ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

A. CEREZO
F. ROUVIÈRE

Résolubilité locale d'un opérateur différentiel invariant du premier ordre

Annales scientifiques de l'É.N.S. 4^e série, tome 4, n° 1 (1971), p. 21-30
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1971_4_4_1_21_0>

© Gauthier-Villars (Éditions scientifiques et médicales Elsevier), 1971, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales scientifiques de l'É.N.S. » (http://www.elsevier.com/locate/ansens) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Ann. scient. Éc. Norm. Sup.,
4e série, t. 4, 1971, p. 21 à 30.

RÉSOLUBILITÉ LOCALE D'UN OPÉRATEUR DIFFÉRENTIEL INVARIANT DU PREMIER ORDRE

PAR A. CEREZO ET F. ROUVIÈRE.

Soient V une variété analytique réelle et G un groupe de Lie de transformations de V : cela signifie que l'application

$$(g, x) \mapsto g.x,$$
$$G \times V \to V$$

est analytique. Supposons que G opère *transitivement* sur V. Nous noterons e l'élément neutre de G, et x_0 un point de V, fixé dans la suite. Soit

$$H = \{ h \in G ; h.x_0 = x_0 \}$$

le sous-groupe d'isotropie de x_0. Alors, si G est à base dénombrable d'ouverts, V s'identifie avec sa structure de variété à l'espace homogène G/H des classes à gauche gH.

Dans la suite nous appellerons *opérateur invariant* un opérateur différentiel linéaire sur V dont les coefficients sont des fonctions analytiques sur V, à valeurs complexes, et qui commute à l'action de G sur V, i. e., P désignant l'opérateur, tel que

$$P({}_g f) = {}_g(Pf)$$

pour tout $g \in G$ et toute fonction f C^∞ sur V, avec

$${}_g f(x) = f(g.x).$$

Les opérateurs invariants sur V à coefficients réels forment pour le crochet $[P, Q] = PQ - QP$ de deux opérateurs une algèbre de Lie

réelle $D(V)$; les opérateurs invariants à coefficients réels, homogènes d'ordre un, en forment une sous-algèbre de dimension finie $D_1(V)$. Nous considérerons souvent le cas particulier $V = G$, $H = \{e\}$; alors $D_1(V)$ s'identifie à l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ de G.

On dit que P est *localement résoluble* si tout point de V a un voisinage ouvert ω tel que

$$P\mathcal{D}'(\omega) \supset \mathcal{D}(\omega),$$

i. e. tel que, pour tout $f\ C^\infty$ à support compact dans ω, l'équation $Pu = f$ ait une solution distribution dans ω. D'après l'invariance de P et la transitivité de l'action de G, c'est équivalent à la propriété suivante :

x_0 a un voisinage ouvert ω tel que $P\mathcal{D}'(\omega) \supset \mathcal{D}(\omega)$.

Nous obtenons ici une condition nécessaire et suffisante de résolubilité locale pour les opérateurs invariants du premier ordre, et nous étudions quelques conséquences de cette condition. A cause de l'invariance elle peut être obtenue par des moyens indépendants du résultat de Nirenberg et Trèves [4], et beaucoup plus élémentaires.

Un opérateur invariant du premier ordre s'écrit

$$P = X + iY + c \qquad (i^2 = -1),$$

où X et Y appartiennent à $D_1(V)$ et c est un nombre complexe.

Proposition 1. — *Sous les hypothèses ci-dessus, l'opérateur invariant* $P = X + iY + c$ *est localement résoluble si et seulement si* $\mathfrak{L}(X, Y)$: *Il existe deux nombres réels* α et β *tels que*

$$[X, Y] = \alpha X + \beta Y.$$

Démonstration. — Si P est localement résoluble, le point x_0 a un voisinage ouvert ω tel que $P\mathcal{D}'(\omega) \supset \mathcal{D}(\omega)$; on peut supposer que l'on a une carte locale de ω sur un voisinage de l'origine de $\mathbf{R}^n$. L'opérateur s'écrit dans ces coordonnées locales (en gardant les notations P, X, Y) :

$$P\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) = X\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) + iY\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) + c,$$

et il résulte de la condition nécessaire de résolubilité de Hörmander [(3], theorem 6.1.1) que, pour $\xi \in \mathbf{R}^n$,

$$\left.\begin{aligned} X(0, \xi) &= 0 \\ \text{et}\quad Y(0, \xi) &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow [X, Y](0, \xi) = 0.$$

Comme X, Y et [X, Y] sont trois formes linéaires en ξ, on en déduit qu'il existe α, $\beta \in \mathbf{R}$ tels que, pour tout $\xi \in \mathbf{R}^n$,

$$[X, Y](o, \xi) = \alpha X(o, \xi) + \beta Y(o, \xi).$$

Or, si $Q \in D_1(V)$ est tel que, pour $\xi \in \mathbf{R}^n$, $Q(o, \xi) = o$, on a, pour $f \in C^\infty(V)$,

$$(Qf)(x_0) = Q(o, \operatorname{grad} f(o)) = o$$

et pour $g \in G$

$$(Qf)(g.x_0) = {}_g(Qf)(x_0) = Q({}_g f)(x_0) = o$$

par invariance, d'où $Q = o$ puisque G opère transitivement. Ici on a donc

$$[X, Y] = \alpha X + \beta Y$$

avec égalité dans l'algèbre $D_1(V)$.

La réciproque est classique (*voir*, par exemple, Trèves [5], chap. III) : rappelons qu'un opérateur différentiel P d'ordre $m \geq 1$, à coefficients C^∞ sur V, de partie principale P_m, est dit *de type principal* si

$$\sum_j \left| \frac{\partial P_m}{\partial \xi_j}(x, \xi) \right| \neq o \qquad \text{pour} \quad x \in V, \quad \xi \in \mathbf{R}^n \quad \text{et} \quad \xi \neq o;$$

pour un opérateur de type principal, on a l'inégalité suivante :
(1) Pour tout $\varepsilon > o$ il existe un voisinage ouvert ω de x_0 tel que pour $u \in \mathcal{D}(\omega)$

$$\| u \|^2_{m-1} \leq \varepsilon (\| Pu \|^2_0 + \| P^* u \|^2_0)$$

($\| \ \|_k$ désigne la norme de l'espace de Sobolev H^k et P^* l'adjoint formel de P).

Si $P = X + iY + c$ est effectivement du premier ordre, X ou Y est différent de zéro, donc P est de type principal. En reportant la propriété $\mathfrak{X}(X, Y)$ dans (1), on obtient sans difficulté l'inégalité

$$\| u \|^2_0 \leq \| P^* u \|^2_0$$

pour $u \in \mathcal{D}(\omega)$, doù on déduit que $P\,\mathbf{L}^2(\omega) \supset \mathbf{L}^2(\omega)$ et *a fortiori* $P\,\mathcal{D}'(\omega) \supset \mathcal{D}(\omega)$.

Autre méthode. — Nous donnons ici une autre démonstration de cette réciproque, *dans le cas particulier où* $V = G$, $H = \{ e \}$, de manière à profiter pleinement de l'invariance de P.

La propriété $\mathfrak{X}(X, Y)$ *exprime alors que* X *et* Y *engendrent une sous-algèbre de Lie* $\mathfrak{g}'$ *de* $\mathfrak{g}$ *de dimension* 2 *au plus.* Nous allons construire au

voisinage de l'origine e de G un système de coordonnées qui nous ramène à étudier la résolubilité locale sur un groupe de Lie de dimension 2 au plus, ce qui sera facile à faire directement en explicitant les opérateurs.

D'abord on peut écrire

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{g}',$$

où $\mathfrak{m}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathfrak{g}$. L'application

$$(M, N) \mapsto \exp M . \exp N,$$
$$\mathfrak{m} \times \mathfrak{g}' \to G$$

est alors un difféomorphisme local (d'un voisinage de o dans $\mathfrak{m} \times \mathfrak{g}'$ sur un voisinage de e dans G; *cf.* Helgason [2], lemma II.2.4). $\mathfrak{g}'$ est l'algèbre de Lie d'un sous-groupe de Lie G′ de G, de dimension 2 au plus. Comme l'application exponentielle

$$\mathfrak{g}' \xrightarrow{\exp} G'$$

est un difféomorphisme local, on obtient un difféomorphisme local

$$(M, g') \mapsto \exp M . g',$$
$$\mathfrak{m} \times G' \to G.$$

Si f est une fonction C^∞ sur G, posons

$$\tilde{f}(M, g') = f(\exp M . g').$$

Pour $Z \in \mathfrak{g}'$, on a

$$\begin{aligned} \widetilde{Zf}(M, g') &= Zf(\exp M . g') \\ &= \frac{d}{dt} f(\exp M . g' . \exp tZ) \,|_{t=0} \\ &= \frac{d}{dt} \tilde{f}(M, g' . \exp tZ) \,|_{t=0}, \end{aligned}$$

soit $\widetilde{Zf}(M, g') = Z\tilde{f}(M, g')$, où Z, au second membre, est considéré comme un opérateur différentiel sur G′.

Par suite, il suffit d'étudier la résolubilité locale d'un opérateur invariant à gauche du premier ordre sur G′, groupe de dimension ≤ 2. Pour ceux de ces groupes qui sont abéliens, ces opérateurs se ramènent à des opérateurs différentiels à coefficients constants sur $\mathbf{R}^k$, $k \leq 2$. Le seul non abélien parmi ces groupes peut être identifié, au voisinage de l'élément neutre, au groupe des matrices.

$$\begin{pmatrix} e^t & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et tout opérateur invariant à gauche du premier ordre est de la forme

$$a\frac{\partial}{\partial t} + b\,e^t\frac{\partial}{\partial x} + c,$$

avec des constantes complexes a, b, c — qui se ramène immédiatement aux coefficients constants. Grâce aux propriétés connues des opérateurs à coefficients constants sur $\mathbf{R}^k$ (Hörmander [3], chap. III), on obtient la propriété suivante : il existe un voisinage ouvert ω de e dans G tel que $P\,\mathcal{D}'(\omega) = \mathcal{D}'(\omega)$, qui entraîne la résolubilité locale de P.

Si $G = \mathbf{R}^n$, $H = \{e\}$, tout opérateur invariant est localement résoluble : cela vient simplement de ce qu'il est à coefficients constants, donc possède une solution élémentaire. Nous voulons maintenant caractériser les groupes de Lie tels que tout opérateur invariant d'ordre un soit localement résoluble.

PROPOSITION 2. — *Pour que tout opérateur invariant du premier ordre sur* V *soit localement résoluble, il faut et il suffit que l'algèbre de Lie* $D_1(V)$ *soit abélienne ou isomorphe à l'une des algèbres* $\mathfrak{a}_n$ *suivantes* ($n = 2, 3, 4, \ldots$) :

$\mathfrak{a}_n$ *est l'algèbre des matrices réelles* $n \times n$ *dont toutes les lignes sont nulles sauf la première.*

$D_1(V)$ doit donc admettre un idéal abélien de codimension un au plus.

Démonstration. — Supposons que

$$\forall X, Y \in D_1(V), \quad \mathfrak{R}(X, Y).$$

Soit $X_1, \ldots, X_n$ une base de $D_1(V)$. Nécessairement il existe des $\lambda_{ij}, \mu_{ij} \in \mathbf{R}$ tels que

$$[X_i, X_j] = \lambda_{ij}X_i + \mu_{ij}X_j, \qquad 1 \leq i, j \leq n.$$

On a immédiatement $\lambda_{ij} = -\mu_{ji}$, $1 \leq i, j \leq n$, d'où

$$[X_i, X_j] = \lambda_{ij}X_i - \lambda_{ji}X_j.$$

Puis

$$[X_i, X_j + X_k] = (\lambda_{ij} + \lambda_{ik})\,X_i - \lambda_{ji}X_j - \lambda_{ki}X_k$$

doit s'écrire aussi $\alpha X_i + \beta(X_j + X_k)$; par suite,

$$\lambda_{ji} = \lambda_{ki} \qquad \text{pour} \quad 1 \leq i, j, k \leq n.$$

Donc λ_{ij} ne dépend que du deuxième indice; écrivons le λ_j. Il vient

$$[X_i, X_j] = \lambda_j X_i - \lambda_i X_j, \qquad 1 \leq i, \quad j \leq n. \tag{2}$$

Réciproquement les relations (2) entraînent

$$\forall X, Y \in D_1(V), \quad \mathcal{R}(X, Y).$$

— Si tous les λ_i sont nuls, on obtient l'algèbre de Lie abélienne de dimension n.

— Si l'un des λ_i n'est pas nul, λ_1 par exemple, on obtient une algèbre de Lie résoluble non nilpotente. En prenant pour nouvelle base

$$X'_1 = -\frac{1}{\lambda_1} X_1,$$
$$X'_i = \lambda_i X_1 - \lambda_1 X_i, \qquad 1 < i \leq n,$$

les relations (2) se réduisent à

$$[X'_1, X'_i] = X'_i, \qquad 1 < i \leq n,$$
$$[X'_i, X'_j] = 0, \qquad 1 < i, j \leq n.$$

On obtient l'algèbre $\mathfrak{a}_n$.

COROLLAIRE. — *Les seuls groupes de Lie connexes tels que tout opérateur invariant à gauche d'ordre un soit localement résoluble sont* (à un isomorphisme près)

— *les* $\mathbf{R}^p \times \mathbf{T}^q$, p, q *entiers* ≥ 0;

— *les groupes* A_n *suivants* : $n = 2, 3, 4, \ldots$,

$$A_n = \left\{ \begin{bmatrix} e^t & x_1 & \cdots & x_{n-1} \\ 0 & 1 & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \end{bmatrix}, \text{ avec } (t, x_1, \ldots, x_{n-1}) \in \mathbf{R}^n \right\}$$

($\mathbf{T}^q$ désigne le tore de dimension q).

Démonstration. — D'après la proposition 2, l'algèbre de Lie du groupe cherché G est abélienne ou isomorphe à celle d'un A_n.

Par suite, le revêtement universel de G est un $\mathbf{R}^n$ ou un A_n (A_n est simplement connexe, car difféomorphe à $\mathbf{R}^n$), et G lui-même est quotient de l'un de ces groupes par un sous-groupe invariant discret.

Les sous-groupes discrets de $\mathbf{R}^n$ sont isomorphes aux $\mathbf{Z}^p$ ($p \leq n$), d'où la conclusion dans le cas abélien. Il reste à montrer que les A_n n'ont pas de sous-groupe invariant discret non trivial. Avec des notations évidentes, la loi du groupe A_n s'écrit $(t, x)(t', x') = (t + t', x + e^t x')$. Soit Γ un sous-groupe invariant de A_n, et $(\tau, \xi) \in \Gamma$. Alors pour tous t, x,

$$(t, e^t x)^{-1} (\tau, \xi) (t, e^t x) = (\tau, e^{-t}\xi + x(e^\tau - 1))$$

appartient aussi à Γ. Si ξ et $e^{\tau} - 1$ ne sont pas tous deux nuls, il existe donc une suite de points de Γ distincts de (τ, ξ) et convergeant vers (τ, ξ), par suite Γ ne peut être discret. Donc le seul sous-groupe invariant discret de A_n est $\Gamma = \{(0, 0)\}$.

C. Q. F. D.

Sur ces groupes, on peut abandonner la restriction au premier ordre :

Proposition 3. — *Sur les groupes décrits dans le corollaire précédent, tout opérateur invariant à gauche de type principal est localement résoluble.*

Démonstration. — Le seul cas à traiter est celui des groupes A_n. Les opérateurs

$$e^t \frac{\partial}{\partial x_1}, \quad \ldots, \quad e^t \frac{\partial}{\partial x_{n-1}}, \quad \frac{\partial}{\partial t}$$

forment une base de $D_1(A_n)$. Un opérateur invariant à gauche d'ordre m sur A_n est donc un polynôme en $e^t \frac{\partial}{\partial x}$ et $\frac{\partial}{\partial t}$. Sa partie principale s'écrit

$$P_m = \sum_{0 \leq \alpha \leq m} e^{\alpha t} \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^{m-\alpha} Q_\alpha \left(\frac{\partial}{\partial x}\right),$$

où Q_α est un polynôme de $n - 1$ variables, homogène de degré α, à coefficients complexes. On en déduit pour le commutateur $[P, P^*]$ l'expression

$$[P, P^*] = R^* P + R P^* + \text{termes d'ordre} \leq 2m - 2,$$

avec

$$R = -m \sum_{0 \leq \alpha < m} \alpha\, e^{\alpha t} \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^{m-1-\alpha} Q_\alpha \left(\frac{\partial}{\partial x}\right).$$

La fin de la démonstration est classique (*cf.* Trèves [5], chap. III). En reportant cette expression dans l'inégalité (1), valable pour un opérateur de type principal, on en déduit qu'il existe un voisinage ouvert ω de l'élément neutre tel que

$$\| u \|^2_{m-1} \leq \| P^* u \|^2_0$$

pour $u \in \mathcal{D}(\omega)$. Par suite, $P\, \mathbf{L}^2(\omega) \supset H^{1-m}(\omega)$ et *a fortiori*

$$P\, \mathcal{D}'(\omega) \supset \mathcal{D}(\omega).$$

Nous étudions maintenant, d'un point de vue algébrique, quelques cas où la propriété $\mathfrak{P}(X, Y)$ de la proposition 1 équivaut à $[X, Y] = 0$, c'est-à-dire *où la résolubilité locale de* $X + iY + c$ *exige que* X *et* Y *commutent.* Il y a donc dans ces cas « peu » d'opérateurs localement résolubles. Dans la suite, nous utiliserons souvent la notation $Z = [X, Y]$.

PROPOSITION 4. — *Si* X *et* Y *sont des élément nilpotents de l'algèbre de Lie* $D_1(V)$, *alors* $\mathcal{R}(X, Y)$ *équivaut à* $[X, Y] = 0$.

Démonstration. — Si $Z = \alpha X + \beta Y$, on a $[Z, Y] = \alpha Z$ et $[Z, X] = -\beta Z$. Si $Z \neq 0$, $-\alpha$ et β sont valeurs propres des endomorphismes nilpotents $\mathrm{ad}X$ et $\mathrm{ad}Y$, d'où $\alpha = \beta = 0$, ce qui contredit l'hypothèse.

COROLLAIRE. — *Soient* G *un groupe nilpotent, et* $X, Y \in \mathfrak{g}$. *Alors* $\mathcal{R}(X, Y)$ *équivaut à* $[X, Y] = 0$.

On voit ainsi une fois de plus que le célèbre opérateur de Hans Lévy

$$L = \frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y} - 2i(x + iy)\frac{\partial}{\partial z}$$

n'est pas localement résoluble, puisque cet opérateur est invariant à gauche sur le groupe de Lie nilpotent des matrices

$$\begin{bmatrix} 1 & x & \frac{xy}{2} - \frac{z}{4} \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

et que $[\mathrm{Re}L, \mathrm{Im}L] = -4\frac{\partial}{\partial z} \neq 0$.

PROPOSITION 5. — *Soient* B *la forme de Killing de l'algèbre* $D_1(V)$, *et* $X, Y \in D_1(V)$. $\mathcal{R}(X, Y)$ *entraîne* $B(Z, Z) = 0$.

Démonstration. — On a

$$B(X, Z) = B(X, [X, Y]) = B([X, X], Y) = 0,$$

de même, $B(Y, Z) = 0$, donc

$$B(Z, Z) = \alpha B(X, Z) + \beta B(Y, Z) = 0.$$

COROLLAIRE. — *Soient* G *un groupe de Lie semi-simple compact, et* $X, Y \in \mathfrak{g}$. *Alors* $\mathcal{R}(X, Y)$ *équivaut à* $[X, Y] = 0$.

En effet, la forme de Killing est alors définie négative.

Par exemple, considérons une base X_1, X_2, X_3 de l'algèbre de Lie du groupe SU (2) telle que $[X_j, X_k] = X_l$, pour (j, k, l) permutation circulaire de (1, 2, 3). Soient

$$X = \sum \alpha_j X_j \quad \text{et} \quad Y = \sum b_j X_j \quad (j = 1, 2, 3).$$

La résolubilité locale de l'opérateur $P = X + iY + c$ équivaut à $[X, Y] = 0$, c'est-à-dire $a_j b_k - a_k b_j = 0$ $(j, k = 1, 2, 3)$. Donc P est localement résoluble si et seulement s'il est proportionnel à un opérateur à partie principale réelle; ceci justifie un résultat annoncé dans Cerezo et Rouvière ([1], § 4).

Nous donnons enfin (propos. 6 et 7) une généralisation de la proposition 5 et de son corollaire.

PROPOSITION 6. — *Soient* $X, Y \in D_1(V)$. $\mathfrak{L}(X, Y)$ *entraîne que* $[X, Y]$ *est un élément nilpotent de* $D_1(V)$.

Démonstration. — On a $\operatorname{ad} Z = \alpha \operatorname{ad} X + \beta \operatorname{ad} Y$.

Si $\alpha = \beta = 0$, le résultat est évident.

Si $\alpha \neq 0$, par exemple, on a $\alpha \operatorname{ad} Z = [\operatorname{ad} Z, \operatorname{ad} Y]$, d'où

$$\alpha (\operatorname{ad} Z)^p = [\operatorname{ad} Z, (\operatorname{ad} Z)^{p-1} \operatorname{ad} Y], \qquad p \geq 1.$$

Par suite, $\operatorname{tr}((\operatorname{ad} Z)^p) = 0$ pour $p \geq 1$ et $\operatorname{ad} Z$ a toutes ses valeurs propres nulles, donc est nilpotent.

DÉFINITION. — *Soient* $\mathfrak{a}$ *une algèbre de Lie réelle et* $X \in \mathfrak{a}$. *Nous dirons que* X *est un vecteur compact de* $\mathfrak{a}$ *si* X *est contenu dans une sous-algèbre de* $\mathfrak{a}$ *compactement plongée dans* $\mathfrak{a}$. (*cf.* Helgason [2], chap. II; § 5).

C'est dire que l'ensemble $\{ e^{t \operatorname{ad} X}, t \in \mathbf{R} \}$ est relativement compact dans le groupe linéaire $GL(\mathfrak{a})$.

Remarque. — Cela revient encore à dire qu'il existe un groupe de Lie A, d'algèbre de Lie $\mathfrak{a}$, tel que le sous-groupe à un paramètre engendré par X dans A soit relativement compact dans A [d'après la relation $\operatorname{Ad}(\exp tX) = e^{t \operatorname{ad} X}$]. Mais si $\mathfrak{a}$ est donnée comme algèbre de Lie d'un groupe A′, ce n'est pas nécessairement dans A′ lui-même que cette propriété sera vérifiée : par exemple, tout vecteur de $\mathbf{R}^n$ est compact.

PROPOSITION 7. — *Soient* $X, Y \in D_1(V)$. *Supposons qu'il existe dans l'algèbre de Lie (réelle) engendrée par* X *et* Y *un vecteur non nul compact dans* $D_1(V)$. *Alors* $\mathfrak{L}(X, Y)$ *équivaut à* $[X, Y] = 0$.

Démonstration. — Si $\mathfrak{L}(X, Y)$ est vérifiée, on a $Z = [X, Y] = \alpha X + \beta Y$, et la sous-algèbre engendrée par X et Y se réduit au sous-espace engendré par X et Y. Soit donc $T = \lambda X + \mu Y$ un vecteur compact non nul. Supposons $Z \neq 0$.

Comme T est compact, $\operatorname{ad} T$ a toutes ses valeurs propres imaginaires pures; or

$$\operatorname{ad} T(Z) = (\lambda\beta - \mu\alpha) Z, \qquad \text{donc} \quad \lambda\beta - \mu\alpha = 0.$$

Par suite, $T = \gamma Z$, où γ est un nombre réel non nul. Donc Z lui-même est compact. Comme il est aussi nilpotent (propos. 6), on a $\operatorname{ad} Z = 0$.

De $\operatorname{ad} Z(X) = -\beta Z$ et $\operatorname{ad} Z(Y) = \alpha Z$, on déduit alors que $\alpha = \beta = 0$, ce qui contredit l'hypothèse $Z \neq 0$.

COROLLAIRE. — *Soient* G *un groupe de Lie compact, et* $X, Y \in \mathfrak{g}$. *Alors* $\mathfrak{R}(X, Y)$ *équivaut à* $[X, Y] = 0$.

C'est immédiat d'après la remarque suivant la définition.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] A. CEREZO et F. ROUVIÈRE, *Solution élémentaire d'un opérateur différentiel linéaire invariant à gauche sur un groupe de Lie réel compact et sur un espace homogène réductif compact* (*Ann. Scient. Éc. Norm. Sup.*, t. 2, 1969, p. 561 à 581).

[2] HELGASON, *Differential geometry and symmetric spaces*, Academic Press, 1962.

[3] HÖRMANDER, *Linear partial differential operators*, Springer-Verlag, 1963.

[4] L. NIRENBERG and F. TRÈVES, *Solvability of a first order linear partial differentia equation* (*Comm. Pure Appl. Math.*, 1963).

[5] F. TRÈVES, *Cours sur les équations aux dérivées partielles linéaires*, Secrétariat Mathématique de l'E. N. S., 1967.

(Manuscrit reçu le 17 novembre 1970.)

André CEREZO,
Département de Mathématiques,
Faculté des Sciences,
Parc Valrose, 06-Nice;

Francois ROUVIÈRE
6, square du Croisic,
75-Paris, 15e