ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

JEAN-LOUIS CATHELINEAU

Déformations équivariantes d'espaces analytiques complexes compacts

Annales scientifiques de l'É.N.S. 4^e série, tome 11, n° 3 (1978), p. 391-406

<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1978_4_11_3_391_0>

© Gauthier-Villars (Éditions scientifiques et médicales Elsevier), 1978, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales scientifiques de l'É.N.S. » (http://www.elsevier.com/locate/ansens) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Ann. scient. Éc. Norm. Sup.,
4e série, t. 11, 1978, p. 391 à 406.

DÉFORMATIONS ÉQUIVARIANTES D'ESPACES ANALYTIQUES COMPLEXES COMPACTS

PAR JEAN-LOUIS CATHELINEAU

On aborde dans cet article l'étude des déformations d'espaces analytiques complexes compacts munis d'actions de groupes. Le résultat principal est un théorème d'existence de modules locaux dans le cas d'espaces munis d'actions de groupes de Lie. Je remercie A. Douady qui m'a, entre autres choses, suggéré un point essentiel : le fait d'utiliser la lissité du foncteur $\mathrm{Déf}_{X_0}$ pour obtenir la semi-universalité et J. le Potier dont l'aide m'a été précieuse tout au long de l'élaboration de ces pages.

1. Préliminaires

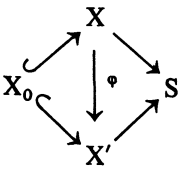
1.1. DÉFORMATIONS ÉQUIVARIANTES. — Soient G un groupe topologique localement compact et X un espace analytique complexe, munissons $G \times X$ de la structure annelée définie par le produit tensoriel extérieur complété sur $\mathbf{C}$ du faisceau des germes de fonctions continues sur G à valeurs dans $\mathbf{C}$ par le faisceau structural de X; par *action analytique* de G dans X, on entend la donnée d'un morphisme d'espaces annelés, analytique complexe par rapport à X :

$$G \times X \to X$$

satisfaisant aux propriétés habituelles d'actions de groupes; on dira aussi que G opère analytiquement dans X ou que X est un G-espace analytique. Remarquons que si G est de Lie réel et si X est compact, la donnée d'une telle action équivaut à celle d'un homomorphisme continu de G dans le groupe de Lie complexe Aut X des automorphismes de X et par suite $G \times X \to X$ est analytique réel par rapport à G.

Soit X_0 un espace analytique complexe *compact*, on rappelle que par déformation $X_0 \subsetneq X \to (S, s_0)$ de X_0 au-dessus de S, on entend la donnée d'un morphisme propre et plat $X \to S$ et d'une identification $X_0 \subsetneq X$ de X_0 à la fibre de $X \to S$ en s_0. Si de plus X_0 est un G-espace analytique, alors une déformation *équivariante* de X_0 est une déformation $X_0 \subsetneq X \to (S, s_0)$ munie d'une action analytique de G dans X au-dessus de S

qui prolonge l'action de G dans X_0. Deux déformations équivariantes de X_0 au-dessus de (S, s_0), $X_0 \subsetneq X \to S$ et $X_0 \subsetneq X' \to S$ sont dites isomorphes si on a un diagramme commutatif :



où φ est un isomorphisme équivariant.

Dans la suite, si (S, s_0) est un espace analytique pointé, on note $(\tilde{S}, s_0)$ ou simplement $\tilde{S}$, le germe de S en s_0.

A un G-espace analytique complexe compact X_0, on peut alors associer le foncteur contravariant $\mathrm{Déf}_{X_0,G}$ de la catégorie des germes d'espaces analytiques dans la catégorie des ensembles qui associe au germe $(\tilde{S}, s_0)$ l'ensemble des classes d'isomorphisme de germes de déformations équivariantes de X_0 au-dessus de (S, s_0).

DÉFINITION. — On dira qu'un groupe de Lie réel G est de type (F), si le quotient G/G_0 de G par sa composante neutre G_0 est un groupe discret de type fini.

On montrera le résultat suivant :

THÉORÈME 1. — *Soient* G *un groupe de Lie réel de type* (F) *et* X_0 *un* G*-espace analytique complexe compact, alors le foncteur* $\mathrm{Déf}_{X_0,G}$ *est semi-représentable par un germe d'espace analytique* $(\tilde{\mathscr{S}}_G, s_G)$ *de dimension finie.*

Remarques :

(*a*) le théorème 1 est aussi vrai dans le cas où G est un *groupe de Lie complexe* et où l'on considère des actions de groupes données par des morphismes : $G \times X \to X$, d'espaces complexes. La démonstration que l'on donnera plus loin dans le cas réel s'adapte sans grand changement au cas complexe; en fait, le cas réel se réduit au cas complexe par passage au groupe complexifié;

(*b*) lorsque $G = \mathbf{Z}$, déformer avec action de groupe un G-espace X_0 revient à déformer un couple (X_0, f) où f est un automorphisme de X_0. De manière analogue, lorsque $G = \mathbf{R}$, déformer de façon équivariante un G-espace X_0 revient à déformer un couple (X_0, ξ) où ξ est un automorphisme infinitésimal de X_0, c'est-à-dire un champ de vecteurs holomorphe sur X_0;

(*c*) si G est un groupe topologique localement compact qui opère analytiquement dans X_0, disons que l'action est *effective* (resp. *presque effective*) si l'homomorphisme associé : $G \to \mathrm{Aut}\, X_0$ est injectif (resp. de noyau discret); disons que l'action est *libre* (resp. *presque libre*) si pour tout $x \in X_0$, le groupe $\{g \in G;\ gx = x\}$ est trivial (resp. discret); dans chacun de ces cas G est nécessairement un groupe de Lie, de plus pour tous ces types d'actions, on a des notions de déformations équivariantes associées : par exemple on dira que $X \to S$ est une déformation équivariante effective du G-espace analytique X_0, si la restriction de l'action de G dans X à toute fibre est effective.

On peut alors montrer les résultats suivants :

soit G un groupe de Lie *compact* qui opère analytiquement dans X_0, si l'action est effective (resp. libre), tout germe de déformation équivariante de X_0 est effectif (resp. libre);

soit G un groupe de Lie qui opère analytiquement dans X_0, si l'action est presque effective (resp. presque libre), tout germe de déformation équivariante est presque effectif (resp. presque libre).

1.2. ESPACE TANGENT DU FONCTEUR $\mathrm{Déf}_{X_0,G}$. — Soit $D = \{\star, \mathbf{C}(t)/\{t^2\}\}$ l'espace constitué d'un point muni de l'algèbre des nombres duaux (espace tangent universel) par définition l'ensemble $\mathrm{Déf}_{X_0,G}(D)$, qui est naturellement un $\mathbf{C}$-espace vectoriel, s'appelle l'espace tangent de $\mathrm{Déf}_{X_0,G}$; dans le cas où $\mathrm{Déf}_{X_0,G}$ est semi-représenté par $(\tilde{\mathscr{S}}_G, s_G)$, $\mathrm{Déf}_{X_0,G}(D)$ s'identifie à l'espace tangent de Zariski du germe $\tilde{\mathscr{S}}_G$.

On suppose dans la suite de ce paragraphe que X_0 est lisse.

Soit G *un groupe discret* qui opère dans X_0 analytiquement, soit de plus θ le faisceau des germes de champ de vecteurs holomorphes sur X_0, θ est un G-faisceau au sens de [4] et on peut considérer la cohomologie équivariante de X_0 à coefficients dans θ [4] que nous noterons $H^*_G(X_0, \theta)$; supposons plus généralement que G soit *un groupe topologique localement compact*, comme il ne semble pas exister dans la littérature de théorie de cohomologie équivariante qui soit à la cohomologie H^*_G avec G discret ce que la cohomologie des cochaînes continues de Van-Est [5] est à la cohomologie d'Eilenberg-Maclane, nous allons donner une définition directe des groupes $H^*_G(X_0, \theta)$ pour G localement compact; soit TX_0 le fibré tangent holomorphe de X_0 et $\Omega^{0,p}(X_0, TX_0)$ l'espace des $(0, p)$-formes C^∞ sur X_0 à valeurs dans TX_0 muni de sa topologie d'espace vectoriel topologique; on peut considérer le bicomplexe suivant :

$$\mathfrak{a} = ((C^p(G, \Omega^{0,q}(X_0, TX_0))_{p,q}, \partial, d''),$$

où $C^p(G, \Omega^{0,q}(X_0, TX_0))$ est l'espace des p-cochaînes continues au sens de [5] à valeurs dans le G-module continu $\Omega^{0,q}(X_0, TX_0)$, ∂ est la différentielle d'Eilenberg-Maclane et d'' est l'opérateur habituel; par définition si G est un groupe topologique localement compact, $H^*_G(X_0, \theta)$ désigne la cohomologie du complexe total associé à $\mathfrak{a}$; cette définition est bien sûr compatible avec celle considérée plus haut dans le cas où G est discret. On a alors le résultat suivant :

PROPOSITION 1. — *Soit* X_0 *une variété analytique complexe compacte dans laquelle opère analytiquement un groupe topologique localement compact* G, *l'espace tangent du foncteur* $\mathrm{Déf}_{X_0,G}$ *s'identifie à* $H^1_G(X_0, \theta)$.

Supposons que G soit discret, on sait que si $\mathscr{U} = (U_i)_{i \in I}$ est un G recouvrement de X_0, c'est-à-dire un recouvrement tel que G opère dans I de telle sorte que

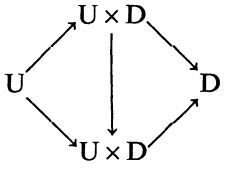
$$g.U_i = U_{g.i},$$

et si de plus $\mathscr{U}$ est acyclique pour θ, alors $H^*_G(X_0, \theta)$ s'identifie à la cohomologie du complexe total associé au bicomplexe :

$$(C^p(G, \mathscr{C}^q(\mathscr{U}, \theta)), \partial, d),$$

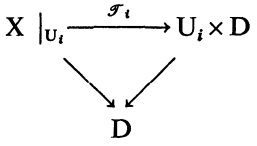
où $C^p(G, \mathscr{C}^q(\mathscr{U}, \theta))$ est l'espace des p-cochaînes sur le groupe G à valeurs dans le G-module $\mathscr{C}^q(\mathscr{U}, \theta)$ des q-cochaînes sur le recouvrement $\mathscr{U}$ à coefficients dans θ; ∂ est la différentielle de la cohomologie des groupes et d la différentielle du recouvrement.

Remarquons d'autre part que si U est un ouvert de X_0, l'ensemble des diagrammes commutatifs :



s'identifie à l'espace $\theta(U)$ des champs de vecteurs holomorphes sur U.

Soit alors $X \to D$ une déformation équivariante de X_0, comme X est lisse, on peut trouver un G-recouvrement acyclique pour θ de X_0, $\mathscr{U} = (U_i)_{i \in I}$, avec des trivialisations :



on en déduit un élément de $C^0(G, \mathscr{C}^1(\mathscr{U}, \theta)) \oplus C^1(G, \mathscr{C}^0(\mathscr{U}, \theta))$ en prenant $((\mathscr{T}_i \circ \mathscr{T}_j^{-1})_{(i,j)}, ((g^{-1} \times \mathrm{Id}).\mathscr{T}_{g.i} \circ g \circ \mathscr{T}_i^{-1})_{(g,i)})$, d'où une classe de $H^1_G(X_0, \theta)$ associée à la classe de $X \to D$.

Réciproquement, à partir d'un élément de $H^1_G(X_0, \theta)$ on construit un élément de $\mathrm{Déf}_{X_0, G}(D)$ de la manière suivante; dans un G-recouvrement acyclique $\mathscr{U} = (U_i)_{i \in I}$ de X_0, l'élément de $H^1_G(X_0, \theta)$ considéré est représenté par un couple :

$$((\theta_{i,j})_{(i,j)}, (\xi_{g,i})_{(g,i)});$$

à l'aide de $(\theta_{i,j})$ on construit par recollement une déformation $X \to D$ munie de trivialisations $\mathscr{T}_i : X|_{U_i} \to U_i \times D$ telles que $\theta_{i,j} = \mathscr{T}_i \circ \mathscr{T}_j^{-1}$ et alors les morphismes :

$$\mathscr{T}_{g.i}^{-1} \circ [(g \times \mathrm{Id}).\xi_{g,i}] \circ \mathscr{T}_i : \quad X|_{Ui} \to X|_{Ug.i}$$

se recollent en une action de G dans X.

Cette démonstration s'adapte au cas où G est localement compact.

Remarque. — Si l'on considère des actions de groupes de Lie complexes comme dans la remarque (*a*) du paragraphe 1.1, la proposition 1 est encore valable, mais il faut remplacer, dans la définition de $H^1_G(X_0, \theta)$, les cochaînes d'Eilenberg-Maclane continues par les cochaînes holomorphes.

1.3. Décomposition de $\mathscr{S}_G$. — Toujours sous les hypothèses de la proposition 1, on déduit du bicomplexe a considéré ci-dessus une suite spectrale qui converge vers $H^*_G(X_0, \theta)$ et dont le terme $E_2^{p,q}$ s'identifie à $H^p_c(G, H^q(X_0, \theta))$ où l'indice c désigne

la cohomologie des cochaînes continues [5]; on a en particulier en basse dimension une suite exacte :

$$0 \to H_c^1(G, \theta(X_0)) \to H_G^1(X_0, \theta) \to H^1(X_0, \theta)^G \to H_c^2(G, \theta(X_0)) \to H_G^2(X_0, \theta); \tag{1}$$

il en résulte que pour *G compact*, la cohomologie des cochaînes continues à coefficients dans un **R**-espace vectoriel étant triviale, on a

$$H_G^1(X_0, \theta) \simeq H^1(X_0, \theta)^G;$$

ce dernier isomorphisme est aussi vrai dans le cas où G est un groupe de Lie réel simplement connexe et *semi-simple*; en effet pour G simplement connexe, l'application naturelle $H_c^i(G, \theta(X_0)) \to H^i(\mathfrak{g}, \theta(X_0))$, où $H^i(\mathfrak{g}, \theta(X_0))$ désigne la cohomologie de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ de G à coefficients dans le $\mathfrak{g}$-module $\theta(X_0)$ est bijective pour $i = 1$ et injective pour $i = 2$ (cela résulte par exemple d'une suite spectrale de Van Est) et, de plus, si G est semi-simple, on a $H^1(\mathfrak{g}, \theta(X_0)) = H^2(\mathfrak{g}, \theta(X_0)) = 0$.

On se place maintenant sous les hypothèses du théorème 1. Il résultera de la construction de $(\mathscr{S}_G, s_G)$ que cet espace est naturellement au-dessus de l'espace de Douady associé à X_0 : $(\mathscr{S}, s_0)$, construit dans [3]. On a alors une suite de morphismes :

$$(\mathscr{F}, s_G) \to (\mathscr{S}_G, s_G) \to (\mathscr{S}, s_0),$$

où $\mathscr{F}$ est la fibre de $\mathscr{S}_G$ au-dessus de s_0. $\mathscr{F}$ s'interprète comme un espace semi-universel pour les déformations équivariantes de X_0 dont la déformation d'espace sous-jacente est triviale ou si l'on veut pour « les déformations analytiques » de l'homomorphisme de G dans Aut X_0 associé à l'action de G dans X_0. Ce dernier problème de déformations avait été considéré par A. Weil [8] du point de vue de la rigidité et dans un cadre différent. Dans le cas où X_0 est lisse, le début de la suite exacte (1) s'interprète comme la suite des dérivées en s_G de cette suite de morphismes; en particulier si $H_c^1(G, \theta(X_0)) = 0$, le morphisme $(\mathscr{S}_G, s_G) \to (\mathscr{S}, s_0)$ induit un plongement de $\tilde{\mathscr{S}}_G$ dans $\tilde{\mathscr{S}}$.

2. Existence de modules locaux

Ce paragraphe constitue la démonstration du théorème 1.

2.1. DÉFORMATION ÉQUIVARIANTE VERSELLE. — Soit X un espace au-dessus de S et G un groupe topologique localement compact, on note $\mathrm{Act}_S(G, X)$ le foncteur qui associe à un espace Y au-dessus de S l'ensemble des actions analytiques de G dans $Y \times_S X$ au-dessus de Y. On a :

PROPOSITION 2. — *Si* X *est propre et plat au-dessus de* S *et si* G *est un groupe de Lie réel de type* (F) *alors le foncteur* $\mathrm{Act}_S(G, X)$ *est représentable.*

Rappelons que par des résultats de A. Douady et G. Pourcin ([2] et [7]), on sait que l'ensemble $\mathscr{A}\mathrm{ut}_S X$ des automorphismes des fibres de $X \to S$ est muni naturellement d'une structure de groupe analytique complexe au-dessus de S et que $\mathscr{A}\mathrm{ut}_S X$ représente

le foncteur $\mathrm{Act}_S(\mathbf{Z}, X)$. La version infinitésimale de ce résultat est connue : l'ensemble $\mathfrak{aut}_S X$ des champs de vecteurs sur les fibres de $X \to S$ est muni naturellement d'une structure d'algèbre de Lie complexe au-dessus de S et $\mathfrak{aut}_S X$ représente le foncteur qui à $Y \to S$ associe l'algèbre de Lie des champs de vecteurs verticaux de $Y \times_S X$ au-dessus de Y, foncteur qui s'identifie naturellement à $\mathrm{Act}_S(\mathbf{R}, X)$.

La démonstration de la proposition 2 procède par étapes et consiste à munir l'ensemble des homomorphismes de G dans les fibres de $\mathscr{A}\mathrm{ut}_S X$ d'une structure d'espace analytique.

Cas ou G *est de Lie réel simplement connexe.* — Soit $\mathfrak{g}$ l'algèbre de Lie de G, comme G est simplement connexe, l'ensemble des homomorphismes de groupes de Lie réel de G dans les fibres de $\mathscr{A}\mathrm{ut}_S X$ s'identifie à l'ensemble des homomorphismes d'algèbres de Lie réelles de $\mathfrak{g}$ dans les fibres de $\mathfrak{aut}_S X$; soit $(a_i)_{i=1,\ldots,p}$ une base de $\mathfrak{g}$ et $C_{i,j}^k$ les constantes de structures associées, telles que

$$[a_i, a_j] = \sum_k C_{i,j}^k a_k \qquad (i < j),$$

on définit alors $Act_S(G, X)$ comme le noyau de couple :

$$(\mathfrak{aut}_S X)_S^p \underset{\Psi_1}{\overset{\Psi_0}{\rightrightarrows}} (\mathfrak{aut}_S X)_S^{p(p-1)/2},$$

où Ψ_0 est le morphisme nul et Ψ_1 est le produit fibré des morphismes $\Lambda_{i,j}$ $(i < j)$ définis à l'aide du crochet de $\mathfrak{aut}_S X$ par:

$$\Lambda_{i,j} : \quad (\mathfrak{aut}_S X)_S^p \to \mathfrak{aut}_S X,$$
$$(\omega_k) \mapsto [\omega_i, \omega_j] - \sum_k C_{i,j}^k \omega_k;$$

le fait que $Act_S(G, X)$ représente $\mathrm{Act}_S(G, X)$ vient alors de la propriété universelle de $\mathfrak{aut}_S X$ et de la simple connexité de G.

Cas ou G *est de Lie réel connexe.* — On suppose maintenant que G est un groupe de Lie réel connexe; on a une extension :

$$1 \to \pi_1(G) \to \tilde{G} \to G \to 1,$$

où $\tilde{G}$ est le revêtement universel de G et $\pi_1(G)$ son groupe de Poincaré qui est un groupe discret de type fini; soient g_i $(i = 1, \ldots, p)$ des générateurs de $\pi_1(G)$, par l'action universelle de $\tilde{G}$ dans $Act_S(\tilde{G}, X) \times_S X$ au-dessus de $Act_S(\tilde{G}, X)$ obtenue ci-dessus, il leur correspond des sections σ_i $(i = 1, \ldots, p)$ de $\mathscr{A}\mathrm{ut}_Y(Y \times_S X) \to Y$ [où $Y = Act_S(\tilde{G}, X)$]; la structure complexe de $Act_S(G, X)$ est alors définie comme l'intersection des noyaux de couple :

$$Y \underset{\sigma_{Id}}{\overset{\sigma_i}{\rightrightarrows}} \mathscr{A}\mathrm{ut}_Y(Y \times_S X),$$

où σ_{Id} désigne la section identité.

Cas ou G *est de Lie réel de type* (F). — On a alors une extension :

$$1 \to G_0 \to G \xrightarrow{\gamma} G/G_0 \to 1,$$

où G_0 est la composante neutre de G et G/G_0 est discret de type fini.

Soient $h_i\,(i = 1, \ldots, p)$ des générateurs de G/G_0 et $\tilde{h}_i\,(i = 1, \ldots, p)$ des éléments de G tels que $\gamma(\tilde{h}_i) = h_i$.

Nous utiliserons le lemme suivant, où les notations sont celles considérées ci-dessus.

LEMME 1. — *Soit* A *un groupe de Lie réel, l'ensemble* Hom (G, A) *des homomorphismes de groupes de Lie de* G *dans* A, *s'identifie au sous-ensemble des éléments* $(\varphi, f_1, \ldots, f_p) \in \mathrm{Hom}(G_0, A) \times A^p$ *qui satisfont aux égalités :*

$$(\alpha) \qquad \varphi(\tilde{h}_{i_1}^{\varepsilon_1} \tilde{h}_{i_2}^{\varepsilon_2} \ldots \tilde{h}_{i_n}^{\varepsilon_n}) = f_{i_1}^{\varepsilon_1} f_{i_2}^{\varepsilon_2} \ldots f_{i_n}^{\varepsilon_n},$$

$$(\beta) \qquad \varphi(\tilde{h}_i g_0 \tilde{h}_i^{-1}) = f_i \varphi(g_0) f_i^{-1}$$

pour toute relation $h_{i_1}^{\varepsilon_1} h_{i_2}^{\varepsilon_2} \ldots h_{i_n}^{\varepsilon_n} = 1$ (*où* $\varepsilon_i = \pm 1$) *et tout élément* g_0 *de* G_0.

Démonstration du lemme. — Montrons qu'un élément $(\varphi, f_1, \ldots, f_p)$ vérifiant les relations (α) et (β) définit un homomorphisme de groupes de Lie de G dans A. Soit H le sous-groupe de G endendré par les $\tilde{h}_i$, on pose $H_0 = G_0 \cap H$; les relations (α) montrent que la restriction de φ à H_0 se prolonge en un homomorphisme :

$$\lambda : \quad H \to A$$

tel que $\lambda(\tilde{h}_i) = f_i$. Soit g un élément G, on peut l'écrire sous la forme $g = hg_0$ où $h \in H$ et $g_0 \in G_0$; supposons que l'on ait deux telles écritures :

$$g = hg_0 = h' g_0';$$

on en déduit que l'élément :

$$h'^{-1} h = g_0' g_0^{-1}$$

appartient à H_0, d'où il résulte que

$$\lambda(h) \varphi(g_0) = \lambda(h') \varphi(g_0');$$

on définit donc une application:

$$\bar{\varphi} : \quad G \to A$$

en posant, pour $g = hg_0$, $\bar{\varphi}(g) = \lambda(h) \varphi(g_0)$; $\bar{\varphi}$ est un homomorphisme de groupes de Lie prolongeant φ et caractérisé par le fait que $\bar{\varphi}(\tilde{h}_i) = f_i$. Montrons que $\bar{\varphi}$ est bien un homomorphisme; on a pour $g = hg_0$ et $g' = h' g_0'$:

$$\begin{aligned} \bar{\varphi}(hg_0 h' g_0') &= \bar{\varphi}(hh' h'^{-1} g_0 h' g_0') \\ &= \lambda(hh') \varphi(h'^{-1} g_0 h') \varphi(g_0'); \end{aligned}$$

mais d'après les relations (β) et le fait que λ est un homomorphisme :

$$\varphi(h'^{-1} g_0 h') = \lambda(h')^{-1} \varphi(g_0) \lambda(h')$$

et

$$\bar{\varphi}(gg') = \bar{\varphi}(g) \bar{\varphi}(g').$$

d'où le lemme.

Pour toute relation $\mathscr{R}$:

$$h_{i_1}^{\varepsilon_1} h_{i_2}^{\varepsilon_2} \ldots h_{i_n}^{\varepsilon_n} = 1$$

sur les h_i, on considère maintenant le noyau de couple :

$$Act_S(G_0, X) \times_S (\mathscr{A}ut_S X)^p_S \underset{\psi_{\mathscr{R}}}{\overset{\varphi_{\mathscr{R}}}{\rightrightarrows}} \mathscr{A}ut_S X,$$

où $(\mathscr{A}ut_S X)^p_S$ désigne la puissance fibrée au-dessus de S et où $\varphi_{\mathscr{R}}$ et $\psi_{\mathscr{R}}$ sont les morphismes qui s'écrivent comme suit sur les éléments :

$$\varphi_{\mathscr{R}}(\varphi, f_1, \ldots, f_p) = \varphi(\tilde{h}_{i_1}^{\varepsilon_1} \tilde{h}_{i_2}^{\varepsilon_2} \ldots \tilde{h}_{i_n}^{\varepsilon_n}),$$

$$\psi_{\mathscr{R}}(\varphi, f_1, \ldots, f_p) = f_{i_1}^{\varepsilon_1} \cdot f_{i_2}^{\varepsilon_2} \ldots f_{ip}^{\varepsilon p};$$

on considère d'autre part pour $i \in \{1, \ldots, p\}$ et pour $g_0 \in G_0$, le noyau de couple :

$$Act_S(G_0, X) \times_S (\mathscr{A}ut_S X)^p_S \underset{\psi_{g_0, i}}{\overset{\varphi_{g_0, i}}{\rightrightarrows}} \mathscr{A}ut_S X,$$

où

$$\varphi_{g_0, i}(\varphi, f_1, \ldots, f_p) = f_i \cdot \varphi(g_0) \cdot f_i^{-1},$$

$$\psi_{g_0, i}(\varphi, f_1, \ldots, f_p) = \varphi(\tilde{h}_i g_0 \tilde{h}_i^{-1});$$

il résulte d'un théorème classique de cohérence et du lemme que l'intersection de tous ces noyaux de couples est localement finie et définit un espace analytique qui est l'espace $Act_S(G, X)$ cherché.

Dans la suite de ce paragraphe G est un groupe de Lie réel de type (F) et X_0 un G-espace analytique complexe compact; notons $\mathfrak{X} \to (\mathscr{S}, s_0)$ la déformation semi-universelle de X_0 construite par A. Douady dans [3]; il résulte directement de la proposition 2 appliquée à $\mathfrak{X} \to \mathscr{S}$ que la déformation équivariante :

$$(Act_{\mathscr{S}}(G, \mathfrak{X}), s_G) \times_{\mathscr{S}} \mathfrak{X} \to (Act_{\mathscr{S}}(G, \mathfrak{X}), s_G),$$

où s_G est le point de $Act_{\mathscr{S}}(G, \mathfrak{X})$ correspondant à l'action de G dans X_0, est une déformation équivariante verselle du G-espace X_0. Elle n'est pas en général semi-universelle.

2.2. « Action » de Aut X_0. — Le lemme de prolongement suivant est dû à A. Douady (*cf.* démonstration de [3], prop. 1, VIII, 3).

Lemme 2. — *Soient X_0 un espace analytique compact et $\mathfrak{X} \to (\mathscr{S}, s_0)$ une déformation semi-universelle de X_0; soient, de plus, $Y \to (T, t_0)$ une déformation de X_0, T' un sous-espace analytique de T contenant t_0, $h' : (T', t_0) \to (\mathscr{S}, s_0)$ un morphisme tel que $h'^* \mathfrak{X}$ soit isomorphe à Y/T' et $g' : Y/T' \to f'^* \mathfrak{X}$ un T'-isomorphe; alors il existe un morphisme $h : (T, t_0) \to (\mathscr{S}, s_0)$ défini au voisinage de t_0 et un T-isomorphisme $g : Y \to h^* \mathfrak{X}$ tel que $h/T' = h'$ et $g/T' = g'$.*

Considérons le sous-espace $P = (\text{Aut } X_0 \times \{s_0\}) \cup (\{\text{Id}\} \times \mathscr{S})$ de Aut $X_0 \times \mathscr{S}$; on a un diagramme cartésien :

$$(2) \qquad \begin{array}{ccc} (\text{Aut } X_0 \times \mathfrak{X})\,|_P & \to & \mathfrak{X} \\ \downarrow & & \downarrow \\ P & \longrightarrow & \mathscr{S} \end{array}$$

obtenu en recollant les diagrammes :

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{X} & \xrightarrow{\mathrm{id}} & \mathfrak{X} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathscr{S} & \xrightarrow[\mathrm{id}]{} & \mathscr{S} \end{array}$$

et

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Aut}\, X_0 \times X_0 & \longrightarrow & X_0 \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{Aut}\, X_0 \times \{s_0\} & \to & \{s_0\} \end{array}$$

où $\mathrm{Aut}\, X_0 \times X_0 \to X_0$ est l'action de $\mathrm{Aut}\, X_0$ dans X_0.

A l'aide du lemme 2, on peut prolonger le diagramme (2) au voisinage de $\mathrm{Id} \times \{s_0\}$ en un diagramme cartésien

$$\begin{array}{ccc} V \times (\mathfrak{X} \mid_{\mathscr{S}'}) & \xrightarrow{\bar{\rho}} & \mathfrak{X} \\ \downarrow & & \downarrow \\ V \times \mathscr{S}' & \xrightarrow{\rho} & \mathscr{S} \end{array} \tag{3}$$

où V est un voisinage de Id dans $\mathrm{Aut}\, X_0$ et $\mathscr{S}'$ est un voisinage de s_0 dans $\mathscr{S}$.

Pour finir de construire l' « action » de $\mathrm{Aut}\, X_0$, nous avons besoin du lemme suivant :

LEMME 3. — *Soient* X *et* Y *deux espaces analytiques propres et plats respectivement au-dessus de* S *et* T; *si d'autre part :*

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\bar{\rho}} & Y \\ \downarrow & & \downarrow \\ S & \xrightarrow[\rho]{} & T \end{array}$$

est un diagramme cartésien; alors il existe un morphisme λ *d'espaces analytiques unique au-dessus de* ρ :

$$\lambda : \quad \mathscr{A}\mathrm{ut}_S X \to \mathscr{A}\mathrm{ut}_T Y$$

tel que $\lambda \times \bar{\rho} : \mathscr{A}\mathrm{ut}_S X \times_S X \to \mathscr{A}\mathrm{ut}_T Y \times_T Y$ *commute avec les automorphismes universels* Λ_X *et* Λ_Y *de* $\mathscr{A}\mathrm{ut}_S X \times_S X$ *et* $\mathscr{A}\mathrm{ut}_T Y \times_T Y$.

Démonstration du lemme 3. — On se place d'abord dans le cas où $S = T$ et $\rho = \mathrm{Id}$; $\bar{\rho}$ est alors un S-isomorphisme; le morphisme $(\mathrm{Id} \times \bar{\rho}) \circ \Lambda_X \circ (\mathrm{Id} \times \bar{\rho}^{-1})$ est un automorphisme de $\mathscr{A}\mathrm{ut}_S X \times_S Y$ au-dessus de $\mathscr{A}\mathrm{ut}_S X$; par la propriété universelle de $\mathscr{A}\mathrm{ut}_S Y$, on en déduit un morphisme $\lambda : \mathscr{A}\mathrm{ut}_S X \to \mathscr{A}\mathrm{ut}_S Y$ qui est celui cherché. Le cas général se ramène au précédent en considérant $Y \times_T S$ et en composant le morphisme que l'on vient d'obtenir avec le morphisme $\mathscr{A}\mathrm{ut}_S (Y \times_T S) \to \mathscr{A}\mathrm{ut}_T Y$ construit comme suit : l'espace $\mathscr{A}\mathrm{ut}_S (Y \times_T S) \times_S (Y \times_T S)$ est isomorphe à $\mathscr{A}\mathrm{ut}_S (Y \times_T S) \times_T Y$, par suite l'automorphisme universel de $\mathscr{A}\mathrm{ut}_S (Y \times_T S) \times_S (Y \times_T S)$ donne un automorphisme de $\mathscr{A}\mathrm{ut}_S (Y \times_T S) \times_T Y$ au-dessus de $\mathscr{A}\mathrm{ut}_S (Y \times_T S)$, d'où un morphisme de $\mathscr{A}\mathrm{ut}_S (Y \times_T S)$ dans $\mathscr{A}\mathrm{ut}_T Y$. Enfin l'unicité de λ vient de la propriété universelle de $\mathscr{A}\mathrm{ut}_T Y$.

On déduit du diagramme (3), à l'aide du lemme 3, un morphisme :

$$\lambda : \quad V \times Act_{\mathscr{S}'}(G, \mathfrak{X} \mid_{\mathscr{S}'}) \to Act_{\mathscr{S}}(G, \mathfrak{X})$$

au-dessus de ρ, caractérisé par la propriété suivante : λ est l'unique morphisme au-dessus de ρ, tel que le morphisme associé :

$$\lambda \times \bar{\rho} : \quad V \times (Act_{\mathscr{G}'}(G, \mathfrak{X} \mid_{\mathscr{G}'}) \times_{\mathscr{G}'} \mathfrak{X}) \to Act_{\mathscr{G}}(G, \mathfrak{X}) \times_{\mathscr{G}} \mathfrak{X}$$

soit G-équivariant pour les actions provenant de l'action universelle de G dans $Act_{\mathscr{G}}(G, \mathfrak{X}) \times_{\mathscr{G}} \mathfrak{X}$.

2.3. DÉFORMATION ÉQUIVARIANTE SEMI-UNIVERSELLE. — Revenons au morphisme :

$$\lambda : \quad V \times Act_{\mathscr{G}'}(G, \mathfrak{X} \mid_{\mathscr{G}'}) \to Act_{\mathscr{G}}(G, \mathfrak{X})$$

par des arguments classiques de fonctions implicites (en dimension finie) et de semi-continuité ([1], lemme 1), on peut alors trouver une sous-variété V′ de V passant par l'identité et un sous-espace $\mathscr{S}_G$ de $Act_{\mathscr{G}}(G, \mathfrak{X})$ passant par s_G tels que λ induise un isomorphisme de $V' \times \mathscr{S}_G$ sur un voisinage de s_G dans $Act_{\mathscr{G}}(G, \mathfrak{X})$. La restriction de $Act_{\mathscr{G}}(G, \mathfrak{X}) \times_{\mathscr{G}} \mathfrak{X}$ à $\mathscr{S}_G$ est alors la déformation équivariante semi-universelle cherchée, d'où le théorème 1.

3. Compléments

Dans la suite, X_0 sera toujours une variété analytique complexe compacte.

3.1. CAS PARTICULIERS ET EXEMPLES.

Actions de $\mathbf{Z}$. — Faire opérer $\mathbf{Z}$ dans X_0 équivaut à se donner un élément $f \in \mathrm{Aut}\, X_0$; comme $\mathbf{Z}$ est libre, on a $H^2(\mathbf{Z}, \theta(X_0)) = 0$ et la suite (1) du paragraphe 1 donne une suite exacte :

$$0 \to \theta(X_0)/A_f \to H^1_{\mathbf{Z}}(X_0, \theta) \to H^1(X_0, \theta)^{[f]} \to 0,$$

où $A_f = \{f^n(\xi) - \xi$, pour $n \in \mathbf{Z}$ et $\xi \in \theta(X_0)\}$. En particulier si l'action induite par $\mathbf{Z}$ dans $\theta(X_0)$ est triviale on a la suite exacte

$$0 \to \theta(X_0) \to H^1_{\mathbf{Z}}(X_0, \theta) \to H^1(X_0, \theta)^{[f]} \to 0;$$

Considérons par exemple un tore T de dimension n et l'action de $\mathbf{Z}$ obtenue à partir de la translation par un élément $a \in T$; l'action induite dans $\theta(X_0)$ est triviale et de plus $H^1(T, \theta)^{\mathbf{Z}} = H^1(T, \theta)$, d'où :

$$\dim H^1_{\mathbf{Z}}(T, \theta) = n^2 + n.$$

Actions de $\mathbf{R}$. — Soit ξ un champ de vecteurs holomorphe sur X_0 et considérons l'action analytique de $\mathbf{R}$ dans X_0 associée, on montre que la suite (1) du paragraphe 1 donne de façon analogue une suite exacte :

$$0 \to \theta(X_0)/A_\xi \to H^1_{\mathbf{R}}(X_0, \theta) \to H^1(X_0, \theta)^{\mathbf{R}} \to 0,$$

où

$$A_\xi = \{[\xi, \eta]; \eta \in \theta(X_0)\}.$$

Exemples de variétés non rigides qui sont rigides avec action de groupes. — Considérons l'espace projectif $\mathbf{P}_n(\mathbf{C})$, le groupe symétrique $\mathfrak{S}_{n+1}$ opère dans $\mathbf{P}_n(\mathbf{C})$ par permutation des coordonnées homogènes. Si V est une hypersurface non singulière de degré h de $\mathbf{P}_n(\mathbf{C})$,

on dira qu'elle est symétrique si elle est stable par l'action de $\mathfrak{S}_{n+1}$ dans $\mathbf{P}_n(\mathbf{C})$; dans ce cas on peut considérer V comme une variété munie d'une action du groupe $\mathfrak{S}_{n+1}$.

Si V est une hypersurface de $\mathbf{P}_n(\mathbf{C})$ de degré h, on a d'après Kodaira-Spencer [6] une suite exacte [pour $(n, h) \neq (3, 4)$] :

$$0 \to H^0(\mathbf{P}_n, \theta_{\mathbf{P}_n}) \to H^{0,0}(V, [V]) \to H^1(V, \theta_V) \to 0,$$

où [V] est le fibré associé au diviseur défini par V. Si V est symétrique, $\mathfrak{S}_{n+1}$ opère dans les éléments de cette suite exacte et les morphismes de la suite sont équivariants; $\mathfrak{S}_{n+1}$ étant fini, il en résulte une suite exacte :

$$0 \to H^0(\mathbf{P}_n, \theta_{\mathbf{P}_n})^{\mathfrak{S}_{n+1}} \to H^{0,0}(V, [V])^{\mathfrak{S}_{n+1}} \to H^1(V, \theta_V)^{\mathfrak{S}_{n+1}} \to 0; \tag{4}$$

$H^0(\mathbf{P}_n, \theta_{\mathbf{P}_n})^{\mathfrak{S}_{n+1}}$ s'identifie à l'algèbre de Lie du sous-groupe du groupe projectif constitué des éléments équivariants pour l'action de $\mathfrak{S}_{n+1}$ dans $\mathbf{P}_n$; cela entraîne :

$$\dim H^0(\mathbf{P}_n, \theta_{\mathbf{P}_n})^{\mathfrak{S}_{n+1}} = 1;$$

d'autre part en utilisant la description des sections de [V] à l'aide des polynômes homogènes de degré h en $n+1$ variables, on a

$$\dim H^{0,0}(V, [V])^{\mathfrak{S}_{n+1}} = \mu_{n,h} - 1,$$

où $\mu_{n,h}$ est la dimension de l'espace des polynômes homogènes symétriques de degré h en $n+1$ variables. Il résulte alors de la suite exacte (4) que pour $(n, h) \neq (3, 4)$, on a

$$\dim H^1(V, \theta)^{\mathfrak{S}_{n+1}} = \mu_{n,h} - 2;$$

il est classique que $\mu_{n,h}$ est égal au coefficient du terme de degré h dans la série de Poincaré :

$$\frac{1}{(1-t)(1-t^2)\ldots(1-t^{n+1})},$$

un calcul montre alors que pour $h = 3$ et n quelconque, on a

$$\mu_{n,3} = 2,$$

d'où :

PROPOSITION 3. — *Toute hypersurface symétrique de degré* 3 *dans* $\mathbf{P}_n(\mathbf{C})$ *est rigide comme variété avec action de* $\mathfrak{S}_{n+1}$, *mais elle ne l'est pas en général comme variété sans action de groupe.*

Par exemple pour $n = 3$ et $h = 3$, on a d'après Kodaira-Spencer : $\dim H^1(V, \theta) = 4$.

3.2. RIGIDITÉ PARTIELLE. — Le résultat qui suit donne un phénomène de rigidité partielle; il est probablement vrai, en fait, dans le cas où G est un groupe de Lie dont le quotient par sa composante neutre est de présentation finie.

PROPOSITION 4. — *Soient* G *un groupe discret de présentation finie ou un groupe de Lie réel simplement connexe et* X_0 *une* G*-variété analytique complexe compacte, on suppose que*

$$H^1(X_0, \theta)^G = 0 \quad \text{et} \quad H_c^2(G, \theta(X_0)) = 0,$$

alors pour toute déformation équivariante de X_0, *le germe de déformation de variété sous-jacent est trivial.*

Démonstration. — L'hypothèse sur H^1 entraîne que la fibre $\mathscr{F}$ (*cf.* § 1) de $\mathscr{S}_G$ au-dessus de s_0 a même espace tangent de Zariski en s_G que $\mathscr{S}_G$; nous allons montrer que l'hypothèse sur H^2_c entraîne que $\mathscr{F}$ est lisse en s_G; il en résultera par le théorème des fonctions implicites que $\mathscr{F}$ et $\mathscr{S}_G$ coïncident au voisinage de s_G, d'où la proposition :

Supposons que G soit de présentation finie et montrons que $H^2(G, \theta(X_0)) = 0$ entraîne la lissité de $\mathscr{F}$ en s_G. On a une extension de groupes :

$$1 \to G'' \to G' \to G \to 1,$$

où G' et G'' sont libres de type fini; soient p et q leurs ordres respectifs et h_i $(i = 1, \ldots, p)$ des générateurs de G'. La fibre Hom (G, Aut X_0) de $Act_{\mathscr{S}}(G, \mathfrak{X})$ au-dessus de s_0 s'identifie à l'espace $\mathscr{R}^{-1}(1)$ où:

$$\mathscr{R}: \quad \mathrm{Hom}(G', \mathrm{Aut}\, X_0) \to \mathrm{Hom}(G'', \mathrm{Aut}\, X_0)$$

est la restriction et 1 désigne l'élément trivial de Hom (G'', Aut X_0). On a

$$\mathrm{Hom}(G', \mathrm{Aut}\, X_0) \simeq (\mathrm{Aut}\, X_0)^p \qquad \text{et} \qquad \mathrm{Hom}(G'', \mathrm{Aut}\, X_0) \simeq (\mathrm{Aut}\, X_0)^q;$$

la dérivée en s_G de $\mathscr{R}$ s'identifie à la restriction (*cf.* [8]) :

$$r: \quad Z^1(G', \theta(X_0)) \to Z^1(G'', \theta(X_0)),$$

où Z^1 désigne les 1-cocycles de cohomologie des groupes, G' opère dans $\theta(X_0)$ par l'intermédiaire de l'action de G et G'' opère trivialement dans $\theta(X_0)$; l'application exp : $\theta(X_0) \to \mathrm{Aut}\, X_0$ induit une application encore notée

$$\exp: \quad Z^1(G'', \theta(X_0)) \to \mathrm{Hom}(G'', \mathrm{Aut}\, X_0),$$

qui est un isomorphisme analytique au voisinage de 0 et dont la dérivée en 0 est l'identité de $Z^1(G'', \theta(X_0))$; Hom (G, Aut X_0) s'identifie alors au voisinage de s_G à $(\exp^{-1} \circ \mathscr{R})^{-1}(0)$; la dérivée de $\exp^{-1} \circ \mathscr{R}$ est r, et r prend ses valeurs dans $Z^1(G'', \theta(X_0))^G$. où $Z^1(G'', \theta(X_0))^G$ désigne les invariants de $Z^1(G'', \theta(X_0))$ pour l'action de G provenant de l'action dans $\theta(X_0)$ et de l'action intérieure de G' dans G''; par contre l'application $\exp^{-1} \circ \mathscr{R}$ n'est pas nécessairement à valeurs dans $Z^1(G'', \theta(X_0))^G$; dans la suite on se propose de remplacer cette dernière application par une application à valeurs dans $Z^1(G'', \theta(X_0))^G$ qui jouera le même rôle vis-à-vis de Hom (G, Aut X_0).

Considérons le fibré trivial :

$$\mathrm{Hom}(G', \mathrm{Aut}\, X_0) \times \mathrm{Hom}(G'', \mathrm{Aut}\, X_0) \to \mathrm{Hom}(G', \mathrm{Aut}\, X_0)$$

et sa section σ définie par $\sigma(\varphi) = (\varphi, \mathscr{R}(\varphi))$; on a un morphisme de fibrés holomorphes :

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}(G', \mathrm{Aut}\, X_0) \times \mathrm{Hom}(G'', \mathrm{Aut}\, X_0) & \xrightarrow{\Lambda^1} & \mathrm{Hom}(G', \mathrm{Aut}\, X_0) \times \mathrm{Hom}(G'', \mathrm{Aut}\, X_0)^p \\ & \searrow \quad \swarrow & \\ & \mathrm{Hom}(G', \mathrm{Aut}\, X_0) & \end{array}$$

définie par

$$\Lambda(\varphi, \Psi) = (\varphi, \Lambda_\varphi(\Psi)),$$

où pour $i = 1, \ldots, p$ et h_i le générateur de G' correspondant :

$$[\Lambda_\varphi(\Psi)]_i(g) = \varphi(h_i)\Psi(h_i^{-1} g h_i)\varphi(h_i)^{-1},$$

notons que

$$\Lambda \circ \sigma(\varphi) = (\varphi, \underbrace{(\mathscr{R}(\varphi), \ldots, \mathscr{R}(\varphi))}_{p});$$

par dérivation verticale le long de la section triviale de

$$\mathrm{Hom}(G', \mathrm{Aut}\, X_0) \times \mathrm{Hom}(G'', \mathrm{Aut}\, X_0) \to \mathrm{Hom}(G', \mathrm{Aut}\, X_0),$$

on déduit de Λ un morphisme $\bar{\Lambda}$ de fibrés vectoriels holomorphes :

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}(G', \mathrm{Aut}\, X_0) \times Z^1(G'', \theta(X_0)) & \xrightarrow{\bar{\Lambda}} & \mathrm{Hom}(G', \mathrm{Aut}\, X_0) \times Z^1(G'', \theta(X_0))^p \\ & \searrow \quad \swarrow & \\ & \mathrm{Hom}(G', \mathrm{Aut}\, X_0) & \end{array}$$

tel que

$$\bar{\Lambda}(\varphi, \xi) = (\varphi, \bar{\Lambda}_\varphi(\xi)),$$

avec

$$[\bar{\Lambda}_\varphi(\xi)]_i = h_i.\xi,$$

le point désignant l'action de G dans $Z^1(G'', \theta(X_0))$ considérée ci-dessus; de plus, si $\bar{\sigma}$ désigne la section définie au voisinage de s_G par

$$\bar{\sigma}(\varphi) = (\varphi, \exp^{-1} \circ \mathscr{R}(\varphi)),$$

on a :

$$\bar{\Lambda} \circ \bar{\sigma}(\varphi) = (\varphi, \underbrace{(\exp^{-1} \circ \mathscr{R}(\varphi), \ldots, \exp^{-1} \circ \mathscr{R}(\varphi))}_{p})$$

par un argument de fonctions implicites, $\bar{\sigma}$ apparaît comme section d'un sous-fibré E de $\mathrm{Hom}(G', \mathrm{Aut}\, X_0) \times Z^1(G'', \mathrm{Aut}\, X_0)$ dont la fibre au-dessus de s_G n'est autre que $Z^1(G'', \theta(X_0))^G$; en considérant la projection :

$$\pi : \quad E\,|_W \to Z^1(G'', \theta(X_0))^G$$

associée à une trivialisation de E au-dessus d'un voisinage W de s_G, on obtient une équation $\pi \circ \bar{\sigma}$ pour $\mathrm{Hom}(G, \mathrm{Aut}\, X_0) \cap W$, à valeurs dans $Z^1(G'', \theta(X_0))^G$ et dont la dérivée en s_G est r. Remarquons maintenant que l'on a une suite exacte

$$0 \to Z^1(G, \theta(X_0)) \to Z^1(G', \theta(X_0)) \to Z^1(G'', \theta(X_0))^G \to H^2(G, \theta(X_0)) \to 0$$

qui n'est autre que la suite exacte en basse dimension associée à la suite spectrale de Hochschild-Serre de l'extension :

$$1 \to G'' \to G' \to G \to 1$$

($Z^1(G'', \theta(X_0)) = H^1(G'', \theta(X_0))$ car G'' opère trivialement dans $\theta(X_0)$ et $H^2(G', \theta(X_0)) = 0$ car G' est libre).

On déduit alors de ce qui précède et du théorème des fonctions implicites que $\mathscr{F}$ a en s_G un modèle de la forme (U, μ), où U est un voisinage de 0 dans $H^1(G, \theta(X_0))$ et $\mu : U \to H^2(G, \theta(X_0))$; en particulier $\mathscr{F}$ est lisse en s_G si $H^2(G, \theta(X_0)) = 0$.

Nous n'écrivons pas en détail le cas où G est de Lie simplement connexe; disons seulement que l'on peut donner une démonstration analogue à celle de la proposition 2 de [1], en effet l'équation de Hom (G, Aut X_0) (*cf.* § 2) :

$$(\omega_k)_k \to ([\omega_i, \omega_j] - \sum_k C^k_{i,j}\omega_k)_{i,j}$$

a une forme analogue à la condition d'intégrabilité avec une partie linéaire analogue du d'' et une partie du second ordre donnée par le crochet.

3.3. PROLONGEMENT DES ACTIONS DE GROUPES. — Le résultat qui suit donne un critère pour prolonger des actions de groupes à travers des déformations.

PROPOSITION 5. — *Soit* G *un groupe topologique compact qui opère analytiquement dans une variété complexe compacte* X_0*; si* G *opère trivialement dans* $H^1(X_0, \theta)$ *et si* $H^2(X_0, \theta)^G = 0$, *alors pour toute déformation* $Y \to (T, t_0)$ *de* X_0, *l'action* G *dans* X_0 *se prolonge en une action analytique au-dessus d'un voisinage de* t_0.

La démonstration repose sur l'assertion suivante : (démontrée ci-dessous) : « si G est un groupe topologique compact et si X_0 est lisse, le foncteur $\text{Déf}_{X_0,G}$ a un espace semi-universel $(\mathscr{S}_G, s_G)$ naturellement plongé dans $(\mathscr{S}, s_0)$ et si de plus $H^2(X_0, \theta)^G = 0$ alors le germe $\tilde{\mathscr{S}}_G$ est lisse ». Le fait que G opère trivialement dans $H^1(X_0, \theta)$ entraîne que $\tilde{\mathscr{S}}_G$ et $\tilde{\mathscr{S}}$ ont même espace tangent de Zariski; la proposition résulte alors de ce que par la lissité de $\tilde{\mathscr{S}}_G$ et le théorème des fonctions implicites les germes $\tilde{\mathscr{S}}_G$ et $\tilde{\mathscr{S}}$ coïncident.

Revenons à l'assertion du début : on en donne une démonstration s'inspirant de [1]; on utilise les notations suivantes : $\varphi^r(X_0)$ est l'espace des structures complexes de classe C^r sur X_0, $\Xi \to \varphi^r(X_0)$ est la déformation universelle de X_0 de [1] et pour $X \to T$, on note $\text{Diff}^{r+1}_T(X_0, X)$ l'espace des difféomorphismes de classe C^{r+1} de X_0 dans les fibres de X.

Si X un espace analytique éventuellement banachique où G opère analytiquement, on note X^G le noyau de couple :

$$X \underset{\psi_1}{\overset{\psi_0}{\rightrightarrows}} C^0(G, X)$$

où $C^0(G, X)$ est l'ensemble des applications continues de G dans X muni de la structure banachique provenant de X, ψ_0 est le plongement de X dans $C^0(G, X)$ défini par les applications constantes et ψ_1 est défini à partir de l'action de G et s'écrit sur les éléments :

$$x \to (g \to g.x);$$

l'ensemble sous-jacent à X^G est l'ensemble des éléments de X invariants par G. Soit $X \to T$ une déformation équivariante de X_0, G opère dans $\text{Diff}^{r+1}_T(X_0, X)$ analytiquement grâce aux actions de G dans X_0 et X, et l'ensemble sous-jacent à $\text{Diff}^{r+1}_T(X_0, X)^G$ est l'ensemble des difféomorphismes de classe C^{r+1} équivariants de X_0 dans les fibres de X. L'existence d'un espace semi-universel pour $\text{Déf}_{G,X_0}$ résultera des deux assertions :

(*a*) l'espace $\text{Diff}^{r+1}_T(X_0, X)^G$ est lisse au-dessus de T.

(*b*) si G est un groupe compact opérant analytiquement dans X_0, le complexe (où ${}^{i}\Omega$ désigne les formes de classe C^i) :

$$({}^{r+1}\Omega^{0,0}(X_0, TX_0))^G \xrightarrow{d''} ({}^{r}\Omega^{0,1}(X_0, TX_0))^G \xrightarrow{d''} \dots$$

est direct et a pour cohomologie $H^*(X_0, \theta)^G$.

La première résulte de la lissité de $\mathrm{Diff}_T^{r+1}(X_0, X)$ et du fait que, comme G est compact, on peut linéariser l'action de groupe au voisinage d'un point fixe.

La seconde résulte de ce que le complexe du d'' correspondant sans action de groupe est direct et de la compacité de G.

L'action de G dans X_0 induit une action analytique :

$$\begin{array}{ccc} G \times \Xi & \longrightarrow & \Xi \\ \downarrow & & \downarrow \\ G \times \varphi^r(X_0) & \to & \varphi^r(X_0), \end{array}$$

d'où l'on déduit une déformation équivariante :

$$\Xi\,|_{(\varphi^r(X_0))^G} \to \varphi^r(X_0)^G.$$

Modulo ce qui précède il suffit pour obtenir l'espace semi-universel de remplacer dans la démonstration de [1], $\mathrm{Diff}_T^{r+1}(X_0, X)$ par $\mathrm{Diff}_T^{r+1}(X_0, X)^G$, le complexe $(\cdot\Omega^{0,\cdot}, d'')$ par le complexe $((\cdot\Omega^{0,\cdot})^G, d'')$ et $\varphi^r(X_0)$ par $\varphi^r(X_0)^G$.

On peut faire la construction de telle sorte que $\mathscr{S}_G$ soit plongé dans l'espace semi-universel de Kuranishi habituel.

On peut montrer enfin comme dans [1] que si $H^2(X_0, \theta)^G = 0$ alors $\mathscr{S}_G$ est lisse en s_G.

Remarques :

(*a*) il est probable que si G est un groupe de Lie dont le quotient par sa composante neutre est de présentation finie alors le fait que $H^2_G(X_0, \theta) = 0$ entraîne la lissité de $\tilde{\mathscr{S}}_G$.

Modulo ce résultat, la proposition 5 est aussi vraie dans le cas où G est un groupe de Lie réel semi-simple et simplement connexe;

(*b*) rapprochons pour terminer la proposition 4 de la proposition 5 : la proposition 4 donne un critère de non-plongement des actions de groupes à travers les déformations. On a, par exemple, le résultat suivant : soient $X \to (S, s_0)$ une déformation de X_0 non triviale au voisinage de s_0 et f un automorphisme de X_0 suffisamment non trivial (i. e. tel que $H^1(X_0, \theta)^{[f]} = 0$), alors il n'existe pas, au voisinage de s_0, de section de

$$\mathscr{A}\mathrm{ut}_S X \to S$$

passant par f.

BIBLIOGRAPHIE

[1] A. DOUADY, *Le problème des modules pour les variétés analytiques complexes* (d'après Kuranishi) (*Séminaire Bourbaki*, n° 227, décembre 1964).

[2] A. DOUADY, *Le problème des modules pour les sous-espaces analytiques compacts d'un espace analytique donné* (*Ann. Inst. Fourier*, Grenoble, t. 16, n° 1, 1966, p. 1-95).

[3] A. DOUADY, *Le problème des modules locaux pour les espaces* C*-analytiques compacts* (*Ann. Scient. Éc. Norm. Sup.*, t. 7, 1974, p. 569-602).
[4] A. GROTHENDIECK, *Sur quelques points d'algèbres homologiques* (*Tohoku Math. J.*, t. 8, 1964, p. 139-151).
[5] HOCHSCHILD-MOSTOW, *Cohomology of Lie Groups* (*Illinois J. of Math.*, t. 6, 1962, p. 367-401).
[6] KODAIRA-SPENCER, *On Deformation of Complex Analytic Structures* (*Ann. of Math.*, t. 67, 1958, p. 328-460).
[7] G. POURCIN, *Théorème de Douady au-dessus de* S (*Ann. Scuola. Norm. Sup. Pisa*, t. 23, 1969, p. 451-459).
[8] M. S. RAGUNATHAN, *Discrete Subsgroups of Lie Groups*, Springer-Verlag, 1972.

(Manuscrit, reçu le 28 novembre 1978,
révisé le 29 juin 1978.)

J.-L. CATHELINEAU,
Institut de Mathématiques,
avenue du Recteur-Pineau,
86022 Poitiers.