *Séminaire Maurey-Schwartz*, 1972-1973, École polytechnique, Paris)].

[14] S. KWAPIEŃ, *On Operators Factorizable Through L^p-Spaces* (*Bull. Soc. math. Fr.*, Mémoire, vol. 31-32, 1972, p. 215-225).

[15] B. MAUREY, *Théorèmes de factorisation pour les opérateurs linéaires à valeurs dans les espaces L^p* (*Astérisque*, n° 11, 1974, Soc. Math. Fr.).

[16] B. MAUREY, *Quelques problèmes de factorisation d'opérateurs linéaires* (*Actes du Congrès international des mathématiciens*, Vancouver, vol. II, 1974, p. 75).

[17] B. MAUREY, *Un théorème de prolongement* (*C. R. Acad. Sc.*, Paris, série A, t. 279, 1974, p. 329-332).

[18] B. MAUREY et G. PISIER, *Séries de variables aléatoires vectorielles indépendantes et propriétés géométriques des espaces de Banach* (*Studia Math.*, vol. 58, 1976, p. 45-90).

[19] A. PIETSCH, *Operators Ideals*, Berlin, 1978, Deutsche Verlag der Wissenschaften.

[20] G. PISIER, *Grothendieck's Theorem for Non Commutative C^*-algebras with an Appendix on Grothendieck's Constants* (*J. Funct. Anal.*, vol. 29, 1978, p. 397-415).

[21] G. PISIER, *Une nouvelle classe d'espaces de Banach vérifiant le théorème de Grothendieck* (*Ann. Inst. Fourier*, vol. 28, 1978, p. 69-90).

[22] G. PISIER, *Topics on Grothendieck's Theorem. Proceedings of the International Conference on Operator Algebras, Operator Ideals and Theoretical Physics*, Leipzig, septembre 1977.

[23] G. PISIER, *Un nouveau théorème de factorisation* (*C. R. Acad. Sc.*, Paris, série A, t. 285, 1977, p. 715-718).

[24] G. PISIER, *Estimations des distances à un espace euclidien et des constantes de projection des espaces de Banach de dimension finie*, d'après H. KONIG *et al.*, exposé n° X (*Séminaire d'Analyse fonctionnelle*, École polytechnique, Palaiseau, 1978-1979).

[25] N. TOMCZAK-JAEGERMANN, *On the Moduli of Smoothness and Convexity and the Rademacher Averages of the Trace Classes* $S_p (1 \leqq p < \infty)$ (*Studia Math.*, vol. 50, 1974, p. 163-182).

[26] I. I. TSEITLIN, *On a Particular Case of the Existence of a Compact Linear Operator which is Not Nuclear* (*Funk. Anal. i. Pril.*, vol. 6, 1973, p. 102).

G. PISIER
École polytechnique,
Centre de Mathématiques,
plateau de Palaiseau,
91128 Palaiseau Cedex.

(Manuscrit reçu le 28 février 1979.)

Note ajoutée sur les épreuves. — Le résultat de Méla cité à la remarque 2.11 est inclus dans son article á paraître intitulé *Mesures ε-idempotentes de norme bornée*.

D'autre part, le lecteur trouvera une démonstration différente de ce résultat ainsi que du lemme 2.4 dans l'exposé n° 11 du *Séminaire d'Analyse Fonctionnelle* 1979-1980 de l'École polytechnique à Palaiseau.