ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

JEAN-JACQUES RISLER

Sur l'anneau des fonctions de Nash globales

Annales scientifiques de l'É.N.S. 4e série, tome 8, nº 3 (1975), p. 365-378

<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1975_4_8_3_365_0>

Ann. scient. Éc. Norm. Sup.,
4^e série, t. 8, 1975, p. 365 à 378.

SUR L'ANNEAU DES FONCTIONS DE NASH GLOBALES

PAR JEAN-JACQUES RISLER

Sur le corps **R**, les ensembles algébriques irréductibles ne sont pas nécessairement connexes (*cf.* par exemple l'hyperbole $XY-1$ dans $\mathbf{R}^2$) contrairement à ce qui se passe sur **C**.

On voit facilement que l'hyperbole équilatère n'est plus irréductible si l'on rajoute aux polynômes les fonctions de Nash sur $\mathbf{R}^2$ (i. e. les fonctions analytiques sur $\mathbf{R}^2$ et algébriques sur $\mathbf{R}[X, Y]$). L'idée qui préside à ce chapitre est ainsi que les fonctions de Nash ont d'aussi bonnes propriétés algébriques que les polynômes, mais de meilleures propriétés concernant la topologie.

L'anneau des fonctions de Nash serait ainsi mieux adapté que l'anneau des polynômes à l'étude des ensembles algébriques dans $\mathbf{R}^n$ (on peut remarquer à ce sujet que l'anneau des « fonctions de Nash » sur $\mathbf{C}^n$ est égal à l'anneau $\mathbf{C}[X_1, \ldots, X_n]$; on peut donc considérer l'anneau des fonctions de Nash sur $\mathbf{R}^n$ comme l'analogue réel de l'anneau des polynômes sur $\mathbf{C}^n$).

Le résultat principal de cet article est le théorème 2.1 qui montre que l'anneau des fonctions de Nash sur $\mathbf{R}^n$ est noethérien.

Cet article constitue le dernier chapitre de ma thèse.

1. Préliminaires

Les variétés algébriques considérées dans ce chapitre sont les variétés au sens classique (*cf.* par exemple, *Faisceaux algébriques cohérents* de Jean-Pierre Serre).

DÉFINITION 1.1. — Soient W une variété algébrique réelle, U un ouvert de W ne contenant pas de point singulier. Une fonction de Nash sur U est une fonction analytique réelle sur U dont le germe en chaque point x est algébrique sur le corps des fractions rationnelles (en les coordonnées locales de W au point x).

Les fonctions de Nash sur U forment un anneau que nous noterons N (U). Si $U \subset \mathbf{R}^n$ est non vide, N (U) contient l'anneau de polynômes $\mathbf{R}[X_1, \ldots, X_n]$.

LEMME 1.2. — *Les notations étant les mêmes que plus haut, soit* W' *une sous-variété algébrique lisse de* W. *Alors si f est une fonction de Nash sur* $U, f|W'$ *est une fonction de Nash sur* $W' \cap U$.

Démonstration. — Le problème est local; soient $x \in W' \cap U$, $x_1, \ldots, x_n$ des coordonnées locales sur W nulles en x telles que des équations de W′ soient : $x_1 = \ldots = x_p = 0$ au voisinage de x.

Par récurrence sur p, on voit qu'il suffit de montrer que la restriction de f à la variété W_1 d'équation $x_1 = 0$ est de Nash sur $W_1 \cap U$. Comme $f \mid W_1$ est analytique sur W_1, il suffit de montrer que $f \mid W_1$ est algébrique sur le corps $\mathbf{R}(x_2, \ldots, x_n)$.

Mais, par hypothèse, il existe une équation de la forme

$$\sum_{i=0}^{p} a_i(x_1, \ldots, x_n) f^i(x_1, \ldots, x_n) = 0,$$

les a_i étant des polynômes non tous identiquement nuls; on peut alors supposer que les a_i ne sont pas tous divisibles par x_1, d'où une équation de dépendance algébrique pour $f \mid W_1$ en faisant $x_1 = 0$.

C. Q. F. D.

Considérons maintenant l'anneau des germes de fonctions de Nash en un point $0 \in \mathbf{R}^n$. Nous noterons N_0 cet anneau et $\mathbf{R}[X]_0$ le localisé de $\mathbf{R}[X] = \mathbf{R}[X_1, \ldots, X_n]$ par rapport à l'idéal maximal $(X_1, \ldots, X_n)$ des polynômes nuls en 0.

On a évidemment une inclusion canonique $\mathbf{R}[X]_0 \subset N_0$.

Nous aurons besoin de la proposition (bien connue) suivante :

PROPOSITION 1.3. — N_0 *est la fermeture algébrique de* $\mathbf{R}[X]_0$ *dans son complété* $\mathbf{R}[[X]] = \mathbf{R}[[X_1, \ldots, X_n]]$; *c'est donc le hensélisé de* $\mathbf{R}[X]_0$ ([7], p. 188); *en particulier*, N_0 *est un anneau local régulier* (*donc noethérien*) *de dimension de Krull n, plat sur* $\mathbf{R}[X]_0$.

COROLLAIRE 1.4. — *Soient* W *une variété algébrique lisse*, U *un ouvert connexe de* W; *alors* N (U) *est intégralement clos.*

Soit x un point de U, et notons $\mathcal{O}(U)$ l'anneau des fonctions analytiques sur U; comme U est connexe, on a l'égalité : $N(U) = N_x \cap \mathcal{O}(U)$ (ceci a un sens car tous ces anneaux sont canoniquement plongés dans l'anneau $\mathcal{O}_x$ des germes de fonctions analytiques en x).

Or $\mathcal{O}(U)$ est intégralement clos (cela se voit localement, et chaque $\mathcal{O}_x$ est intégralement clos) et N_x aussi puisque d'après 1.3 il est régulier.

N (U) est donc bien intégralement clos.

2. Noethérianité de l'anneau des fonctions de Nash globales

Par souci de clarté, nous considérerons dans ce paragraphe des ouverts de $\mathbf{R}^n$; il est facile de voir que les résultats et en particulier le théorème 2.1 sont aussi vrais pour des ouverts d'une variété algébrique W lisse.

Dans tout ce paragraphe, U désignera donc un ouvert *non vide* de $\mathbf{R}^n$.

Considérons la propriété suivante :

(P) Si W et W′ sont deux sous-ensembles algébriques fermés de $\mathbf{R}^n$ tels que $W' \subset W$, alors $(W - W') \cap U$ n'a qu'un nombre fini de composantes connexes.

Beaucoup d'ouverts satisfont à (P) : par exemple, les composantes connexes des ouverts de Zariski [13], ou les ouverts sous-analytiques relativement compacts (et donc, en particulier, les ouverts semi-analytiques relativement compacts) [4].

Le résultat principal de cet article est le suivant :

THÉORÈME 2.1 [8]. — *Soit* U *un ouvert* (*non vide*) *de* $\mathbf{R}^n$ *satisfaisant à la propriété* (P); *alors* N (U) *est un anneau noethérien.*

Remarque. — Ce résultat est à rapprocher de celui de Frisch ([3] ou [1]) sur la noethérianité de l'anneau des germes de fonctions analytiques sur un compact semi-analytique de $\mathbf{R}^n$. G. E. Froymson [14] a montré un résultat analogue.

Démonstration. — *a.* Démontrons d'abord la proposition suivante :

PROPOSITION 2.2. — *Soit* U *un ouvert non vide de* $\mathbf{R}^n$ *satisfaisant à la propriété* (P); *les idéaux maximaux de* N (U) *sont en bijection avec les points de* U, *l'idéal correspondant à un point* (x) *étant formé de l'ensemble des fonctions de* N (U) *qui s'annulent en* x.

Démonstration. — On a une injection canonique : $\mathbf{R}[X_1, \ldots, X_n] = \mathbf{R}[X] \subset N(U)$; si M est un idéal de N (U), nous poserons $\mathscr{P} = M \cap \mathbf{R}[X]$.

LEMME 2.3. — *Soit* M *un idéal de* N (U) *tel que* $1 \notin M$; *alors tout* $f \in M$ *s'annule en au moins un point de* $U \cap V(\mathscr{P})$ [$V(\mathscr{P})$ *désignant l'ensemble des zéros de* $\mathscr{P}$ *dans* $\mathbf{R}^n$].

Soit $f \in M$, et soient (g_i) $(1 \leqq i \leqq r)$ des générateurs de $\mathscr{P}$; la fonction $f^2 + \sum_{i=1}^{r} (g_i)^2$ appartient à M donc s'annule en au moins un point $x \in U$, car si une fonction de N (U) ne s'annule pas dans U, son inverse appartient à N (U), ce qui est contraire à l'hypothèse $1 \notin M$.

Mais si $x \in U$ annule $f^2 + \sum_{i=1}^{r} (g_i)^2$, il annule f et tous les g_i, et donc il appartient à $V(\mathscr{P})$.

C. Q. F. D.

Posons $V(\mathscr{P}) = V$, et notons S (V) l'ensemble des points singuliers de V; S (V) est donc l'ensemble des points où le localisé de l'anneau $\mathbf{R}[X]/\mathscr{P}$ n'est pas régulier.

LEMME 2.4. — *Soit* $\mathscr{P}$ *un idéal premier de* $\mathbf{R}[X]$, $V = V(\mathscr{P})$. *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(*a*) $S(V) \neq V$;

(*b*) $\mathscr{P}$ *est l'idéal de tous les polynômes nuls sur* V.

Démonstration. — (*a*) $\Rightarrow$ (*b*). — Soit x un point de $V - S(V)$; notons M_x l'idéal maximal de $\mathbf{R}[X]$ correspondant au point x : l'anneau $(\mathbf{R}[X]/\mathscr{P})_{M_x}$ est local régulier; l'idéal $\mathscr{P}\,\mathbf{R}[X]_{M_x}$ est donc engendré par une partie d'un système régulier de paramètres de l'anneau $\mathbf{R}[X]_{M_x}$: si $f \in \mathbf{R}[X]$ est nulle sur V, on a $f \in \mathscr{P}\,\mathbf{R}[X]_{M_x}$ (car un idéal engendré par un système régulier de paramètres satisfait évidemment à la condition des zéros) d'où $f \in \mathscr{P}$ puisque comme $\mathscr{P}$ est premier, on a l'égalité

$$\mathscr{P} = (\mathscr{P}\,\mathbf{R}[X]_{M_x}) \cap \mathbf{R}[X].$$

(*b*) $\Rightarrow$ (*a*). — Cela résulte du critère jacobien de régularité : il y a un jacobien qui n'appartient pas à $\mathscr{P}$, donc qui ne s'annule pas sur V tout entier.

LEMME 2.5. — *Supposons que* M *soit un idéal maximal de* N (U)*; alors* S (V) $\neq$ V.

Comme $\mathscr{P}$ est un idéal premier de $\mathbf{R}[X]$, on peut utiliser le lemme 2.4 et prouver que tout polynôme nul sur V appartient à $\mathscr{P}$. Supposons par l'absurde que $g \in \mathbf{R}[X]$ soit nul sur V et $g \notin \mathscr{P}$; l'idéal $M+N(U)\,g$ est distinct de M donc contient 1 : $1 = f+hg$ avec $f \in M$. Ceci est absurde car d'après 2.3 f s'annule en au moins un point de V.

C. Q. F. D.

On déduit de là que si M est un idéal maximal de N (U), il existe $f \in M$ qui ne s'annule en aucun point de $U \cap S(V)$: soit en effet g un polynôme nul sur S (V) qui n'appartient pas à $\mathscr{P}$: comme plus haut, on peut écrire :

$$1 = f + hg \qquad \text{avec} \quad f \in M \quad \text{et} \quad h \in N(U);$$

f ne s'annule donc pas sur S (V).

Il en résulte alors que tout $\varphi \in M$ s'annule en au moins un point régulier de $V \cap U$ (car sinon la fonction φ^2+f^2 ne s'annulerait pas dans U, et M contiendrait un élément inversible).

LEMME 2.6. — *Soit toujours* M *un idéal maximal de* N (U), *et* $\mathscr{P} = M \cap \mathbf{R}[X]$. *Notons* V_r *l'ensemble des points réguliers de* V, *et soit* W *une composante connexe de* $V_r \cap U$. *Si il existe* $f \in M$ *dont la restriction à* W *n'est pas identiquement nulle, il existe* $h \in M$ *qui ne s'annule pas sur* W.

Démonstration. — Soit f un élément de M tel que $f|W \not\equiv 0$, et soit $\bar{f}$ la restriction de f à W; $\bar{f}$ est une fonction de Nash sur W (1.2). Il existe donc des polynômes $b_i \in \mathbf{R}[X]$ dont les restrictions $\bar{b}_i$ à W satisfont à une équation de la forme

$$\sum_{i=0}^{p} \bar{b}_i \bar{f}^i = 0,$$

avec $\bar{b}_0 \not\equiv 0$ puisque l'on suppose $\bar{f} \not\equiv 0$.

On a donc $b_0 \notin \mathscr{P}$, d'où $g = \sum_{i=0}^{p} b_i f^i \notin M$; M étant maximal, l'idéal $M+g\,N(U)$ contient la constante 1 : $1 = h+g\,\varphi$ avec $h \in M$; comme g s'annule identiquement sur W, on en déduit que h ne s'annule pas sur W.

C. Q. F. D.

Démontrons maintenant la proposition 2.2 : l'hypothèse (P) implique que $V_r \cap U$ n'a qu'un nombre fini de composantes connexes $W_1, \ldots, W_s$.

Or nous avons vu que tous les éléments de M s'annulaient sur V_r : il existe alors un W_i, soit W_1 par exemple, sur lequel tous les éléments de M s'annulent [si en effet pour chaque i ($1 \leqq i \leqq s$) il y avait une fonction $f_i \in M$ qui ne s'annulait pas sur W_i, la fonction $\sum_{i=1}^{s} f_i^2$ ne s'annulerait pas sur $V_r \cap U = W_1 \cup \ldots \cup W_s$, ce qui est impossible car nous avons vu que tout élément de M s'annule en un point de $V_r \cap U$].

Mais, d'après le lemme 2.6, on en déduit que tous les éléments de M sont identiquement nuls sur W_1; comme M est un idéal maximal, W_1 est nécessairement réduite à un point a, et M égal à l'ensemble des fonctions de N (U) qui s'annulent en a.

C. Q. F. D.

b. Montrons maintenant des propriétés locales de l'anneau N (U) : la propriété (P) n'intervient donc pas ici.

PROPOSITION 2.7. — *Soient* U *un ouvert non vide de* $\mathbf{R}^n$, *a un point de* U *et* M_a *l'idéal (maximal) de tous les éléments de* N (U) *nuls en a.*

Alors le localisé de N (U) *par rapport à* M_a, *que nous noterons* $N(U)_a$ *est un anneau local régulier (donc noethérien) de dimension n plat sur l'anneau* $\mathbf{R}[X]$.

Démonstration. — Si U′ est la composante connexe de U contenant a, on a

$$N(U)_a \simeq N(U')_a;$$

on peut donc supposer U connexe.

Nous avons vu que N (U) est intégralement clos (1.4). $N(U)_a$ est donc aussi intégralement clos.

Soit $R = \mathbf{R}[X]_a$ le localisé de l'anneau $\mathbf{R}[X]$ par rapport à l'idéal maximal des polynômes nuls en a; R est un anneau local régulier, et l'anneau des germes de fonctions de Nash en a est le hensélisé ${}^hR$ de R (1.3).

On a des inclusions locales

$$R \to N(U)_a \to {}^hR.$$

La proposition 2.7 résultera alors du lemme suivant :

LEMME 2.8. — *Soit* R *un anneau local noethérien intégralement clos,* ${}^hR$ *son hensélisé,* B *un anneau local intégralement clos tel que* $R \subset B \subset {}^hR$. *Alors* B *est noethérien et plat sur* R.

Démonstration. — Notons ${}^hB$ l'hensélisé de B (*cf.* [7], p. 180). Comme $B \subset {}^hR$, il y a un unique B-homomorphisme : ${}^hB \xrightarrow{\alpha} {}^hR$, et comme $R \subset B$, il y a un unique R-homomorphisme : ${}^hR \xrightarrow{\beta} {}^hB$ ([7], p. 181). Comme $\alpha \circ \beta$ est un R-homomorphisme, c'est l'identité de ${}^hR$; α est donc surjectif. Il est aussi injectif puisque B est supposé intégralement clos ([7], p. 181) : α est ainsi un isomorphisme, ce qui montre que ^{h}B est noethérien, donc B aussi par fidèle platitude, et comme ^{h}R est plat sur B, on en déduit facilement que B est plat sur R (B et R ont d'ailleurs des complétés isomorphes).

C. Q. F. D.

c. PROPOSITION 2.9. — *Soit* U *un ouvert non vide de* $\mathbf{R}^n$ *satisfaisant à la propriété* (P), *et soit* $\mathscr{P}$ *un idéal premier de* $\mathbf{R}[X]$ *de hauteur h. Alors :*

1° *Il n'y a qu'un nombre fini d'idéaux premiers* $\mathscr{P}_1, \ldots, \mathscr{P}_k$ *de* N (U) *au-dessus de* $\mathscr{P}$ (*i. e. tels que* $\mathscr{P}_i \cap \mathbf{R}[X] = \mathscr{P}$);

2° *Les idéaux* $\mathscr{P}_i$ *sont de hauteur h, et l'on a* $\bigcap_{i=1}^{k} \mathscr{P}_i = \mathscr{P}\,\mathrm{N}(\mathrm{U})$.

Démonstration. — Montrons d'abord le point 2°; le fait que $\mathscr{P}_i$ soit de hauteur h est local : il est équivalent au fait que $\mathscr{P}_i\,\mathrm{N}(\mathrm{U})_a$ soit de hauteur h, avec $a \in \mathrm{V}(\mathscr{P}_i)$.

Or, on a $\mathscr{P}_i\,\mathrm{N}(\mathrm{U})_a \cap \mathbf{R}[X]_a = \mathscr{P}\,\mathbf{R}[X]_a$: le fait que hauteur $\mathscr{P}_i$ = hauteur $\mathscr{P}$ résulte alors de ce que $\mathbf{R}[X]_a$ et $\mathrm{N}(\mathrm{U})_a$ ont le même hensélisé (2.8), et que si R est un anneau local ayant ^{h}R pour hensélisé, tous les idéaux premiers de ^{h}R au-dessus d'un idéal premier de hauteur h de R sont de hauteur h ([7], p. 187).

Pour voir que $\bigcap \mathscr{P}_i = \mathscr{P}\,\mathrm{N}(\mathrm{U})$, il suffit de voir que l'idéal $\mathscr{P}\,\mathrm{N}(\mathrm{U})$ est égal à sa racine [i. e. que l'anneau $\mathrm{N}(\mathrm{U})/\mathscr{P}\,\mathrm{N}(\mathrm{U})$ est réduit]; or, ceci est aussi un problème local, et la proposition 2.2 montre qu'il suffit de montrer que $\mathscr{P}\,\mathrm{N}(\mathrm{U})_a$ est égal à sa racine pour $\mathrm{M}_a \supset \mathscr{P}$, i. e. pour $a \in \mathrm{V}(\mathscr{P}) \cap \mathrm{U}$: mais cela est une propriété de l'hensélisé d'un anneau local ([7], p. 187) et l'on a $\mathscr{P}\,\mathrm{N}(\mathrm{U})_a = \mathscr{P}\,{}^h\mathrm{N}(\mathrm{U})_a \cap \mathrm{N}(\mathrm{U})_a$.

Il reste à montrer le point 1°.

LEMME 2.10. — *Soient* V *une variété algébrique réelle ou complexe et p un entier* $\geqq 0$. *Alors l'ensemble* V_p *des points x de* V *où la multiplicité de* V *est* $\geqq p$ *est une sous-variété algébrique fermée de* V.

Ce lemme est bien connu (*cf.* par exemple [7], p. 155). L'analogue en géométrie analytique complexe a été démontré par M. Lejeune et B. Teissier dans leur thèse.

LEMME 2.11. — *Soient* U *un ouvert non vide de* $\mathbf{R}^n$, $\mathscr{P}$ *un idéal premier de* $\mathbf{R}[X]$, $\mathscr{P}_1$ *un idéal premier de* N (U) *au-dessus de* $\mathscr{P}$, *V l'ensemble des zéros de* $\mathscr{P}$ *et* Y_1 *l'ensemble des zéros de* $\mathscr{P}_1$. *Soit* Y *une composante connexe de* $(\mathrm{V}_p - \mathrm{V}_{p+1}) \cap \mathrm{U}$ (*cf.* lemme précédent). *Alors si* Y_1 *rencontre* Y, Y_1 *contient* Y.

Démonstration. — Soit x un point de $\mathrm{Y}_1 \cap \mathrm{Y}$; pour voir que Y_1 contient Y, il suffit de voir que le germe de Y_1 en x contient le germe de Y en x.

Si $\mathcal{O}_x$ désigne l'anneau des germes de fonctions analytiques en x, et si $\mathscr{P}$ est de hauteur h, $\mathscr{P}_1\,\mathcal{O}_x$ est intersection d'idéaux premiers de hauteur h de $\mathcal{O}_x$ au-dessus de $\mathscr{P}$ puisque $\mathscr{P}_1$ est de hauteur h à cause du point 2°; cela signifie géométriquement que le germe de Y_1 en x est réunion de certaines composantes irréductibles analytiques du germe de V en x.

Or par hypothèse la multiplicité de V est constante et égale à p le long de Y; mais la multiplicité de V en tant que variété algébrique est la même qu'en tant qu'espace analytique, et cette dernière est en chaque point la somme des multiplicités des différentes composantes irréductibles de V.

On en déduit que toutes les composantes analytiques du germe de V en x contiennent Y : soient en effet $V_1, \ldots, V_p$ les composantes analytiques d'un représentant du germe de V en x; on a : $e(V_x) = \sum_{i=1}^{p} e(V_{i,x})$ (e désignant la multiplicité). Si y est un point de Y suffisamment proche de x, le germe de V en y est la réunion de certains des $V_{i,y}$; or, pour chaque V_i qui contient y, on a $e(V_{i,x}) \geqq e(V_{i,y})$ puisque la multiplicité est une fonction semi-continue supérieurement.

Comme par hypothèse $e(V_x) = e(V_y)$, on voit que nécessairement tous les V_i contiennent y.

C. Q. F. D.

Achevons maintenant la démonstration de la proposition 2.9. Soit $\mathscr{P}$ un idéal premier de $\mathbf{R}[X]$ de hauteur h, $V = V(\mathscr{P})$; si U satisfait à la propriété (P), $(V_p - V_{p+1}) \cap U$ n'a qu'un nombre fini de composantes connexes (2.10).

Comme V est une variété algébrique, la multiplicité de V est bornée dans $\mathbf{R}^n$; on voit donc que $V \cap U$ est réunion d'un nombre fini d'ensembles connexes Y_i le long desquels la multiplicité de V est constante.

Pour montrer qu'il n'y a qu'un nombre fini d'idéaux premiers $\mathscr{P}_i$ de N (U) au-dessus de $\mathscr{P}$, il suffit donc de voir qu'il n'y en a qu'un nombre fini tel que $V(\mathscr{P}_i)$ rencontre un des Y_i, Y_1 par exemple.

Soit $a \in Y_1$; d'après le lemme 2.11, si $V(\mathscr{P}_i)$ rencontre Y_1, $V(\mathscr{P}_i)$ contient a, i. e. $V(\mathscr{P}_i) \subset M_a$. Or il y a une injection : $\mathscr{P} \to \mathscr{P}\, N(U)_a$ de l'ensemble des idéaux premiers contenus dans M_a dans l'ensemble des idéaux premiers de $N(U)_a$ [car si $\mathscr{P}$ est premier, on a l'égalité $\mathscr{P}\, N(U)_a \cap N(U) = \mathscr{P}$].

Comme $N(U)_a$ est noethérien (2.7), il ne peut y avoir dedans qu'un nombre fini d'idéaux premiers au-dessus de $\mathscr{P}$, ce qui achève de montrer 2.9.

COROLLAIRE 2.12. — *Soit* $U \subset \mathbf{R}^n$ *un ouvert vérifiant la propriété* (P) *et soit* $a = (a_1, \ldots, a_n)$ *un point de* U. *Alors l'idéal maximal* M_a *de* N (U) *est de type fini, engendré par* $X_1 - a_1, \ldots, X_n - a_n$.

Cela provient du point 2° de la proposition 2.9 : l'idéal M_a est le seul idéal premier de N (U) au-dessus de l'idéal $(X_1 - a_1, \ldots, X_n - a_n)$ de $\mathbf{R}[X]$; on a donc

$$M_a = (X_1 - a_1, \ldots, X_n - a_n)$$

dans N (U).

d. Nous pouvons maintenant achever la démonstration du théorème 2.1; pour montrer que N (U) est noethérien, nous allons montrer que tous les idéaux premiers de N (U) sont de type fini, ce qui suffira en vertu du lemme suivant (*cf.* [2], p. 141) :

LEMME 2.13. — *Soit* A *un anneau commutatif. Si tous les idéaux premiers de hauteur* $\geqq h$ *sont de type fini, tous les idéaux de hauteur* $\geqq h$ *sont de type fini.*

On démontre en effet que tout idéal maximal parmi ceux qui ne sont pas de type fini est premier, et on applique le théorème de Zorn (rappelons que la hauteur d'un idéal est par définition l'infimum des hauteurs des idéaux premiers qui le contiennent).

Nous allons raisonner par récurrence descendante sur la hauteur, les idéaux premiers de hauteur n étant maximaux et de type fini par 2.12 et 2.2.

Soit $\mathscr{P}_1$ un idéal premier de N (U) de hauteur h, tel que tous les idéaux de N (U) de hauteur $> h$ soient de type fini.

Posons $\mathscr{P} = \mathscr{P}_1 \cap \mathbf{R}[X]$, et soient $\mathscr{P}_1, \ldots, \mathscr{P}_k$ les idéaux premiers de N (U) au-dessus de $\mathscr{P}$. Rappelons que $\mathscr{P}$ est aussi de hauteur h (2.9).

Si l'on pose $Q = \mathscr{P}_2 \cap \ldots \cap \mathscr{P}_k$, on a $\mathscr{P}_1 \cap Q = \mathscr{P}\, N(U)$ d'après 2.9, et donc $\mathscr{P}_1 \cap Q$ est de type fini.

D'autre part, $\mathscr{P}_1 + Q$ est un idéal qui contient $\mathscr{P}_1$ mais qui est différent de $\mathscr{P}_1$ (car sinon, $\mathscr{P}_1$ contiendrait $\mathscr{P}_2 \cap \ldots \cap \mathscr{P}_k$, donc contiendrait un des $\mathscr{P}_i$). $\mathscr{P}_1 + Q$ est donc de type fini par hypothèse de récurrence.

La suite exacte de N (U)-modules

$$0 \to \mathscr{P}\, N(U) \to \mathscr{P}_1 \oplus Q \to \mathscr{P}_1 + Q \to 0$$

montre alors que $\mathscr{P}_1$ (et Q) sont de type fini.

C. Q. F. D.

3. Applications

Je ne pense pas que la réciproque du théorème 2.1 soit vraie : autrement dit, on doit pouvoir donner l'exemple d'un ouvert $U \subset \mathbf{R}^n$ et d'une variété algébrique V telle que $V \cap U$ ait une infinité de composantes connexes bien que N (U) soit noethérien.

On a cependant :

PROPOSITION 3.1 (comparer avec [11]). — *Soit* U *un ouvert de* $\mathbf{R}^n$ *tel qu'il existe une variété algébrique* $V \subset \mathbf{R}^n$ *telle que* $\overline{V \cap U}$ (*adhérence de* $V \cap U$ *dans* $\mathbf{R}^n$) *ait une infinité de composantes connexes* compactes.

Alors N (U) *n'est pas noethérien.*

Démonstration. — Soit $(Y_i)_{i \in \mathbf{N}}$ une suite de composantes connexes compactes de $\overline{V \cap U}$.

LEMME 3.2. — *Posons*

$$V_p = \overline{V \cap U} - (Y_1 \cup \ldots \cup Y_p).$$

Il existe une fonction de Nash $\psi \in N(\mathbf{R}^n)$ *qui est strictement positive sur* $Y_1 \cup \ldots \cup Y_p$, *et strictement négative sur* V_p.

Soit S une sphère de dimension $n-1$ et d'intérieur $\mathring{B}$ telle que $Y_1 \cup \ldots \cup Y_p \subset \mathring{B}$.

Soit f une fonction continue sur $\mathbf{R}^n$ à valeurs réelles telle que

$$\begin{cases} f(Y_1 \cup \ldots \cup Y_p) = 1, \\ f(V_p) = -1, \\ f(\complement B) = -1 \end{cases}$$

(f existe car V_p et $Y_1 \cup \ldots \cup Y_p$ sont des fermés disjoints de $\mathbf{R}^n$).

Soit K un compact de $\mathbf{R}^n$ dont l'intérieur contient B; approximons uniformément f sur K par un polynôme P grâce au théorème de Stone-Weirstrass; on aura alors si P est assez proche de f :

$$\begin{cases} P(Y_1 \cup \ldots \cup Y_p) > 0, \\ P(V_p \cap K) < 0, \\ P(S) < 0, \end{cases}$$

Soit Q un polynôme qui change de signe dans $\mathbf{R}^n$ et tel que $V(Q) = S$; le polynôme $Z^2 - 2QZ - P^2$ a pour discriminant $\Delta = Q^2 + P^2$ qui ne s'annule pas dans $\mathbf{R}^n$, et les deux racines φ_1 et φ_2 de l'équation

$$Z^2 - 2QZ - P^2 = 0.$$

sont donc des fonctions de Nash sur $\mathbf{R}^n$:

$$\begin{cases} \varphi_1 = Q + \sqrt{P^2 + Q^2}, \\ \varphi_2 = Q - \sqrt{P^2 + Q^2}, \end{cases}$$

telles que

$$\varphi_1(x) = 0 \iff \begin{cases} P(x) = 0, \\ Q(x) < 0; \end{cases}$$

$$\varphi_2(x) = 0 \iff \begin{cases} P(x) = 0, \\ Q(x) > 0; \end{cases}$$

On voit immédiatement que

$$\varphi_1(x) \geqq 0, \qquad \forall x \in \mathbf{R}^n,$$

$$\varphi_2(x) \leqq 0, \qquad \forall x \in \mathbf{R}^n.$$

Supposons que Q soit négatif à l'intérieur de S et positif à l'extérieur.

La fonction égale à $P/\sqrt{-\varphi_2}$ à l'intérieur de S se recolle au voisinage de S avec la fonction égale à $-\sqrt{\varphi_1}$ à l'extérieur de S en une fonction ψ de Nash sur $\mathbf{R}^n$ qui vérifie les conditions du lemme 3.2.

C. Q. F. D.

Montrons maintenant la proposition 3.1.

Soit R un polynôme tel que $V(R) = V$; comme ψ est > 0 sur $Y_1 \cup \ldots \cup Y_p$ et < 0 sur V_p, ψ et R n'ont pas de zéros communs dans U; comme plus haut, l'équation

$$Z^2 - 2\psi Z - R^2 = 0$$

définit donc deux fonctions de Nash dans U, f_1 et f_2 telle que

$$V(f_1) = (Y_1 \cup \ldots \cup Y_p) \cap U,$$
$$V(f_2) = V_p \cap U.$$

Si maintenant on note I_p l'idéal de N (U) formé des fonctions nulles sur $\bigcup_{i>p} Y_i$, on a évidemment $I_p \supset I_{p-1}$ et les considérations précédentes montrent que I_p est différent de I_{p-1} (car la fonction f_2 construite plus haut est telle que $f_2 \in I_p$, $f_2 \notin I_{p-1}$).

Il y a ainsi dans N (U) une suite croissante d'idéaux non stationnaire, ce qui montre que N (U) n'est pas noethérien.

C. Q. F. D.

Énonçons maintenant l'analogue du théorème 2.1 pour une variété algébrique quelconque :

THÉORÈME 3.3. — *Soit* V *une variété algébrique réelle* (*donc quasi-compacte pour la topologie de Zariski*) *lisse; alors l'anneau* N (V) *des fonctions de Nash globales sur* V *est noethérien.*

Démonstration. — Il est clair que la démonstration du théorème 2.1 s'applique sans changement au cas d'une sous-variété algébrique affine lisse de $\mathbf{R}^n$.

Or V est recouvert par un nombre fini d'ouverts affines U_i ($1 \leqq i \leqq p$) qui sont donc tels que N (U_i) soit noethérien.

On a une injection canonique

$$N(V) \to \bigoplus_{i=1}^{p} N(U_i)$$

et on voit immédiatement comme dans la proposition 2.7 que l'anneau $\bigoplus_{i=1}^{p} N(U_i)$ est fidèlement plat sur N (V) : il suffit pour cela de voir que les idéaux maximaux de N (V) correspondent aux points de V $\left[\text{et sont ainsi dominés par des idéaux maximaux de } \bigoplus_{i=1}^{p} N(U_i)\right]$.

Or si M est un idéal maximal de N (V), il existe i tel que M N (U_i) ne contienne pas 1, car sinon il y aurait dans M un nombre fini de fonctions sans zéro commun, ce qui est impossible.

La proposition 2.2 montre alors que M correspond à un point de U_i; $\bigoplus_{i=1}^{p} N(U_i)$ étant noethérien et fidèlement plat sur N (V), N (V) est aussi noethérien.

C. Q. F. D.

Soit maintenant V une variété différentiable compacte de classe C^k : on peut définir le faisceau des fonctions de Nash sur V en approximant V par une variété algébrique réelle à laquelle elle est difféomorphe (*cf.* [5] ou [12]).

On déduit immédiatement du théorème précédent le corollaire suivant :

COROLLAIRE 3.4. — *Soit* V *une variété compacte de classe* C^k. *Alors* N (V) *est un anneau noethérien.*

K. Lønsted [5] démontre ce corollaire en utilisant le théorème de Frisch sur la noethérianité de l'anneau $\mathcal{O}$ (V) des fonctions analytiques sur V et la fidèle platitude de $\mathcal{O}$ (V) sur N (V).

4. Autres propriétés des fonctions de Nash globales

La plupart des résultats de ce paragraphe m'ont été annoncés par T. Mostowski (à paraître); ils étaient à l'état de conjectures dans [8].

Regardons d'abord la factorialité : le travail de J. Bochnak [1] amène à conjecturer que si $U \subset \mathbf{R}^n$ satisfait à la propriété (P), N (U) est factoriel si et seulement si $H^1(U, \mathbf{Z}_2) = 0$.

Remarquons d'abord, comme dans [1], qu'il existe des ouverts U tels que N (U) ne soit pas factoriel :

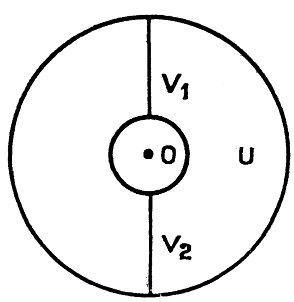
LEMME 4.1. — *Soit* U *une couronne ouverte de* $\mathbf{R}^2$ *centrée en* O. *Alors* N (U) *n'est pas factoriel.*

Démonstration. — On a une injection $\mathbf{R}[X, Y] \subset N(U)$; l'idéal (X) n'est pas premier dans N (U) car $V(X) \cap U$ a deux composantes connexes V_1 et V_2 et il est facile de trouver un élément de N (U) nul sur V_1 et ne s'annulant pas sur V_2 (*cf.* la démonstration de la proposition 3.1).

Montrons cependant que l'élément X est irréductible dans N (U) [ce qui impliquera bien que N (U) n'est pas factoriel]; si l'on avait une décomposition $X = g_1 g_2$ dans N (U), g_1 et g_2 n'étant pas inversibles, on aurait nécessairement :

$$V(g_1) = V_1,$$
$$V(g_2) = V_2$$

[ou le contraire : $V(g_2) = V_1$ et $V(g_1) = V_2$; rappelons que $V(X) \cap U = V_1 \cup V_2$ et que $V_1 \cap V_2 = \varnothing$].



Or, $U - V_1$ est connexe puisque U est une couronne : g_1 qui ne s'annule pas dans $U - V_1$ a donc un signe constant dedans; il en est de même pour g_2 dans $U - V_2$, et ceci est contradictoire avec le fait que $g_1\, g_2 = X$.

PROPOSITION 4.2 [6]. — *Si* $U = \mathbf{R}^n$ *ou une boule ouverte de* $\mathbf{R}^n$, N (U) *est un anneau factoriel.*

La démonstration se fait par récurrence sur n et est analogue à celle de Samuel ([10], p. 90) pour démontrer que si A est un anneau global régulier factoriel, A [[X]] aussi.

Supposons par exemple que U soit une boule ouverte de centre O; si X_1 est la première fonction coordonnée sur $\mathbf{R}^n$, on a $X_1 \subset N(U)$, et $N(U)/(X_1)$ s'identifie à l'anneau des fonctions de Nash sur $U \cap V(X_1)$: une fonction de Nash sur $U \cap V(X_1)$ se prolonge en effet une fonction de Nash sur U de manière triviale puisque U est une boule ouverte, et d'autre part une fonction de N (U) nulle sur $V(X_1)$ est divisible par X_1 dans N (U) [car si $f \in N(U)$ est nulle sur $V(X_1)$, f/X_1 est analytique, et de Nash puisque la question est locale].

Pour démontrer que N (U) est factoriel, il suffit de montrer que l'intersection de deux idéaux principaux est un idéal principal; soient donc f et g deux éléments de N (U) et posons $I = (f) \cap (g)$.

(*a*) On peut supposer que f et g ne sont pas multiples de X_1, car si $f = X_1^m f'$ et $g = X_1^p g'$, on a

$$(f) \cap (g) = ((f') \cap (g'))\, X_1^{\max(m,\, p)},$$

X_1 étant un élément premier.

(*b*) Si f et g ne sont pas multiples de X_1, montrons que $IX_1 = I \cap X_1$: soit $h \in I \cap X_1$, on a

$$h = f f_1 = g g_1,$$

et comme $h \in (X_1)$:

$$h = f f_1' X_1 = g g_1' X_1;$$

on a donc $f f_1' = g\, g_1' \in I$, d'où $h \in IX_1$.

(*c*) Montrons que l'image de I dans $N(U)/(X_1)$ est un idéal principal. D'après (*b*), l'image de I dans $N(U)/(X_1)$ est isomorphe à

$$\frac{I}{X_1 I} = I \underset{N(U)}{\otimes} \frac{N(U)}{(X_1)}.$$

Comme I est intersection d'idéaux principaux, il est localement principal puisque les localisés de N (U) sont des anneaux locaux réguliers donc factoriels; I est donc un N (U)-module projectif, ce qui entraîne que $I/X_1 I$ est un $N(U)/(X_1)$-module projectif; comme $N(U)/(X_1)$ est factoriel par hypothèse de récurrence, et noethérien par le théorème 2.1, $I/X_1 I$ est principal (*cf.* [10], p. 89).

(*d*) Montrons maintenant que I est principal : soit $a \in \mathrm{I}$ un élément dont la classe modulo X_1 engendre $\mathrm{I}/\mathrm{X}_1\,\mathrm{I}$; si $\beta \in \mathrm{I}$, on peut donc écrire :

$$\beta = \lambda\alpha + \mu \mathrm{X}_1,$$

avec λ et $\mu \in \mathrm{N}(\mathrm{U})$. On a $\mu\mathrm{X}_1 \in \mathrm{I} \cap (\mathrm{X}_1)$, d'où $\mu \in \mathrm{I}$ par (*b*); on peut donc écrire de même :

$$\mu = \lambda'\alpha + \mu' \mathrm{X}_1,$$

d'où

$$\beta = \lambda_1 \alpha + \mu_1 \mathrm{X}_1^2.$$

En continuant ainsi indéfiniment, on voit que

$$\beta \in \bigcap_n ((\alpha) + (\mathrm{X}_1^n)),$$

d'où $\beta \in (\alpha)$ puisque l'anneau N (U) étant noethérien, l'anneau N (U)/(α) est séparé pour la topologie X_1-adique.

I est donc principal, ce qui achève de montrer la proposition 4.2.

THÉORÈME 4.3 [6]. — *Soit* U *un ouvert semi-algébrique de* $\mathbf{R}^n$ (*i. e. une composante connexe d'un ouvert de Zariski*). *Si* I *est un idéal de* N (U), *les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(*a*) I *est réel;*

(*b*) I *satisfait à la propriété des zéros* [*i. e. toute fonction de* N (U) *nulle sur* V (I) $\cap$ U *appartient à* I].

Rappelons qu'un idéal I d'un anneau commutatif A est dit réel s'il satisfait à la condition suivante :

si $f_1, \ldots, f_p$ sont des éléments de A tels que $f_1^2 + \ldots + f_p^2 \in \mathrm{I}$, alors $f_i \in \mathrm{I}$ $(1 \leqq i \leqq p)$.

Remarque. — Un théorème analogue pour l'anneau des germes de fonctions de Nash en un point est vrai, et se démontre comme le théorème des zéros pour les germes de fonctions analytiques [9], le théorème de préparation étant applicable à l'anneau des germes de fonctions de Nash.

THÉORÈME 4.4 [6]. — *Soient* U *un ouvert semi-algébrique de* $\mathbf{R}^n$, V_1 *et* V_2 *deux composantes connexes différentes de l'ensemble des zéros d'un idéal de* N (U).

Il existe alors un élément $\varphi \in \mathrm{N}(\mathrm{U})$ *tel que* φ *soit* > 0 *sur* V_1 *et* < 0 *sur* V_2.

En particulier, si V_1 et V_2 sont deux composantes connexes d'un ensemble algébrique de $\mathbf{R}^n$, il existe une fonction de Nash φ telle que φ soit > 0 sur V_1 et < 0 sur V_2.

COROLLAIRE 4.5. — *Si* $\mathscr{P}$ *est un idéal premier de* N (U), *l'ensemble* V ($\mathscr{P}$) *des zéros de* $\mathscr{P}$ *est connexe* (*en particulier, si* V *est un ensemble de Nash irréductible dans* U, V *est connexe*).

Démonstration. — Supposons que V ($\mathscr{P}$) ait deux composantes connexes V_1 et V_2 : il existe par 4.4 une fonction de Nash φ telle que φ soit > 0 sur V_1 et < 0 sur V_2; d'autre part, $\mathscr{P}$ est de type fini (2.1), engendré par $f_1, \ldots, f_p$.

Posons :

$$\psi_1 = \sqrt{\sum_{i=1}^{p} f_i^2 + \varphi^2} - \varphi,$$

$$\psi_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{p} f_i^2 + \varphi^2} + \varphi;$$

comme la fonction $\sum_{i=1}^{p} f_i^2 + \varphi^2$ ne s'annule pas dans U, ψ_1 et ψ_2 sont des fonctions de Nash sur U, et elles n'appartiennent pas à $\mathscr{P}$ puisque V $(\psi_1) = V_1$ et V $(\psi_2) = V_2$; mais $\psi_1 \psi_2 = \sum_{i=1}^{p} f_i^2 \in \mathscr{P}$, ce qui est absurde puisque $\mathscr{P}$ est supposé premier.

C. Q. F. D.

BIBLIOGRAPHIE

[1] J. Bochnak, *C. R. Acad. Sc.*, t. 279, série A, 1974, p. 269.
[2] Dieudonné-Grothendieck, *E. G. A. I.*, nouvelle édition, Springer, 1971.
[3] J. Frisch, *Points de platitude...* (*Inv. Math.*, vol. 8, 1967).
[4] H. Hironaka, *Sub-Analytic Sets, Number Theory*, Tokyo, 1973.
[5] K. Lønsted, *An Algebraization of Vector Bundles on Compact Manifolds* (*J. Pure and Appl. Alg.*, vol. 24, 1970).
[6] T. Mostowski, (Varsovie) (article à paraître).
[7] M. Nagata, *Local Rings*, Interscience Publishers.
[8] J.-J. Risler, *C. R. Acad. Sc.*, t. 276, série A, 1973, p. 1513.
[9] J.-J. Risler, *Un théorème des zéros en géométrie algébrique et analytique réelles* [*Séminaire Norguet* 1970-1973 (*Lecture Notes*, n° 409, Springer, 1974)].
[10] P. Samuel, *Anneaux factoriels* (*Publication de l'Institut de Mathématiques de Sao Paulo*, 1963).
[11] Y. Siu, *Noetherianness of Rings of Holomorphic Functions*, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 21 (1969).
[12] A. Tognoli, *Su una congettura di Nash* (*Ann. Scuola Normale Sup. di Pisa*, vol. 27, 1973).
[13] H. Whitney, *Elementary Structure of Real Algebraic Varieties* (*Annals of Math.*, vol. 66, 1957).
[14] G. E. Froymson, *A Nullstellensatz for Nash rings* (*Pacific J. of Math.*, 1975).

(Manuscrit reçu le 21 avril 1975.)

J.-J. Risler,
Centre de Mathématiques,
École Polytechnique,
17, rue Descartes,
75230 Paris Cedex 05.