

ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

HANS JOACHIM BAUES

**Relationen für primäre Homotopieoperationen und eine
verallgemeinerte EHP-Sequenz**

Annales scientifiques de l'É.N.S. 4^e série, tome 8, n° 4 (1975), p. 509-533

http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1975_4_8_4_509_0

© Gauthier-Villars (Éditions scientifiques et médicales Elsevier), 1975, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales scientifiques de l'É.N.S. » (<http://www.elsevier.com/locate/ansens>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

RELATIONEN FÜR PRIMÄRE HOMOTOPIEOPERATIONEN UND EINE VERALLGEMEINERTE EHP-SEQUENZ

VON HANS JOACHIM BAUES (*)

Zwischen den primären Homotopieoperationen wie der Komposition \circ , dem Whitehead-Produkt $[,]$ und den Hopf-Invarianten γ_r existieren Relationen. So ist die Formel von Barcus und Barratt [2], welche eine Expansion des Whitehead-Produkts $[\alpha, \beta \circ \delta]$ mit Hilfe von Hopf-Invarianten angibt, eine solche Relation. Durch die Untersuchung der Homotopiegruppen eines Abbildungskegels C_f erhalten wir eine Vielzahl von diesen Relationen : Zu Suspensionen SA und SB seien

$$\gamma_r : [SA, SB] \rightarrow [SA, SB^{(r)}],$$

die James-Hopf-Invarianten mit $r \geq 1$. Dabei ist B zusammenhängend und $B^{(r)} = B \wedge \dots \wedge B$ das r -fache »smash«-Produkt. Weiter sei

$$[,] : [SX, Z] \times [SY, Z] \rightarrow [SX \wedge Y, Z],$$

das Whitehead-Produkt. So sei für $f \in [SA, SB]$ und für die Identität 1_{SB} :

$$[f, 1_{SB}^{(r)}] = [\dots [f, 1_{SB}], \dots, 1_{SB}] \in [SA \wedge B^{(r)}, SB]$$

das r -fach iterierte Whitehead-Produkt. Ferner sei die Abbildung

$$X \wedge f \wedge Y : SX \wedge A \wedge Y \rightarrow SX \wedge B \wedge Y$$

bis auf Vertauschung der Suspensionskoordinate S gleich $1_X \wedge f \wedge 1_Y$. Dann gilt :

SATZ A. — *Seien A und B Suspensionen und sei $f \in [SA, SB]$. Dann hat man zu jedem Paar (m, n) mit $m, n \geq 0$ in $[SA \wedge B^{(m)} \wedge A \wedge B^{(n)}, SB]$ die Gleichung*

$$\sum_{r \geq 1} [f, 1_{SB}^{(m+n+r)}] \circ (A \wedge B^{(m)} \wedge \gamma_r(f) \wedge B^{(n)}) = \sum_{a \dot{\cup} b = \bar{n}} v_{a,b}^* [[f, 1_{SB}^{(m+a)}], [f, 1_{SB}^{(b)}]].$$

(*) Der Autor wurde vom «Centre National de la Recherche Scientifique» Frankreich unterstützt.

Man beachte, dass $\gamma_1(f) = f$. In der Summe rechts wird über alle Partitonen (a, b) von $\bar{n} = \{1, \dots, n\}$ summiert. Es bezeichnet $\# a, \# b$ die Anzahl der Elemente von $a, b \subset \bar{n}$. Die Teilmengen a und b dürfen leer sein. Für $n = 0$ ist die Summe rechts gleich $[[f, 1_{SB}^{(m)}], f]$, wir setzen $[f, 1_{SB}^{(0)}] = f$. Zu der Partition (a, b) hat man die Abbildung $v_{a,b} : SA \wedge B^{(m)} \wedge A \wedge B^{(n)} \rightarrow SA \wedge B^{(m+\#a)} \wedge A \wedge B^{(\#b)}$, welche die Koordinaten von $B^{(n)}$ permutiert (s. § 3). Für $m = n = 0$ ist die Formel in Satz A äquivalent zu der Barcus-Barratt-Formel (s. § 4). Wir beweisen eine allgemeinere Form von Satz A, wo nur A eine Suspension und B beliebig ist.

Wir erhalten Satz A, indem wir für die homotopietheoretische Faser $F(i_f)$ der Inklusion $i_f : SB \subset C_f$ ein Modell N_f vom reduzierten Produkt Typ konstruieren. Dabei folgt, dass in einem metastabilen Dimensionsbereich die Faser $F(i_f)$ sich durch den Abbildungskegel zu einer Abbildung

$$P_f : SA \wedge B^* \wedge A \wedge B^* \rightarrow SA \wedge B^*,$$

approximieren lässt. Dabei sei $B^* = \bigvee_{r \geq 0} B^{(r)}$ die Einpunktverbindung der $B^{(r)}$, wo $B^{(0)}$ die Nullsphäre bezeichnet. $SA \wedge B^*$ und $SA \wedge B^* \wedge A \wedge B^*$ sind also auch Einpunktverbindungen mit Inklusionen $\alpha_r : SA \wedge B^{(r)} \subset SA \wedge B^*$ und

$$\alpha_{m,n} : SA \wedge B^{(m)} \wedge A \wedge B^{(n)} \subset SA \wedge B^* \wedge A \wedge B^*.$$

Falls A eine Suspension ist, berechnen wir P_f ; falls auch B eine Suspension ist, gilt :

$$P_f \circ \alpha_{m,n} = - \sum_{r \geq 1} \alpha_{m+n+r} \circ (A \wedge B^{(m)} \wedge \gamma_r(f) \wedge B^{(n)}) + \sum_{a \cup b = \bar{n}} v_{a,b}^* [\alpha_{m+\#a}, \alpha_{\#b}].$$

Sei die Abbildung $W_f : SA \wedge B^* \rightarrow SB$ definiert durch $W_f \circ \alpha_r = [f, 1_{SB}^{(r)}]$. Dann ist Satz A äquivalent mit der Gleichung $W_f \circ P_f = 0$, dies gibt der Barcus-Barratt-Formel eine neue Interpretation. Mit Hilfe der Approximation der Faser $F(i_f)$ durch C_{P_f} erhalten wir eine verallgemeinerte EHP-Sequenz :

SATZ B. — Sei SA a-fach zusammenhängend, dann gibt es für $N \leq 3a + 2$ eine exakte Sequenz

$$\pi_{N-1}(SA \wedge B^*) \xrightarrow{E_f} \pi_N(C_f, SB) \xrightarrow{H_f} \pi_{N-2}(SA \wedge B^* \wedge A \wedge B^*) \xrightarrow{P_f^*} \pi_{N-2}(SA \wedge B^*) \xrightarrow{E_f} \dots$$

Dabei hat man für E_f einen Isomorphismus θ , so dass das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \pi_{N-1}(SA \wedge B^*) & \xrightarrow{W_f^*} & \pi_{N-1}(SB) \\ \theta \cong \downarrow & \searrow E_f & \uparrow \partial \\ \pi_N(CSA \vee SB, SA \vee SB) & \xrightarrow{\pi_f^*} & \pi_N(C_f, SB) \end{array}$$

kommutativ ist. Dabei ist ∂ der Randoperator und ist

$$\pi_f : CSA \vee SB \rightarrow CSA \cup_f SB = C_f$$

die Identifikationsabbildung für den Abbildungskegel C_f .

Falls $B = \{ \star \}$ nur aus einem Punkt besteht, so entspricht die exakte Sequenz in Satz B der wohlbekannten EHP-Sequenz von G. W. Whitehead [28] und James [19] :

$$\pi_{N-1}(SA) \xrightarrow{E} \pi_N(SSA) \xrightarrow{H} \pi_{N-2}(SA \wedge A) \xrightarrow{P} \pi_{N-2}(SA) \xrightarrow{E},$$

dabei ist P durch das Whitehead-Produkt $[1_{SA}, 1_{SA}] : SA \wedge A \rightarrow SA$ induziert. Die Sequenz in Satz B lässt sich wie folgt verlängern. Sei

$$\pi_n(X \vee Y)_2 = \text{Kern} \{ r_* : \pi_n(X \vee Y) \rightarrow \pi_n(Y) \}$$

durch die Retraktion $r : X \vee Y \rightarrow Y$ gegeben. Dann gilt :

SATZ C. — Die $E_f H_f P_f$ -Sequenz in Satz B wird für $N = 3a + 2$ durch den Homomorphismus

$$(P_f, \alpha_0)_2 : \pi_{3a+1}(SA \wedge B^* \wedge A \wedge B^* \vee SA)_2 \rightarrow \pi_{3a+1}(SA \wedge B^*)_2$$

exakt verlängert und es ist

$$\text{Bild}(P_f, \alpha_0)_2 \cong \text{Kern } \pi_{f*}$$

Ferner existiert eine surjektive Operation

$$\bar{H}_f : \text{Kern}(P_f, \alpha_0)_2 \rightarrow \pi_{3a+3}(C_f, SB) / \text{Bild } \pi_{f*}$$

Ueber den metastabilen Bereich hinaus erhalten wir eine Filtrierung der Homotopiegruppen $\pi_n(C_f, SB)$, welche die James-Filtrierung ([18], [19]) der Homotopiegruppen einer Suspension verallgemeinert.

Ganea [9] und Gray [10] haben ebenfalls die Homotopiegruppen eines Abbildungskegels C_f untersucht. Ganea bettet zu der Abbildung $f : X \rightarrow Y$ den durch die Identifikationsabbildung induzierten Homomorphismus $\pi_f^0 : \pi_n(CX, X) \rightarrow \pi_n(C_f, Y)$ in eine exakte Sequenz ein. Dazu vergleiche man 5.3 in [9], wo der Homomorphismus π_f^0 zu der verallgemeinerten Einhängung E äquivalent ist. Wir haben schon in [4] bemerkt, dass für eine Suspension X der Homomorphismus $\pi_{f*} : \pi_n(CX \vee Y, X \vee Y) \rightarrow \pi_n(C_f, Y)$ in einem grösseren Dimensionsbereich als bei π_f^0 ein Isomorphismus ist. Wir zeigen durch Satz B, dass π_{f*} sich auch in eine exakte Sequenz einbetten lässt, welche länger ist als die Sequenz für π_f^0 und welche wie bei Ganea die EHP-Sequenz verallgemeinert,

0. Bezeichnungen

Wir betrachten Räume mit Grundpunkt \star , welche vom Homotopietyp eines CW-Komplexes sind. Eine Abbildung und eine Homotopie, im Zeichen \simeq , seien Grundpunkt erhaltend. Die Menge der Homotopieklassen von Abbildungen $f : X \rightarrow Y$ bezeichnen wir mit $[X, Y]$. Darin sei 0 die triviale und 1 oder 1_X die identische Abbildung. Wir kennzeichnen eine Abbildung und ihre Homotopieklasse durch das gleiche Symbol. Für CW-Komplexe A, B sei $A \times B$ das schwache Produkt, so dass $A \times B$ wieder ein CW-Komplex ist. Der Grundpunkt in einem CW-Komplex sei immer eine Nullzelle. Sei $A \vee B = A \times \{\star\} \cup \{\star\} \times B$ die Einpunktverbindung und sei $A \wedge B = A \times B / A \vee B$ das »smash«-Produkt. Wir klammern Produkte » \wedge « vor Summen » \vee «, z. B.

$$A \vee B \wedge C = A \vee (B \wedge C).$$

Für das Einheitsintervall $I = [0, 1]$ mit Grundpunkt 1 ist dann $CA = I \wedge A$ der Kegel über A und $SA = CA/A$ die Einhängung oder Suspension von A . Dabei sei $A \subset CA$ durch $a \mapsto (0, a)$. Zu einer Abbildung $f : A \rightarrow B$ ist der Adjunktionsraum $CA \cup_f B = C_f$ der Abbildungskegel oder die Kofaser zu f . Entsprechend [21] ist C_f ein CW-Komplex, falls f eine zellulare Abbildung ist.

(0.1) HOMOTOPIEGRUPPEN. — Für $n \geq 0$ sei $\pi_n^Y(X) = [S^n Y, X]$ und sei $\pi_{n+1}^Y(X, A)$ die Menge der Homotopieklassen von Grundpunkt erhaltenden Paarabbildungen $(CS^n Y, S^n Y) \rightarrow (X, A)$. Für $n \geq 1$ induziert die Komultiplikation $SY \rightarrow SY \vee SY$ eine Gruppenmultiplikation, welche wir mit $+$ bezeichnen. Die Abbildung $-1 : SY \rightarrow SY$, $(t, y) \mapsto (1-t, y)$ induziert das Inverse, wir schreiben $-g = g \circ (-1)$. Man hat die exakte Sequenz :

$$\pi_{n+1}^Y(A) \xrightarrow{i} \pi_{n+1}^Y(X) \xrightarrow{j} \pi_{n+1}^Y(X, A) \xrightarrow{\partial} \pi_n^Y(A) \rightarrow.$$

Dabei wird i durch die Inklusion $A \subset X$ und j durch die Identifikationsabbildung $\pi_0 : (CS^n Y, S^n Y) \rightarrow (S^{n+1} Y, \star)$ induziert, ∂ ist durch Einschränkung gegeben. Setzt man für Y die Nullsphäre ein, so erhält man die üblichen Homotopiegruppen. Wir setzen $S^n = S^n S^0$ und $E^{n+1} = CS^n$. Es ist $S^n \wedge S^m = S^{n+m}$. Wir sagen (X, A) ist n -fach zusammenhängend, wenn $\pi_i(X, A) = 0$ für $i \leq n$.

(0.2) WHITEHEAD-PRODUKTE. — In [1] und [24] wurde gezeigt, dass die Sequenz

$$0 \rightarrow [SA \wedge B, X] \xrightarrow{\sigma} [S(A \times B), X] \xrightarrow{\rho} [SA, X] \times [SB, X] \rightarrow 0$$

exakt ist, dabei wird σ durch die Identifikationsabbildung $A \times B \rightarrow A \wedge B$ und ρ durch die Inklusion $A \vee B \subset A \times B$ induziert. Seien $\rho_A : [SA, X] \rightarrow [S(A \times B), X]$ und $\rho_B : [SB, X] \rightarrow [S(A \times B), X]$ durch die Projektionen von $A \times B$ auf A und B bestimmt. Dann definieren wir das Whitehead-Produkt $[\ , \] : \pi_1^A(X) \times \pi_1^B(X) \rightarrow \pi_1^{A \wedge B}(X)$ durch

$$[\alpha, \beta] = \sigma^{-1}(-\rho_A(\alpha) - \rho_B(\beta) + \rho_A(\alpha) + \rho_B(\beta)).$$

Falls $X = SA \vee SB$, so erhält man für die Inklusionen i_{SA}, i_{SB} die Whitehead-Produkt-Abbildung $w = w_{A, B} = [i_{SA}, i_{SB}] : SA \wedge B \rightarrow SA \vee SB$, für die gilt $[\alpha, \beta] = w^*(\alpha, \beta)$.

Man kann die Abbildung w auch durch die Hintereinanderschaltung

$$w : SA \wedge B \xrightarrow{h} CA \dot{\times} CB \xrightarrow{\pi_0 \dot{\times} \pi_0} SA \vee SB$$

erhalten, dazu siehe (3.14). Dabei ist $\pi_0 \dot{\times} \pi_0$ die Einschränkung von

$$\pi_0 \times \pi_0 : CA \times CB \rightarrow SA \times SB \quad \text{auf} \quad CA \dot{\times} CB = (CA \times B) \cup (A \times CB)$$

und ist h die Join-Konstruktion (s. [3]). Für die Abbildung w hat man entsprechend [3] eine Homotopieäquivalenz $(\lambda, 1) : (C_w, SA \vee SB) \rightarrow (SA \times SB, SA \vee SB)$. Weiter erhält man durch obige exakte Sequenz für $\xi \in [S(A \wedge B), X]$ Operationen

$$\begin{aligned} \alpha^1 \circ \xi &= \sigma^{-1}(\rho_A(\alpha) + \sigma(\xi) - \rho_A(\alpha)), \\ \beta^2 \circ \xi &= \sigma^{-1}(\rho_B(\beta) + \sigma(\xi) - \rho_B(\beta)). \end{aligned}$$

Diese sind trivial, falls A bzw. B Suspensionen sind. Es ist

$$\partial : \pi_2^{A \wedge B}(CSA \vee SB, SA \vee SB) \rightarrow \pi_1^{A \wedge B}(SA \vee SB)$$

injektiv und $w_{A,B} \in \text{Bild } \partial$. Durch $\tilde{w}_{A,B} = \partial^{-1}(w_{A,B})$ erhalten wir deshalb zu dem Raumpaar (X, Y) das relative Whitehead-Produkt :

$$[,] : \pi_2^A(X, Y) \times \pi_1^B(Y) \rightarrow \pi_2^{A \wedge B}(X, Y) \quad \text{mit} \quad [\tilde{\alpha}, \beta] = \tilde{w}_{A,B}^*(\tilde{\alpha}, \beta).$$

Es gilt dann $\partial[\tilde{\alpha}, \beta] = [\partial\tilde{\alpha}, \beta]$. Falls $A = S^n$ und $B = S^m$, so erhalten wir die sphärischen Produkte, welche sich durch Vorzeichen zu den verschiedenen in der Literatur gebräuchlichen Whitehead-Produkten unterscheiden (s. Anhang von [6]).

(0.3) MOORE-SCHLEIFENRAUM UND FASER EINER ABBILDUNG. — Sei PX der Raum der Moore-Wege mit festem Endpunkt \star , das ist die Menge der Paare $\sigma = (\sigma, k_\sigma)$ mit $\sigma : \mathbb{R}_+ \rightarrow X$ und $\sigma(t) = \sigma(k_\sigma) = \star$ für $t \geq k_\sigma \geq 0$, welche mit der kompakt offenen Topologie versehen ist. Sei $p : PX \rightarrow X$ mit $p(\sigma) = \sigma(0)$ die Anfangspunktabbildung. Dann ist $\Omega X = p^{-1}(\star)$ der Moore-Schleifenraum mit Grundpunkt $(0, 0)$. Die Faser $F(f)$ der Abbildung $f : A \rightarrow X$ erhalten wir als »pull back« :

$$\begin{array}{ccc} F(f) & \rightarrow & PX \\ p_f \downarrow & & \downarrow p \\ A & \xrightarrow{f} & X \end{array}$$

Es ist $F(f) = \{(a, \sigma) \in A \times PX \mid f(a) = \sigma(0)\}$. Durch Addition von Wegen operiert ΩX als Monoid von Rechts auf der Faser $F(f)$, d. h. $+$: $F(f) \times \Omega X \rightarrow F(f)$ ist definiert durch $(a, \sigma) + \sigma' = (a, \sigma + \sigma')$.

1. CW-Modelle für Schleifenraum und Faser

Sei X ein zusammenhängender CW-Komplex. Das unendlich reduzierte Produkt X_∞ von James [16] ist das freie Monoid auf der Punktmenge $X - \{\star\}$ mit \star als leerem Wort, welches als CW-Komplex topologisiert wird. Die Wörter mit m oder weniger Buchstaben bestimmen einen Unterkomplex $X_m \subset X_\infty$. Für diesen hat man eine Identifikationsabbildung $s : X^m = X \times \dots \times X \rightarrow X_m$ mit $s(x_1, \dots, x_m) = x_1 \cdot \dots \cdot x_m$. Es ist $X_m/X_{m-1} = X \wedge \dots \wedge X = X^{(m)}$ das m -fache »smash«-Produkt. Sei Y ein assoziativer

H-Raum, dann lässt sich jede Abbildung $f : X \rightarrow Y$ auf eindeutige Weise zu einer Abbildung $f_\infty : X_\infty \rightarrow Y$ fortsetzen mit $f_\infty(x_1 \cdot \dots \cdot x_m) = f(x_1) \cdot \dots \cdot f(x_m)$. Zum Beispiel erhält man zu der Adjungierten $\varphi_X : X \rightarrow \Omega SX$ von 1_{SX} die Fortsetzung

$$(1.1) \quad \varphi = (\varphi_X)_\infty : X_\infty \rightarrow \Omega SX,$$

welche entsprechend [16] eine Homotopieäquivalenz ist. Die Adjungierte φ_X ist zu einer Abbildung $w : X \rightarrow R_+$ mit $w^{-1}(0) = \{ \star \}$ definiert durch $\varphi_X(x) = (\sigma_x, w(x))$, wo $\sigma_x(t) = (t/w(x), x)$ für $x \neq \star$. Wegen (1.1) hat man einen Isomorphismus von Gruppen $[SY, SX] \cong [Y, X_\infty]$, welcher, so sagen wir, eine Abbildung $f : SY \rightarrow SX$ in eine Adjungierte $f : Y \rightarrow X_\infty$ überführt.

Das unendlich reduzierte Produkt ist ein CW-Modell für den Schleifenraum einer Suspension. Seien nun A und B CW-Komplexe und sei B zusammenhängend und sei $f : SA \rightarrow SB$ gegeben. Wie folgt beschreiben wir ein CW-Modell M_f für den Schleifenraum ΩC_f des Abbildungskegels von f . Sei $\bar{f} : A \rightarrow B_\infty$ eine Adjungierte zu f , welche zellular ist. Dann sei M_f als Menge gleich dem »push out« :

$$(1.2) \quad \begin{array}{ccc} A_\infty \hookrightarrow (CA)_\infty & & \\ \bar{f}_\infty \downarrow & & \downarrow i_A \\ B_\infty & \xrightarrow{i} & M_f \end{array}$$

in der Kategorie der Monoide und es sei M_f topologisiert als CW-Komplex. Auf M_f hat man die Monoid-Multiplikation $\cdot : M_f \times M_f \rightarrow M_f$, welche stetig. Elemente in M_f repräsentieren wir durch Wörter $b_0 a_1 b_1 a_2 b_2 \dots a_n b_n, n \geq 0$, mit $b_i \in B_\infty$ und $a_i \in CA - A$. Ein solches Wort, so sagen wir, hat die Länge n in CA . Die Wörter mit Länge $\leq n$ in CA bilden einen Unterkomplex $M_n \subset M_f$. Zu diesem hat man eine Identifikationsabbildung

$$(1.3) \quad s : B_\infty \times (CA \times B_\infty)^n \rightarrow M_n,$$

mit $s(b_0, a_1, b_1, \dots, a_n, b_n) = i(b_0) \cdot i_A(a_1) \cdot i(b_1) \cdot \dots \cdot i_A(a_n) \cdot i(b_n)$, welche durch die Multiplikation in M_f gegeben wird. Es ist $M_0 = B_\infty \subset M_1 \subset M_2 \subset \dots \subset M_f$ eine Filtrierung von M_f mit $\bigcup_{i \geq 0} M_i = M_f$. Diese Filtrierung beschreibt also ebenfalls die Topologie von M_f .

Zu M_f erhalten wir den folgenden »push out« \bar{N}_f von topologischen Räumen :

$$(1.4) \quad \begin{array}{ccccc} B \times M_f & \xrightarrow{m} & M_f & & \\ \cap & & \downarrow j & \searrow & \\ CB \times M_f & \xrightarrow{\quad} & \bar{N}_f & \xrightarrow{\quad} & * \\ \text{pr} \searrow & & \downarrow \bar{p} & \searrow m & \\ & & CB & \xrightarrow{\quad} & SB \end{array}$$

zusammen mit der durch dieses Diagramm wohlbestimmten Abbildung \bar{p} . Dabei ist $m(b, x) = i(b) \cdot x$. Für das CW-Monoid und den »push out« \bar{N}_f gilt nun ein Satz, der die Homotopieäquivalenz (1.1) verallgemeinert :

(1.5) SATZ. — Für die Faser $F(i_f)$ der Inklusion $i_f : SB \subset C_f$ hat man Homotopie-äquivalenzen $\varphi_f, \bar{\varphi}_f$, für die das Diagramm

$$\begin{array}{ccccc}
 B_\infty & \xrightarrow{i} & M_f & \xrightarrow{j} & \bar{N}_f \\
 \downarrow \varphi & & \downarrow \varphi_f & & \downarrow \bar{\varphi}_f \\
 \Omega SB & \xrightarrow{\Omega i_f} & \Omega C_f & \xrightarrow{p_f} & F(i_f) \\
 & & & & \nearrow p_f \\
 & & & & SB
 \end{array}$$

homotopiekommutativ ist.

Der Beweis von (1.5) ist zu lang, um hier ausgeführt zu werden, er wurde in [8] dargestellt und verläuft bei Sphären SA und SB wie in der Beweisskizze auf Seite 20 in [14]. In gewisser Weise ist (1.5) auch in Theorem 3.9 in [15] enthalten. Die Homologie von ΩC_f wurde von Lemaire untersucht. Die homologische Entsprechung zu (1.5) ist 3.2.2 zusammen mit 2.3.2 in [20].

Das CW-Modell \bar{N}_f für die Faser $F(i_f)$ lässt sich wie folgt vereinfachen : Sei \sim die Äquivalenzrelation in M_f , die durch

$$(1.6) \quad x \sim b.x \quad \text{für } b \in B_\infty \text{ und } x \in M_f,$$

erzeugt wird. Für den Quotienten $N_f = M_f/\sim$ gilt dann der Satz :

(1.7) SATZ. — Es gibt eine Homotopieäquivalenz λ , für die das Diagramm

$$\begin{array}{ccc}
 & N_f = M_f/\sim & \\
 \tilde{j} \nearrow & \uparrow \lambda & \\
 M_f & & \bar{N}_f \\
 \searrow j & & \\
 & &
 \end{array}$$

kommutativ ist. Dabei ist \tilde{j} die Quotientenabbildung.

Nun erscheint N_f zunächst nicht einfacher als \bar{N}_f , aber für die Filtrierung

$$(1.8) \quad N_i = j(M_i), \quad i \geq 0,$$

gilt der folgende Satz. Sei $X \rtimes Y = X \times Y / \{ \star \} \times Y$ und sei $B_\infty^k = B_\infty \times \dots \times B_\infty$ das k -fache Produkt.

(1.9) SATZ. — Die Faser $F(i_f)$ der Inklusion $i_f : SB \subset C_f$ ist zu einem Raum N_f mit Filtrierung

$$SA \rtimes B_\infty = N_1 \subset N_2 \subset \dots \subset N_f = \bigcup_{k \geq 1} N_k,$$

homotopieäquivalent. Für $k \geq 2$ ist dabei $N_k \simeq C_{w_k}$ zu dem Abbildungskegel einer Abbildung

$$w_k : S^{k-1} \wedge A^{(k)} \rtimes (B_\infty^k) \rightarrow N_{k-1},$$

relativ N_{k-1} homotopieäquivalent.

Bemerkung. — Falls $SB = \star$ nur aus einem Punkt besteht, so ist die Aussage von Satz (1.9) wohlbekannt. Es ist dann $F(i_f) = \Omega SSA$ und $N_f = (SA)_\infty$ mit Filtrierung $N_k = (SA)_k$. Die Homotopieäquivalenz $\Omega SSA \simeq (SA)_\infty$ ist dann entsprechend James gegeben und die Abbildungen $w_k : S^{k-1} \wedge A^{(k)} \rightarrow (SA)_{k-1}$ in (1.9) sind Whitehead-Produkt-Abbildungen höherer Ordnung (s. [23]).

Die Abbildung w_2 in (1.9) ist explizit durch die folgende Hintereinanderschaltung gegeben :

$$(1.10) \quad \begin{array}{ccc} SA \wedge A \times (B_\infty \times B_\infty) & \xrightarrow{h \times 1} & (CA \times A \cup A \times CA) \times (B_\infty \times B_\infty) \\ \downarrow w_2 & & \downarrow F_1 \cup F_2 \\ & \longrightarrow & SA \times B_\infty \end{array}$$

Dabei ist h die Join-Konstruktion aus (0.2) und ist für $\bar{a}_1, \bar{a}_2 \in CA, a_1, a_2 \in A$ und $b_1, b_2 \in B_\infty$:

$$\begin{cases} F_1(\bar{a}_1, a_2, b_1, b_2) = (\pi_0(\bar{a}_1), b_1 \cdot f(a_2) \cdot b_2), \\ F_2(a_1, \bar{a}_2, b_1, b_2) = (\pi_0(\bar{a}_2), b_2). \end{cases}$$

Dabei sind F_1 und F_2 auf dem Durchschnitt $(A \times A) \times (B_\infty \times B_\infty)$ der Definitionsbereiche von F_1 und F_2 identisch dem Grundpunkt in $SA \times B_\infty$. Mit der Abbildung w_2 definieren wir wie folgt die Abbildung P_f in der Einleitung. Zunächst hat man durch die von SX auf $SX \times Y$ induzierte Ko-H-Gruppenstruktur die Homotopieäquivalenz :

$$(1.11) \quad H_{\times} : SX \times Y \rightarrow SX \vee SX \wedge Y,$$

mit $H_{\times} = p_{SX} + p_{12}$. Dabei ist p_{SX} die Projektion $SX \times Y \rightarrow SX$ und ist p_{12} die Identifikation $SX \times Y \rightarrow SX \wedge Y$ jeweils gefolgt von der Inklusion in $SX \vee SX \wedge Y$. Wir definieren P_f durch das homotopiekommutative Diagramm

$$(1.12) \quad \begin{array}{ccc} SA \wedge A \times (B_\infty \times B_\infty) & \xrightarrow{w_2} & SA \times B_\infty \\ \simeq \downarrow H_{\times} & & \simeq \downarrow -H_{\times} \\ SA \wedge A \vee SA \wedge A \wedge (B_\infty \times B_\infty) & & SA \vee SA \wedge B \\ \simeq \downarrow H_2 & & \simeq \downarrow H_1 \\ SA \wedge B^* \wedge A \wedge B^* & \xrightarrow{P_f} & SA \wedge B^* \end{array}$$

Dabei sind die Homotopieäquivalenzen H_1 und H_2 wohlbekannt, sie sind wohlbestimmt, falls A eine Suspension ist (s. § 3). Wir interessieren uns für die Hintereinanderschaltung $H_{\times} \circ (-1) \circ w_2 = (-H_{\times}) \circ w_2$ auf Grund der Anwendungen in Paragraph 4.

Beweis von (1.7). — Zu den Raumpaaren $(X, A), (Y, B)$ definieren wir das Produkt $(X, A) \times (Y, B) = (X \times Y, X \times B \cup A \times Y)$. Sei $((CA)^n, (CA)^n) = (CA, A) \times \dots \times (CA, A)$ das n -fache Product von (CA, A) . Sei

$$(1) \quad \tau : (CA)^n \times B_\infty^{n+1} \rightarrow B_\infty \times (CA \times B_\infty)^n,$$

durch Permutation der Koordinaten gegeben. Die Abbildung s in (1.3) bestimmt dann das folgende kommutative Diagramm

$$(2) \quad \begin{array}{ccc} \tau((CA)^n \times B_\infty^{n+1}) \hookrightarrow B_\infty \times (CA \times B_\infty)^n & & \\ \downarrow s' & & \downarrow s \\ M_{n-1} & \longrightarrow & M_n \end{array}$$

denn für $x \in (CA)^n \times B_\infty^{n+1}$ ist $s \tau(x)$ ein Wort der Länge $< n$, also in M_{n-1} . Nach Definition von M_n ist das Diagramm (2) ein »push out« von topologischen Räumen. Zum Beispiel ist M_1 der »push out« :

$$(3) \quad \begin{array}{ccc} B_\infty \times A \times B_\infty \hookrightarrow B_\infty \times CA \times B_\infty & & \\ \downarrow s' & & \downarrow s \\ B_\infty & \longrightarrow & M_1 \end{array}$$

wo $s'(b_1, a_1, b_2) = b_1 \cdot \bar{f}(a_1) \cdot b_2$.

Wir definieren nun eine Filtrierung \bar{N}_k von \bar{N}_f durch $\bar{N}_k = CB \times M_k \cup_m M_k$, dabei ist m wie in (1.4) definiert. Es ist dann

$$(4) \quad \bar{N}_0 = CB \times B_\infty \cup_m B_\infty = (CB, B)_\infty,$$

ein relatives reduziertes Produkt von Gray (s. [10]), und es ist wohlbekannt, dass $(CB, B)_\infty$ zusammenziehbar ist, vergl. ([10], [7]). Durch Vertauschung der Identifikationsreihenfolge erhält man \bar{N}_k auch wie folgt als »push out« von Räumen :

$$\begin{array}{ccccc} (CB, B)_\infty \times \tau((CA)^k \times B_\infty^k) \hookrightarrow (CB, B)_\infty \times (CA \times B_\infty)^k & & & & \\ \downarrow & & \searrow \text{pr} & & \\ \bar{N}_{k-1} \hookrightarrow \bar{N}_k & & & & (CA \times B_\infty)^k \\ & \searrow \lambda_{k-1} & & \searrow \lambda_k & \downarrow \lambda' \\ & & N_{k-1} \hookrightarrow N_k & & N_k \end{array}$$

zusammen mit der Abbildung λ_k , welche durch die Projektion pr bestimmt ist. Dabei sei τ wieder entsprechend durch Permutation der Koordinaten gegeben. Es sei λ' die Abbildung, die das Tupel $(a_1, b_1, \dots, a_k, b_k)$ in die Äquivalenzklasse

$$\tilde{j}(i_A(a_1) \cdot i(b_1) \cdot \dots \cdot i_A(a_k) \cdot i(b_k))$$

überführt. Es ist

$$(6) \quad \lambda_0 : \bar{N}_0 = (CB, B)_\infty \rightarrow N_0 = \star,$$

die triviale Abbildung. Entsprechend (1.6) und dem Diagramm (2) erhält man N_k wie folgt als »push out« :

$$(7) \quad \begin{array}{ccc} \tau((CA)^k \times B_\infty^k) \hookrightarrow (CA \times B_\infty)^k & & \\ \downarrow \lambda'' & & \downarrow \lambda' \\ N_{k-1} & \hookrightarrow & N_k \end{array}$$

Dabei ist λ'' Einschränkung von λ' . Wir wenden nun den Satz in [12] über Quasifaserungen an. Es ist λ_0 eine Quasifaserung mit Faser $(CB, B)_\infty$. Aus der Induktionsannahme, dass λ_{k-1} eine Quasifaserung mit Faser $(CB, B)_\infty$ ist, folgt dann wegen (5) und (7) aus [12], dass auch λ_k eine Quasifaserung mit Faser $(CB, B)_\infty$ ist. Da $(CB, B)_\infty$ zusammenziehbar ist, ist also $\lambda = \bigcup_{k \geq 0} \lambda_k$ in (1.7) eine Homotopieäquivalenz. Nach Definition von λ_k ist für λ das Diagramm in (1.7) kommutativ. Damit ist (1.7) bewiesen.

Beweis von (1.9). — Wir behalten die Bezeichnungen vom Beweis für (1.7) bei. Wegen (7) ist N_1 gleich dem folgenden »push out« :

$$(8) \quad \begin{array}{ccc} A \times B_\infty & \hookrightarrow & CA \times B_\infty \\ \downarrow & & \downarrow \\ N_0 = \star & \longrightarrow & N_1 \end{array}$$

also ist $N_1 = (CA \times B_\infty)/(A \times B_\infty) = SA \times B_\infty/\star \times B_\infty$. Nach Definition von λ' in (7) ist $\lambda'(\star \times B_\infty)^k = \star$. Deshalb lässt sich N_k wegen (7) auch wie folgt als »push out« beschreiben :

$$(9) \quad \begin{array}{ccc} ((CA)^k \times B_\infty^k)/(\star \times B_\infty^k) & \xrightarrow{i_0} & (CA \times B_\infty)^k/(\star \times B_\infty)^k \\ \downarrow w'_k & & \downarrow \lambda' \\ N_{k-1} & \hookrightarrow & N_k \end{array}$$

Da $(CA \times B_\infty)^k/(\star \times B_\infty)^k$ zusammenziehbar ist und da i_0 eine Kofaserung ist, folgt, dass N_k unter N_{k-1} zu dem Abbildungskegel $C_{w'_k}$ homotopieäquivalent ist. Entsprechend ([3], [23]) hat man zu der Klammerung ε_k durch iterierte Join-Konstruktion eine Homotopieäquivalenz $h : S^{k-1} \wedge A^{(k)} \rightarrow (CA)^k$. Durch Hintereinanderschaltung erhält man damit die Abbildung

$$(10) \quad w_k = w'_k \circ (h \times 1), \quad k \geq 2,$$

für die die Behauptung von (1.9) wegen (9) gilt.

2. Exakte Sequenzen und Filtrierungen für $\pi_n(C_f, SB)$

Zu unserem Modell N_f der Faser $F(i_f)$ und zu der Inklusion $SA \times B_\infty \subset N_f$ in (1.9) erhalten wir eine Sequenz, welche die Einhängungssequenz von James verallgemeinert. Dazu definieren wir eine Abbildung $\mu : N_f = M_f/\sim \rightarrow (SA)_\infty$ wie folgt :

$$\mu(\tilde{j}(b_0 a_1 b_1 \dots a_n b_n)) = \pi_0(a_1) \cdot \dots \cdot \pi_0(a_n),$$

wo $\pi_0 : CA \rightarrow SA$ die Quotientenabbildung. Die Abbildung μ überführt die Filtrierungen d. h. $\mu(N_i) \subset (SA)_i$. Es gilt :

(2.1) SATZ. — Für die durch die Identifikationsabbildung π_f induzierte Abbildung π_{f*} und für die Einhängung E hat man ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc}
 \pi_n(\text{CSA} \vee \text{SB}, \text{SA} \vee \text{SB}) & \xrightarrow{\pi_{f*}} & \pi_n(C_f, \text{SB}) & \longrightarrow & \pi_{n-1}(N_f, N_1) & \longrightarrow & \pi_{n-1}(\text{CSA} \vee \text{SB}, \text{SA} \vee \text{SB}) \xrightarrow{\pi_{f*}} \\
 \downarrow r_* \circ \partial & & \downarrow \mu_{f*} & & \downarrow \mu_* & & \downarrow r_* \circ \partial \\
 \pi_{n-1}(\text{SA}) & \xrightarrow{\text{E}} & \pi_n(\text{SSA}) & \longrightarrow & \pi_{n-1}((\text{SA})_\infty, \text{SA}) & \xrightarrow{\partial} & \pi_{n-2}(\text{SA}) \xrightarrow{\text{E}}
 \end{array}$$

mit exakten Zeilen. Dabei ist $\mu_f : C_f \rightarrow \text{SSA}$ die »pinching«-Abbildung, die SB zu einem Punkt identifiziert und ist ∂ der Randoperator und $r : \text{SA} \vee \text{SB} \rightarrow \text{SA}$ die Retraktion.

Bemerkung. — Die untere Zeile im Diagramm (2.1) ist die Einhängungs-Sequenz von James [19]. Falls $\text{SB} = \{ \star \}$ nur aus einem Punkt besteht, so ist μ die Identität und die obere Zeile im Diagramm (2.1) ist dann isomorph zur unteren Zeile. Gray hat in [10] die Faser von μ_f beschrieben, dadurch lässt sich μ_{f*} in (2.1) ebenfalls in eine exakte Sequenz einbetten (s. [4]).

Falls SA a -fach zusammenhängend ist, so ist das Paar $((\text{SA})_\infty, \text{SA})$ $(2a+1)$ -fach zusammenhängend, deshalb erhält man aus der exakten Einhängungs-Sequenz die Aussage der Freudenthalschen Einhängungssätze. Da (C_f, N_1) wegen (1.9) dann ebenfalls $(2a+1)$ -fach zusammenhängend ist, folgt entsprechend der exakten Sequenz in (2.1) :

(2.2) KOROLLAR. — Sei SA a -fach zusammenhängend und B zusammenhängend, dann ist $\pi_{f*} : \pi_n(\text{CSA} \vee \text{SB}, \text{SA} \vee \text{SB}) \rightarrow \pi_n(C_f, \text{SB})$:

$$\text{ein } \begin{cases} \text{Epimorphismus für } n \leq 2a+2, \\ \text{Isomorphismus für } n \leq 2a+1. \end{cases}$$

Eine allgemeinere Form dieses Korollars, welche einen Satz von James [17] und Toda (s. 5.3 in [27]), über relative Homotopie-gruppen bei CW-Komplexen auf Abbildungs-kegel erweitert, haben wir in [4] bewiesen.

Satz (2.1) erhalten wir aus dem folgenden Satz (2.4). Dazu betrachten wir das kommutative Diagramm von homotopietheoretischen Fasern :

$$\begin{array}{ccccc}
 F(i_f) & \xrightarrow{p_f} & \text{SB} & \xrightarrow{i_f} & C_f \\
 \uparrow \pi_f & & \uparrow (j, 1) & & \uparrow \pi_f \\
 F(i_0) & \xrightarrow{p_0} & \text{SA} \vee \text{SB} & \xrightarrow{i_0} & \text{CSA} \vee \text{SB}
 \end{array}$$

dabei ist i_0 die Inklusion. Entsprechend Gray (s. 6.3 auf Seite 514 in [10]), hat man eine Homotopieäquivalenz

$$(2.3) \quad \varphi_0 : \text{SA} \rtimes \text{B}_\infty \rightarrow F(i_0).$$

Diese erhält man wie folgt : Zunächst hat man über SA einen Schnitt $s : \text{SA} \rightarrow F(i_0)$ von p_0 . Durch die Operation von ΩSB auf $F(i_0)$, vergl. (0.3), erhält man dann eine

Abbildung $\bar{s} : SA \times B_\infty \rightarrow F(i_0)$ mit $\bar{s}(a, b) = s(a) + \varphi(b)$ mit φ aus (1.1). Da die Inklusion $\Omega SB \subset F(i_0)$ nullhomotop ist, lässt sich \bar{s} zu einer Abbildung

$$SA \times B_\infty \cup_{B_\infty} CB_\infty \rightarrow F(i_0)$$

fortsetzen. Diese ist eine Homotopieäquivalenz und liefert φ_0 . Für die Homotopieäquivalenz $\bar{\varphi}_f$ aus (1.5) und für ein Homotopieinverses $\bar{\lambda}$ zu λ aus (1.7) gilt nun :

(2.4) SATZ. — *Das Diagramm*

$$\begin{array}{ccc} N_f & \xrightarrow{\bar{\pi}_f \circ \bar{\lambda}} & F(i_f) \\ \uparrow & & \uparrow \bar{\pi}_f \\ SA \times B_\infty & \xrightarrow{\varphi_0 \circ (-1)} & F(i_0) \end{array}$$

ist homotopiekommutativ.

Der Beweis von (2.4) verläuft im Zusammenhang mit der Konstruktion von $\bar{\varphi}_f$ in (1.5), vergl. [8]. Dabei ergibt sich auch die Kommutativität des Diagramms in (2.1). Wir können nun den grössten Teil von Satz B und Satz C in der Einleitung beweisen. Mit Hilfe einer Filtrierung der Homotopiegruppen $\pi_n(C_f, SB)$ erhalten wir dabei eine leichte Verbesserung von Satz C :

Die endlichen reduzierten Produkte $(SA)_n \xrightarrow{i_n} (SA)_\infty$ bestimmen die James Filtrierung ([18], [19]) von $\pi_{n-1}((SA)_\infty) \cong \pi_n(SSA)$, d. h. ein Element $\alpha \in \pi_n(SSA)$ hat James Filtrierung $J(\alpha) \leq n$ genau dann wenn die Adjungierte $\bar{\alpha}$ im Bild von i_n liegt. Es ist klar, dass die Menge $\{ \alpha \in \pi_n(SSA) \mid J(\alpha) \leq 1 \}$ gleich dem Bild der Einhängung ist. In Verallgemeinerung der James-Filtrierung erhalten wir eine Filtrierung von $\pi_n(C_f, SB)$ wie folgt : Wegen (1.5) und (1.7) hat man einen Isomorphismus

$$\pi_n(C_f, SB) \cong \pi_{n-1}(F(i_f)) \cong \pi_{n-1}(N_f),$$

welcher, so sagen wir, ein Element $\alpha \in \pi_n(C_f, SB)$ in die Adjungierte $\bar{\alpha} \in \pi_{n-1}(N_f)$ überführt. Dann habe das Element α die Filtrierung $F(\alpha) \leq n$, genau dann wenn die Adjungierte $\bar{\alpha}$ im Bild von $\pi_{n-1}(N_n) \rightarrow \pi_{n-1}(N_f)$ liegt, vergl. (1.8). Aus (2.4) folgt :

(2.5) Die Menge $\{ \alpha \in \pi_n(C_f, SB) \mid F(\alpha) \leq 1 \}$ ist gleich dem Bild von π_{f^*} .

Die Filtrierungszahl $F(\alpha)$ ist gewissermassen ein Mass für die Komplexität des Elements α . Die Elemente mit Filtrierung 1 lassen sich entsprechend (2.5) sehr einfach darstellen. Durch sie erhalten wir wie folgt die funktionale Operation Φ aus [5]. Mit Hilfe dieser Operation können wir auch Elemente der Filtrierung 2 konstruieren. Die Operation Φ ist zu einer Abbildung $f : SA \rightarrow SB$ entsprechend dem folgenden Diagramm gegeben :

$$\begin{array}{ccccc} \pi_n(CSA \vee SB, SA \vee SB) & \xrightarrow{\partial} & \pi_{n-1}(SA \vee SB)_2 & & \\ & & \downarrow \pi_{f^*} & & \downarrow (f, 1)_2 \\ \pi_n(SB) \xrightarrow{i} \pi_n(C_f) \xrightarrow{j} \pi_n(C_f, SB) & \xrightarrow{\partial} & \pi_{n-1}(SB) & & \end{array}$$

Wir definieren :

$$(2.6) \quad \Phi : \text{Kern } (f, 1)_2 \rightarrow \pi_n(C_f)/\text{Bild}(i) \text{ durch } \Phi = j^{-1} \circ \pi_{f^*} \circ \partial^{-1}.$$

Dabei ist $(f, 1)_2$ durch die Abbildung $(f, 1_{SB}) : SA \vee SB \rightarrow SB$ induziert, man vergl. die Definition von $\pi_n(X, Y)_2$ in Satz C. Wir nennen ein Element $\alpha \in \pi_n(C_f)$ *funktional*, wenn $j(\alpha) \in \text{Bild}(\pi_{f^*})$, d. h. wenn $j(\alpha)$ Filtrierung 1 hat. Funktionale Elemente lassen sich also durch die Operation Φ beschreiben. Falls SA a -fach zusammenhängend ist, folgt aus (2.2), dass Φ ein Epimorphismus für $n \leq 2a+2$ und ein Isomorphismus für $n \leq 2a+1$ ist.

Beispiel. — Sei $f \in \pi_{2n-1}(S^n)$. Dann folgt zunächst, dass alle Elemente $\alpha \in \pi_k(C_f)$ für $k \leq 4n-2$ funktional sind. Mit Hilfe von Satz B untersuchen wir $\pi_{4n-1}(C_f)$. Wir erhalten aus Satz B das folgende Diagramm mit exakter Zeile und Spalte :

$$\begin{array}{ccccccc} & & & \pi_{4n-2}(S^n) & & & \\ & & & \uparrow \partial & & & \\ \pi_{4n-1}(E^{2n} \vee S^n, S^{2n-1} \vee S^n) & \xrightarrow{\pi_{f^*}} & \pi_{4n-1}(C_f, S^n) & \xrightarrow{H_f} & \mathbf{Z} & \xrightarrow{P_f} & \pi_{4n-3}(S^{2n-1} \vee S^{3n-2} \vee S^{4n-3}) \\ & & \uparrow & & & & \\ & & \pi_{4n-1}(C_f) & & & & \end{array}$$

Dabei steht \mathbf{Z} für $\pi_{4n-3}(S^{4n-3})$. Auf Grund der Berechnung von P_f gilt die Gleichung

$$P_f = \alpha_0 \circ [i_{2n-1}, i_{2n-1}] - \alpha_1 \circ (S^{2n-2}f) - \alpha_2 \circ \gamma_2(f),$$

dabei ist $i_{2n-1} \in \pi_{2n-1}(S^{2n-1})$ ein Erzeugendes und ist $\gamma_2 : \pi_{2n-1}(S_n) \rightarrow \mathbf{Z}$ die klassische Hopf-Invariante.

Falls $\gamma_2(f) \neq 0$, ist also P_f injektiv und also π_{f^*} surjektiv. Also sind dann auch alle Elemente in $\pi_{4n-1}(C_f)$ funktional. Dies gilt also insbesondere für die projektiven Räume, wo f ein Hopf-Element mit Hopf-Invariante 1.

Falls $\gamma_2(f) = 0$ ist, — dies ist z. B. immer bei ungeradem n der Fall —, ist also P_f ein Torsionselement. Also ist $\text{Bild}(H_f) \neq 0$. Da $\pi_{4n-2}(S^n)$ Torsion ist, existiert also ein nicht funktionales Element unendlicher Ordnung in $\pi_{4n-1}(C_f)$. Für das Whitehead-Produkt $f = [i_n, i_n]$, n ungerade $n \neq 1, 3, 7$, erhält man ein solches Element wie folgt : Sei $w_4 : S^{4n-1} \rightarrow S_3^n$ die anheftende Abbildung der $4n$ -Zelle im reduzierten Produkt S_∞^n der n -Sphäre. Entsprechend 7.23 in [5] faktorisiert w_4 über $S_2^n = C_f$. Für diese Faktorisierung α von w_4 gilt dann $H_f(\alpha) = 2$. Dabei ist $\text{Bild } H_f = \text{Kern } P_f = 2\mathbf{Z}$.

Indem wir die Operation Φ in (2.6) auf P_f an Stelle von f anwenden, erhalten wir den folgenden Satz über Elemente der Filtrierung 2 in $\pi_n(C_f, SB)$:

(2.7) SATZ. — Zu $f : SA \rightarrow SB$ sei die Abbildung P_f wie in (1.12) gegeben. Zu dem Homomorphismus $(P_f, 1)_2 : \pi_{n-1}(SA \wedge B^* \wedge A \wedge B^* \vee SA \wedge B^*)_2 \rightarrow \pi_{n-1}(SA \wedge B^*)$ gibt es dann eine Operation

$$\overline{H}_f : \text{Kern}(P_f, 1)_2 \rightarrow \pi_{n+1}(C_f, SB)/\text{Bild}(\pi_{f^*}),$$

deren Bild nur Elemente der Filtrierung 2 enthält. Falls SA a -fach zusammenhängend ist, dann ist

$$\bar{H}_f \text{ ein } \begin{cases} \text{Isomorphismus für } n \leq 3a+1, \\ \text{Epimorphismus für } n \leq 3a+2. \end{cases}$$

Für $n \leq 4a+2$ ist $\text{Bild}(\bar{H}_f)$ gleich der Menge aller Elemente der Filtrierung 2.

Beweis. — Zu der Homotopieäquivalenz $(N_2, N_1) \simeq (C_{P_f}, SA \wedge B^*)$ aus (1.9) und (1.12) betrachten wir die folgende Hintereinanderschaltung :

$$\begin{aligned} \bar{H}_f : \text{Kern}(P_f, 1)_2 &\xrightarrow{\phi} \pi_n(C_{P_f})/\text{Bild}(i) \xrightarrow{\cong} \pi_n(N_2)/\text{Bild}(i) \\ &\rightarrow \pi_n(N_f)/\text{Bild}(i) \xrightarrow{\cong} \pi_{n+1}(C_f, SB)/\text{Bild}(\pi_{f^*}). \end{aligned}$$

Aus (1.9) und (2.2) folgt die Behauptung von (2.5).

Die Operation \bar{H}_f ist sozusagen das Inverse zu H_f in Satz B, denn für $N \leq 3a+2$ ist H_f durch das folgende Diagramm gegeben :

$$(2.8) \quad \begin{array}{ccc} \pi_N(C_f, SB) & \xrightarrow{q} & \pi_N(C_f, SB)/\text{Bild}(\pi_{f^*}) \\ \downarrow H_f & & \cong \uparrow \bar{H}_f \\ \pi_{N-2}(SA \wedge B^* \wedge A \wedge B^*) & \xrightarrow{i} & \pi_{N-2}(SA \wedge B^* \wedge A \wedge B^* \vee SA \wedge B^*)_2 \supset \text{Kern}(P_f, 1)_2 \end{array}$$

Dabei ist q die Quotientenabbildung und ist i (durch die Inklusion induziert) ein Isomorphismus für $N \leq 3a+2$. Für $N = 3a+3$ ist

$$\pi_{N-2}(SA \wedge B^* \wedge A \wedge B^* \vee SA)_2 \rightarrow \pi_{N-2}(SA \wedge B^* \wedge A \wedge B^* \vee SA \wedge B^*)_2$$

ein Isomorphismus und \bar{H}_f in (2.8) wegen (2.7) surjektiv. Deshalb erhält man dann die Behauptung über \bar{H}_f in Satz C der Einleitung.

Beweis von Satz B und Satz C. — Wegen (1.9) ist die Komposition

$$L : \pi_{n-1}(SA \wedge B^* \wedge A \wedge B^* \vee SA \wedge B^*)_2 \cong \pi_n(C_{P_f}, SA \wedge B^*) \cong \pi_n(N_2, N_1) \rightarrow \pi_n(N_f, N_1),$$

ein Epimorphismus für $n \leq 3a+2$ und ein Isomorphismus für $n \leq 3a+1$. Entsprechend der exakten Sequenz in (2.1) erhält man die exakte Sequenz in Satz B und ihre Verlängerung in Satz C, indem man $\pi_n(N_f, N_1)$ vermöge L ersetzt.

3. Hopf-Invarianten und die Abbildung P_f

Sei $g_r : B_\infty \rightarrow (B^{(r)})_\infty$ die James-Abbildung, die bezgl. einer Anordnung der Teilmengen $a \subset N$ mit $\#a = r$ gegeben ist., z. B. durch die lexikographische Anordnung, vergl. [16] und 3.8 und 3.12 in [6]. Weiter sei $\bar{g}_r : SB_\infty \rightarrow SB^{(r)}$ die Adjungierte zu g_r . Es ist also $\bar{g}_1 = \bar{g}_B : SB_\infty \rightarrow SB$ adjungiert zu der Homotopieäquivalenz in (1.1). Man erhält die James-Hopf-Invarianten

$$(3.1) \quad \gamma_r : [SA, SB] \rightarrow [SA, SB^{(r)}],$$

durch $\gamma_r(f) = \bar{g}_r \circ (S\bar{f})$. Dabei sei wieder $\bar{f} : A \rightarrow B_\infty$ die Adjungierte zu f . Es ist γ_1 natürlich die Identität und für $g : A \rightarrow B$ gilt $\gamma_r(Sg) = 0$ für $r > 1$. Falls X eine Suspension ist, so ist die Hintereinanderschaltung

$$(3.2) \quad X \wedge \gamma_r : [SA, SB] \rightarrow [SX \wedge A, SX \wedge B^{(r)}],$$

unabhängig von der Wahl der Anordnung zur Definition von g_r . $X \wedge \gamma_r$ lässt sich dann auch durch Hilton-Hopf-Invarianten beschreiben (s. 4.18 in [6]) und [13].

Wir wollen nun die Abbildung P_f bestimmen. Entsprechend (1.12) wird P_f und seien auch P_f^0 und \hat{P}_f durch das homotopiekommutative Diagramm

$$(3.3) \quad \begin{array}{ccc} SA \wedge A \times (B_\infty \times B_\infty) & \xrightarrow{w_2} & SA \times B_\infty \\ \simeq \downarrow H \times & & \simeq \downarrow -H \times \\ SA \wedge A \vee SA \wedge A \wedge (B_\infty \times B_\infty) & \xrightarrow{(P_f^0, \hat{P}_f)} & SA \vee SA \wedge B_\infty \\ \simeq \downarrow H_2 & & \simeq \downarrow H_1 = (\alpha_0, J_A) \\ SA \wedge B^* \wedge A \wedge B^* & \xrightarrow{P_f} & SA \wedge B^* \end{array}$$

definiert. Dabei sei die Homotopieäquivalenz $H_1 = (\alpha_0, J_A)$ durch

$$(3.4) \quad J_A = \sum_{r \geq 1} \alpha_r \cdot (A \wedge \bar{g}_r),$$

gegeben, dabei ist die Summe als Limes zu interpretieren. Vermöge J_A und der wohlbekannten Homotopieäquivalenz $S(X \times Y) \simeq SX \vee SY \vee SX \wedge Y$ [s. (3.8)], erhält man auch H_2 , dabei vertauschen wir nur die inneren Faktoren $A \wedge B_\infty$. Falls A eine Suspension ist, sind H_1 und H_2 unabhängig von der Wahl der Abbildungen g_r und auch unabhängig von der Summationsreihenfolge. Also ist dann auch P_f wohlbestimmt. Die Inklusionen α_r und $\alpha_{m,n}$ seien wie in der Einleitung definiert.

(3.5) SATZ. — In $[SA \wedge A, SA \vee SA \wedge B_\infty]$ ist

$$P_f^0 = i_{SA} \circ^2 (i_{SA} \circ^1 ([i_{SA}, i_{SA}] - i \circ (1_{SA} \wedge \bar{f}))).$$

Dabei seien i_{SA} und i die Inklusionen von SA bzw. $SA \wedge B_\infty$ in $SA \vee SA \wedge B_\infty$ und seien die Operationen \circ^2 und \circ^1 wie in (0.2) definiert. Da $H_1 \circ P_f^0 = P_f \circ \alpha_{0,0}$, erhält man wegen (3.4) das Korollar :

(3.6) KOROLLAR. — In $[SA \wedge A, SA \wedge B^*]$ gilt :

$$P_f \circ \alpha_{0,0} = \alpha_0 \circ^2 (\alpha_0 \circ^1 ([\alpha_0, \alpha_0] - \sum_{r \geq 1} \alpha_r \circ (A \wedge \gamma_r(f)))).$$

Ferner zeigen wir :

(3.7) SATZ. — Falls A eine Suspension ist, gilt in $[SA \wedge B^{(m)} \wedge A \wedge B^{(n)}, SA \wedge B^*]$ für alle $m, n \geq 0$ die Gleichung :

$$P_f \circ \alpha_{m,n} = - \sum_{r \geq 1} \alpha_{r+m+n} \circ (A \wedge B^{(m)} \wedge \gamma_r(f) \wedge B^{(n)}) + \sum_{a \cup b = n} v_{a,b}^* [\alpha_{m+a}, \alpha_{#b}].$$

Dabei wird in der Summe mit Indizes $a, b \subset \bar{n} = \{1, \dots, n\}$ über alle Paare (a, b) summiert, für die die Vereinigung $a \cup b$ gleich \bar{n} ist, a und b dürfen leer sein. Die Abbildung

$$v_{a,b} : SA \wedge B^{(m)} \wedge A \wedge B^{(n)} \rightarrow SA \wedge B^{(m+\#a)} \wedge A \wedge B^{(\#b)},$$

wird definiert durch $v_{a,b}(t, u, x, v, y) = (t, u, x \wedge y_a, v, y_b)$. Dabei repräsentieren wir ein Element in $B^{(n)}$ durch ein Tupel $y = (y_1, \dots, y_n)$ mit $y_i \in B$. Für $a \subset \bar{n}$ sei $y_a = (y_{a_1}, \dots, y_{a_{\#a}})$ die Einschränkung des Tupels y auf a . Die Abbildung $v_{a,b}$ ist nullhomotop, falls B eine Suspension ist und $a \cup b \neq \emptyset$. Deshalb erhält man aus (3.7) die Darstellung von P_f in der Einleitung, wo $a \dot{\cup} b$ die disjunkte Vereinigung bezeichnet. Für eine Suspension A sind die Operationen $\overset{1}{\circ}$ und $\overset{2}{\circ}$ trivial, deshalb ist (3.7) konsistent mit (3.6).

Zum Beweis von (3.5) und (3.7) benötigen wir einige Vorbereitungen. Wir benutzen folgende Bezeichnungen. Sei $X = (X_1, \dots, X_n)$ ein Tupel von Räumen und sei zu $a \subset \bar{n}$ wieder X_a das eingeschränkte Tupel. Sei $PX = X_1 \times \dots \times X_n$ das Produkt und sei $\wedge X = X_1 \wedge \dots \wedge X_n$ das »smash-Produkt«. Man hat die Projektion $PX \rightarrow PX_a$ mit $x \mapsto x_a$. Allgemeiner nennen wir auch Abbildungen wie zum Beispiel $r_a : SPX \rightarrow S \wedge X_a$ eine Projektion der Koordinaten, denn es ist $r_a(t, x) = (t, x_a)$. Die Summe der Abbildungen $p_a = r_a \circ i_a$, wo i_a die Inklusion in die Einpunktverbindung ist, bezgl. einer Anordnung der Teilmengen $a \subset \bar{n}$ bestimmt die Homotopieäquivalenz :

$$(3.8) \quad P = \sum_{a \subset \bar{n}} p_a : SPX \rightarrow \bigvee_{a \subset \bar{n}} S \wedge X_a.$$

Diese erhält man mit der exakten Sequenz in (0.2), vergl. [24]. Die Homotopieäquivalenz P bestimmt eine Inklusion der Gruppen $[S \wedge X_a, Z] \subset [SPX, Z]$. Es gilt die folgende Vertauschungsregel für Elemente $\alpha_a \in [S \wedge X_a, Z]$ und $\alpha_b \in [S \wedge X_b, Z]$ mit $a, b \subset \bar{n}$ und $a < b$ in $[SPX, Z]$:

$$(3.9) \quad \alpha_a + \alpha_b = \alpha_b + \alpha_a + v_{a,b}^* [\alpha_a, \alpha_b],$$

dabei ist $[\alpha_a, \alpha_b]$ das Whitehead-Produkt und ist

$$v_{a,b} : S \wedge X_{a \cup b} \rightarrow S(\wedge X_a) \wedge (\wedge X_b)$$

gegeben durch $v_{a,b}(t, x_{a \cup b}) = (t, x_a, x_b)$ mit $x \in PX$. Da für eine Suspension B die Diagonale $\Delta_B : B \rightarrow B \wedge B$ nullhomotop ist, folgt $\alpha_a + \alpha_b = \alpha_b + \alpha_a$, falls es ein $i \in a \cap b$ gibt, für das X_i eine Suspension ist. Aus (3.9) folgt auch, dass für eine Suspension A die Homotopieäquivalenz $A \wedge P$ unabhängig von der Wahl der Summationsreihenfolge in (3.8) ist.

Wir benutzen den folgenden Hilfssatz : Für $f \in [SA, SB]$ sei

$$\bar{f}_{m,n} : B^m \times A \times B^n \rightarrow B_\infty$$

durch die Adjungierte \bar{f} und durch Multiplikation in B_∞ gegeben, d. h. für

$$x = (b, a, b') \in B^m \times A \times B^n$$

sei $\bar{f}_{m,n}(x) = b_1 \cdot \dots \cdot b_m \cdot f(a) \cdot b'_1 \cdot \dots \cdot b'_n$. Mit der Abbildung

$$\bar{p} : SB^{(m)} \wedge A \wedge B^{(n)} \rightarrow S(B^m \times A \times B^n),$$

welche durch ein Homotopieinverses von (3.8) gegeben ist, erhalten wir zu den James-Abbildungen \bar{g}_r die Elemente :

$$(3.10) \quad \gamma_r^{m,n}(f) = \bar{g}_r \circ (S\bar{f}_{m,n}) \circ \bar{p} \in [SB^{(m)} \wedge A \wedge B^{(n)}, SB^{(r)}].$$

Für diese gilt :

(3.11) HILFSSATZ. — Falls X eine Suspension ist, so gilt

$$X \wedge \gamma_r^{m,n}(f) = X \wedge B^{(m)} \wedge \gamma_{r-m-n}(f) \wedge B^{(n)}.$$

Sei $s : B^m \rightarrow B_\infty$ die Multiplikation, siehe Paragraph 1, dann erhalten wir :

(3.12) KOROLLAR. — Für eine Suspension X ist das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} SX \wedge B^m & & \\ \downarrow 1_{SX} \wedge s & \searrow J_m & \\ SX \wedge B_\infty & \xrightarrow{J_X} & \bigvee_{i \geq 1} SX \wedge B^{(i)} \end{array}$$

homotopiekommutativ. Dabei ist

$$J_m = \sum_{a \subset m, a \neq \emptyset} \alpha_{\#a} \circ (X \wedge r_a).$$

Man erhält (3.12) aus (3.11), wenn man dort f gleich 1_{SB} setzt. Zum Beweis von (3.11) benützen wir die Paarung

$$\cup : [SA, SB] \times [SA, SC] \rightarrow [SA, SB \wedge C],$$

welche für $f \in [SA, SB]$ und $g \in [SA, SC]$ durch die Hintereinanderschaltung

$$f \cup g : SA \xrightarrow{S\Delta_A} SA \wedge A \xrightarrow{f \wedge 1_A} SB \wedge A \xrightarrow{B \wedge g} SB \wedge C,$$

gegeben ist. Dabei ist Δ_A die Diagonalabbildung. Die Paarung \cup wird auch bis auf Adjunktion durch die Abbildung $\natural : B_\infty \times C_\infty \rightarrow (B \wedge C)_\infty$ von Steer induziert, dazu siehe 1.5 in [6] und 1.39 in [26]. Falls X eine Suspension ist, hat man für $\alpha, \beta \in [SA, SB]$ in $[SX \wedge A, SX \wedge B^{(r)}]$ die Cartan-Formel der Hopf-Invarianten :

$$(3.13) \quad X \wedge \gamma_r(\alpha + \beta) = X \wedge \left(\sum_{i=0}^r \gamma_i(\alpha) \cup \gamma_{r-i}(\beta) \right).$$

Diese gilt entsprechend der Bemerkung auf Seite 184 und der Bemerkung 3.12 in [6]. In der Formel setzen wir formal $\gamma_0(\alpha) = 1$ und $1 \cup x = x \cup 1 = x$.

Beweis von (3.11). — Entsprechend den Definitionen gilt in $[S(B^m \times A \times B^n), SB^{(r)}]$ die Gleichung :

$$(1) \quad \begin{aligned} \bar{g}_r \circ (S\bar{f}_{m,n}) &= \gamma_r((S\bar{f}_{m,n}) \circ \bar{g}_B) \\ &= \gamma_r(p_1 + \dots + p_m + f \circ p_A + p'_1 + \dots + p'_n). \end{aligned}$$

Dabei sind $p_i, p'_j, (p_A) : S(B^m \times A \times B^n) \rightarrow SB, (SA)$ die Projektionen. Für das Tupel $(x_1, \dots, x_N) = (p_1, \dots, p_m, f \circ p_A, p'_1, \dots, p'_n)$ mit $N = n+m+1$ gilt dann wegen (1) und (3.13) die Gleichung :

$$(2) \quad X \wedge (\bar{g}_r \circ (S\bar{f}_{m,n})) = X \wedge \left(\sum_{\substack{i_1 + \dots + i_N = r \\ i_1, \dots, i_N \geq 0}} \gamma_{i_1}(x_1) \cup \dots \cup \gamma_{i_N}(x_N) \right).$$

Da γ_1 die Identität ist und da γ_i für $i \geq 2$ auf einer Suspension verschwindet, erhalten wir aus (2) :

$$(3) \quad \left\{ \begin{array}{l} X \wedge (\bar{g}_r \circ (S\bar{f}_{m,n})) = X \wedge \left(\sum_{a \in \bar{m}, b \in \bar{n}} x_{a,b} \right), \\ \text{wo} \\ x_{a,b} = p_{a_1} \cup \dots \cup p_{a_{\#a}} \cup \gamma_{r-\#a-\#b}(f \circ p_A) \cup p_{b_1} \cup \dots \cup p_{b_{\#b}}. \end{array} \right.$$

Nach Definition von \bar{p} und \cup ist $x_{a,b} \circ \bar{p} = 0$ für $(a,b) \neq (\bar{m}, \bar{n})$ und es gilt :

$$(4) \quad x_{\bar{m}, \bar{n}} = (B^{(m)} \wedge \gamma_{r-m-n}(f) \wedge B^{(n)}) \circ r_{\bar{N}}.$$

Da $r_{\bar{N}} \circ \bar{p} \simeq 1$, folgt also aus (3) und (4) und der Definition von $X \wedge \gamma_r^{m,n}(f)$ die Behauptung von (3.11).

Weiter benötigen wir die folgende Eigenschaft der Join-Konstruktion. In der Hintereinanderschaltung

$$\begin{aligned} \pi \circ h \circ r_{12} : S(X_1 \times X_2) &\rightarrow SX_1 \wedge X_2 \rightarrow CX_1 \dot{\times} CX_2 \rightarrow V \\ V &= (SX_1 \times X_2 / \star \times X_2) \vee (X_1 \times SX_2 / X_1 \times \star), \end{aligned}$$

sei π die Abbildung, die $X_1 \times X_2 \subset CX_1 \dot{\times} CX_2$ zu einem Punkt identifiziert, sei h die Join-Konstruktion und r_{12} die Projektion der Koordinaten. Dann folgt aus der Definition von h (s. [3]) :

(3.14) HILFSSATZ. — In $[S(X_1 \times X_2), V]$ gilt die Gleichung

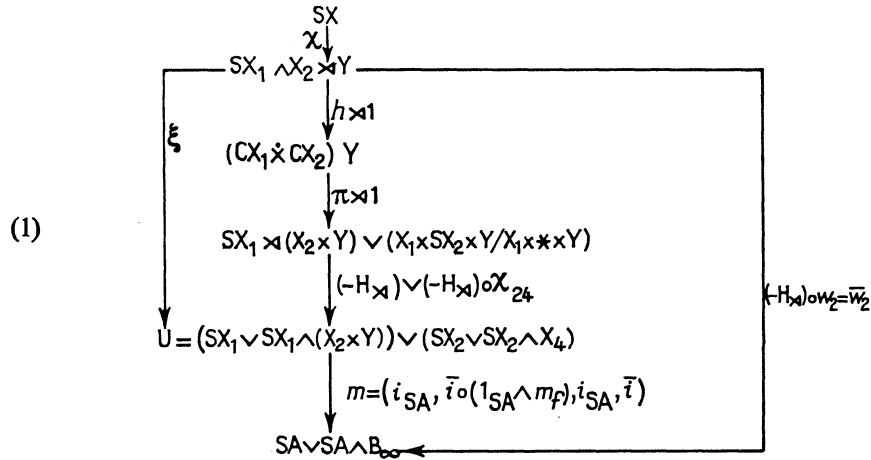
$$\pi \circ h \circ r_{12} = -j_1 \circ r_1 - \chi_2 + \chi_1 + j_2 \circ r_2.$$

Dabei sind

$$S(X_1 \times X_2) \xrightarrow{\chi_1} SX_1 \times X_2 / \star \times X_2 \xleftarrow{j_1} SX_1, \quad S(X_1 \times X_2) \xrightarrow{\chi_2} X_1 \times SX_2 / X_1 \times \star \xleftarrow{j_2} SX_2,$$

Projektionen von Koordinaten bzw. Inklusionen.

Beweis von (3.5) und (3.7). – Sei $X_1 = X_2 = A$ und $X_3 = X_4 = B_\infty$ und sei $Y = X_3 \times X_4$ und sei $X = X_1 \times X_2 \times Y = X_1 \times X_2 \times X_3 \times X_4$. Das folgende Diagramm ist nach Definition von w_2 in (1.10) kommutativ :



Dabei sind χ und $\chi_{24} : X_1 \times SX_2 \times Y / X_1 \times \star \times Y \rightarrow SX_2 \times X_4$ Projektionen der Koordinaten und es ist π und h wie in (3.14) gegeben. Weiter ist

(2)
$$m_f : A \times B_\infty \times B_\infty \rightarrow B_\infty \quad \text{mit} \quad m_f(a, b_1, b_2) = b_1 \cdot f(a) \cdot b_2.$$

Entsprechend (3.14) und der Definition von H_x in (1.11) erhält man für $\xi\chi \in [SX, U]$ in (1) die Gleichung :

(3)
$$\xi\chi = p_1 + p_{1Y} + p_2 + p_{24} - p_{12Y} - p_1 - p_{24} - p_2.$$

Dabei sind die Summanden wieder die entsprechenden Projektionen der Koordinaten von SX in die Teilräume von U , insbesondere ist

$$p_{1Y} : SX \rightarrow SX_1 \wedge Y \subset SX_1 \wedge (X_2 \times Y) \subset U.$$

Durch Einschränkung von $\bar{w}_2 = (-H_x) \circ w_2$ auf $SX_1 \wedge X_2$ erhält man P_f^0 . Also gilt wegen (1) für die Projektion $r : S(X_1 \times X_2) \rightarrow SX_1 \wedge X_2$ und für die Inklusion

$$j_{12} : S(X_1 \times X_2) \subset SX \quad \text{in} \quad [S(X_1 \times X_2), SA \vee SA \wedge B_\infty]$$

die Gleichung :

(4)
$$P_f^0 \circ r = m \circ (\xi\chi) \circ j_{12}.$$

Wegen (3) gilt in $[S(X_1 \times X_2), U]$:

(5)
$$(\xi\chi) \circ j_{12} = p_1 + p_2 - p_{12} - p_1 - p_2 \quad \text{mit} \quad p_{12} = p_{1Y} \circ j_{12}.$$

Für die Inklusionen $i_1, i_2 : SX_1, SX_2 \subset U$ und $i_{12} : SX_1 \wedge X_2 \subset SX_1 \wedge (X_2 \times Y) \subset U$ folgt aus (5) und wegen (3.9) :

$$(6) \quad (\xi\chi) \circ j_{12} = (i_2 \circ (i_1 \circ ([i_1, i_2] - i_{12}))) \circ r.$$

Durch Anwendung von m auf (6) erhält man wegen (4) die Gleichung in (3.5). Damit ist (3.5) bewiesen.

Wir beweisen nun (3.7) : Sei also $A = X_1 = X_2$ eine Suspension. Wir lösen schrittweise $SX_1 \wedge X_2 \rtimes Y$ in eine Einpunktverbindung auf. Zunächst ist für die Homotopieäquivalenz H_{\times} aus (1.11) das Diagramm

$$(7) \quad \begin{array}{ccc} SX_1 \wedge X_1 \rtimes Y & \xrightarrow{H_{\times}} & SX_1 \wedge X_2 \vee SX_1 \wedge X_2 \wedge Y \\ \uparrow \scriptstyle{-(\chi j_{12} r_{12}) + \chi} & \swarrow \scriptstyle{j} & \uparrow \\ SX & \xrightarrow{r_{12Y}} & SX_1 \wedge X_2 \wedge Y \end{array}$$

homotopiekommutativ. Dabei seien r_{12Y} und $r_{12} : SX \rightarrow S(X_1 \times X_2)$ Projektionen der Koordinaten. Um $\bar{w}_2 \circ j$ zu berechnen, müssen wir auch U in (1) zu U' auflösen : Durch eine Homotopieäquivalenz

$$SX_1 \wedge (X_2 \times Y) \simeq SX_1 \wedge X_2 \vee SX_1 \wedge Y \vee SX_1 \wedge X_2 \wedge Y = U_0$$

erhalten wir P' und m' in dem homotopiekommutativen Diagramm

$$(8) \quad \begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{P'} & U' = SX_1 \vee U_0 \vee SX_2 \vee SX_2 \wedge X_4 \\ & \searrow \scriptstyle{m} \quad \swarrow \scriptstyle{m'} & \\ & SA \vee SA \wedge B_{\infty} & \end{array}$$

Wegen (7), (5) und (3) gelten dann in $[SX, U']$ die Gleichungen :

$$(9) \quad \begin{aligned} \xi' &= P' \xi j r_{12Y} = -(P' \xi \chi j_{12} r_{12}) + P' \xi \chi \\ &= -(p_1 + p_2 - p_{12} - p_1 - p_2) + p_1 + p_{1Y} + p_2 + p_{24} \\ &\quad - (p_{12} + p_{1Y} + p_{12Y}) - p_1 - p_{24} - p_2. \end{aligned}$$

Dabei seien die Summanden nun die entsprechenden Projektionen der Koordinaten von SX in die Teilräume von U' . Nach den Rechenregeln in (3.8) folgt aus (9) :

$$(10) \quad \xi' = \langle p_{1Y}, p_2 \rangle + \langle p_{1Y}, p_{24} \rangle - p_{12Y} + \langle p_1, p_{24} \rangle.$$

Dabei bezeichne $\langle \alpha, \beta \rangle = -\alpha - \beta + \alpha + \beta$ den Kommutator zu α, β in $[SX, U']$. Die Summanden in (3.9) liegen entsprechend (3.9) in der Untergruppe $r_{12Y}^* [SX_1 \wedge X_2 \wedge Y, U']$.

Für $\bar{X} = X_1 \times X_2 \times B^m \times B^n$ erhalten wir das homotopiekommutative Diagramm :

$$(11) \quad \begin{array}{ccccc} \bar{S}\bar{X} & \xleftarrow{\bar{p}} & & & SX_1 \wedge B^{(m)} \wedge X_2 \wedge B^{(n)} \\ \downarrow \bar{s} & & & & \downarrow \alpha_{m,n} \\ SX & \xrightarrow{r_{12Y}} & SX_1 \wedge X_2 \wedge Y & \xrightarrow{H'_2} & SX_1 \wedge B^* \wedge X_2 \wedge B^* \\ \downarrow \xi' & & \downarrow \hat{p}_f = w_{2j} & & \downarrow p_f \\ U' & \xrightarrow{m'} & SA \vee SA \wedge B_\infty & \xrightarrow{H_1 = (\alpha_0, j_A)} & SA \wedge B^* \end{array}$$

Dabei ist $\bar{s} = S(1_{X_1} \times 1_{X_2} \times s \times s)$ durch die Multiplikation in B_∞ gegeben und ist \bar{p} bis auf Vertauschung von B^m und X_2 wie in (3.10) definiert. Weiter ist H'_2 bis auf Vertauschung durch die Homotopieäquivalenz H_2 in (1.12) bestimmt. Wir berechnen nun mit (10) das Element

$$(12) \quad p_f \circ \alpha_{m,n} = \bar{p}^*(H_1 \circ m' \circ \xi' \circ \bar{s}).$$

Für $p_1, p_2, p_{1Y}, p_{24}, p_{12Y} \in [SX, U']$ erhalten wir zunächst die folgenden Formeln. Für $i \in \{1, 2\}$, $a \subset \bar{n}$, $b \subset \bar{m}$ sei

$$q_{iab} : \bar{S}\bar{X} \rightarrow SX_i \wedge B^{(\#a)} \wedge B^{(\#b)} \xrightarrow{\alpha_{\#a + \#b}} SA \wedge B^*,$$

durch Projektion der Koordinaten gegeben. Falls a oder b leer ist, schreiben wir nur q_{ib} bzw. q_{ia} . In $[\bar{S}\bar{X}, SA \wedge B^*]$ gilt :

$$(13) \quad \left\{ \begin{array}{l} (H_1 m') \circ p_i \circ \bar{s} = q_{ib}, \quad i = 1, 2, \\ (H_1 m') \circ p_{1Y} \circ \bar{s} = \sum_{\substack{a \subset \bar{m}, b \subset \bar{n}, \\ \#a + \#b \geq 1}} q_{iab}, \\ (H_1 m') \circ p_{24} \circ \bar{s} = \sum_{b \subset \bar{n}, \#b \geq 1} q_{2b}. \end{array} \right.$$

Dabei erhält man die Gleichungen für p_{1Y} und p_{24} aus der Definition von m in (1) und aus (3.12). Weiter sei $\bar{q} : \bar{S}\bar{X} \rightarrow SX_1 \wedge X_2 \wedge B^{(m)} \wedge B^{(n)} \rightarrow SA \wedge B^* \wedge A \wedge B^*$ durch die Projektion und bis auf Vertauschen von X_2 und $B^{(m)}$ durch $\alpha_{m,n}$ gegeben. Dann gilt wegen (3.4), (3.12) und der Definition von m in (1) mit Hilfe der Definition (3.10) die Gleichung :

$$(14) \quad \bar{p}^*((H_1 m') \circ p_{12Y} \circ \bar{s}) = \sum_{r \geq m+n+1} \alpha_r \circ (A \wedge \gamma_r^{m,n}(f)) \circ \bar{q}.$$

Da \bar{s} ein Homomorphismus ist, können wir zur Berechnung von $\bar{p}^*((H_1 m') \circ \xi' \circ \bar{s})$ die Gleichungen (13) und (14) in (10) einsetzen. Aus der Bilinearität des Whitehead-Produkts erhält man nach dem Einsetzen eine Summe, in der unter \bar{p}^* alle Summanden ausser (14) und den folgenden verschwinden :

$$(15) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \langle p_{1\bar{m}\bar{n}}, p_2 \rangle, & \text{falls } m+n \geq 1, \quad \text{bei } \langle p_{1Y}, p_2 \rangle, \\ \sum_{\substack{b \cup b' = \bar{n}, \\ \#b' \geq 1, m + \#b \geq 1}} \langle p_{1\bar{m}b}, p_{2b'} \rangle & \text{bei } \langle p_{1Y}, p_{24} \rangle, \\ \langle p_1, p_{2\bar{n}} \rangle, & \text{falls } m = 0, \quad \text{bei } \langle p_1, p_{24} \rangle. \end{array} \right.$$

Wegen (3.9) folgt aus (14), (15) und (12) die Behauptung von (3.7), wenn man für $\gamma_r^{m,n}(f)$ die Gleichung (3.11) benutzt. Damit ist auch (3.7) bewiesen.

4. Relationen für primäre Homotopieoperationen

Den Relationen, die wir in Satz A der Einleitung beschrieben haben, liegt die folgende Eigenschaft der Abbildung w_2 zu Grunde :

(4.1) SATZ. — Zu $f : SB \rightarrow SA$ sei die Abbildung w_2 wie in (1.10) definiert. Dann ist die Hintereinanderschaltung

$$SA \wedge A \times (B_\infty \times B_\infty) \xrightarrow{w_2} SA \times B_\infty \xrightarrow{p \circ (-1)} SA \vee SB \xrightarrow{(f, 1)} SB$$

nullhomotop. Dabei ist $p = p_0 \circ \varphi_0 : SA \times B_\infty \xrightarrow{\cong} F(i_0) \rightarrow SA \vee SB$ wie in (2.3) definiert.

Beweis. — Da wegen (2.4) das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} N_f & \xrightarrow{p_f \bar{\varphi}_f \bar{h}} & SB \\ \cup & & \uparrow (f, 1) \\ SA \times B_\infty & \xrightarrow{p(-1)} & SA \vee SB \end{array}$$

homotopiekommutativ ist, lässt sich also $(f, 1) p(-1)$ wegen Satz (1.9) über $N_2 \simeq C_{w_2}$ fortsetzen. Also folgt (4.1).

Für die Abbildung p in (4.1) gilt der folgende Hilfssatz. Sei wieder $\bar{g}_B = \bar{g}_1 : SB_\infty \rightarrow SB$ die Adjungierte zu φ in (1.1) und seien i_{SA}, i_{SB} die Inklusionen in $SA \vee SB$.

(4.2) HILFSSATZ. — Das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} SA \times B_\infty & \xrightarrow{H_{\times}} & SA \vee SA \wedge B_\infty \\ & \searrow p & \swarrow (i_{SA}, [i_{SA}, i_{SB} \circ \bar{g}_B]) \\ & & SA \vee SB \end{array}$$

ist homotopiekommutativ.

Als Folgerung zu (4.2), (4.1) und (3.5) erhält man unmittelbar :

(4.3) SATZ. — Sei $\bar{f} : A \rightarrow B_\infty$ eine Adjungierte zu $f : SA \rightarrow SB$. Dann gilt in $[SA \wedge A, SB]$ die Gleichung :

$$[f, f] = [f, \bar{g}_B] \circ (1_{SA} \wedge \bar{f}).$$

Die Abbildung p in (4.1) und (4.2) lässt sich mit dem folgenden Hilfssatz weiter aufspalten :

(4.4) HILFSSATZ. — Falls A eine Suspension ist, so ist für die Homotopieäquivalenz J_A in (3.4) das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} SA \wedge B_\infty & \xrightarrow{J_A} & \bigvee_{r \geq 1} SA \wedge B^{(r)} \\ & \searrow [i_{SA}, i_{SB} \circ \bar{g}_B] & \swarrow W \\ & & SA \vee SB \end{array}$$

homotopiekommutativ. Dabei ist W durch iterierte Whitehead-Produkte gegeben, d. h. $W \circ \alpha_r = [i_{SA}, i_{SB}^{(r)}]$.

Bemerkung. — Hilfssatz (4.2) und (4.4) stellen den induktiven Schritt im Beweis des Hilton-Milnor-Theorems dar. Denn man erhält durch diese Hilfssätze die Homotopieäquivalenz

$$(\star) \quad \Omega(SA \vee SB) \simeq \Omega SB \times \Omega(SA \vee \bigvee_{i \geq 1} SA \wedge B^{(i)}),$$

welche durch die Multiplikation im Schleifenraum und durch i_{SA}, i_{SB} und W aus (4.4) bestimmt ist. Gray macht in ([10], [11]) auf diesen induktiven Schritt aufmerksam, ohne zu zeigen, dass die Homotopieäquivalenz (\star) durch die iterierten Whitehead-Produkte W in (4.4) induziert ist. Erst durch diese zusätzliche Eigenschaft erhält man aus (\star) induktiv die volle Aussage des Hilton-Milnor-Theorems, vgl. ([13], [22], [6]).

Als Folgerung zu (4.4) und (4.3) erhalten wir mit der Definition von J_A in (3.4) den Satz :

(4.5) SATZ. — Sei $f: SA \rightarrow SB$ und sei A eine Suspension. Dann gilt in $[SA \wedge A, SB]$ die Gleichung :

$$[f, f] = [f, 1_{SB}] \circ (A \wedge f) + \sum_{r \geq 2} [f, 1_{SB}^{(r)}] \circ (A \wedge \gamma_r(f)).$$

(4.6) KOROLLAR. — Falls f eine Suspension ist oder falls

$$[[f, 1_{SB}], 1_{SB}] = 0$$

gilt :

$$[f, f] = [f, 1_{SB}] \circ (A \wedge f).$$

Satz (4.5) ist äquivalent mit der folgenden Barcus-Barratt-Formel :

(4.7) KOROLLAR (Barcus-Barratt). — Zu $f: SZ \rightarrow SY$ sei $\bar{f}: Z \rightarrow Y_\infty$ eine Adjungierte, dann gelten in $[SX \wedge Z, SX \vee SZ]$ die Formeln :

$$[i_{SX}, i_{SY} \circ f] = [i_{SX}, i_{SY} \circ \bar{g}_Y] \circ (1_{SX} \wedge \bar{f}),$$

und für Suspensionen X, Z :

$$[i_{SX}, i_{SY} \circ f] = [i_{SX}, i_{SY}] \circ (X \wedge f) + \sum_{r \geq 2} [i_{SX}, i_{SY}^{(r)}] \circ (X \wedge \gamma_r(f)).$$

Beweis. — Sei $SA = SX \vee SZ$ und $SB = SX \vee SY$, dann wende man (4.3) bzw. (4.5) auf $1_{SX} \vee f: SA \rightarrow SB$ an.

Bemerkung. — Sei $\alpha: SX \rightarrow U$ und $\beta: SY \rightarrow U$, dann erhält man aus (4.7) die Expansion $[\alpha, \beta \circ f]$, vgl. 7.1 und 7.4 in [2]. Mit (4.7) lässt sich dann auch (4.5) beweisen wenn man zu $f: SA \rightarrow SB$ die Expansion von $[f, 1_{SB} \circ f]$ berechnet. In 3.5.1 von [25] hat Rutter ebenfalls (4.7) erhalten.

Als weitere unmittelbare Folgerung zu (4.1), (4.4) und (3.7) erhalten wir in Verallgemeinerung von (4.5) :

(4.8) SATZ. — Sei $f : SA \rightarrow SB$ und sei A eine Suspension, dann gilt für jedes Paar (m, n) mit $m, n \geq 0$ in $[SA \wedge B^{(m)} \wedge A \wedge B^{(n)}, SB]$ die Gleichung :

$$\begin{aligned} & \sum_{a \cup b = \bar{n}} v_{a,b}^* [[f, 1_{SB}^{(m+\#a)}], [f, 1_{SB}^{(\#b)}]] \\ &= [f, 1_{SB}^{(m+n+1)}] \circ (A \wedge B^{(m)} \wedge f \wedge B^{(n)}) + \sum_{r \geq 2} [f, 1_{SB}^{(m+n+r)}] \circ (A \wedge B^{(m)} \wedge \gamma_r(f) \wedge B^{(n)}). \end{aligned}$$

Falls B eine Suspension ist, erhält man aus (4.8) die Behauptung von Satz A in der Einleitung. Entsprechend zu Korollar (4.7) kann man aus (4.8) Formeln für die Expansion iterierter Whitehead-Produkte ableiten. In Verallgemeinerung von (4.6) gilt :

(4.9) KOROLLAR. — Falls f eine Suspension ist oder falls $[f, 1_{SB}^{(m+n+2)}] = 0$, gilt die Gleichung :

$$\sum_{a \cup b = \bar{n}} v_{a,b}^* [[f, 1_{SB}^{(m+\#a)}], [f, 1_{SB}^{(\#b)}]] = [f, 1_{SB}^{(m+n+1)}] \circ (A \wedge B^{(m)} \wedge f \wedge B^{(n)}).$$

Für eine Suspension f ist die Gleichung in (4.9) für $n > 0$ nicht trivial. So erhält man für $f = 1_{SB}$ das Korollar :

(4.10) KOROLLAR. — Sei B eine Suspension, dann gilt für jedes Paar (m, n) mit $m, n \geq 0$ in $[SB^{(m+n+2)}, SB]$ die Gleichung :

$$\sum_{a \cup b = \bar{n}} v_{a,b}^* [[1_{SB}, 1_{SB}^{(m+\#a)}], [1_{SB}, 1_{SB}^{(\#b)}]] = [1_{SB}, 1_{SB}^{(m+n+1)}].$$

Für $m = 0$ und $n = 1$ ist die Gleichung in (4.10) äquivalent mit der Jacobi-Identität bei Whitehead-Produkten.

LITERATUR

- [1] M. ARKOWITZ, *The Generalized Whitehead Product* (Pac. J. Math., Bd 12, 1962, s. 7-23).
- [2] W. D. BARCUS and M. G. BARRATT, *On the Homotopy Classification of the Extensions of a Fixed Map* (Trans. Amer. Math. Soc., Bd 88, 1958, s. 57-74).
- [3] H. J. BAUES, *Iterierte Join Konstruktionen* (Math. Z., Bd 131, 1973, s. 77-84).
- [4] H. J. BAUES, *Relative Homotopiegruppen bei Abbildungskegeln*, preprint Bonn, 1974 (erscheint in *Compositio Math.*).
- [5] H. J. BAUES, *Zur Hindernistheorie* (preprint Bonn, 1974).
- [6] J. M. BOARDMAN and B. STEER, *On Hopf Invariants* (Comment. Math. Helv., Bd 42, 1967, s. 180-221).
- [7] T. TOM DIECK, K. H. KAMPS und D. PUPPE, *Homotopietheorie* (Lecture Notes in Math., Nr 157, Springer, Berlin, 1970).
- [8] W. ELING, *Ueber den Schleifenraum eines Abbildungskegels*, Diplomarbeit Bonn, 1974.
- [9] T. GANEA, *A Generalization of the Homology and Homotopy Suspension* (Comm. Math. Helv., Bd 39, 1965, s. 295-322).
- [10] B. GRAY, *On the Homotopy Groups of Mapping Cones* [Proc. London Math. Soc., Bd 26, (3), 1973, s. 497-520].

- [11] B. GRAY, *A Note on the Hilton-Milnor Theorem* (*Top.*, Bd 10, 1971, s. 199-202).
- [12] K. A. HARDIE, *Quasifibration and Adjunction* [*Pac. J. Math.*, Bd 35, (2), 1970, s. 389-399].
- [13] P. J. HILTON, *On the Homotopy Groups of a Union of Spheres* (*J. London Math. Soc.*, Bd 30, 1955, s. 154-172).
- [14] S. Y. HUSSEINI, *The Topology of Classical Groups and Related Topics*, New York, London, Paris, Gordon and Breach, 1969.
- [15] S. T. HUSSEINI, *Constructions of the Reduced Product Type II* (*Top.*, Bd 3, 1965, s. 59-79).
- [16] J. M. JAMES, *Reduced Product Spaces* (*Ann. of Math.*, Bd 62, (2), 1955, s. 170-197).
- [17] J. M. JAMES, *On the Homotopy Groups of Certain Pairs and Triads* [*Quart. J. Math.*, Oxford, Bd 5, (2), 1954, s. 260-270].
- [18] J. M. JAMES, *Filtrations of the Homotopy Groups of Spheres* [*Quart. J. Math.*, Oxford, Bd 9, (2), 1958, s. 301-309].
- [19] J. M. JAMES, *On the Suspension Triad*. [*Ann. of Math.*, Bd 63, (2), 1956, s. 191-247].
- [20] J. M. LEMAIRE, *Algèbres connexes et homologie des espaces de lacets* (*Lecture Notes in Math.*, Nr 422, Springer, Berlin, 1974).
- [21] J. A. LUNDELL and S. WEINGRAM, *The Topology of CW-Complexes*, Van Nostrand, New York, 1969.
- [22] J. W. MILNOR, *On the Construction FK*, in *Algebraic Topology* (London Math. Soc., *Lecture Note*, Series 4, Cambridge, University Press, 1972, s. 119-136).
- [23] G. J. PORTER, *Higher Order Whitehead Products* (*Top.*, Bd 3, 1965, s. 123-135).
- [24] D. PUPPE, *Homotopiemengen und ihre induzierten Abbildungen* (*I. Math. Z.*, Bd 69, 1958, s. 299-344).
- [25] J. W. RUTTER, *A Homotopy Classification of Maps into an Induced Fibre Space* (*Top.*, Bd 6, 1967, s. 379-403).
- [26] B. STEER, *Extensions of Mappings into H-Spaces* [*Prod. London Math. Soc.*, Bd 13, (3), 1963, s. 219-272].
- [27] H. TODA, *On the Double Suspension E_2* (*J. of Inst.*, Polytechnics Osaka, Bd 7, Nr 1-1, Serie A, 1956, s. 103-145).
- [28] G. W. WHITEHEAD, *On the Freudenthal Theorems* (*Ann. of Math.*, Bd 57, 1953, s. 209-228).

(Manuscrit reçu le 27 mai 1975.)

H. J. BAUES,
 Mathematisches,
 Institut der Universität,
 53 Bonn,
 Wegelerstrasse 10,
 Bundesrepublik Deutschland.