ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

G. LASSALLE

Déploiement universel d'une application de codimension finie

Annales scientifiques de l'É.N.S. 4^e série, tome 7, n° 2 (1974), p. 219-233
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1974_4_7_2_219_0>

© Gauthier-Villars (Éditions scientifiques et médicales Elsevier), 1974, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales scientifiques de l'É.N.S. » (http://www.elsevier.com/locate/ansens) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Ann. scient. Éc. Norm. Sup.,
4e série, t. 7, 1974, p. 219 à 234.

DÉPLOIEMENT UNIVERSEL D'UNE APPLICATION DE CODIMENSION FINIE

PAR G. LASSALLE

Introduction

Soient X et Y deux variétés C^∞ de dimension finie, $\mathscr{X}$ (resp $\mathscr{Y}$) l'espace vectoriel réel des sections C^∞ du fibré TX (resp. TY) tangent à X (resp. Y), et $C^\infty(X, Y)$ l'ensemble des applications C^∞ de X dans Y muni de la topologie fine ([2], § 2). Pour toute $f \in C^\infty(X, Y)$, on considère l'espace vectoriel $\theta(f)$, tangent à f, des sections C^∞ du fibré $f^*(TY)$, ainsi que les applications linéaires t_f et ω_f à valeurs dans $\theta(f)$, définies respectivement sur $\mathscr{X}$ et $\mathscr{Y}$ par les formules :

$$t_f(\xi)(x) = df(x)(\xi(x)), \qquad \omega_f(\eta)(x) = \eta(f(x)), \qquad x \in X, \quad \xi \in \mathscr{X}, \quad \eta \in \mathscr{Y}.$$

DÉFINITION. — On dit que $f \in C^\infty(X, Y)$ est de codimension finie si $\theta(f)/t_f(\mathscr{X}) + \omega_f(\mathscr{Y})$ est de dimension finie; on appelle alors codimension de f l'entier égal à la dimension de $\theta(f)/t_f(\mathscr{X}) + \omega_f(\mathscr{Y})$.

Le but de cette note est de donner une description de $C^\infty(X, Y)$ au voisinage d'une application f_0 de codimension finie, lorsque X est compacte. Le résultat est contenu dans le théorème 2 du paragraphe 3. Expliquons-le sommairement, en prenant $Y = \mathbf{R}^p$ pour simplifier : Soit $\mathscr{G}$ un supplémentaire de $t_{f_0}(\mathscr{X}) + \omega_{f_0}(\mathscr{Y})$ dans $\theta(f_0)$, identifié à $\mathbf{R}^c$ par le choix d'une base $\zeta_1, \ldots, \zeta_c$, soit G l'action du groupe additif de $\mathscr{G}$ sur $C^\infty(X, Y)$ définie par la formule

$$G((t_1, \ldots, t_c), f) = f + \sum_{i=1}^{c} t_i \zeta_i,$$

et soit H l'action de $\mathrm{Diff}(X) \times \mathrm{Diff}(Y)$ sur $C^\infty(X, Y)$ définie par la formule

$$H((\varphi, \psi), f) = \psi \circ f \circ \overset{-1}{\varphi}.$$

Alors, le théorème 2 affirme que pour toute $f \in C^\infty(X, Y)$ assez proche de f_0, il existe deux points $g_1 = (t_{1,1}, \ldots, t_{1,c})$ et $g_2 = (t_{2,1}, \ldots, t_{2,c})$ de $\mathbf{R}^c$, deux difféomorphismes φ_1

et φ_2 de X, et deux difféomorphismes ψ_1 et ψ_2 de Y, dépendant continûment (et même un peu mieux) de f, et vérifiant

$$\psi_1 \circ f_0 \circ \overset{-1}{\varphi_1} + \sum_{i=1}^{c} t_{1,i}\zeta_i = \psi_2 \circ \left(f_0 + \sum_{i=1}^{c} t_{2,i}\zeta_i \right) \circ \overset{-1}{\varphi_2} = f.$$

L'idée de ce théorème est due à Sergeraert, qui l'a établi lorsque $Y = \mathbf{R}$, en application d'un théorème de fonctions implicites de type Nash [3]. On peut en déduire les mêmes conséquences qu'en [3]; en particulier, l'application

$$(t_1, \ldots, t_c, x) \mapsto f_0(x) + \sum_{i=1}^{c} t_i \zeta_i(x)$$

de $\mathbf{R}^c \times X$ dans Y est un déploiement universel de f_0.

On suit ici la méthode utilisée par J. Mather dans l'étude des applications stables (c'est-à-dire de codimension 0) [2].

Le paragraphe 1 introduit une catégorie utile pour exprimer et démontrer le résultat. Les objets et les morphismes de cette catégorie qui serviront possèdent des propriétés analogues à celles des variétés et applications C^∞ (par exemple existence d'un fibré tangent, d'une différentielle, etc.), mais nous n'utiliserons pas systématiquement la terminologie consacrée, faute d'une théorie adéquate.

Au paragraphe 2 on déduit du théorème de division [1] le théorème 1, qui précise la proposition 1 du paragraphe 6 de [2]; en ce qu'il énonce une propriété concernant le fibré tangent à C^∞ (X, Y) plutôt que ses sections : traitons C^∞ (X, Y) comme une variété et $\mathscr{G}$ et Diff (X) × Diff (Y) comme deux groupes de Lie agissant différentiablement sur C^∞ (X, Y) par G et H; l'espace tangent à Diff (X) × Diff (Y) en id × id est $\mathscr{X} \times \mathscr{Y}$. Le théorème 1 donne, pour toute $f \in C^\infty$ (X, Y) assez proche de f_0, un inverse à droite convenable pour l'application de $\mathscr{G} \times (\mathscr{X} \times \mathscr{Y})$ dans l'espace tangent en f à C^∞ (X, Y) :

$$(\gamma, \varepsilon) \mapsto dG(0, f)(\gamma) + dH(\mathrm{id} \times \mathrm{id}, f)(\varepsilon), \qquad \gamma \in \mathscr{G}, \quad \varepsilon \in \mathscr{X} \times \mathscr{Y}.$$

Enfin on achève la démonstration au paragraphe 3 à l'aide d'un système différentiel approprié : joignons f_0 à chaque application f assez proche par un arc C^∞ convenable $t \mapsto f(t)$ ($t \in [0, 1]$) et cherchons un arc C^∞ $t \mapsto (g(t), h(t))$ de $\mathscr{G} \times (\mathrm{Diff}(X) \times \mathrm{Diff}(Y))$ vérifiant l'une ou l'autre des conditions suivantes :

$$\begin{aligned} &(a) \quad G(g(t), f(t)) = H(h(t), f_0) \\ &\text{pour} \quad t \in [0, 1], \quad g(0) = 0, \quad h(0) = \mathrm{id} \times \mathrm{id}; \\ &(b) \quad G(g(t), f(t)) = H(h(t), G(g(0), f_0)) \\ &\text{pour} \quad t \in [0, 1], \quad g(1) = 0, \quad h(0) = \mathrm{id} \times \mathrm{id}. \end{aligned}$$

[car alors, (a) donne $\overset{-1}{g_1} = g(1), (\varphi_1, \psi_1) = h(1)$, et (b) donne $g_2 = g(0), (\varphi_2, \psi_2) = h(1)$].

Dans les deux cas, si R_a^* désigne la différentielle en a de la translation à droite par a dans $\mathscr{G}$ ou dans Diff (X) × Diff (Y), et si on pose pour $t \in [0, 1]$ et $g \in \mathscr{G}$:

$$\zeta(t, g) = dG(g, f(t))\left(\frac{df}{dt}\right), \qquad g.f(t) = G(g, f(t)),$$

il suffit, pour réaliser la première égalité, que l'arc $t \mapsto (g(t), h(t))$ satisfasse l'équation différentielle :

$$\zeta(t, g) = -d\mathrm{G}(0, g.f(t))\left(\overset{-1}{\mathrm{R}}{}_g^*\left(\frac{dg}{dt}\right)\right) + d\mathrm{H}(\mathrm{id}\times\mathrm{id}, g.f(t))\left(\overset{-1}{\mathrm{R}}{}_h^*\left(\frac{dh}{dt}\right)\right).$$

Or, pour $t \in [0, 1]$ et g assez petit, $\zeta(t, g)$ est connu, et le théorème 1 donne deux vecteurs $\gamma(t, g)$ et $(\xi(t, g), \eta(t, g))$ tels que

$$\zeta(t, g) = -d\mathrm{G}(0, g.f(t))(\gamma(t, g)) + d\mathrm{H}(\mathrm{id}\times\mathrm{id}, g.f(t))(\xi(t, g), \eta(t, g)).$$

On considérera donc le système différentiel :

$$\frac{dg}{dt} = \mathrm{R}_g^*(\gamma(t, g)), \qquad \frac{dh}{dt} = \mathrm{R}_h^*(\xi(t, g), \eta(t, g)).$$

Dans le cas où Y n'est pas un espace euclidien $\mathbf{R}^p$, la présentation est compliquée par des constructions, triviales et d'ailleurs inutiles quand $\mathrm{Y} = \mathbf{R}^p$, destinées à munir $\mathrm{C}^\infty(\mathrm{X}, \mathrm{Y})$ d'un germe de structure d'espace vectoriel au voisinage de f_0.

Toutes les variétés considérées sont C^∞, de dimension finie, paracompactes et, sauf indication contraire, sans bord. On utilise la topologie fine sur les espaces d'applications C^∞ considérés, renvoyant à [2], paragraphe 2 pour les démonstrations, et, si V et W sont deux variétés, on désigne par $\mathrm{C}^\infty(\mathrm{V}, \mathrm{W})$ l'ensemble des applications C^∞ de V dans W muni de la topologie fine.

1. **Préliminaires**

Nous désignerons par $\mathscr{C}$ la catégorie dont les objets sont les ensembles de la forme $\mathrm{C}^\infty(\mathrm{V}, \mathrm{W})$ et leurs sous-ensembles (où V et W sont des variétés), et dont les morphismes, appelés aussi applications C^∞, sont définis comme suit : quels que soient la variété U et l'ensemble E d'applications C^∞ d'une variété V dans une variété W, identifions l'ensemble $\mathscr{F}(\mathrm{U}, \mathrm{E})$ des applications de U dans E à un sous-ensemble de l'ensemble $\mathscr{F}(\mathrm{U}\times\mathrm{V}, \mathrm{W})$ des applications de $\mathrm{U}\times\mathrm{V}$ dans W.

DÉFINITION. — Soit E_i $(i = 1, 2)$ un ensemble d'applications C^∞ d'une variété V_i dans une variété W_i. On dit qu'une application φ de E_1 dans E_2 est C^∞ si, pour toute variété U, la composition à gauche par φ envoie $\mathrm{C}^\infty(\mathrm{U}\times\mathrm{V}_1, \mathrm{W}_1) \cap \mathscr{F}(\mathrm{U}, \mathrm{E}_1)$ continûment dans $\mathrm{C}^\infty(\mathrm{U}\times\mathrm{V}_2, \mathrm{W}_2) \cap \mathscr{F}(\mathrm{U}, \mathrm{E}_2)$.

Si on identifie une variété W à l'ensemble de toutes les applications du point dans W, on voit que la catégorie $\mathscr{C}$ contient la catégorie des variétés et applications C^∞ comme sous-catégorie pleine ([2], § 2, prop. 2). Nous désignerons donc par $\mathrm{C}^\infty(\mathrm{E}_1, \mathrm{E}_2)$ l'ensemble des morphismes de E_1 dans E_2 [ou simplement $\mathrm{C}^\infty(\mathrm{E}_1)$ si $\mathrm{E}_2 = \mathbf{R}$].

Remarquons que :

1. Les ensembles E_i étant munis de la topologie fine, toute application C^∞ de E_1 dans E_2 est continue (d'après la définition appliquée avec pour U le point).

2. Si E_1 est une variété, $\mathrm{C}^\infty(\mathrm{E}_1, \mathrm{E}_2) \subset \mathrm{C}^\infty(\mathrm{E}_1\times\mathrm{V}_2, \mathrm{W}_2) \cap \mathscr{F}(\mathrm{E}_1, \mathrm{E}_2)$.

3. En général, il n'y a pas de produits dans $\mathscr{C}$; cependant, si $V_1 = V_2 = V$, on peut prendre pour produit de E_1 et de E_2 le sous-ensemble de $C^\infty(V, W_1 \times W_2)$ qui s'identifie canoniquement à $E_1 \times E_2$.

Voici des exemples d'applications C^∞ qui interviendront :

1. Soit, avec les notations de l'introduction, $\Theta = \bigcup_{f \in \mathscr{C}^\infty(X,Y)} \theta(f) = C^\infty(X, TY)$. On peut considérer $C^\infty(X, Y)$ comme une variété, dont Θ est le fibré tangent : on précisera ceci au lemme 1, mais on voit déjà que la projection canonique p de Θ sur $C^\infty(X, Y)$ est C^∞ ([2], § 2, prop. 2). De la structure de $C^\infty(X)$-module de chaque espace vectoriel $\theta(f)$, on déduit une application C^∞ de $C^\infty(X) \times \Theta$ dans Θ ([2], § 2, prop. 2 et 3).

Pour tout ouvert F de $C^\infty(X, Y)$, on pose $\Theta_F = p^{-1}(F)$ et on appelle section du fibré tangent à F toute application C^∞ s de F dans Θ_F telle $p.s = \mathrm{id}$. L'ensemble $\Theta(F)$ des sections du fibré tangent à F est un $C^\infty(F, C^\infty(X))$-module.

Pour toute application C^∞ $t \mapsto f(t)$ d'un intervalle I de $\mathbf{R}$ dans $C^\infty(X, Y)$, et pour tout $t_0 \in I$, on définit l'élément $\partial f/\partial t|_{t=t_0}$ de $\theta(f(t_0))$ par la formule

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t}\bigg|_{t=t_0}\right)(x) = \frac{\partial \varphi}{\partial t}(t_0, x) \qquad [\text{où } \varphi \text{ est l'application } (t, x) \mapsto f(t)(x)].$$

2. Les applications t et ω à valeurs dans Θ, définies respectivement sur $C^\infty(X, Y) \times \mathscr{X}$ et $C^\infty(X, Y) \times \mathscr{Y}$ par les formules

$$t(f, \xi)(x) = df(x)(\xi(x)), \qquad \omega(f, \eta)(x) = \eta(f(x)),$$
$$x \in X, \quad f \in C^\infty(X, Y), \quad \xi \in \mathscr{X}, \quad \eta \in \mathscr{Y},$$

sont continues et

(*a*) t est C^∞ ([2], § 2, prop. 6);

(*b*) pour toute application C^∞ φ_1 d'un objet E de $\mathscr{C}$ dans F, et pour toute application C^∞ φ_2 de E dans $\mathscr{Y}$, l'application $\omega \circ (\varphi_1, \varphi_2)$ de E dans Θ est C^∞ ([2], § 2, prop. 1, X étant compacte).

3. Le lemme qui suit, trivial lorsque Y est un espace euclidien $\mathbf{R}^s$, montre que Θ est un fibré localement trivial sur $C^\infty(X, Y)$.

LEMME 1. — *Pour toute $f \in C^\infty(X, Y)$, il existe un voisinage* F *de f et*

1. *Un homéomorphisme* Φ *de* F *sur un voisinage* E *de l'élément neutre* $O_f \in \theta(f)$ *et un homéomorphisme* $T\Phi$ *de* Θ_F *sur* $E \times \theta(f)$, C^∞ *ainsi que leurs inverses, tels que :*

(*a*) *le diagramme*

$$\begin{array}{ccc} \Theta_F & \xrightarrow{T\Phi} & E \times \theta(f) \\ {\scriptstyle p}\downarrow & & \downarrow \\ F & \xrightarrow{\Phi} & E \end{array}$$

soit commutatif;

(*b*) $T\Phi$ *soit* $C^\infty(X)$*-linéaire sur chaque* $\theta(g)$ $(g \in F)$, *et égal à* $O_f \times \mathrm{id}$. *sur* $\theta(f)$;

(*c*) *pour toute application* C^∞ $t \mapsto g(t)$ *d'un intervalle* I *de* **R** *dans* F, *on ait, quels que soient* $t_0 \in I$ *et* $x \in X$:

$$T\Phi\left(\left.\frac{\partial g}{\partial t}\right|_{t=t_0}\right)(x) = \left(\Phi(g(t))(x), \frac{d}{dt}(\Phi(g(t))(x))_{t=t_0}\right).$$

2. *Une suite* $m_1, \ldots, m_s$ *de sections du fibré tangent à* F *et une suite* $x_1, \ldots, x_s$ *d'applications* C^∞ *et* $C^\infty(X)$*-linéaires de* Θ_F *dans* $C^\infty(X)$, *vérifiant pour toute* $g \in F$ *et pour tout* $\xi \in \theta(g)$:

$$\xi = \sum_{i=1}^{s} x_i(\xi).m_i(g).$$

Démonstration. — Munissons Y d'une métrique riemannienne; il existe un difféomorphisme $\eta \mapsto \delta(\eta) = (o(\eta), e(\eta))$ d'un voisinage $\mathscr{E}$ de la section nulle de TY sur un voisinage $\mathscr{U}$ de la diagonale de $Y \times Y$, tel que $o(\eta)$ soit la projection de η dans Y, et $e(\eta)$ la valeur pour $t = 1$ de la géodésique $t \mapsto \gamma(t)$ passant à l'instant $t = 0$ en $o(\eta)$ avec la vitesse η [4].

On peut prendre pour F l'ensemble des $g \in C^\infty(X, Y)$ tels que, pour tout $x \in X$, $(f(x), g(x))$ appartienne à $\mathscr{U}$, et pour Φ l'application définie par la formule

$$\Phi(g)(x) = \overset{-1}{\delta}(f(x), g(x)), \qquad x \in X, \quad g \in F;$$

Φ est un homéomorphisme, C^∞ ainsi que son inverse ([2], § 2, prop. 1), de F sur l'ensemble des sections C^∞ de $f^*(TY)$ prenant leurs valeurs dans $\mathscr{E}$.

Pour définir $T\Phi$, utilisons le diagramme commutatif d'applications C^∞ :

$$\begin{array}{ccc} TY \underset{Y}{\times} TY & \xrightarrow{\varepsilon} & T(TY) \\ {\scriptstyle p_1}\downarrow & \text{id} & \downarrow{\scriptstyle q} \\ TY & \longrightarrow & TY \end{array}$$

où p_1 est la première projection, q la projection canonique du fibré $T(TY)$ tangent à TY, et ε l'application égale sur chaque produit $T_y Y \times T_y Y$ (identifié au fibré tangent à $T_y Y$) à l'application tangente à l'injection $T_y Y \to TY$; ε est un plongement de $TY \underset{Y}{\times} TY$ dans $T(TY)$, dont l'image est égale à l'image réciproque de la section nulle de TY par l'application tangente à la projection o de TY sur Y. Identifiant $TY \underset{Y}{\times} TY$ à son image, on réalise les conditions (*a*), (*b*) et (*c*) en définissant $T\Phi$ par la formule

$$T\Phi(\xi)(x) = T\overset{-1}{\delta}(O_f(x), \xi(x)), \qquad x \in X, \quad \xi \in \Theta_F$$

(qui, pour tout x et tout ξ donne un élément de $TY \underset{Y}{\times} TY$ appartenant à $\mathscr{E} \times T_{f(x)} Y$).

Supposons enfin Y plongée dans un espace euclidien $\mathbf{R}^s$; soit e_i $(i = 1, \ldots, s)$ la section C^∞ de TY dont la valeur en $y \in Y$ est la projection orthogonale du i-ième vecteur de la base canonique de $\mathbf{R}^s$ sur $T_y Y$. Définissons m_i et x_i par les formules $m_i(g) = \omega(g, e_i)$, $x_i(\xi)(x) = i$-ième coordonnée de $\xi(x)$ sur la base canonique de $\mathbf{R}^s$.

4. Rappelons le théorème de division ([2], § 4). Soient P une variété et d un entier $\geqq 0$. Pour toute application $u = (u_1, \ldots, u_d) \in C^\infty(P, \mathbf{R}^d)$, P_u désigne la fonction de $C^\infty(\mathbf{R} \times P)$:

$$(t, y) \mapsto t^d + \sum_{i=1}^{d} u_i(y)\, t^{d-i} \qquad (t \in \mathbf{R},\ y \in P).$$

THÉORÈME DE DIVISION. — *Il existe un voisinage* D *de* $C^\infty(P, \mathbf{R}^d) \times \{0\}$ *dans* $C^\infty(P, \mathbf{R}^d) \times C^\infty(\mathbf{R} \times P)$, *une application* Q *de* $C^\infty(\mathbf{R} \times P) \times D$ *dans* $C^\infty(\mathbf{R} \times P)$ *et une suite* $R_1, \ldots, R_d$ *d'applications de* $C^\infty(\mathbf{R} \times P) \times D$ *dans* $C^\infty(P)$ *vérifiant, pour toute variété compacte* N *et pour toute sous-variété (éventuellement à bord)* N′ *de* $\mathbf{R} \times P$ *telle que la projection canonique de* N′ *dans* P *soit propre :*

(*a*) Q *et les* R_i *sont* $C^\infty(P)$*-linéaires en la première variable, et quels que soient* $(f, u, s) \in C^\infty(\mathbf{R} \times P) \times D$ *et* $(t, y) \in \mathbf{R} \times P$, *on a l'égalité*

$$f(t, y) = (P_u(t, y) + s(t, y)).Q(f, u, s)(t, y) + \sum_{i=1}^{d} R_i(f, u, s)(y).t^{d-i};$$

(*b*) $\rho \circ Q$ *et les* R_i *sont continues* [*où* ρ *désigne la restriction* $C^\infty(\mathbf{R} \times P) \to C^\infty(N')$];

(*c*) *quelles que soient les applications* C^∞ φ, ε, σ, γ *d'un objet* E *de* $\mathscr{C}$ *dans* $C^\infty(\mathbf{R} \times P)$, $C^\infty(P, R^d)$, $C^\infty(\mathbf{R} \times P)$, $C^\infty(N, \mathbf{R} \times P)$ *respectivement, telles que* (ε, σ) *prenne ses valeurs dans* D, *les applications* $e \mapsto Q(\varphi(e), \varepsilon(e), \sigma(e)) \circ \gamma(e)$ et $e \mapsto R_i(\varphi(e), \varepsilon(e), \sigma(e))$ $(i = 1, \ldots, d)$ *définies sur* E *sont* C^∞.

Démonstration. — Seule l'assertion (*c*) n'est pas explicitement prouvée dans la proposition 2 du paragraphe 4 de [2], où $Q(f, u, s)$ et $(R_1(f, u, s), \ldots, R_d(f, u, s))$ ($q_{f,u,s}$ et $h_{f,u,s}$ dans [2]) sont définis par des formules universelles [formules (8), § 4].

L'assertion (*c*) pour Q par exemple se ramène à ceci : « Pour toute variété Λ, pour toute $F \in C^\infty(\mathbf{R} \times P \times \Lambda)$, toute $U \in C^\infty(P \times \Lambda, \mathbf{R}^d)$, toute $S \in C^\infty(\mathbf{R} \times P \times \Lambda)$ et toute $G \in C^\infty(N \times \Lambda, \mathbf{R} \times P)$, l'application $(x, \lambda) \mapsto Q(F_\lambda, U_\lambda, S_\lambda) \circ G_\lambda(x)$ $(x \in N, \lambda \in \Lambda)$ appartient à $C^\infty(N \times \Lambda)$ et dépend continûment de (F, U, S, G) » [F_λ, etc., désignant pour tout $\lambda \in \Lambda$ l'application partielle $(t, y) \mapsto F(t, y, \lambda)$]. Or, l'égalité

$$Q(F_\lambda, U_\lambda, S_\lambda) = Q(F, U, S)_\lambda$$

valable pour tout $\lambda \in \Lambda$, montre que l'application en question est égale à $Q(F, U, S) \circ (G \times \mathrm{id})$ où $G \times \mathrm{id}$ est l'application propre de $N \times \Lambda$ dans $R \times P \times \Lambda$: $(x, \lambda) \mapsto (G(x, \lambda), \lambda)$. La question étant locale, on peut supposer que les applications $G \times$ id. prennent toutes leurs valeurs dans une même sous-variété à bord N′ de $R \times P \times \Lambda$. telle que la projection canonique de N′ dans $P \times \Lambda$ soit propre ([2], § 2, lemme 2). L'assertion résulte donc de l'assertion (*b*) appliquée à $P \times \Lambda$ et N′, et de la proposition 1 du paragraphe 2 de [2].

2. Utilisation du théorème de division

Soit $f_0 \in C^\infty(X, Y)$ une application de codimension finie. Supposons donnés un espace vectoriel réel $\mathscr{G}$ de dimension finie, un voisinage F_0 de f_0, et une application d de $F_0 \times \mathscr{G}$ dans Θ_{F_0} telle que :

1. le diagramme

$$\begin{array}{ccc} F_0 \times \mathscr{G} & \xrightarrow{d} & \Theta_{F_0} \\ \downarrow & & \downarrow p \\ F_0 & \xrightarrow{\mathrm{id}} & F_0 \end{array}$$

soit commutatif;

2. d envoie $\{f\} \times \mathscr{G}$ linéairement dans $\theta(f)$ pour toute $f \in F_0$;

3. pour toute application C^∞ φ_1 d'un objet E de $\mathscr{C}$ dans F_0 et pour toute application C^∞ φ_2 de E dans $\mathscr{G}$, l'application $d \circ (\varphi_1, \varphi_2)$ de E dans Θ_{F_0} soit C^∞.

THÉORÈME 1. — *Si l'image de* $\{f_0\} \times \mathscr{G}$ *par* d *contient un supplémentaire de* $t_{f_0}(\mathscr{X}) + \omega_{f_0}(\mathscr{Y})$ *dans* $\theta(f_0)$, *il existe un voisinage* $F_1 \subset F_0$ *de* f_0 *et trois applications* C^∞ l_G, l_X, *et* l_Y *de* Θ_{F_1} *dans* $\mathscr{G}$, $\mathscr{X}$, *et* $\mathscr{Y}$ *respectivement, linéaires sur chaque espace vectoriel* $\theta(f)$ *pour* $f \in F_1$, *et vérifiant pour toute* $f \in F_1$ *et tout* $\xi \in \theta(f)$:

$$\xi = d(f, l_G(\xi)) + t(f, l_X(\xi)) + \omega(f, l_Y(\xi)).$$

Démonstration. — Il y a trois étapes.

Première étape. — Considérons un plongement $x \mapsto (t_1(x), \ldots, t_n(x))$ de X dans un espace euclidien $\mathbf{R}^n$, et, pour $q = 0, \ldots, n$, désignons par $\mathbf{R}^q$ le sous-ensemble de $\mathbf{R}^n$ d'équations $t_{q+1} = \ldots = t_n = 0$. Pour $q = 0, \ldots, n$, l'application $(\varphi, \xi) \mapsto \varphi.\xi$ de $C^\infty(\mathbf{R}^q \times Y) \times \Theta$ dans Θ définie par la formule

$$\varphi.\xi(x) = \varphi(t_1(x), \ldots, t_q(x), f(x)).\xi(x), \qquad x \in X, \quad f \in C^\infty(X, Y), \quad \xi \in \theta(f)$$

munit chaque espace vectoriel $\theta(f)$ d'une structure de $C^\infty(\mathbf{R}^q \times Y)$-module [déduite de la structure de $C^\infty(X)$-module par l'homomorphisme d'anneaux $\varphi \mapsto \varphi \circ (t_1, \ldots, t_q, f)$] de $C^\infty(\mathbf{R}^q \times Y)$ dans $C^\infty(X)$]. Elle munit aussi $\Theta(F)$ d'une structure de $C^\infty(F, C^\infty(\mathbf{R}^q \times Y))$ module quel que soit l'ouvert F de $C^\infty(X, Y)$; en effet, quelle que soit l'application C^∞ φ_1 d'un objet E de $\mathscr{C}$ dans $C^\infty(\mathbf{R}^q \times Y)$ et quelle que soit l'application C^∞ φ_2 de E dans θ, l'application $\varphi_1.\varphi_2$ de E dans θ est C^∞ ([2], § 2, prop. 1 et corollaire à la prop. 3).

LEMME 2. — *Pour* $q = 0, \ldots, n$, *il existe (dépendant de* q*) un voisinage* F *de* f_0, *une suite* $m_1, \ldots, m_s$ *de sections du fibré tangent à* F, *une suite* $x_1, \ldots, x_s$ *d'applications* C^∞ *de* Θ_F *dans* $C^\infty(\mathbf{R}^q \times Y)$, *linéaires sur chaque* $\theta(f)$, *et une application* C^∞ l *de* Θ_F *dans* $\mathscr{X}$ *linéaire sur chaque* $\theta(f)$, *vérifiant pour toute* $f \in F$ *et tout* $\xi \in \theta(f)$:

$$\xi = \sum_{i=1}^{s} x_i(\xi).m_i(f) + t(f, l(\xi)).$$

Démonstration. — Procédons par récurrence descendante sur q.

1. Pour $q = n$, soit i une application $\mathbf{R}$-linéaire de $C^\infty(X)$ dans $C^\infty(\mathbf{R}^n \times Y)$, qui soit C^∞, et vérifie pour toute $\varphi \in C^\infty(X)$ et pour toute f d'un voisinage $\mathscr{F}$ de f_0 :

$$\varphi = i(\varphi) \circ (t_1, \ldots, t_n, f).$$

On peut prendre pour l l'application nulle, pour F l'intersection de $\mathscr{F}$ et du voisinage de f_0 donné par le lemme 1, pour $m_1, \ldots, m_s$ les sections données par le lemme 1, et pour $x_1, \ldots, x_s$ les applications analogues données par le lemme 1 composées avec i. [Pour obtenir i, il suffit de prendre une extension e linéaire et C^∞ de $C^\infty(X)$ dans $C^\infty(\mathbf{R}^n)$ ([2], § 4, lemme 1 et § 5), et une fonction $\sigma \in C^\infty(\mathbf{R}^n \times Y)$ valant 1 au voisinage de l'image de X par l'application $x \mapsto (t_1(x), \ldots, t_n(x), f_0(x))$, dont le support se projette proprement dans $\mathbf{R}^n$ ([2], § 2, lemme 2 et § 4); on définit i par

$$i(\varphi)(t_1, \ldots, t_n, y) = e(\varphi)(t_1, \ldots, t_n).\sigma(t_1, \ldots, t_n, y).]$$

2. Supposons le lemme établi pour l'entier $q \geqq 1$. Si $e_1, \ldots, e_c$ est une base de $\mathscr{G}$, et $\eta_1, \ldots, \eta_h$ un système de générateurs du $C^\infty(Y)$-module $\mathscr{Y}$, on peut supposer que les sections $f \mapsto d(f, e_\alpha)$ $(\alpha = 1, \ldots, c)$ et $f \mapsto \omega(f, \eta_\beta)$ $(\beta = 1, \ldots, h)$ figurent dans la suite $m_1, \ldots, m_s$. L'hypothèse du théorème permet donc d'écrire en f_0, pour $i = 1, \ldots, s$:

$$t_q.m_i(f_0) = t(f_0, \xi_i) + \sum_{j=1}^{s} u_{ij}.m_j(f_0), \qquad \xi_i \in \mathscr{X}, \quad u_{ij} \in C^\infty(Y).$$

La section ε_i de Θ_F définie par

$$\varepsilon_i(f) = t_q.m_i(f) - \sum_{j=1}^{s} u_{ij}.m_j(f) - t(f, \xi_i)$$

est donc nulle en f_0. L'hypothèse de récurrence permet d'écrire, pour $i = 1, \ldots, s$:

$$t_q.m_i(f) = \sum_{j=1}^{s} u_{ij}.m_j(f) + \sum_{j=1}^{s} x_j(\varepsilon_i(f)).m_j(f) + t(f, l(\varepsilon_i(f))) + t(f, \xi_i).$$

Le déterminant de la matrice carrée à s lignes $t_q.\mathrm{Id} - (u_{ij} + x_j(\varepsilon_i(f)))$ est de la forme $P_u + s(f)$, où P_u est un polynôme unitaire de degré d en t_q à coefficients dans $C^\infty(Y)$, et s une application C^∞ de F dans $C^\infty(\mathbf{R}^q \times Y)$, nulle en f_0. Les formules de Cramer montrent qu'il existe une suite $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$ d'applications C^∞ de F dans $\mathscr{X}$ telle que, pour $i = 1, \ldots, s$, on ait, pour toute $f \in F$:

$$(P_u + s(f)).m_i(f) = t(f, \lambda_i(f)).$$

Restreignons F suffisamment pour pouvoir appliquer le théorème de division à $P_u + s(f)$ quelle que soit $f \in F$. Pour tout

$$\xi = \sum_{i=1}^{s} x_i(\xi).m_i(f) + t(f, l(\xi)) \in \theta(f), \qquad f \in F,$$

on a

$$x_i(\xi) = (P_u + s(f)).Q(x_i(\xi), u, s(f)) + \sum_{j=1}^{d} R_j(x_i(\xi), u, s(f)).t_q^{d-j},$$

donc

$$\xi = \sum_{i,j} R_j(x_i(\xi), u, s(f)).t_q^{d-j} m_i(f) + t\left(f, l(\xi) + \sum_{i=1}^{s} Q(x_i(\xi), u, s(f)).\lambda_i(f)\right).$$

On peut donc remplacer la suite $m_1, \ldots, m_s$ par la famille $t_q^{d-j} m_i$ ($i = 1, \ldots, s$, $j = 1, \ldots, d$), la suite $x_1, \ldots, x_s$ par la famille x_{ij} définie par

$$x_{ij}(\xi) = \mathrm{R}_j(x_i(\xi), u, s(p(\xi))),$$

et l'application l par l'application

$$\xi \mapsto l(\xi) + \sum_{i=1}^{s} \mathrm{Q}(x_i(\xi), u, s(p(\xi))).\lambda_i(p(\xi))$$

[qui est C^∞ d'après l'assertion (c) du théorème de division, puisque la multiplication $\mathrm{C}^\infty(\mathrm{X}) \times \mathscr{X} \to \mathscr{X}$ est C^∞].

Deuxième étape. — Considérons un plongement propre $y \mapsto (t_1(y), \ldots, t_n(y))$ de Y dans un espace euclidien $\mathbf{R}^n$. Avec les notations du lemme 1, pour $q = 0, \ldots, n$, l'application $(\varphi, \xi) \mapsto \varphi.\xi$ de $\mathrm{C}^\infty(\mathbf{R}^q) \times \Theta$ dans Θ définie par la formule

$$\varphi.\xi(x) = \varphi(t_1(f(x)), \ldots, t_q(f(x))).\xi(x), \qquad x \in \mathrm{X}, \quad f \in \mathrm{F}, \quad \xi \in \theta(f)$$

munit chaque espace vectoriel $\theta(f)$ d'une structure de $\mathrm{C}^\infty(\mathbf{R}^q)$-module. Elle munit aussi $\Theta(\mathrm{F})$ d'une structure de $\mathrm{C}^\infty(\mathrm{F}, \mathrm{C}^\infty(\mathbf{R}^q))$-module quel que soit l'ouvert F de $\mathrm{C}^\infty(\mathrm{X}, \mathrm{Y})$, pour la même raison que dans la première étape.

LEMME 3. — *Pour $q = 0, \ldots, n$, il existe (dépendant de q) un voisinage* F *de f_0, une suite $m_1, \ldots, m_s$ de sections du fibré tangent à* F, *une suite $x_1, \ldots, x_s$ d'applications C^∞ de Θ_F dans $\mathrm{C}^\infty(\mathbf{R}^q)$, linéaires sur chaque $\theta(f)$, une application l de Θ_F dans $\mathscr{X}$ et une application m de Θ_F dans $\mathscr{Y}$, C^∞ et linéaires sur chaque $\theta(f)$, vérifiant pour toute $f \in \mathrm{F}$ et tout $\xi \in \theta(f)$:*

$$\xi = \sum_{i=1}^{s} x_i(\xi).m_i(f) + t(f, l(\xi)) + \omega(f, m(\xi)).$$

Démonstration. — Procédons par récurrence descendante sur q.

1. Pour $q = n$, soit e une extension linéaire et C^∞ de $\mathrm{C}^\infty(\mathrm{Y})$ dans $\mathrm{C}^\infty(\mathbf{R}^n)$. On peut prendre pour m l'application nulle, pour F, $m_1, \ldots, m_s$ et l le voisinage de f_0, les sections et l'application de Θ_F dans $\mathscr{X}$ donnés par le lemme 2 pour $q = 0$, et pour $x_1, \ldots, x_s$ les applications analogues données par le lemme 2 pour $q = 0$ composées avec e.

2. Dans le cas général, la démonstration donnée au lemme 2 s'applique, si on impose de plus aux éléments de $\mathscr{Y}$ qui interviennent d'avoir tous leur support contenu dans un même voisinage compact de $f_0(\mathrm{X})$ (*cf.* [2], § 2, corollaires 2 et 3 à la prop. 3).

Troisième étape. — Le lemme 3 pour $q = 0$ donne un voisinage F_1, une suite $m_1, \ldots, m_s$ de sections, une suite $x_1, \ldots, x_s$ d'éléments de $\mathrm{C}^\infty(\Theta_{\mathrm{F}_1})$ et une application (l, m) de Θ_{F_1} dans $\mathscr{X} \times \mathscr{Y}$ telles que, pour tout $f \in \mathrm{F}_1$ et toute $\xi \in \theta(f)$:

$$\xi = \sum_{i=1}^{s} x_i(\xi).m_i(f) + t(f, l(\xi)) + \omega(f, m(\xi)).$$

Le lemme de Nakayama et l'hypothèse du théorème montrent qu'on peut supposer la suite $m_1, \ldots, m_s$ égale à la suite de sections $f \mapsto d(f, e_i)$ (où $e_1, \ldots, e_c$ est une base de $\mathscr{G}$). On peut donc prendre $l_X = l$, $l_Y = m$, et définir l_G par

$$l_G(\xi) = \sum_{i=1}^{c} x_i(\xi).e_i.$$

3. Résultats

Soit $f_0 \in C^\infty(X, Y)$ une application de codimension finie c, et soit $\mathscr{G}$ un supplémentaire de $t_{f_0}(\mathscr{X}) + \omega_{f_0}(\mathscr{Y})$ dans $\theta(f_0)$.

Le groupe additif de $\mathscr{G}$ opère sur $\theta(f_0)$ par addition; le transport de cette action par un homéomorphisme Φ^{-1} d'un voisinage de $O_{f_0} \in \theta(f_0)$ sur un voisinage de f_0 (*cf.* lemme 1) permet de définir un germe d'action du groupe additif de $\mathscr{G}$ sur $C^\infty(X, Y)$ au voisinage de f_0. On notera $G(g, f)$ ($g.f$ s'il n'y a pas d'ambiguïté) le résultat de l'action de g sur f : G est une application définie sur un produit $\mathscr{G}_0 \times F_0$ et à valeurs dans F_1, où $\mathscr{G}_0$ est un voisinage de $0 \in \mathscr{G}$ et F_0 et F_1 deux voisinages de f_0 assez petits et vérifiant : $\mathscr{G}_0 + \Phi(F_0) \subset \Phi(F_1)$.

Par exemple, si $Y = \mathbf{R}^p$ et qu'on identifie $\mathscr{G}$ à $\mathbf{R}^c$ par le choix d'une base $\zeta_1, \ldots, \zeta_c$:

$$(t_1, \ldots, t_c).f = f + \sum_{i=1}^{c} t_i \zeta_i.$$

De plus, pour toute application C^∞ φ_1 d'un objet E de $\mathscr{C}$ dans $\mathscr{G}_0$ (muni de la structure de variété C^∞ induite par les isomorphismes linéaires de $\mathscr{G}$ sur $\mathbf{R}^c$) et pour toute application C^∞ φ_2 de E dans F_0, l'application $G \circ (\varphi_1, \varphi_2)$ de E dans F_1 est C^∞.

Rappelons enfin l'action de $\mathrm{Diff}(X) \times \mathrm{Diff}(Y)$ sur $C^\infty(X, Y)$: le transformé de $f \in C^\infty(X, Y)$ par $h = (\varphi, \psi) \in \mathrm{Diff}(X) \times \mathrm{Diff}(Y)$ est $h.f = \psi \circ f \circ \varphi^{-1}$.

THÉORÈME 2. — *Il existe deux applications continues* (γ_1, δ_1) *et* (γ_2, δ_2) *définies sur un voisinage* F *de* f_0 *et à valeurs dans* $\mathscr{G} \times (\mathrm{Diff}(X) \times \mathrm{Diff}(Y))$, *vérifiant :*

1. $\gamma_1(f_0) = \gamma_2(f_0) = 0$; $\delta_1(f_0) = \delta_2(f_0) =$ *identité;*

2. *pour* $i = 1, 2$, γ_i *et les deux composantes de* δ_i *sont* C^∞;

3. *pour toute* $f \in F$, *les produits* $\gamma_1(f).\delta_1(f).f_0$ *et* $\delta_2(f).\gamma_2(f).f_0$ *sont définis et égaux à* f;

4. *Pour toute* $f \in F$, *les conditions*

$$\delta_1(f) = \mathrm{id}, \qquad \delta_2(f) = \mathrm{id}, \qquad f \in \gamma_1(F).f_0, \qquad f \in \gamma_2(F).f_0, \qquad f \in \mathscr{G}_0.f_0$$

sont équivalentes, et, si elles sont réalisées, $\gamma_1(f)$ *et* $\gamma_2(f)$ *sont égaux;*

5. *pour toute* $f \in F$, *les conditions*

$$\gamma_1(f) = 0, \qquad \gamma_2(f) = 0, \qquad f \in \delta_1(F).f_0, \qquad f \in \delta_2(F)\,f_0$$

sont équivalentes, et, si elles sont réalisées, $\delta_1(f)$ *et* $\delta_2(f)$ *sont égaux. De plus, il existe un voisinage* $\mathscr{H}$ *de* $\mathrm{id}\times\mathrm{id}$ *dans* $\mathrm{Diff}(X)\times\mathrm{Diff}(Y)$ *tel que* $F\cap\mathscr{H}\circ f_0$ *soit égal à* $F\cap\delta_i(F).f_0$ $(i=1,2)$.

Démonstration. — 1. Soit TG (différentielle de G) l'application de $(\mathscr{G}_0\times\mathscr{G})\times\Theta_{F_0}$ dans Θ_{F_1} définie par

$$T\Phi(TG((g,\gamma),\xi))=(g,\gamma)+T\Phi(\xi),\qquad (g,\gamma)\in\mathscr{G}_0\times\mathscr{G}\subset E_1\times\theta(f_0),\quad \xi\in\Theta_{F_0},$$

[c'est-à-dire par transport de l'application $((g,\gamma),(s,\zeta))\mapsto(g+s,\gamma+\zeta)$ de

$(\mathscr{G}_0\times\mathscr{G})\times(E_0\times\theta(f_0))$ dans $E_1\times\theta(f_0)$, où $E_i=\Phi(F_i)$ pour $i=0,1$].

Le lemme 1 montre :

(*a*) pour toute application C^∞ φ_1 d'un objet E de $\mathscr{C}$ dans $\mathscr{G}_0\times\mathscr{G}$ et pour toute application C^∞ φ_2 de E dans Θ_{F_0}, l'application $TG\circ(\varphi_1,\varphi_2)$ de E dans Θ_{F_1} est C^∞;

(*b*) pour toute application C^∞ $t\mapsto(g(t),f(t))$ d'un intervalle I de $\mathbf{R}$ dans $\mathscr{G}_0\times F_0$, et pour tout $t_0\in I$, les éléments

$$TG\left(\left.\frac{dg}{dt}\right|_{t=t_0},\left.\frac{\partial f}{\partial t}\right|_{t=t_0}\right)\quad\text{et}\quad\left.\frac{\partial}{\partial t}(g.f)\right|_{t=t_0}\quad\text{de}\quad\Theta_{F_1}$$

sont égaux;

(*c*) $TG((g,\gamma),O_f)=TG((0,\gamma),0_{g.f})$, pour tout $(g,\gamma)\in\mathscr{G}_0\times\mathscr{G}$ et toute $f\in F_0$.

2. Soit d l'application de $F_0\times\mathscr{G}$ dans Θ_{F_1} définie par

$$d(f,\gamma)=TG((0,\gamma),O_f).$$

On peut lui appliquer le théorème 1. Nous supposerons $\mathscr{G}_0$ et F_0 assez petits pour que l'application (l_G,l_X,l_Y) soit définie sur Θ_{F_1}.

LEMME 4. — *On peut supposer que* $l_X(\xi)$ *et* $l_Y(\xi)$ *sont nuls pour tout* ξ *appartenant à l'image de d.*

Démonstration. — Soit u l'application de Θ_{F_1} dans Θ_{F_1} définie par la formule [où $T_2\Phi(\xi)$ désigne la seconde composante de $T\Phi(\xi)$] :

$$u(\xi)=d(p(\xi),l_G(T_2\Phi(\xi))).$$

On voit (en composant avec $T\Phi$) que u est C^∞, envoie chaque $\theta(f)$ linéairement dans lui-même, et [parce que $\mathscr{G}$ est un supplémentaire de $t_{f_0}(\mathscr{X})+\omega_{f_0}(\mathscr{Y})$] laisse fixe tout $\xi\in d(F_0\times\mathscr{G})$. Il suffit donc de remplacer l_X, l_Y, et l_G respectivement par $l_X\circ(\mathrm{id.}-u)$, $l_Y\circ(\mathrm{id.}-u)$, et $l_G\circ(\mathrm{id.}-u)+l_G\circ T_2\Phi$.

3. Supposons $E_0=\Phi(F_0)$ ouvert et symétrique, et posons

$$E'=\frac{1}{2}E_0,\qquad F'=\overset{-1}{\Phi}(E').$$

Joignant f_0 à chaque $f \in F'$ par l'arc $\tau \mapsto \overset{-1}{\Phi}(\tau(\Phi(f)))$, nous allons appliquer le théorème 1 à $(\partial/\partial\tau)\, g.\overset{-1}{\Phi}(\tau(\Phi(f)))\big|_{\tau=t}$.

Plus précisément, soit ρ une fonction de $C^\infty(Y)$ valant 1 au voisinage de $f_0(X)$ et à support compact. Supposons E_1 équilibré et assez petit pour que $f \in F_1$ implique $f(X) \subset \overset{-1}{\rho}(1)$, et choisissons un voisinage ouvert $\mathscr{G}'$ de $0 \in \mathscr{G}$, d'adhérence compacte contenue dans $\mathscr{G}_0 \cap (1/2)E_0$, et une fonction σ de $C^\infty(\mathbf{R} \times \mathscr{G})$ comprise entre 0 et 1, valant 1 sur $[0, 1] \times \mathscr{G}'$ et à support compact contenu dans $]-2, +2[\times \mathscr{G}_0$.

Soit, pour tout $(f, t, g) \in F' \times]-2, +2[\times \mathscr{G}_0$, $\zeta(f, t, g)$ l'élément de Θ_{F_1} défini par

$$\zeta(f, t, g) = \frac{\partial}{\partial\tau}\left(\overset{-1}{\Phi}(\sigma(\tau, g).(\tau\Phi(f)+g))\right)\Big|_{\tau=t},$$

et soient γ, ξ et η les applications de F' dans

$$C^\infty([-2, +2[\times \mathscr{G}_0, \mathscr{G}),$$
$$C^\infty(]-2, +2] \times \mathscr{G}_0 \times X, TX) \quad \text{et} \quad C^\infty(]-2, +2[\times \mathscr{G}_0 \times Y, TY)$$

définies respectivement par

$$\gamma(f)(t, g) = l_G(\zeta(f, t, g)),$$
$$\xi(f)(t, g, x) = l_X(\zeta(f, t, g))(x),$$
$$\eta(f)(t, g, y) = \rho(y).l_Y(\zeta(f, t, g))(y).$$

LEMME 5. — *Les applications* γ, ξ, *et* η *sont* C^∞.

Démonstration. — En effet :

(*a*) l'application Ψ de E dans $C^\infty(]-2, +2[\times \mathscr{G}_0 \times X, TY \underset{Y}{\times} TY)$ définie par

$$\Psi(e)(t, g, x) = \frac{\partial}{\partial\tau}(\sigma(\tau, g).(\tau e(x)+g(x)))\Big|_{\tau=t} \qquad (e \in E')$$

est C^∞ (car σ est à support compact : *cf.* [2], § 2, corollaire 3 à la prop. 3);

(*b*) l'application de

$$C^\infty(]-2, +2[\times \mathscr{G}_0 \times X, TY) \cap \mathscr{F}(]-2, +2[\times \mathscr{G}_0, \Theta_{F_1})$$

dans

$$C^\infty(]-2, +2[\times \mathscr{G}_0 \times X, TY \underset{Y}{\times} TY) \cap \mathscr{F}(]-2, +2[\times \mathscr{G}_0, E_1 \times \theta(f_0))$$

obtenue en composant à gauche par T Φ est bijective et C^∞ ainsi que son inverse; de même, l'application de

$$C^\infty(]-2, +2[\times \mathscr{G}_0 \times X, TY) \cap \mathscr{F}(]-2, +2[\times \mathscr{G}_0, \Theta_{F_1})$$

dans

$$C^\infty(]-2, +2[\times \mathscr{G}_0 \times X, TX) \cap \mathscr{F}(]-2, +2[\times \mathscr{G}_0, \mathscr{X})$$

obtenue en composant à gauche par l_X est C^∞, ainsi que les deux applications analogues obtenues en composant à gauche par l_G et l_Y.

Ce dernier point résulte de la remarque suivante, facile à vérifier :

Soit φ une application C^∞ de $E_1 \subset C^\infty(V_1, W_1)$ dans $E_2 \subset C^\infty(V_2, W_2)$; quelle que soit la variété U, l'application de

$$C^\infty(U \times V_1, W_1) \cap \mathscr{F}(U, E_1) \quad \text{dans} \quad C^\infty(U \times V_2, W_2) \cap \mathscr{F}(U, E_2)$$

obtenue en composant à gauche par φ est également C^∞.

4. On peut maintenant achever la démonstration : Considérons, sur $]-2, +2[\times \mathscr{G}_0 \times X$ et sur $]-2, +2[\times \mathscr{G}_0 \times Y$ respectivement, les systèmes différentiels :

$$S_X(f): \quad \frac{dg}{dt} = -\gamma(f)(t, g), \qquad \frac{dx}{dt} = -\xi(f)(t, g, x);$$

$$S_Y(f): \quad \frac{dg}{dt} = -\gamma(f)(t, g), \qquad \frac{dy}{dt} = \eta(f)(t, g, y).$$

Quelle que soit $f \in F'$, les seconds membres sont des fonctions C^∞ sur $]-2, +2[\times \mathscr{G}_0 \times X$ et $]-2, +2[\times \mathscr{G}_0 \times Y$, à supports compacts d'après la construction faite en 3. Les solutions $t \mapsto (g(t), x(t))$ et $t \mapsto (g(t), y(t))$ sont donc définies sur $]-2, +2[$.

Le difféomorphisme $D_X(f)$ [resp. $D_Y(f)$] de $\mathscr{G}_0 \times X$ (resp. $\mathscr{G}_0 \times Y$) qui transforme tout point α en la valeur pour $t = 1$ de la solution passant en α pour $t = 0$ dépend de f de manière C^∞ d'après les théorèmes généraux concernant les systèmes différentiels ([2], § 7, lemme 2).

D'autre part, les seconds membres de $S_X(f_0)$ et $S_Y(f_0)$ sont nuls sur $[0, 1] \times \mathscr{G}'$.

Soit F un voisinage de f_0 contenu dans F' et tel que, pour toute $f \in F'$, les solutions de $S_X(f)$ [resp. $S_Y(f)$] issues pour $t = 0$ d'un point de $\{0\} \times X$ (resp. $\{0\} \times Y$) et les solutions aboutissant pour $t = 1$ en un point de $\{0\} \times X$ (resp. $\{0\} \times Y$) soient à valeurs dans $\mathscr{G}' \times X$ (resp. $\mathscr{G}' \times Y$) pour tout $t \in [0, 1]$.

Il résulte de la définition de t et ω, de l'égalité donnée par le théorème 1, et des propriétés (*b*) et (*c*) de TG, que pour toute solution $t \mapsto (g(t), x(t))$ de $S_X(f)$ issue pour $t = 0$ d'un point de $\{0\} \times X$ ou aboutissant pour $t = 1$ en un point de $\{0\} \times X$, l'application $t \mapsto (g(t), (g(t).f(t))(x(t)))$ est une solution de $S_Y(f)$ lorsque f appartient à F' [si $f(t) = \overset{-1}{\Phi}(t\,\Phi(f))$].

Comme le champ $\gamma(f)$ est indépendant de x et y, $D_X(f)$ [resp. $D_Y(f)$] transforme toute variété de la forme $\{g\} \times X$ (resp. $\{g\} \times Y$) en une variété de la même forme. Les propriétés 1, 2 et 3 du théorème 2 sont donc réalisées en prenant

$$\gamma_1(f) = \overset{-1}{g_1}, \qquad \delta_1(f) = (\varphi_1, \psi_1), \qquad \gamma_2(f) = g_2, \qquad \delta_2(f) = (\varphi_2, \psi_2),$$

où g_i, φ_i et ψ_i $(i = 1, 2)$ sont définis par les diagrammes commutatifs suivants :

$$\begin{array}{ccc} \{0\}\times X & \xrightarrow{Dx(f)} & \{g_1\}\times X \\ \uparrow & & \downarrow \\ X & \xrightarrow{\varphi_1} & X \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \{g_2\}\times X & \xrightarrow{Dx(f)} & \{0\}\times X \\ \uparrow & & \downarrow \\ X & \xrightarrow{\varphi_2} & X \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} \{0\}\times Y & \xrightarrow{Dy(f)} & \{g_1\}\times Y \\ \uparrow & & \downarrow \\ Y & \xrightarrow{\psi_1} & Y \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \{g_2\}\times Y & \xrightarrow{Dy(f)} & \{0\}\times Y \\ \uparrow & & \downarrow \\ Y & \xrightarrow{\psi_2} & Y \end{array}$$

et la propriété 4 est conséquence du lemme 4.

5. Pour réaliser la propriété 5, il suffit de rétrécir F convenablement.

LEMME 6. — *Il existe un voisinage* $\mathscr{H}_0$ *de* $\mathrm{id}\times\mathrm{id}$ *dans* $\mathrm{Diff}(X)\times\mathrm{Diff}(Y)$ *tel que, pour tout* $(g, h)\in\mathscr{G}_0\times\mathscr{H}_0$, *l'égalité* $g.f_0 = h.f_0$ *implique* $g = 0$.

Démonstration. — Soit V un voisinage relativement compact de $\rho^{-1}(1)$ dans Y, et soit $\mathscr{H}_1$ un voisinage de $\mathrm{id}\times\mathrm{id}$ dans $\mathrm{Diff}(X)\times\mathrm{Diff}_{Y-V}(Y)$ tel que, pour tout $h\in\mathscr{H}_1$, il existe une application C^∞ $t\mapsto h(t)$ définie sur un intervalle I de $\mathbf{R}$ contenant $[0, 1]$, à valeurs dans $\mathrm{Diff}(X)\times\mathrm{Diff}_{Y-V}(Y)$, et vérifiant

$$h(0) = \mathrm{id}\times\mathrm{id}, \qquad h(1) = h, \qquad h(t).f_0\in F \quad \text{pour tout } t\in I.$$

Il existe un voisinage $\mathscr{H}_0$ de $\mathrm{id}\times\mathrm{id}$ dans $\mathrm{Diff}(X)\times\mathrm{Diff}(Y)$ tel que toute fonction de la forme $h_0.f_0$ $(h_0\in\mathscr{H}_0)$ soit aussi de la forme $h.f_0$ $(h\in\mathscr{H}_1)$ ([5], th. 5).

Pour montrer que $\mathscr{H}_0$ convient, considérons l'application C^∞ de I dans F_1 :

$$\tau\mapsto f(\tau) = \gamma_2(h(\tau).f_0).f_0 = \delta_2(h(\tau).f_0)^{-1}.h(\tau).f_0;$$

pour tout $t\in I$, $\partial f/\partial\tau\,|_{\tau=t}$ appartient à l'image de d (d'après la première définition), et à $t_{f(t)}(\mathscr{X})+\omega_{f(t)}(\mathscr{Y})$ (d'après la seconde définition); $f(t)$ étant de même codimension que f_0 (d'après la seconde définition), le théorème 1 montre que $\partial f/\partial\tau\,|_{\tau=t}$ est nul; donc $f(0) = f_0$ et $f(1) = \gamma_2(h.f_0).f_0$ sont égales, d'où $\gamma_2(h.f_0) = 0$. Comme $\delta_2(g.f_0) = \mathrm{id}$ (d'après 4), f_0 et $g.f_0$ sont égales, d'où $g = 0$.

Soit alors $\mathscr{H}$ un voisinage symétrique de $\mathrm{id}\times\mathrm{id}$ dans $\mathrm{Diff}(X)\times\mathrm{Diff}(Y)$ tel que $\mathscr{H}.\mathscr{H}$ soit inclus dans $\mathscr{H}_0$, et supposons F assez petit pour que $\delta_1(F)$ et $\delta_2(F)$ soient inclus dans $\mathscr{H}$. Soit $f\in F$: d'après la construction de γ_1 et de γ_2, les conditions $\gamma_1(f) = 0$ et $\gamma_2(f) = 0$ sont équivalentes; pour $i = 1, 2$, $\gamma_i(f) = 0$ implique $f\in\delta_i(F).f_0$, qui implique $f\in\mathscr{H}.f_0$; enfin $f = h.f_0$, avec $h\in\mathscr{H}$, implique $\gamma_2(f).f_0 = \delta_2(f)^{-1}.h.f_0$, donc $\gamma_2(f) = 0$, d'après le lemme 6, ce qui achève la démonstration.

BIBLIOGRAPHIE

[1] J. MATHER, *Stability of* C^∞ *mappings. I. The division theorem* (*Annals of Maths*, vol. 87, 1968 p. 89-104).

[2] J. MATHER, *Stability of* C^∞ *mappings. II. Infinitesimal stability implies stability* (*Annals of Maths*, vol. 89, 1969, p. 251-291).

[3] F. SERGERAERT, *Un théorème de fonctions implicites sur certains espaces de Fréchet et quelques applications* (*Ann. scient. Éc. Norm. Sup.*, t. 5, 1972, p. 599-660).
[4] S. LANG, *Introduction to differentiable manifolds*, Interscience.
[5] J. CERF, *Topologie de certains espaces de plongement* (*Bull. Soc. math. Fr.*, t. 89, 1961, p. 227-380).

(Manuscrit reçu le 8 octobre 1973.)

G. LASSALLE,
Faculté des Sciences d'Orsay,
Département de Mathématiques,
91405 Orsay.